Mathesis **12** (1996) 347-374.
Impreso en México. Derechos reservados © 1996 por UNAM (ISSN 0185-6200)

Kurt Gödel: análisis filosófico y lógica matemática

Fernando Zalamea

Francisco Rodríguez Consuegra 1992. "Gödel's first works, 1929-1936: Mathematics without philosophy?". *Modern Logic* **3**: 58-74. [Review of Kurt Gödel, *Collected Works. Publications 1929-1936.* Volume I].

___________. 1994. "Gödel's last works, 1938-1974: The emerging philosophy". *Modern Logic* **4**: 318-327. [Review of Kurt Gödel, *Collected Works*. Publications 1938-1974. Volume II].

___________. (ed.). 1995. Kurt Gödel. *Ensayos inéditos.* Barcelona: Mondadori.

___________. (ed.). 1995. *Unpublished Philosophical Essays*, edited by Francisco Rodríguez Consuegra, Basel: Birkhäuser.

___________. 1996. "Gödel's unpublished manuscripts, 1930-1970: The official edition". *Modern Logic* **6**: 413-421. [Review of Kurt Gödel, *Collected Works. Unpublished essays and lectures.* Volume III].

Los trabajos de Kurt Gödel (1906-1978), considerados a menudo como los aportes lógicos más penetrantes e influyentes del siglo XX,[1] han sido percibidos y estudiados en la mayoría de las ocasiones desde un punto de vista esencialmente técnico y matemático. Los notables resultados de Gödel (completitud de la lógica clásica de primer orden, incompletitud de teorías que contengan a la aritmética de Peano, consistencia relativa

1. Véanse, por ejemplo, los comentarios siguientes: Feferman [CW1, 2]: "Established, beyond comparison, as the most important logician of our times [...]"; Kleene [CW1, 126]: "Gödel's *On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems* was undoubtedly the most exciting and the most cited article in mathematical logic and foundations to appear in the first eighty years of this century"; von Neumann (citado en [Dawson 1991, 84]): "Kurt Gödel's achievement in modern logic [...] is a landmark which will remain visible far in space and time". Para las siglas utilizadas en el manejo de los textos, remitimos a la sección de *Referencias* situada al final de este artículo.

de la hipótesis generalizada del continuo y del axioma de elección), además de muchos otros resultados de gran interés (investigaciones en lógica intuicionista, teoría de la prueba, teoría de la relatividad, nuevos axiomas en teoría de conjuntos), son aportes que incorporan —sin duda— muy importantes contribuciones técnicas y reflejan un profundo conocimiento de las herramientas matemáticas de la lógica y de la teoría de conjuntos. Sin embargo, detrás de importantes resultados técnicos en los fundamentos de la matemática se encuentran a menudo hondas ideas y esquemas filosóficos que impulsan la adecuada realización de esos teoremas más técnicos.

En este sentido, Francisco Rodríguez Consuegra ha sostenido una atrevida e incisiva tesis en lo que se refiere específicamente a la obra de Gödel: Gödel, *ante todo*, habría sido un filósofo —en el sentido de observar y ordenar el mundo matemático y físico, ligándolo y contraponiéndolo a grandes concepciones filosóficas—, que habría construido sus fundamentales aportes lógico-matemáticos con el objetivo de contrastar y, en última instancia, apoyar sus posiciones filosóficas. La tesis de Rodríguez Consuegra recién expuesta se encuentra aquí expresada en su forma más fuerte; como veremos más adelante, ésta puede debilitarse según lo indica el mismo Rodríguez Consuegra, sin que por ello se pierda la esencia del argumento negativo: no puede entenderse a Gödel el lógico matemático sin ligarlo estrechamente con Gödel el filósofo, no pueden desgajarse y separarse en Gödel el análisis filosófico y los resultados técnicos.

La tesis de Rodríguez Consuegra, como revisaré luego en detalle, aunque es muy discutible y, según creo, aún algo endeble, no es de ninguna manera gratuita y posee raíces en muchas afirmaciones de Gödel y en comentaristas posteriores (por ejemplo, Wang y Kreisel). En todo caso se trata de una tesis importante que ha hecho y hará avanzar los estudios de historia y filosofía de la lógica matemática en el siglo XX. Un punto de sostén fundamental en la armazón de la tesis consistió en publicar meticulosamente algunos de los manuscritos inéditos de Gödel [EI], [UPE]: en esas ediciones y en extensas introducciones se concentra el trabajo de Rodríguez Consuegra. Complementaré la revisión de esas ediciones con un vistazo sobre las excelentes reseñas de Rodríguez Consuegra ([RC1], [RC2], [RC3]) de la 'edición oficial' de las obras de Gödel ([CW1], [CW2], [CW3]) y con una comparación del trabajo crítico realizado en varias ediciones.

Dividiré esta reseña[2] de los trabajos de Rodríguez Consuegra sobre Gödel en las siguientes secciones:

I. Descripción del contenido común de las ediciones de Rodríguez Consuegra de los manuscritos inéditos de Gödel [EI], [UPE].

II. Comparación de las ediciones en español [EI] y en inglés [UPE], acentuando en particular una contrastación de los dos apartados introductorios.

III. Apuntes críticos sobre las tesis de Rodríguez Consuegra.

IV. Comparación específica y detallada del trabajo editorial realizado con la 'Gibbs lecture' en las versiones [UPE] y [CW3] (tangencialmente compararé también la versión en español).

V. Comparación global del trabajo editorial realizado con el manuscrito "Is mathematics syntax of language?", en las versiones [UPE] y [CW3]. Comparación de las introducciones de Rodríguez Consuegra con las introducciones a la 'edición oficial' de los manuscritos ([CW3]).

VI. Descripción y evaluación de las reseñas de Rodríguez Consuegra ([RC1], [RC2], [RC3]) sobre la 'edición oficial' de las obras de Gödel.

VII. Apuntes críticos sobre el lugar y la relevancia de Peirce, para una comprensión más cabal de las problemáticas filosófico-lógico-matemáticas que yacen en la obra de Gödel y en sus comentaristas posteriores.

I

Así como correspondió a España el honor de haber reunido —por primera vez— una selección de los escritos publicados de Gödel,[3] corresponde también a España el mérito de editar por vez primera una selección representativa de los manuscritos inéditos de Gödel. La edición en español de Rodríguez Consuegra de los ensayos inéditos [EI] (1994) antecede en un año a la 'edición oficial' [CW3] (1995); la

2. Una reseña previa [Torres 1995] había aparecido ya en *Mathesis*. La justificación de otra reseña más se debe —además de a la importancia de la obra— a los siguientes factores que distinguen las dos reseñas: el énfasis del profesor Torres se dirige específicamente a *describir* los textos inéditos de *Gödel* (circunscribiéndose en buena medida a la conferencia Gibbs), mientras que mi énfasis se dirige a *evaluar* los trabajos de *Rodríguez Consuegra* sobre Gödel (extendiéndome hacia las otras ediciones). La primera lectura tiende a ser primaria, descriptiva, local, interna; la segunda lectura tiende a ser secundaria, crítica, global, externa.

