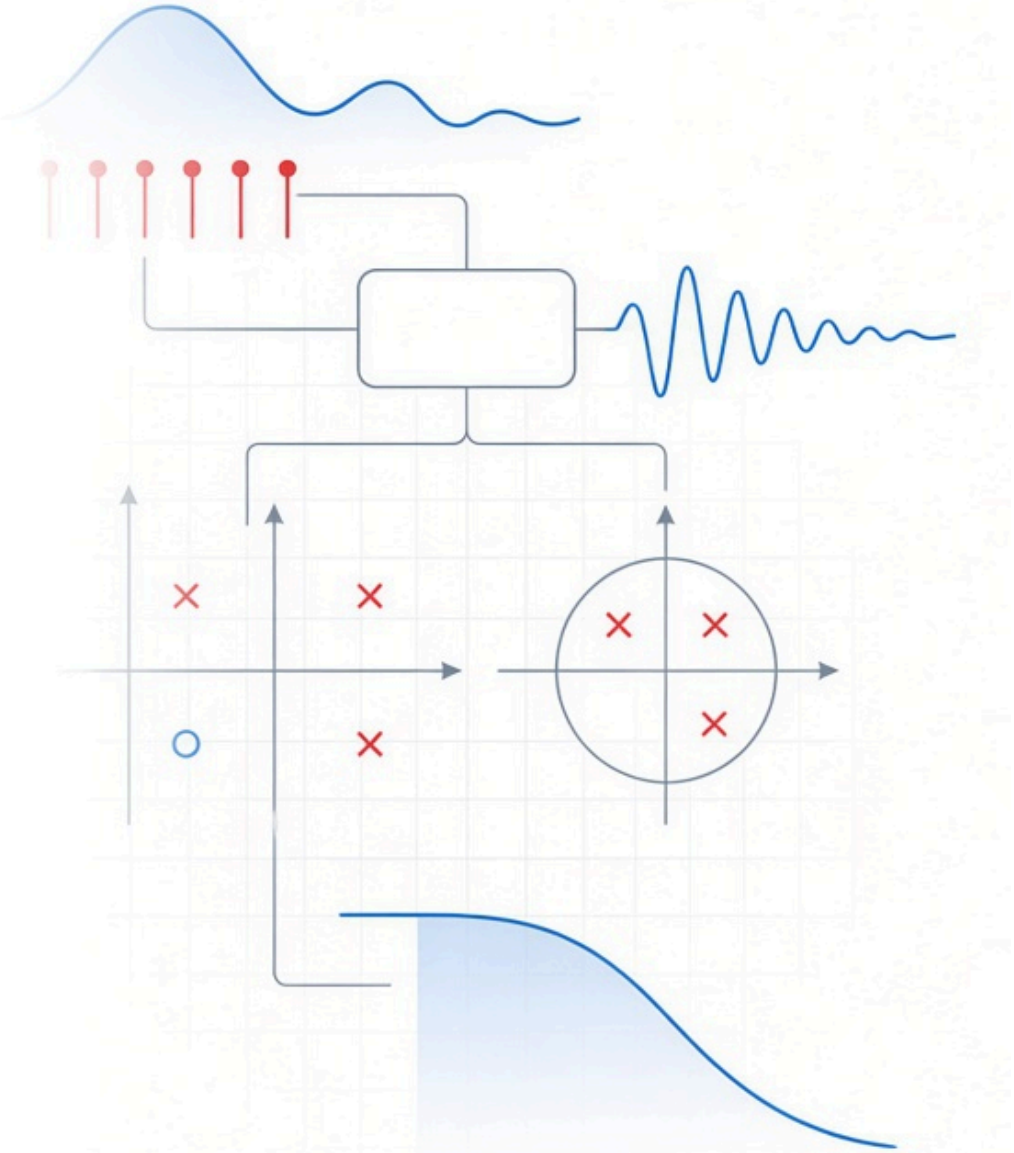
VNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Señales y Sistemas Lineales

Tema 7 · Transformada Z

Grado en Ingeniería Electrónica de Telecomunicación (GIET)
Curso 2026/2027



Ricardo Sanz Díaz
ricardo.sanz@uv.es

Departament d'Enginyeria Electrònica
Escola Tècnica Superior d'Enginyeria
Despatx 2.2.14

Contenidos

1. La transformada Z
2. Ecuaciones en diferencias
3. Función de transferencia y diagramas de bloques
4. Implementación en forma directa

Prerrequisitos

- Temas 2, 4 y 5
- Números complejos (módulo y argumento)
- Fracciones simples y método de tapar (Tema 5)

La transformada Z

La transformada Z **convierte** una **secuencia** del **dominio del tiempo**, $x[n]$, en una función de **variable compleja**, $X(z)$:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, z^{-n} = x[0] + x[1]\, z^{-1} + x[2]\, z^{-2} + \cdots$$

Igual que la de Laplace, es **unilateral**: empieza en $n = 0$, y lo anterior entra como **condiciones iniciales**.

> 📣 **La variable z**
>
> En el Tema 4, el **polinomio característico** de una ecuación en diferencias se escribía con z. No es casualidad: es la misma z.

> 📣 **El significado de z^{-1}**
>
> Cada muestra queda marcada con la potencia de z^{-1} de su posición: **multiplicar por z^{-1} es retrasar una muestra**.

Laplace y Z: la misma idea

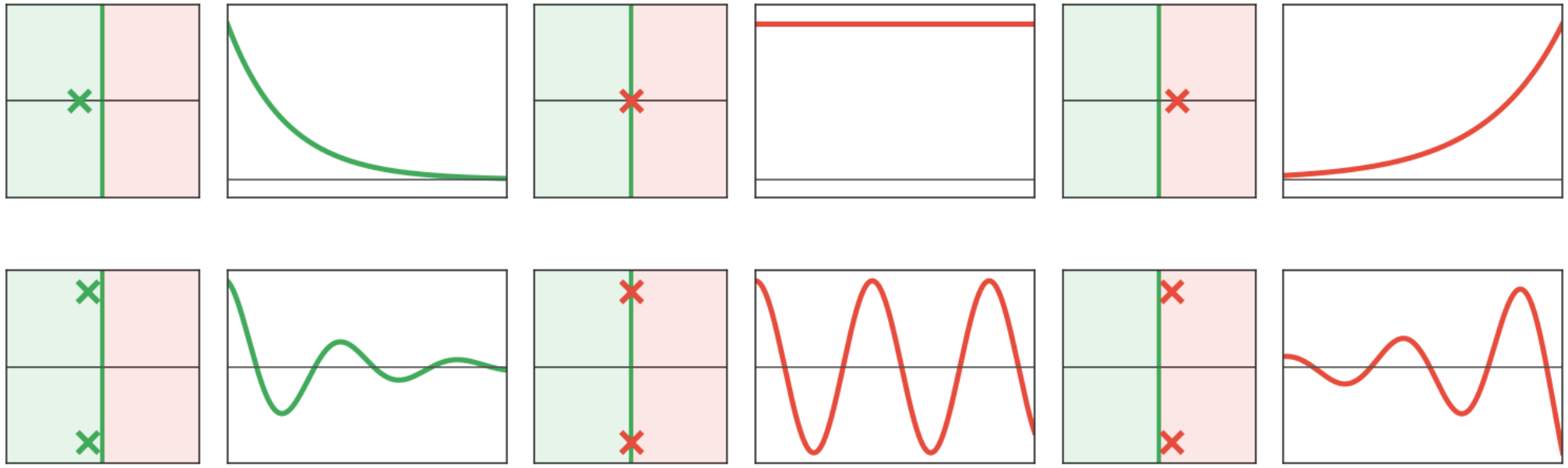
Todo lo que sabemos de Laplace **se traslada** a la transformada Z (con diferencias importantes):

	Laplace (continuo)	**Z (discreto)**
Transformada	$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$	$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$
Lo que se vuelve álgebra	derivar: un factor s	retrasar: un factor z^{-1}
Convolución	producto, $X(s)\, H(s)$	producto, $X(z)\, H(z)$
Función de transferencia	$H(s) = Y(s)/X(s)$	$H(z) = Y(z)/X(z)$
Modo de un polo	e^{st}	$z^{\,n}$
Estable si todos los polos cumplen	$\mathrm{Re}\{s\} < 0$	$\lvert z\rvert < 1$
Respuesta en frecuencia	en el eje imaginario, $s = j\omega$	en el círculo unidad, $z = e^{j\Omega}$

Polos y modos en continuo (recordatorio)

Cada polo s aporta un modo $e^{s\,t}$

- La condición de estabilidad es $\Re\{s\} < 0$



Polos y modos en discreto

Cada polo z aporta un modo z^n

- La condición de estabilidad es $|z| < 1$

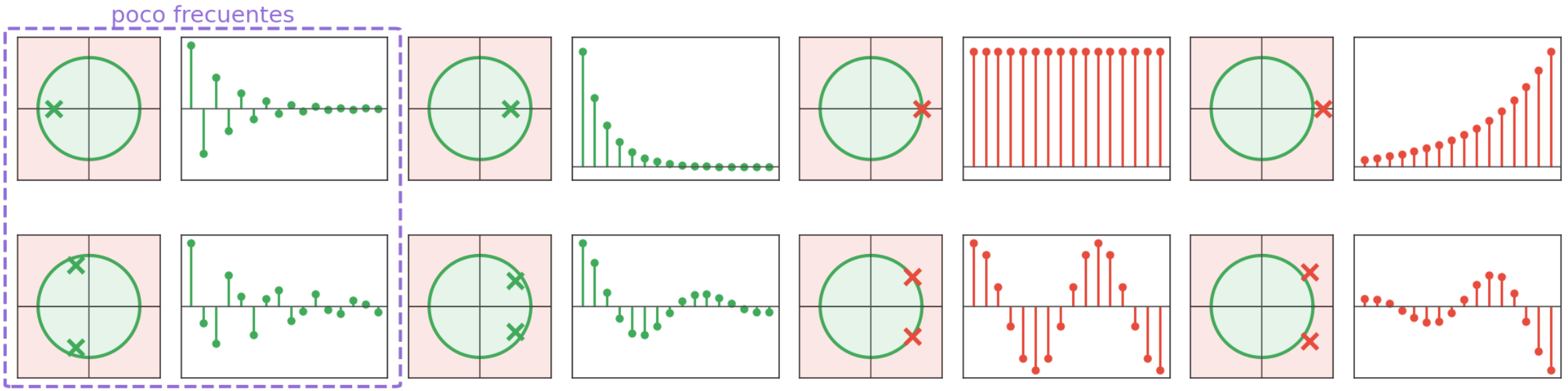


Tabla de transformadas y propiedades

Trabajaremos siempre con las tablas de transformadas y propiedades:

$x[n]$	$X(z)$
$\delta[n]$	1
$\delta[n-k],\, k \geq 0$	z^{-k}
$u[n]$	$\frac{z}{z-1}$
$n\,u[n]$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$a^n\,u[n]$	$\frac{z}{z-a}$
$n\,a^n\,u[n]$	$\frac{a\,z}{(z-a)^2}$
$r^n\cos(\Omega_0 n)\,u[n]$	$\frac{z\,(z-r\cos\Omega_0)}{z^2-2r\cos\Omega_0\,z+r^2}$
$r^n\sin(\Omega_0 n)\,u[n]$	$\frac{r\sin\Omega_0\,z}{z^2-2r\cos\Omega_0\,z+r^2}$

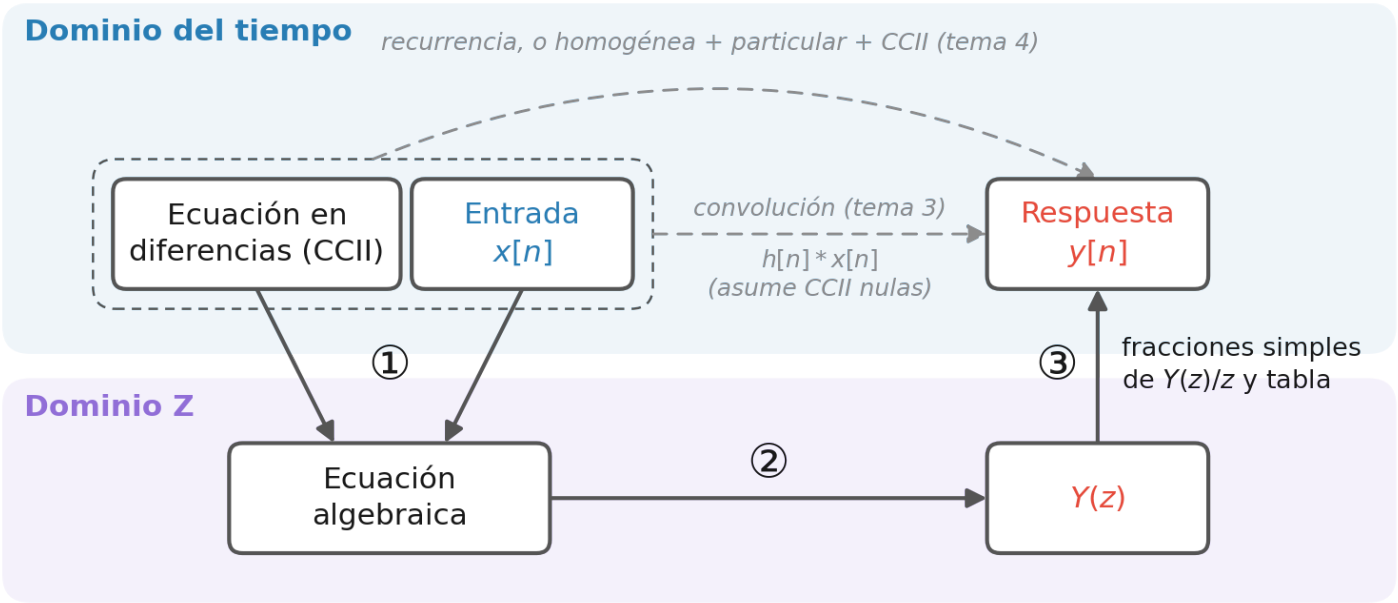
Propiedad	$x[n]$	$X(z)$
Linealidad	$\alpha\,x_1[n]+\beta\,x_2[n]$	$\alpha\,X_1(z)+\beta\,X_2(z)$
Retardo	$x[n-k]$	$z^{-k}\,X(z)$
1ª Diferencia	$y[n-1]$	$z^{-1}\,Y(z)+y[-1]$
2ª Diferencia	$y[n-2]$	$z^{-2}\,Y(z)+z^{-1}\,y[-1]+y[-2]$
Convolución	$x[n]*h[n]$	$X(z)\,H(z)$
Escalado	$a^n\,x[n]$	$X(z/a)$

> **Nota**
>
> Fíjate que las transformadas llevan una z en el numerador y que las diferencias se calculan diferente (derivadas en Laplace)

El método

Procedimiento casi idéntico a lo que hacíamos con Laplace en continuo

1. **Transformar** la ecuación término a término, con sus condiciones iniciales, y la entrada
2. **Despejar** $Y(z)$
3. **Volver al tiempo**: fracciones simples de $Y(z)/z$, multiplicar por z y aplicar la tabla



Fracciones simples

Una diferencia imporante respecto a Laplace es que calcularemos la descomposición no de $Y(z)$ sino de $Y(z)/z$:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{N(z)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)}$$

- Fíjate que ahora los **modos** no son exponenciales, sino **potencias**
- El **método de tapado** aquí sirve para los reales y **también para polos complejos**
  - Es más, en el caso complejo, basta con calcular uno de los dos coeficientes, y el otro es su conjugado

Tipo de polos	**Polos**	**Fracciones de $Y(z)/z$**	**Términos de $y[n]$**	**Resolución**
i) Reales distintos	$p_1 \neq p_2$	$\frac{A_1}{z-p_1} + \frac{A_2}{z-p_2}$	$A_1\, p_1^n + A_2\, p_2^n$	Tapado
ii) Real doble	$p_{1,2} = p$	$\frac{A_1}{z-p} + \frac{A_2}{(z-p)^2}$	$\left(A_1 + \frac{A_2}{p}\, n\right) p^n$	Igualación
iii) Complejos	$p_{1,2} = r\, e^{\pm j\Omega_0}$	$\frac{A_1}{z-p_1} + \frac{A_1^*}{z-p_2}$	$2\lvert A_1\rvert\, r^n \cos(\Omega_0 n + \angle A_1)$	Tapado (basta con A_1)