3. [Gödel 1981]. La edición de Mosterín incluye todos los artículos fundamentales publicados por Gödel y la mayoría de los secundarios y posee adecuadas presentaciones para cada texto; sin embargo, deja de lado las reseñas escritas por Gödel, contiene muchas erratas tipográficas y algunos descuidos cronológicos y críticos. Para el lector que sólo tenga acceso al español sigue siendo una edición valiosa que, en todo caso, mantendrá el innegable mérito de haber sido la primera recopilación global de la obra de Gödel *en cualquier idioma*. Diez años después de la edición de Mosterín, la 'edición oficial' ([CW1], [CW2]) de los textos publicados es ahora mucho más confiable y debe ser consultada con prioridad.

versión inglesa [UPE] de los *Ensayos inéditos* es también del año 1995. Las versiones en español y en inglés de los trabajos de Rodríguez Consuegra serán comparadas en la siguiente sección y se verán acompañadas de algunos apuntes críticos por mi parte. Resumiré ahora, neutralmente, el contenido común de las dos versiones.

Los *Ensayos inéditos* se abren con un prólogo de Quine, justamente elogioso, sobre el extenso y difícil trabajo editorial de Rodríguez Consuegra, elogio que se extiende al "impresionante progreso contemporáneo de la filosofía científica en España" [EI, 10]. El resto de las palabras de Quine no pasan de ser un abrebocas sin mayor sustancia; la sustancia la empieza a proporcionar Rodríguez Consuegra en su 'Introducción'. Después de mencionar la gran altura de Kurt Gödel, el lógico matemático, aparece fuertemente resaltada la figura de Gödel, el filósofo, quien "dedicó a esta especialidad muchos más años de su vida que los que consumió en la investigación técnica" y "escribió cientos y cientos de páginas sobre temas de filosofía matemática y otros campos de la filosofía" [EI, 15]. Sin extenderse aún en sostener tan sorprendentes afirmaciones (será la labor del extenso aparato crítico —125 páginas en la versión española—), Rodríguez Consuegra pasa a describir el esquema del texto. El libro se encuentra dividido en dos partes: Parte I. Kurt Gödel y la filosofía de la matemática y Parte II. Los ensayos inéditos. La primera parte se subdivide en tres capítulos: 1. El realismo, la metamatemática y los inéditos, 2. La distinción analítico-sintético, 3. La analogía matemática-física.

En el primer capítulo, Rodríguez Consuegra contrapone los resultados técnicos de Gödel con su realismo matemático, y resume sus posibles relaciones en una triple alternativa: (i) los resultados técnicos implican la postura filosófica de Gödel; (ii) el realismo matemático es un principio heurístico que conduce a los resultados técnicos; o, (iii) el realismo matemático es una 'hipótesis' filosófica de trabajo que es confrontada y verificada posteriormente con los resultados técnicos [EI, 23]. Tratando de dirimir la alternativa, Rodríguez Consuegra estudia la primera posibilidad, discutiendo *—antes—* las ideas principales de los resultados de Gödel [EI, 24-32] y *—luego—* lo que podrían ser sus consecuencias filosóficas primordiales [EI, 32-35]. Sin llegar a descartar plenamente esta primera alternativa —que corresponde a la versión 'recibida' de la obra de Gödel: primero la matemática, preponderante, luego la filosofía, secundaria si no terciaria—, Rodríguez Consuegra logra someterla a serias dudas, basadas en dos puntos básicos de apoyo: (a) la introducción de la tesis de doctorado de Gödel (aparecida por primera vez en [CW1, 61-65]) indica una postura realista *previa* a los resultados de incompletitud, que obtendría un año después. Además, algunos comentarios de Gödel indica que, a mediados de los años 20, ya habría adoptado su postura realista; (b) el intento de *deducir* argumentos filosóficos a partir de los resultados técnicos es poco claro y bastante cuestionable, ya que tales deducciones involucran ya sea una noción vaga de modelo 'natural', o bien un uso inclasificable de 'intuición'.

La segunda alternativa —el realismo matemático gödeliano visto como principio heurístico de descubrimiento— puede documentarse, según Rodríguez Consuegra, en la correspondencia de Gödel con Hao Wang, el más cercano interlocutor de Gödel en sus últimos años. Rodríguez Consuegra cuestiona la plena validez de esta segunda posibilidad, ya que la encuentra ligada con el manejo de "una verdad objetiva transfinita" [EI, 37], y la consideración de esta última provendría de un resultado técnico intermedio (la indefinibilidad de la verdad aritmética, obtenida por Gödel previamente a Tarski), hecho que le quitaría el peso heurístico —informal y psicológico— a la posición realista.

La tercera alternativa —el realismo gödeliano visto como 'hipótesis filosófica' a ser contrastada (y, ojalá, verificada) por los resultados técnicos posteriores— podría verse documentada en las conversaciones de Gödel con Wang. Se trata de la tesis filosóficamente más rica aunque, como muestra Rodríguez Consuegra, tampoco se la puede considerar plenamente justificada, debido a la falta de un claro programa (y claras realizaciones) en el *corpus* de los comentarios filosóficos de Gödel. Acerca de las tres alternativas, comenta Rodríguez Consuegra: "parece que ninguno de los tres enfoques arroja mucha luz sobre la filosofía de la matemática de Gödel, aparte del acostumbrado recurso a la intuición matemática" [EI, 41]. Sin embargo, al tratar de sostener la prioridad de Gödel, el filósofo, sobre Gödel, el lógico matemático, habría que tratar de *demostrar* que la tercera alternativa es la más fecunda, si no la correcta. Por otro lado, independientemente de tal demostración, los lazos entre Gödel, el filósofo, y Gödel, el lógico matemático, se encuentran explicitados y robustecidos después de la crítica de Rodríguez Consuegra.

Hasta entonces ([EI, 41]), Rodríguez Consuegra realiza su análisis de la triple alternativa basándose en los textos publicados por Gödel y en sus comentarios a Wang. Al pasar a los ensayos inéditos, Rodríguez Consuegra logra precisar las posiciones anteriores. Justamente, uno de los principales intereses de la publicación de los *Ensayos inéditos* debe ser aportar una mayor claridad en la comprensión de las posiciones filosóficas de Gödel. El ensayo sobre Carnap, "Is mathematics syntax of language", fue revisado por Gödel al menos cinco veces y se poseen actualmente seis versiones del mismo; tal mina para los editores es aprovechada por Rodríguez Consuegra para presentarnos las versiones II y VI, consideradas respectivamente por él [EI, 134] como las más cercanas a estar totalmente terminadas —sin que Gödel hiciera aún uso de su muy exigente navaja de Ockham— y como las que terminan por condensar la evolución de los propósitos de Gödel —reduciéndose el volumen de los manuscritos de 100 folios a 8 (!)—. Revisando el contenido de la versión VI, Rodríguez Consuegra indica cómo los argumentos de Gödel precisan su posición filosófica: (i) los objetos matemáticos son ineliminables, juegan un papel hipotético similar al de los objetos físicos, aseguran el contenido de los axiomas; (ii) los axiomas y las definiciones no son arbitrarios, decantan cierto tipo de 'observaciones' objetivas y 'verdaderas'; (iii) la intuición matemática es irremplazable por convenciones, ya que la consistencia de esas convenciones sólo sería demostrable mediante otro recurso a la intuición. Tales argumentos efectivamente precisan lo que se ha venido llamando platonismo o realismo gödeliano; los argumentos inéditos son más explícitamente filosóficos que los que aparecen en los textos publicados por Gödel. El primer capítulo introductorio de Rodríguez Consuegra termina con un "breve contexto de ideas y autores" [EI, 46], en el cual compara las posiciones de Gödel con aquellas de Quine, Tarski, Carnap y Russell.

En el segundo capítulo, Rodríguez Consuegra efectúa una muy útil revisión de la distinción analítico-sintético, repleta de problemáticas. Se exponen primero las posiciones al respecto de Frege, Russel, Wittgenstein, Carnap y Quine; el resumen [EI, 51-71] es muy cuidadoso e informativo, particularmente en lo que se refiere a la posición de Carnap; me parece que es lo *más claro y conciso* que se puede encontrar en la literatura sobre el tema, un tema lleno de equívocos y dudosos enunciados que parecen haber empantanado a menudo la filosofía de la matemática. Rodríguez Consuegra estudia luego los trabajos publicados de Gödel donde se aborda el carácter analítico de la matemática, y complementa el estudio con la información que obtiene de los ensayos inéditos [EI, 72-81]. En resumen, Rodríguez Consuegra propone "cuatro formas básicas de entender 'analítico', en lo tocante a los enunciados de la matemática" [EI, 81]: (i) lógicamente verdadero, tautológico; (ii) verdadero según sinonimia y significado; (iii) conocido a priori, directa e intuitivamente; y (iv) teórico, no fáctico. Siguiendo la anterior clasificación de las muchas ideas implícitas en el término 'analítico', Rodríguez Consuegra indica que las aseveraciones de Gödel acerca de la analiticidad de las proposiciones matemáticas contendrían elementos de (ii)-(iv): significado, intuición y teoría mezclándose de manera original (aunque no muy clara).

En el tercer capítulo introductorio, Rodríguez Consuegra estudia la analogía matemática-física en la filosofía de Gödel. De nuevo, se procede primero a una adecuada contextualización de la problemática [EI, 84-105], pasando por Russell, Hilbert, Carnap, Tarski y Quine; el resumen es, una vez más, impecable. Particularmente interesante resulta ser la posición de Tarski [EI, 100-103], quien dice estar inclinado a creer que "las verdades lógicas y las matemáticas no difieren en su origen de las verdades empíricas —ambas son resultados de experiencia acumulada", explicando así la posibilidad de que se realicen cambios naturales en el posterior desarrollo de las concepciones lógicas (incluyendo sus axiomas más básicos), cambios inducidos por la evolución de nuestros ambientes físico-cognitivos. Rodríguez Consuegra pasa luego revista a los argumentos de Gödel que apoyan la analogía matemática-física en sus trabajos publicados [EI, 105-113]. Tal apoyo puede resumirse en los puntos siguientes: (i) los axiomas abstractos de la teoría de conjuntos pueden medirse por sus consecuencias en la aritmética, así como los axiomas de la física son contrastables con la experiencia; (ii) la existencia de las clases y los objetos matemáticos es tan legítima como la de los objetos físicos, ya que todos son necesarios para construir teorías satisfactorias de nuestras percepciones sensibles; (iii) los conceptos y teoremas conjuntistas describen una realidad bien determinada —similar a la realidad física—, y es sólo la imprecisión (incompletez) actual de los axiomas la que lleva a que problemas como el de la hipótesis del continuo sean indecidibles; (iv) gozamos de algo parecido a una 'percepción sensible' de los objetos conjuntistas y nuestra intuición alcanza, de manera natural, los ámbitos relacionales abstractos, así como también atraviesa los ámbitos relacionales físicos.

Con la revisión de los ensayos inéditos, Rodríguez Consuegra muestra que se pueden obtener más precisiones sobre la analogía matemática-física en Gödel [EI, 113-118]. En primera instancia, Gödel indica que, aunque las proposiciones matemáticas pueden situarse más allá de la realidad espacio-temporal, son sin embargo objetivas, al hablar sobre relaciones de conceptos (acercándose aquí a la definición de la matemática propuesta por Lawvere: la matemática como estudio de las relaciones de relaciones de conceptos). En segunda instancia, Gödel se acerca al realismo escotista según el cual lo general no es creado sino sólo percibido por nosotros, ya que lo general engendra al infinito mientras que todo lo creado es finito. En tercera instancia, Gödel señala cómo, a una pretendida reconstrucción sintáctica de las matemáticas que eliminara el recurso a la intuición, subyacería la necesidad de una prueba de consistencia del sistema sintáctico usado, prueba que sólo podría realizarse en un contexto objetivo que trascienda al sistema mismo. Rodríguez Consuegra apunta cómo Gödel, al enfatizar el contenido objetivo de la matemática y la analogía con las ciencias empíricas, se acerca a una posición holista en el sentido quineano (conocimiento humano procedente de un único esquema conceptual), posición que obliga a manejar distinciones sólo de grado, demasiado próximas a un convencionalismo que Gödel rechazaba fuertemente. Rodríguez Consuegra propone que Gödel, para escapar de la encrucijada, tuvo que insistir en que la matemática es analítica, distinguiéndola así —si no en sus métodos, al menos en su supuesta 'esencia'— de las demás ciencias.

El aparato crítico introductorio concluye con una buena bibliografía (no exhaustiva), que incluye además ciertas curiosidades como videos y discos. La segunda parte corresponde a la edición de los ensayos inéditos en sí mismos, y está subdividida en otros cuatro capítulos: 4. Carácter y origen de los manuscritos. La presente edición; 5 algunos teoremas básicos sobre los fundamentos de la matemática y sus implicaciones filosóficas (1951); 6 ¿es la matemática sintaxis del lenguaje?, II (1953-54?); 7 ¿es la matemática sintaxis del lenguaje?; VI (1955-56?). Pasaremos a discutir en las secciones siguientes la edición de los ensayos inéditos, empezando primero con una comparación de las ediciones de los ensayos —según Rodríguez Consuegra— en las versiones española [EI] e inglesa [UPE].

II

A pesar de que [EI] y [UPE] son muy similares, no corresponden a traducciones literales la una de la otra. Con ello el lector gana amplitud, aunque no puede sin embargo recomendarse claramente la supremacía de una de las dos versiones. [EI] y [UPE] difieren en varios aspectos significativos, además de incorporar muchas distinciones de detalle. La versión española es anterior a la inglesa: el aparato introductorio crítico se escribió primero en español y luego, al traducirse, fue enmendado; por supuesto, al revés, el trabajo de reconstrucción de los textos de Gödel en inglés precedió a su traducción al español. En términos generales, se encuentra más información en la introducción española, información que fue luego cercenada o resumida en la introducción inglesa; por otro lado, la versión inglesa incluye un fundamental índice que no posee [EI], a la vez que se precisan en [UPE] algunos comentarios sobre el programa de Hilbert. Indico a continuación algunos detalles representativos de las diferencias entre las dos ediciones, empezando con algunas de las ventajas de [UPE] sobre [EI] y, luego, procediendo en sentido inverso; son pocas las ganancias en el primer caso —aunque se encuentra una muy considerable— y son más las ventajas en el segundo caso.