VNIVERSITAT DE VALÈNCIA Escola Tècnica Superior d'Enginyeria (ETSE-UV)

Caso i: polos reales distintos

Ejemplo 7.1: Polos reales distintos

Calcula la transformada inversa de $Y(z) = \dfrac{6z^2 + 2z}{2z^2 - 2}$

▼ Solución

1) Dividir entre z, simplificar y factorizar: el denominador, $z^2 - 1 = 0$, da lugar a los polos $p_1 = 1$ y $p_2 = -1$:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{3z+1}{z^2-1} = \frac{3z+1}{(z-1)(z+1)} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z+1}$$

2) A_1, el del polo $z = 1$: se tapa el factor $(z-1)$

$$A_1 = \left.\frac{3z+1}{\cancel{(z-1)}\,(z+1)}\right|_{z=1} = \frac{4}{2} = 2$$

3) A_2, el del polo $z = -1$: se tapa el factor $(z+1)$

$$A_2 = \left.\frac{3z+1}{(z-1)\,\cancel{(z+1)}}\right|_{z=-1} = \frac{-2}{-2} = 1$$

4) Multiplicar por z y tabla:

$$Y(z) = \frac{2\,z}{z-1} + \frac{z}{z+1} \implies y[n] = \left(2 + (-1)^n\right) u[n]$$

Caso ii: polos reales iguales

Ejemplo 7.2: Polos reales iguales

Calcula la transformada inversa de $Y(z) = \dfrac{6z^2 - 4z}{2z^2 - 8z + 8}$

Solución

1) Dividir entre z, simplificar y factorizar: el denominador, $z^2 - 4z + 4 = 0$, da lugar al polo doble $p_1 = p_2 = 2$:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{3z - 2}{z^2 - 4z + 4} = \frac{3z - 2}{(z-2)^2} = \frac{A_1}{z-2} + \frac{A_2}{(z-2)^2}$$

2) Multiplicar por $(z-2)^2$ y **agrupar**:

$$3\,z - 2 = A_1\,(z-2) + A_2 = A_1\,z + (A_2 - 2A_1)$$

3) Igualar los coeficientes de z y los términos independientes:

$$\begin{cases} A_1 = 3 \\ A_2 - 2A_1 = -2 \end{cases} \implies A_1 = 3, \quad A_2 = 4$$

4) Multiplicar por z y tabla (con $a = 2$ en la de $n\,a^n\,u[n]$):

$$Y(z) = \frac{3\,z}{z-2} + 2\,\frac{2\,z}{(z-2)^2} \implies y[n] = (3 + 2n)\,2^n\,u[n]$$

Caso iii: polos complejos conjugados

Ejemplo 7.3: Polos complejos conjugados

Calcula la transformada inversa de $Y(z) = \dfrac{6z^2}{3z^2 - 6z + 6}$

▼ Solución

1) Dividir entre z, simplificar y factorizar: el denominador, $z^2 - 2z + 2 = 0$, da lugar a los polos $p_{1,2} = 1 \pm j = \sqrt{2}\, e^{\pm j\pi/4}$:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2z}{z^2 - 2z + 2} = \frac{2z}{(z - p_1)(z - p_2)} = \frac{A_1}{z - p_1} + \frac{A_2}{z - p_2}$$

2) A_1, el del polo p_1: se tapa el factor $(z - p_1)$, con $p_1 - p_2 = 2j$

$$A_1 = \left.\frac{2z}{\cancel{(z - p_1)}\,(z - p_2)}\right|_{z=p_1} = \frac{2\,(1 + j)}{2j} = 1 - j$$

3) Módulo y fase de A_1 (el otro coeficiente es su conjugado, $A_2 = A_1^*$):

$$|A_1| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \qquad \angle A_1 = -\arctan 1 = -\frac{\pi}{4}$$

4) Multiplicar por z y tabla:

$$Y(z) = \frac{A_1\, z}{z - p_1} + \frac{A_2\, z}{z - p_2} \implies y[n] = 2\sqrt{2}\,\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\!\left(\tfrac{\pi}{4}\, n - \tfrac{\pi}{4}\right) u[n]$$

Ejemplo: la cuenta de ahorro del Tema 4, con Z

Ejemplo 7.4: Cuenta de ahorro con interés

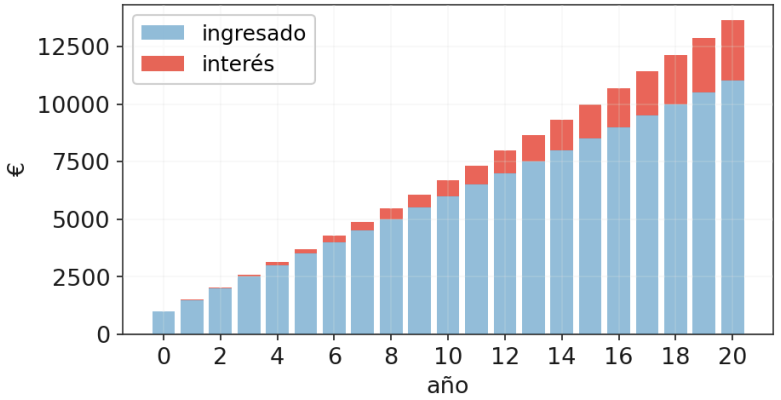
Es la cuenta del Tema 4: da un $2\,\%$ anual, se abre con 1000 € y cada año se ingresan 500 € más. El saldo de la apertura es la **condición inicial**, $y[-1] = 1000$, e $y[n]$ es el saldo $n+1$ años después:

$$y[n] = 1{,}02\, y[n-1] + 500\, u[n]$$

a) Transforma la ecuación y despeja $Y(z)$.

b) Calcula $y[n]$. ¿Cuál es el saldo a los 20 años?

c) Compárala con la solución del Tema 4.