Unpublished Philosophical Essays enfatiza en el título mismo el término 'filosófico', escondido en los *Ensayos inéditos*; esto se debe posiblemente al interés de Rodríguez Consuegra de señalar más enérgicamente a la comunidad internacional el aspecto filosófico de la obra gödeliana: el título en inglés corresponde mejor a las tesis desarrolladas en el aparato introductorio. Usualmente, una lectura recibida de los teoremas de incompletitud de Gödel consiste en afirmar que con tales resultados se habría derrumbado 'para siempre' el programa de Hilbert; [EI, 26] incurre en tal lectura. Corresponde mejor al desarrollo de aspectos de la lógica matemática a partir de Gödel (teoría de la prueba[4] con Gentzen, Kreisel, Girard) afirmar que el programa de Hilbert —que pretendía alcanzar un ideal *absoluto* de consistencia— no murió para siempre, sino que más bien se *relativizó* en diversas maneras muy profundas, con lo que en vez de derrumbarse ha alcanzado una influencia tal vez aún mayor. Esta reevaluación del programa de Hilbert es mencionada en [UPE, 25] (referencias a la obra de Detlefsen), con lo que se recupera su infortunada muerte. [UPE, 51] enuncia correctamente el teorema de Fermat (equivocado en [EI, 60]). Como ya lo indiqué, otra ventaja de [UPE] consiste en el añadido de un muy útil índice onomástico-analítico; se trata de una excelente costumbre anglosajona, que tendría que implementarse muchísimo más en las ediciones españolas, las cuales se quedan muy a menudo cortas en el manejo de este tipo de ayudas fundamentales para el lector.

A favor de la edición española, enumero ahora (en orden de aparición) algunos detalles que no aparecen (o aparecen considerablemente mermados) en [UPE]. [EI, 20] menciona una importante biografía de Gödel en curso. [EI, 26] se refiere —correctamente— al teorema de completitud de Post para el cálculo proposicional clásico (mientras que [UPE, 19], en un giro dudoso de puntuación, parecería

4. Un texto excelente en el que se mezclan una gran precisión técnica y extensas discusiones conceptuales es [Girard 1987].

indicar que el teorema de Gödel es el teorema de Post). [EI, 26-27] da referencias adicionales y argumentos más extensos sobre la prueba del teorema de completitud de Gödel; las referencias envían a textos en español o de divulgación (Mosterín, Nagel/Newman, Sacristán) que son menguados en la edición inglesa. [EI, 27] indica la importancia del *orden* de los cuantificadores al comienzo de una fórmula en su forma normal de Skolem, detalle olvidado en la traducción al inglés [UPE, 20]. [EI, 31] añade un comentario sobre Wittgenstein —alrededor de su idea de una sintaxis 'inefable'— y compara la situación con el proceso de gödelización de la sintaxis. [EI, 36] plantea el problema de estudiar más a fondo las relaciones entre ideas de Skolem y los teoremas de Gödel, un campo de acción que sería sin duda muy fructífero. [EI, 46] señala lo que sin duda parece ser una limitante de los textos de Wang sobre Gödel: un manejo no siempre claro de las citas o de las ideas de Gödel, que tienden a veces a confundirse con las ideas del propio Wang, en procesos de osmosis no claramente diferenciados; tal crítica desaparece de la edición inglesa, tal vez para no herir susceptibilidades.

[EI, 52-53] añade comentarios adicionales sobre Frege, Kant y Dummett, recortados en la versión inglesa, en particular sobre la contraposición analítico/sintético en Frege. [EI, 60] explica cómo Carnap trataba de defender el logicismo en lo que respecta al difícil status de los tres axiomas netamente 'matemáticos': infinitud, reducibilidad, y elección; tales comentarios importantes son también recortados en [UPE]. [EI, 75-76] realiza otro análisis fundamental que desaparece en la edición inglesa: el estudio de los comentarios de Gödel acerca de la hipótesis del continuo, que lleva a acentuar el recurso vital de la intuición matemática y a afirmar de manera muy fuerte la realidad de los objetos conjuntistas. [EI, 81] propone un útil resumen de las distinciones analítico/sintético, resumen y discusión posterior descartados en [UPE]. [EI, 96-97] proporciona comentarios adicionales sobre la muy interesante obra de Duhem.

La edición española separa con indicaciones y parágrafos aparte el estudio de los trabajos de Gödel en sus escritos publicados, por un lado, y en sus ensayos inéditos, por otro lado; tal subdivisión es muy diciente y resalta aún más el valor de la edición de Rodríguez Consuegra, al explicitar los aportes previamente inaccesibles; es una lástima que no se haya mantenido en inglés. [EI, 105-106] estudia más extensamente citas e ideas de Gödel acerca de las relaciones entre aritmética y teoría de conjuntos, uno de los campos favoritos de Gödel para someter a prueba, y aparentemente confirmar, sus posiciones realistas. [EI, 108-109] revisa el análisis filosófico gödeliano, al aplicarse a problemáticas de teoría de conjuntos, y en particular resalta su original opinión de que las paradojas se deben a fallas de la lógica y no a las matemáticas en sí, ya que la lógica no puede alcanzar a capturar plenamente la profunda riqueza matemática. Como regla general, parece ser que en la versión inglesa Rodríguez Consuegra (¿por razones de brevedad, por urgencias editoriales, por deseo de abrirse a un público más amplio?) decidió eliminar muchos de los comentarios que tuviesen que ver con la teoría de conjuntos; es una lástima, pues ellos son los que más cerca están de proporcionar un sólido apoyo a las posiciones de Gödel.[5] [EI, 112] incluye una extensa cita de Weyl sobre el realismo en física y matemáticas. [EI, 115] señala la afirmación de Gödel de que los objetos de la matemática son generales; este importantísimo apunte de Gödel es desafortunadamente cercenado en la edición inglesa.

En resumen, el aparato crítico-introductorio debe preferirse en su versión española ya que es bastante más completo. La versión inglesa incorpora, por otro lado, el muy útil índice onomástico-analítico. En caso de realizarse —y la labor hercúlea de Rodríguez Consuegra lo merecería ampliamente—, una segunda edición en español podrá dar lugar a añadir el índice y corregir las pocas imprecisiones hasta ahora señaladas. A continuación, elaboro otros apuntes críticos con respecto al aparato introductorio de Rodríguez Consuegra.

III

La tesis fundamental de Rodríguez Consuegra —Gödel filósofo ante todo— probablemente tenderá a relajarse un poco, cuando en algunos años logre establecerse la plena conjunción *simultánea* de intereses filosóficos y técnico-matemáticos en la obra de Gödel; los *énfasis* que contraresten una tal simultaneidad podrían explicar luego épocas y tendencias en la obra de Gödel. Sin embargo, antes de elucubrar hacia esa maleabilidad del pensamiento, es importante tratar de fundamentar la tesis de Rodríguez Consuegra, independiente y consistentemente, en aras de ser sometida eficazmente a prueba. La contrastación de una visión extrema (primero la filosofía, luego la matemática) será muy útil para llegar a una visión intermedia (análisis filósofico *y* lógica

5. A este respecto, véanse por ejemplo los dos excelentes estudios [Maddy 1988], sobre el status de los diversos axiomas conjuntistas, estudios muy influenciados por las ideas de Gödel.

matemática), que definitivamente mandará al traste la visión preponderante y sesgada de la obra gödeliana (primero la matemática, segundo la lógica matemática y en un n-ésimo lugar la filosofía). La tesis de Rodríguez Consuegra nos lleva a situarnos en una frontera abierta, mucho más enriquecedora que cualquiera de los entornos cerrados en los que han sido usualmente situados los aportes de Gödel.

Tres puntos principales podrían sostener la tesis de que Gödel era ante todo un filósofo, puntos que preferiblemente deben ligarse a la obra escrita de Gödel (publicada o inédita), aunque también podrían correlacionarse con sus enseñanzas orales (via Wang, aunque aquí podríamos estar pasando a un dominio dudoso de evidencias): (i) *preponderancia* de escritos filosóficos, en términos globales, a lo largo de su vida; (ii) *precedencia* de inquietudes y problemáticas filosóficas en la década de los años 20, antes de obtener los espectaculares resultados técnicos de los años *mirabili* 1929-31; y (iii) *continuidad* en los intereses y escritos filosóficos, a lo largo de su vida.

El primer punto de apoyo es presentado por Rodríguez Consuegra cuando afirma que Gödel dedicó a la filosofía "muchos más años de su vida que los que consumió en la investigación técnica [y] escribió cientos y cientos de páginas sobre temas de filosofía de la matemática y otros campos de la filosofía" [EI, 15]. Para ser efectiva, tal afirmación debe precisarse considerablemente. No es claro aún que en el período 1940-1970, cuando las investigaciones técnicas de Gödel declinaron, aumentaran notablemente sus realizaciones filosóficas: dos artículos publicados (sobre Russell y Cantor), tres inéditos importantes (sobre Gödel, Carnap y Einstein) y textos de varias conferencias menores, forman un bagaje algo restringido —por más que nos aprovechemos de la proverbial concisión de Gödel—. Es claro que, en la obra publicada, aparecen más páginas dedicadas a investigaciones técnicas que a discusiones filosóficas. En la obra inédita, por lo tanto, debería aparecer un desbalance *claro* que favoreciera a la filosofía. Sin embargo, la situación *no* es ésa: Rodríguez Consuegra comenta [RC3, 413] que el tercer volumen de la 'edición oficial" de los trabajos de Gödel [CW3] incluye la *mayoría* de los textos inéditos de Gödel y, si tal es el caso, el desbalance que buscamos no existe (en [CW3] se cuentan 109 páginas dedicadas a comentarios técnicos y 81 dedicadas a discusiones filosóficas). Si comparamos, por ejemplo, las 100,000 páginas manuscritas (!) que dejó Peirce en su *Nachlass*, la mayoría de ellas genuinamente filosóficas, con lo que quedaría en el *Nachlass* de Gödel (¿500 páginas siendo optimistas?), se ve que los 'cientos y cientos' de páginas mencionados por Rodríguez Consuegra están sujetos a serias dudas, si no se elabora un conteo preciso. Así, el punto de apoyo (i) no es aún muy convincente; la preponderancia filosófica debe ser sustentada o, en caso contrario, descartada. Lo que sí se obtiene, en todo caso, es un mayor equilibrio entre matemáticas y filosofía, lo cual es ya una gran ganancia.

Acerca del punto (ii), Rodríguez Consuegra indica que el realismo filosófico gödeliano provendría "al menos desde la mitad de los años 20" [RC2, 321]. Esta crítica anotación no es desgraciadamente sustentada a fondo; un mayor apoyo a una tal versión puede encontrarse en algunos datos proporcionados por Feferman [CW3, 39-40]. Elaborar un estudio a fondo de la precedencia del marco filosófico general, en el que se situarían *luego* los resultados técnicos de los años 30, sería un apoyo de gran relevancia para la tesis de Rodríguez Consuegra. Es un campo que queda abierto y que debe ser explorado cuidadosamente. No queda claro para el lector si aún existen en el *Nachlass* de Gödel manuscritos de la década de los 20, o referentes a esa década, como tampoco queda claro si se han revisado sistemáticamente los comentarios orales que había pronunciado Gödel.

El punto (iii) es el mejor sustentado a través de las evidencias, que proporcionan tanto Rodríguez Consuegra como la 'edición oficial' de las obras de Gödel. Desde la introducción de su tesis de doctorado, recuperada por vez primera en [CW3], donde aparece como el primer escrito de Gödel (¿será posible que no hayan subsistido textos anteriores?), hasta sus últimos escritos (prueba ontológica de la existencia de Dios), es claro que Gödel siempre mantuvo intereses filosóficos de fondo y siempre se preocupó por sus estrechas relaciones con la matemática. El punto (iii) sustenta la concordancia de un Gödel filósofo, lógico y matemático.

En resumen, lo que podríamos llamar la 'tesis extrema' de Rodríguez Consuegra (Gödel ante todo filósofo) es aún muy débil: debe ser mejor sustentada o, en caso contraria, descartada; todo tiende a hacer pensar que va a ser muy difícil de sustentar. Por otro lado, la 'tesis intermedia' (Gödel en el cruce del análisis filosófico y la lógica matemática), tesis que también sugiere Rodríguez Consuegra —aunque realmente dirija el grueso de sus baterías hacia la 'tesis extrema'—, parece irse sustentando de manera natural a medida que conocemos mejor la obra gödeliana. En ese conocimiento más pleno de Gödel, es donde podemos situar la importancia de los aportes críticos de Rodríguez Consuegra (en sus reseñas de la 'edición oficial' y en los aparatos introductorios de los textos inéditos) y el gran interés de sus ediciones de los textos gödelianos.

Rodríguez Consuegra, sin embargo, contaba con un precursor que parece haber desconocido y que, en caso de haberlo traído a colación, hubiera sido de gran apoyo para sus tesis. Georg Kreisel debe considerarse uno de los herederos más incisivos de Gödel: además de conocerlo muy bien personalmente, los trabajos de Kreisel en lógica intuicionista y teoría de la prueba, siempre guiados por una meticulosa reflexión metodológica y filosófica, son el ejemplo paradigmático de la influencia gödeliana en el pensamiento lógico de la segunda mitad del siglo. Rodríguez Consuegra no menciona a Kreisel. Se trata de una omisión de talla, ya que Kreisel explícitamente fue el primer analista cuidadoso que mostró que la obra de Gödel podía entenderse mejor si se la situaba en el *cruce* fundamental del análisis filosófico y la lógica matemática [Kreisel 1980]. Kreisel hacía ya explícito el método de Gödel (y lo aplicaba a sus propios trabajos): una *combinación* de análisis filosóficos y construcciones conceptuales matemáticas que daban lugar al siguiente esquema general [Kreisel 1980, 150]:

> By attention to or, equivalently, analysis of suitable traditional philosophical notions and issues, adding possibly a touch of precision, one arrives painlessly at appropriate concepts, correct conjectures, and generally esasy proofs D to be compared to the use of physical reasoning for developing mathematics or, on a smaller scale, to the use of geometry in algebra.