▶ 💡 Solución a)

▶ 💡 Solución b)

▶ 💡 Solución c)

Ejemplo: el motor del Tema 4, con Z

📐 Ejemplo 7.5: Control digital de velocidad de un motor DC

Es el motor del Tema 4: la velocidad $y[n]$ (rpm) se lee cada 5 ms, y el bucle de control da

$$y[n] = y[n-1] - 0{,}5\,y[n-2] + 0{,}5\,x[n-2]$$

El motor está parado, $y[-1] = y[-2] = 0$, y en $n = 0$ se piden 150 rpm: $x[n] = 150\,u[n]$.

a) Calcula la función de transferencia $H(z) = Y(z)/X(z)$ y sus polos.

b) Calcula $y[n]$ con la transformada Z.

c) Compárala con la solución del Tema 4.

▶ 💡 Solución a)

▶ 💡 Solución b)

▶ 💡 Solución c)

▶ 📈 Evolución de la velocidad

Ejemplo: un oscilador digital

Ejemplo 7.6: Un oscilador digital para generar un tono

Es el oscilador de la sesión 3 de prácticas de aula: un microcontrolador genera un tono puro para un DAC con la recurrencia

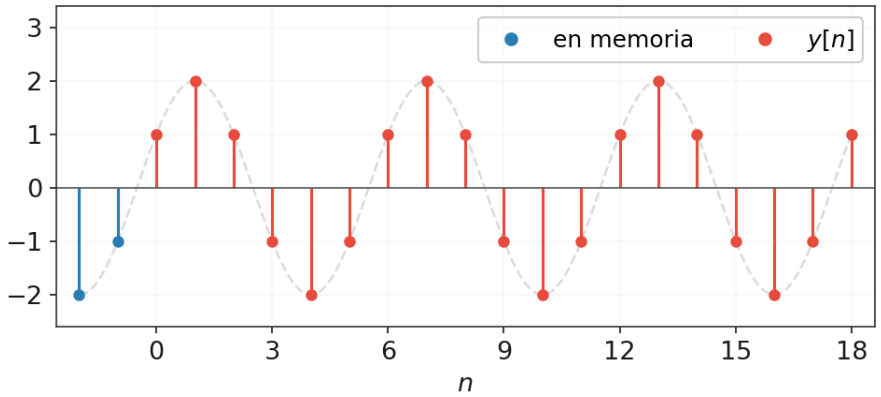
$$y[n] = y[n-1] - y[n-2]$$

que se ejecuta a $f_s = 6$ kHz. No tiene entrada: arranca con los dos valores cargados en memoria, $y[-1] = -1$ e $y[-2] = -2$.

a) Transforma la ecuación y despeja $Y(z)$. ¿Es estable?

b) Calcula $y[n]$ como un coseno con fase.

c) ¿Qué frecuencia (en Hz) y qué amplitud tiene el tono?



▶ 💡 Solución a)

▶ 💡 Solución b)

▶ 💡 Solución c)

▶ 💻 Implementación en un bucle

Función de transferencia $H(z)$

Una ecuación en diferencias en general (asumiendo CCII nulas) tiene la forma:

$$y[n] + a_1\, y[n-1] + \cdots + a_N\, y[n-N] = b_0\, x[n] + b_1\, x[n-1] + \cdots + b_M\, x[n-M]$$

Por tanto su **función de transferencia** es:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1\, z^{-1} + \cdots + b_M\, z^{-M}}{1 + a_1\, z^{-1} + \cdots + a_N\, z^{-N}}$$

En MATLAB

Para calcular la salida de un filtro digital con la función `filter`:

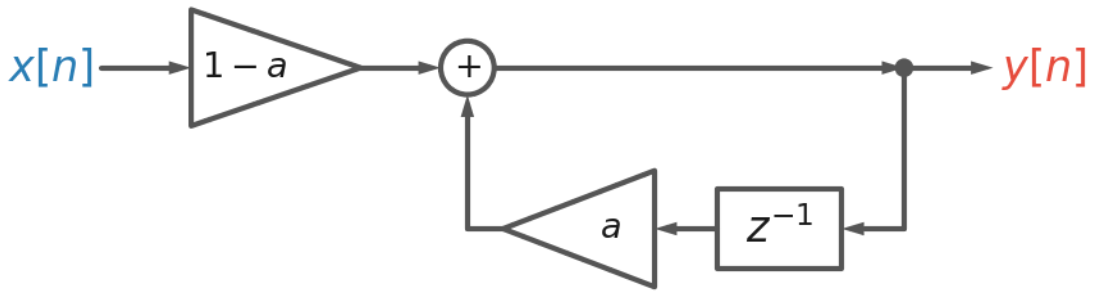
```
x = ...;                % entrada
a = [1, a1, ..., aN];   % denominador
b = [b0, b1, ..., bM];  % numerador
y = filter(b, a, x);    % salida
```

Tipos de implementaciones

Un filtro digital se implementa como un **algoritmo**

- cada retardo z^{-1} es una **posición de memoria** que guarda una muestra anterior.
- por cada retardo, necesitamos **una variable**

- en cada iteración del algoritmo:
  - se **lee** la entrada y los retardos
  - se **multiplica** por los coeficientes
  - se **suma** todo, calculando la salida
  - se **actualizan** todas las variables en memoria



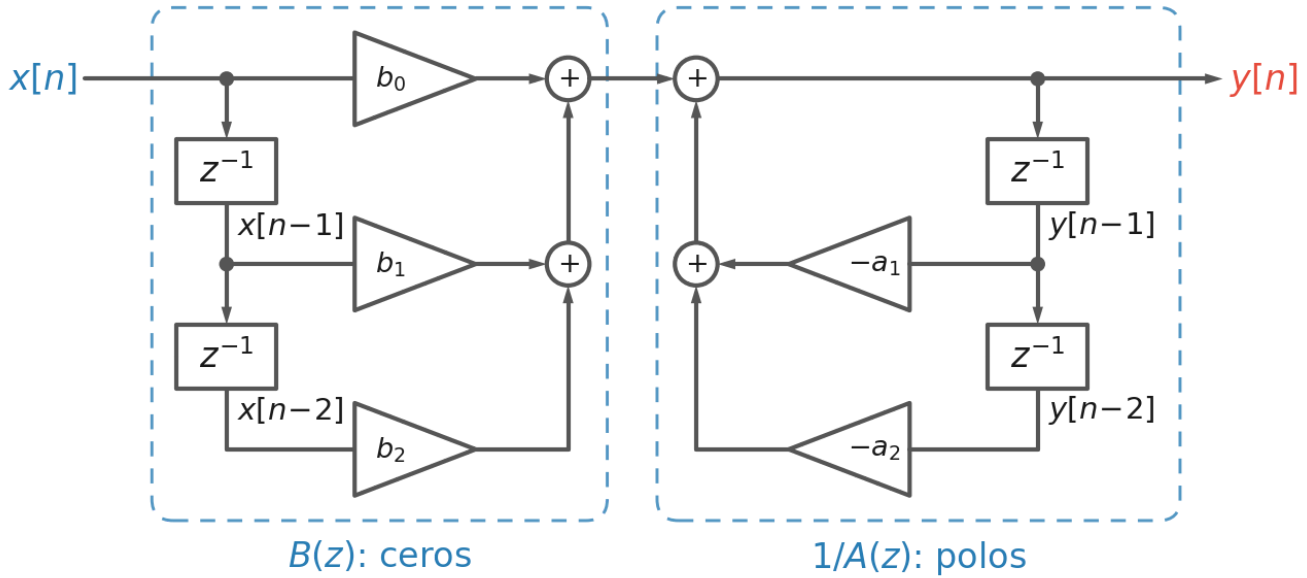
$$y[n] = (1-a)\,x[n] + a\,y[n-1]$$

- vamos a ver dos formas de implementarlo, llamadas **forma directa I** y **forma directa II**.

Forma directa I

En la forma directa I, se calcula por un lado el **numerador** y por otro el **denominador**, y se suman:

$$y[n] = \underbrace{b_0\,x[n] + b_1\,x[n-1] + b_2\,x[n-2]}_{\text{numerador}} - \underbrace{a_1\,y[n-1] + a_2\,y[n-2]}_{\text{denominador}}$$



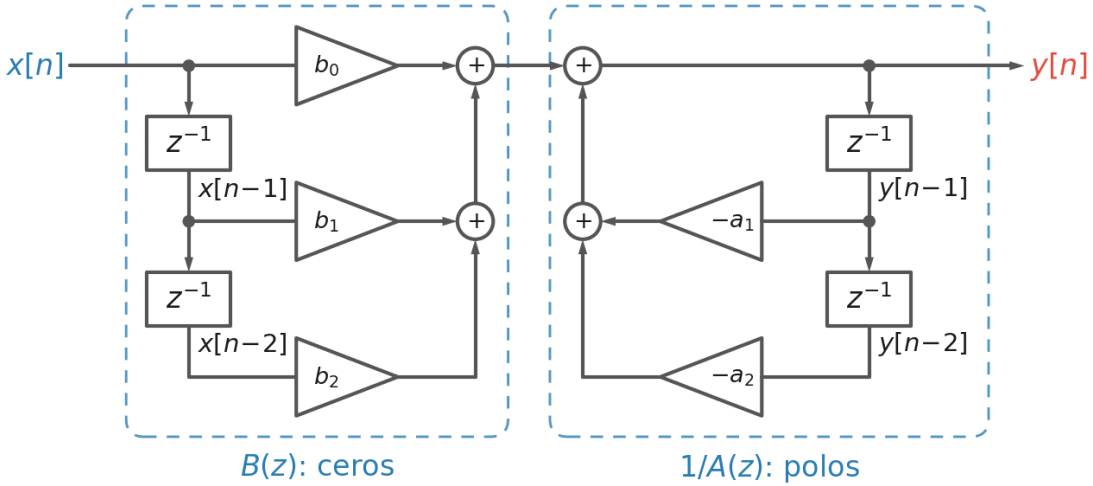
- Su f.d.t sería:

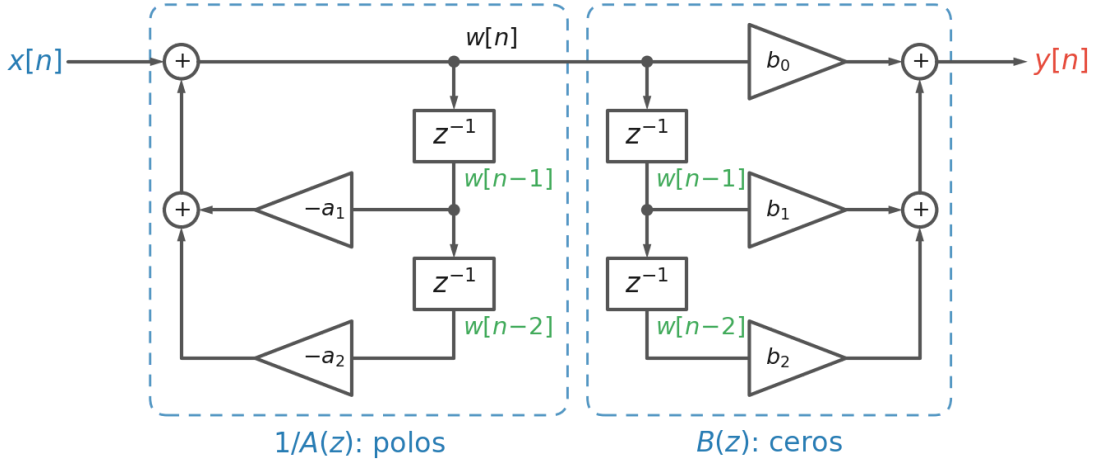
$$H(z) = \frac{b_0 + b_1\,z^{-1} + b_2\,z^{-2}}{1 + a_1\,z^{-1} + a_2\,z^{-2}}$$

- Es muy evidente
- Necesita $M + N$ retardos

De la forma directa I a la II

Los sistemas LTI en cascada **conmutan** (Tema 3), así que podemos darle la vuelta





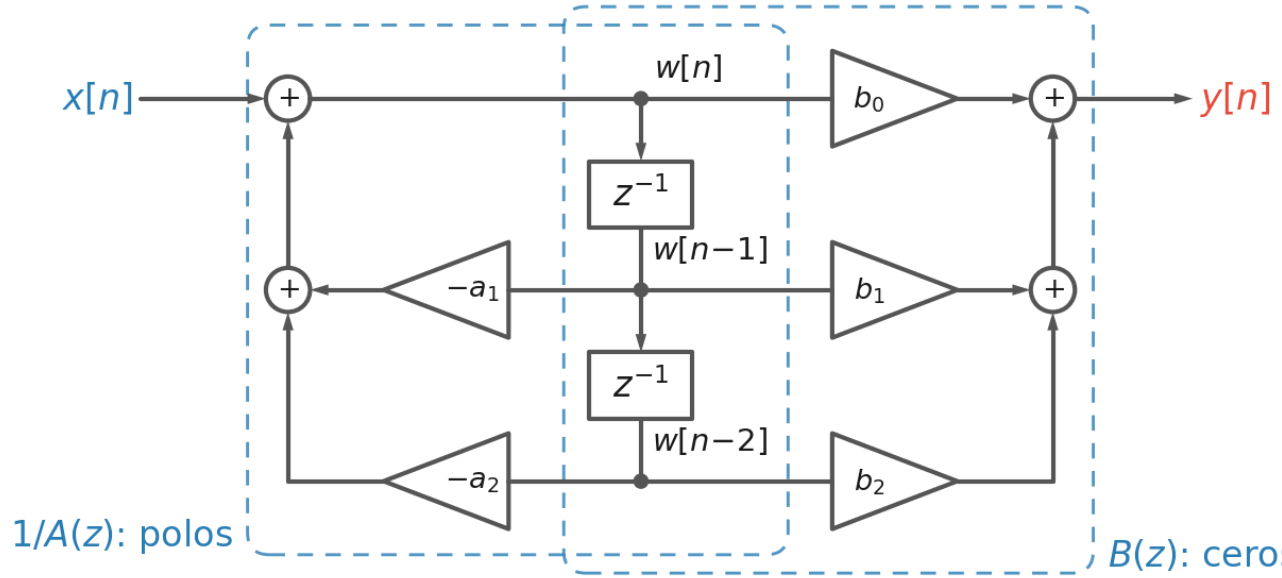
Paso clave

Al intercambiar los bloques, **la línea de retardos es compartida**. Podemos definir una **variable intermedia** $\mathbf{w[n]}$ que guarda la salida del primer bloque, y así **ahorramos retardos**:

Forma directa II

En la forma directa II, se calcula primero el **denominador**, que da la variable intermedia $w[n]$, y con ella el **numerador**:

$$w[n] = x[n] - \underbrace{(a_1\, w[n-1] + a_2\, w[n-2])}_{\text{denominador}} \qquad y[n] = \underbrace{b_0\, w[n] + b_1\, w[n-1] + b_2\, w[n-2]}_{\text{numerador}}$$



- Su f.d.t es **la misma**:

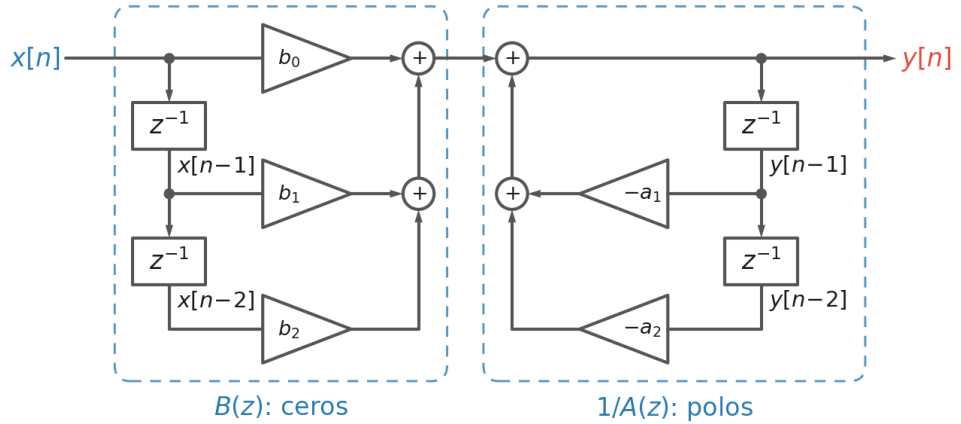
$$H(z) = \frac{b_0 + b_1\, z^{-1} + b_2\, z^{-2}}{1 + a_1\, z^{-1} + a_2\, z^{-2}}$$

- No es tan evidente
- Necesita $\max(M, N)$ retardos
- Más eficiente

Las dos formas en código

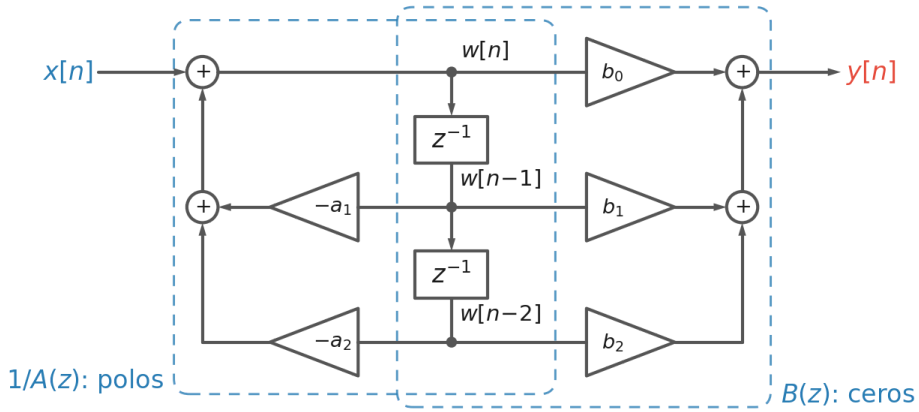
En un microcontrolador, cada retardo es una **variable**, y en cada muestra se ejecuta el cuerpo del bucle:

Forma directa I: cuatro retardos




```
x1 = 0;  x2 = 0;  y1 = 0;  y2 = 0;   % 4 retardos
for n = 1:length(x)
  y(n) = b0*x(n) + b1*x1 + b2*x2 - a1*y1 - a2*y2;
  x2 = x1;  x1 = x(n);      % desplazar
  y2 = y1;  y1 = y(n);
end
```

Forma directa II: dos retardos




```
w1 = 0;  w2 = 0;                          % 2 retardos
for n = 1:length(x)
  w    = x(n) - a1*w1 - a2*w2;
  y(n) = b0*w + b1*w1 + b2*w2;
  w2 = w1;  w1 = w;        % desplazar 2 vairables
end
```

Ejemplo: implementación en forma directa II

Ejemplo 7.7: Dos filtros con el mínimo de retardos

Dibuja en forma directa II, con el mínimo número de retardos:

a) El filtro de rechazo de 50 Hz (lo diseñaremos en el Tema 8):

$$H(z) = 0{,}9\,\frac{z^2+1}{z^2+0{,}81}$$

b) El filtro

$$H(z) = \frac{2z+1}{z^2-0{,}6\,z+0{,}08}$$

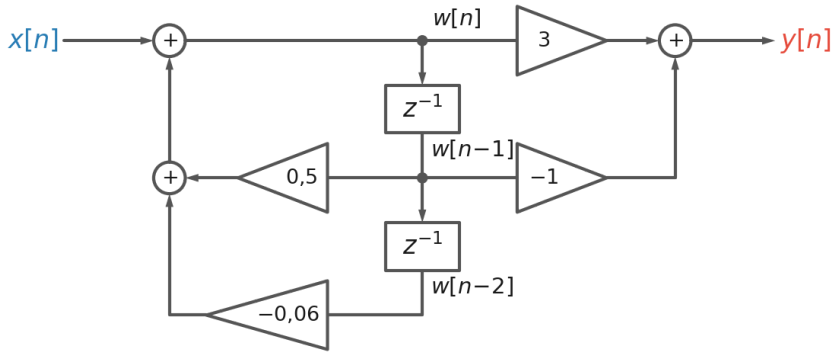
▶ 💡 Solución a)

▶ 💡 Solución b)

Ejemplo: del diagrama a la ecuación

Ejemplo 7.8: Leer un diagrama en forma directa II

Para el filtro de la figura:



a) Escribe las ecuaciones de $w[n]$ y de $y[n]$ que se leen en el diagrama.

b) Calcula su función de transferencia $H(z)$.

c) Escribe la ecuación en diferencias entre $x[n]$ e $y[n]$.

▶ 💡 Solución a)

▶ 💡 Solución b)

▶ 💡 Solución c)

Para terminar

Vaya a wooclap.com

Ingrese el código de evento en el banner superior

Código de evento

IXFKQAF

Esperando a los participantes…