Kreisel consideraba que el 'segundo objetivo principal' de su extenso obituario era el de *demostrar* que el éxito de Gödel dependía del uso tenaz e imaginativo de su esquema general de trabajo. En una medida muy precisa (estudio técnico de los resultados de Gödel mediante un análisis detallado del contenido filosófico de definiciones, axiomas y métodos de prueba), Kreisel logra sustentar su objetivo. El artículo de Kreisel consiste en un apoyo más, de gran relevancia técnica, a la 'tesis intermedia' de Rodríguez Consuegra.

Enumero en lo que queda de esta sección algunos comentarios menores sobre las introducciones de Rodríguez Consuegra a los ensayos inéditos.

(i) Gödel es mencionado, al lado de Bertrand Russell, como "la figura más importante de la lógica, los fundamentos y la filosofía de la matemática de este siglo" [EI, 15]. Si el lugar de Gödel parece ser indiscutible, el de Russell es muy problemático; su influencia divulgativa fue sin duda muy grande (*Principles*) y su labor sistematizadora fundamental (*Principia*), pero debe aún evaluarse comparativamente la relevancia de sus contribuciones originales (muy reducidas, y mucho menos importantes para el desarrollo de la lógica matemática que las de Ramsey, Post, Gentzen o Skolem, por indicar a algunos de sus contemporáneos, que las de Tarski o Robinson, por indicar a algunos sucesores, o que las de Peirce, por indicar a un ilustre predecesor aún poco apreciado en su plena dimensión).

(ii) Al discutir las sentencias indecidibles, Rodríguez Consuegra considera de poca importancia ("amounts to very little" [UPE, 25]) el hecho de que las sentencias decidibles lo sean en sistemas de mayor potencia. Detrás de ello se esconde un prejuicio, que es el mismo que he indicado en la segunda sección de esta reseña con respecto a los avatares del programa de Hilbert: rezagos de deseos de lo absoluto (una verdad y una matemática privilegiadas) que harían ver a los teoremas de limitación gödelianos como *fallas* intrínsecas en el proceso de comprensión de 'la' verdad y 'la' matemática. En cambio, la lógica contemporánea (antes de Gödel, con Gentzen, pero sobre todo después de las pruebas de Gödel de consistencia relativa en teoría de conjuntos) ha dirigido muchos de sus mejores esfuerzos a *calibrar* el peso de las sentencias indecidibles (particularmente las que expresan la consistencia de sistemas amplios), tratando justamente de asegurar su decidibilidad de manera óptima en sistemas más comprensivos. El paso de un sistema a otro, la frontera de consistencia, la multiplicidad de los sistemas han sido un motor fundamental de la investigación contemporánea.

(iii) Un comentario pasajero de Rodríguez Consuegra es indicativo de una posibilidad de fondo que no hemos considerado hasta ahora. Dada la concisión ockhamiana de Gödel, dada su formación matemática, Gödel habría intentado producir argumentos conclusivos en filosofía, tendencia que le habría llevado "en filosofía al desastre" [EI, 138]. Las múltiples versiones de su ensayo sobre Carnap, y su decisión final de no publicarlo, reflejarían esa tendencia al desastre. Aquí el mismo Rodríguez Consuegra da una pauta a sus potenciales contradictores: ¿cómo podría ser Gödel filósofo ante todo, cuando su propia metodología riñe irremediablemente con los cánones de la discusión filosófica y cuando tal metodología lo lleva al silencio filosófico? De nuevo, lo que mejor se acopla a tales contradicciones es una atenuación de las posiciones extremas, buscando un consistente lugar en las fronteras del análisis filosófico y la lógica matemática.

IV

En esta sección revisaré, a título indicativo, los detalles finos de edición, concentrándome en la ''Gibbs Lecture'' (1951), único manuscrito común a [UPE] ([EI]) y [CW3], y tal vez el más intrincado editorialmente de los manuscritos de Gödel, repleto de inserciones, tachaduras y notas al pie (la ''pesadilla de un editor'', según Dawson [EI, 141]). El trabajo editorial de la versión 'oficial' se debe a Charles Parsons (este dato proviene de Rodríguez Consuegra [RC3, 418]; es curioso que en [CW3] no se haga mención de ello; señal, una vez más, de que no debemos conformarnos con sólo una presentación de los manuscritos). De entrada, las versiones Parsons y Rodríguez Consuegra difieren: la ''Gibbs Lecture'' se titula ''Some basic theorems in the foundations of mathematics and their implications'' en [CW3], mientras que en [UPE] aparece como ''Some basic theorems in the foundations of mathematics and their philosophical implications''. Añadiendo el término 'philosophical', Rodríguez Consuegra enfatiza, con razón, el aspecto filosófico de la conferencia de Gödel; en efecto, tal énfasis es marcado desde el primer párrafo del texto (''[...] implications for the traditional philosophical problems about the nature of mathematics'' [CW3, 304], [UPE, 129]). La distinción es indicativa de los sesgos contra los que ha debido luchar Rodríguez Consuegra ('¿matemáticas sin filosofía?'): como lo criticaba en [RC1, 58], una visión errónea y desenfocada (la predominante, la de la mayoría de la comunidad matemática) ha consistido en presentar la obra de Gödel como matemática pura, 'desinfectada' de pigmentos filosóficos.

El manuscrito de Gödel (pensado en primera instancia para ser leído, no para publicarse) consiste en un largo desarrollo sin párrafos marcados. La demarcación de los párrafos, que permite una lectura más reposada, queda así al criterio de los editores. Las diferencias son aquí notables: la versión [CW3] utiliza 22 párrafos, [UPE] usa 38, mientras que [EI] usa 54. A este respecto, entre las dos versiones inglesas, es preferible la demarcación propuesta en [UPE]: los párrafos de [CW3] son a veces excesivamente largos; es curioso que en la versión española (tal vez para hacerla más asequible y menos densa) Rodríguez Consuegra aumentó notablemente la separación del texto. Entre todos los cortes propuestos es preferible [UPE]. Por otro lado, en términos generales, [UPE] añade más signos de puntuación que [CW3]; una tal política de precisión de las frases es también preferible.

Aparte de pequeños lapsus (como [EI, 151] en el cual aparece una iteración 'cardinal' donde debe ser 'ordinal' —correcto en [UPE, 131]—), las diferencias principales de edición se encuentran en el manejo de las notas (de Gödel) a pie de página, y en el manejo de las inserciones u omisiones (de Gödel) al texto principal. La política de Rodríguez Consuegra consistió en presentar una versión lo más completa posible; tal decisión, encomiable, se refleja en el añadido de varias frases que Gödel había tachado o descartado, y que no aparecen en [CW3] (siempre las inserciones son señaladas con adecuadas marcas en el texto principal). Ejemplos de importantes inserciones que no aparecen en [CW3] son las siguientes: [UPE, 136], largo párrafo en el que se señala que el todo no es a menudo suma de sus partes parciales, con ejemplos de sicología, neurofisiología y mecánica cuántica; [UPE, 152], nota 18 que indica el dudoso estatus de explicaciones reduccionistas; [UPE, 140], frase que precisa la noción de 'tautología explícita' mediante la posibilidad de enumerarlas efectivamente; [UPE, 154], nota 24 que liga inconsistencia (sintáctica) con la verdad (semántica) de toda proposición; [UPE, 154], nota 26 que metafóricamente discute sobre un posible sexto sentido, de sus codificaciones sintácticas y de la posibilidad de una prueba (errónea) de su tautologicidad, criticando con ello de paso a ''las teorías que pretenden probar que la razón es tautológica'' (piénsese en el primer Wittgenstein); [UPE, 155], nota 29 que defiende a Frege de una posible interpretación nominalista, acentuando la importancia de sus análisis conceptuales; [UPE, 143], párrafo en el que Gödel señala el carácter esencialmente 'apagogo' de sus consideraciones sobre el platonismo —hasta ese momento de la conferencia, que va en sus tres cuartas partes—: consideraciones que se deducen de descartar las posiciones opuestas, por reducción al absurdo; [UPE, 145], términos que precisan análisis (en dos acepciones) y síntesis; [UPE, 146-147], dos párrafos adicionales que discriminan realismo y conceptualismo aristotélicos (comparados luego con un realismo platónico: [UPE, 156], nota 31).

En contrapartida a las ganancias obtenidas en [UPE], al tratar de presentar el texto de la forma más completa posible, resulta que la versión [CW3] es bastante más precisa en el manejo de las notas a pie de página, en particular en lo que respecta a su correcta ubicación y la precisión y completez de los argumentos esgrimidos en ellas. Vale la pena observar que no siempre la enumeración de las notas coincide en las versiones [UPE] y [CW3], ya que varias notas de la versión [UPE] no aparecen en la otra versión y, al menos, una nota importante de [CW3] (nota 26 con comentarios fundamentales sobre la consistencia de los axiomas en teoría de conjuntos) no aparece en [UPE]. Debe observarse, sin embargo, que [UPE] contiene, en un apéndice, una importante cantidad de interpolaciones y notas suplementarias, cuya ubicación en el texto principal era dudosa. A este respecto, es fundamental anotar que la versión de Rodríguez Consuegra contiene cerca de 3, 000 palabras más que la correspondiente versión 'oficial', hecho de gran relevancia si se tiene en cuenta la parquedad lingüística de Gödel.

En términos globales, de nuevo, las dos versiones se complementan; el lector general no se verá afectado al elegir cualquiera de las dos versiones (ambas constituyen trabajos editoriales de una gran seriedad); el estudioso, sin embargo, deberá utilizar las dos versiones. Siguiendo la numeración de las notas en [CW3], las notas 1, 8, 11 se encuentran mejor situadas que sus contrapartidas en [UPE], las notas 3, 6, 7, 15 son más completas que sus contrapartidas cercenadas en [UPE] —a menudo refiriéndose a aspectos matemáticos que Rodríguez Consuegra puede haber decidido eliminar para el 'gran público'—, las notas 8, 10, 16, 17, 18 son más precisas (la nota 18 mucho más precisa, con una importante descripción de los objetos matemáticos) que sus contrapartidas en [UPE]. Así como Rodríguez Consuegra ha dado una importante batalla en su edición para equilibrar el aspecto filosófico y el lógico de la obra de Gödel, debe notarse que a menudo deja de lado consideraciones de Gödel de gran importancia para la matemática, en particular muchos de sus comentarios técnicos en teoría axiomática de conjuntos, inclinando así la balanza de una manera desigual hacia el otro extremo.

Mencionemos que [CW3] incluye un aparato textual en los apéndices, mientras que los criterios de elección de detalle en [UPE] quedan más escondidos. Es natural que esto sea así, pues [UPE] nunca pretendió constituirse en una edición definitiva; más grave es el hecho de que [CW3] sí espera serlo, pero según la comparación que hemos realizado hasta ahora, no alcanza a constituirse en una edición omnicomprensiva. Finalmente, indiquemos que las traducciones de los manuscritos al español son, en todo punto, excelentes; tienden a una fiel literalidad, sin las habituales florituras y recargos del español que traicionarían el lenguaje seco y escueto de Gödel.

V

El ensayo de Gödel sobre Carnap, "Is mathematics syntax of language?", fue escrito en su primera versión entre 1953 y 1954, y pasó luego por cinco revisiones importantes hasta el año 1959. Sin haberlo planeado, de las seis versiones disponibles, Rodríguez Consuegra escogió en [UPE] ([EI]) las versiones II y VI, mientras que los editores de [CW3] escogieron las versiones III y V (recordemos que el trabajo de

Rodríguez Consuegra precedió al de la 'edición oficial'). Ya señalé en la primera sección de esta reseña las razones que esgrime Rodríguez Consuegra para su selección; por otro lado, en la introducción a las versiones propuestas en [CW3], Warren Goldfarb explica que escoge la versión III por ser la "más rica en contenido", y la V por su concisión y por parecer ser la última de las versiones disponibles [CW3, 325]. La precedencia de V o VI no es clara; Rodríguez Consuegra pensaba que la VI era la última versión [EI, 133], y por ello la había escogido; para crédito de [UPE] ([EI]), Rodríguez Consuegra presenta un aparato de notas comparativas entre las versiones V y VI, comparación de detalle que no aparece en [CW3] (esto refuerza nuevamente el interés de la edición de Rodríguez Consuegra comparativamente con la 'edición oficial').

Las versiones II y III son las más plenas e interesantes, aún no recortadas por la inflexible navaja de Ockham-Gödel. La subdivisión del texto en parágrafos numerados fue realizada por el propio Gödel; las numeraciones sin embargo no se corresponden totalmente entre las dos versiones. En términos generales, coinciden hasta el §16 y entre los §25-§31. En la versión II, escogida por Rodríguez Consuegra, puede obtenerse más información en los parágrafos siguientes: §17, 18 (consistencia de reglas sintácticas), §19 ('contenido' de una proposición), §48, 49 (consideraciones filosóficas finales). La versión III es más completa en los páragrafos §3 (semántica de tautologías), §19, 21 (inducción empírica y realismo), §34 (leyes naturales), §38, 39 (reglas finitarias). Las notas de Gödel (ya sea en [UPE] o en [CW3]) forman un cuerpo de contenidos *más* extenso que el mismo texto principal (texto principal en [UPE]: 19 páginas; notas: 21 páginas). Con ello, en buena medida, Gödel trató de diluir sus críticas a Carnap; a través de la extrema precisión de sus objeciones en las notas, la crítica se reduce a efectos locales de relevancia contextual muy limitada. Esta manera de proceder, junto con el hecho de que Gödel nunca se decidiera a publicar su artículo, es signo del poco ánimo de *discusión* filosófica que impregnaba a la personalidad de Gödel. Es difícil que una tal mesura (o, sencillamente, temor) pueda ajustarse a la tesis de que Gödel era un filósofo ante todo.

Comparando los aparatos críticos de las ediciones [UPE] ([EI]) y [CW3], hay que observar que los extensos comentarios de Rodríguez Consuegra son mucho más interesantes y útiles en lo que se refiere a adecuadas contextualizaciones histórico-conceptuales y a elaboradas discusiones filosóficas. Aquí hay que resaltar que es bastante inconcebible que en [CW3] no se encuentre *ninguna* referencia al trabajo de Rodríguez Consuegra ([CW3] es del 1995; los trabajos de Rodríguez Consuegra estaban en curso desde 1990, la edición en español es de 1994 y la inglesa de 1995), muestra de la poca visión que tiene a menudo el mundo anglosajón más allá de sus fronteras. Por otro lado, el énfasis de los editores de [CW3] resalta importantes discusiones matemáticas, diluidas o inexistentes en la edición de Rodríguez Consuegra. Por ejemplo, la introducción de Boolos a la 'Gibbs Lecture', incluye cuidadosas discusiones sobre la incompletabilidad de la teoría de conjuntos, los alcances de la mente como máquina de Turing, la existencia de verdades matemáticas nunca posibles de demostrar, la problemática de encontrar nuevas instancias matemáticas de incompletabilidad, las relaciones de Gödel con Leibniz y la característica universal, discusiones que no aparecen en Rodríguez Consuegra. *Sólo* la lectura complementaria de las dos ediciones produce un justo balance, más cercano al cruce entre análisis filosófico y lógica matemática, cruce muy propio de la obra de Gödel, detectado y estudiado especialmente por Kreisel.

VI

Las reseñas de Rodríguez Consuegra ([RC1], [RC2], [RC3]) sobre los tres volúmenes, hasta el momento, de la 'edición oficial', son un modelo de claridad; en el curso del tiempo (1992, 1994, 1996) correspondieron, además, a los trabajos adelantados por Rodríguez Consuegra en su edición de los manuscritos inéditos (trabajos preliminares, edición en español, edición en inglés). En [RC1], Rodríguez Consuegra critica el hecho de que [CW1] deja de lado las motivaciones e implicaciones filosóficas de los resultados de Gödel; dado que los textos más propiamente filosóficos de Gödel estaban reservados para los demás volúmenes, Rodríguez Consuegra se refiere particularmente aquí a las notas editoriales, que pretenden mostrar a un Gödel matemático, sin filosofía, y son más descriptivas que críticas, evidenciando una extrema cautela filosófica. Rodríguez Consuegra explicita lo que he llamado su 'tesis extrema' —Gödel filósofo ante todo—:

> Gödel was mainly a philosopher searching for mathematical results to illustrate, if not to prove, the truth of a philosophical position, apart from the mathematical interest of those results. That philosophical position was a twofold kind of Platonism, *i.e.* ontologically, the belief in the existence of separate and trascendent abstract entities, and epistemologically, the belief in the existence of a human intuition allowing us somehow a direct access to those entities. [RC1, 59]

> Usually, we would describe as a philosopher a person who devotes 13 years to a particular activity and the rest of his life, 25 more years, to philosophy [...]. This is one of my arguments supporting the thesis that Gödel was mainly a philosopher, who devoted a few years to a certain branch of a particular exact science, mainly because he expected to find there exact results to be presented as 'proofs' that his philosophical doctrines were true. [RC1, 62]
> I think that Gödel's philosophy of mathematics was only part of a consistent whole, and that it can be interpreted not only as a fortunate motivation, but also as the main objective of his intellectual life. [RC1, 62]

Ya señalé, en la tercera sección de esta reseña, que los anteriores comentarios de Rodríguez Consuegra están aún en proceso de prueba o refutación. Las evidencias hasta el momento tienden más hacia una refutación de la 'tesis extrema' y hacia la construcción de un soporte importante para una tesis intermedia más flexible: (i) independientemente de lo que haya publicado, si Gödel fuese un filósofo ante todo, el *corpus* de sus manuscritos inéditos relevantes para la filosofía debería ser al menos tan importante, si no significativamente superior, a su *corpus* lógico-matemático-técnico, y todo tiende a demostrar lo contrario (ver mis cálculos en la tercera sección); (ii). no es cierto que Gödel en los últimos veinticinco años de su vida se haya dedicado plenamente a la filosofía y haya abandonado las matemáticas: de nuevo la distribución de los textos en [CW3], que hasta puede considerarse como prueba representativa de lo contrario, indica una situación más equilibrada y compleja.

Aparte de elogiar en muchos aspectos la fundamental edición de las obras de Gödel, Rodríguez Consuegra critica justamente la falta de un índice analítico en [CW1] y el manejo bastante arbitrario de la bibliografía, además de insistir apropiadamente en las fallas de información, descripción y análisis filosófico de las notas introductorias. En [CW1] la lógica matemática resplandece y el análisis filosófico desaparece, una situación sin duda aberrante. Por otro lado, es curioso que ni en las notas editoriales de [CW1], ni en la crítica de Rodríguez Consuegra [RC1], ni en los textos posteriores ([UPE], [CW2], [CW3]), se estudie en detalle el asombroso salto intelectual de Gödel entre 1929 (completitud) y 1930 (incompletitud). Sería fundamental comprender a fondo tanto la capacidad de Gödel de abstraerse de los resultados recién conseguidos en su tesis —lo que probablemente evidenciaría la existencia de un programa filosófico de fondo, que habría que explicitar cuidadosamente—, como la importancia de haber detectado la frontera precisa que fuerza la incompletitud de los sistemas que la rebasen (inducción completa en la aritmética; compárese con el resultado de [Herbrand 1931] que mostraba que la aritmética con inducción restringida era aún completa) —lo que podría explicar a la postre el interés constante de Gödel por la intuición matemática, reflejada de la manera más cristalina posible en la inducción completa de los naturales—.

En [RC2], Rodríguez Consuegra vuelve al ataque y demuestra convincentemente las fallas de contextualización y discusión filosófica de algunas notas editoriales de [CW2]. Por ejemplo, la nota de Moore sobre el ensayo de Gödel acerca del problema del continuo, 'olvida' mencionar los últimos parágrafos del suplemento, de una gran riqueza conceptual y filosófica; otro ejemplo aún más flagrante: en [CW2] no se menciona el libro de Wang sobre sus conversaciones con Gödel, lo que constituye un sesgo imperdonable. Rodríguez Consuegra reafirma [RC2, 323] así su posición:

> Gödel's philosophical position cannot (should not) be put aside and be taken into consideration only in a secondary way in relation to his mathematical results and arguments: for him both were inextricably tied, and this in such a way that one can even maintain —as I do— that for him his philosophical beliefs were, by far, the more important, while his mathematical work was, somehow, a search for arguments which might be used in support of those deep beliefs.

Creo que el 'inextricably tied' ha sido en buena medida demostrado (Kreisel, Wang, Rodríguez Consuegra), mientras que el 'by far, the more important' está aún en tela de juicio, tendiendo a ser refutado. Un comentario de detalle: en [RC2, 320], Rodríguez Consuegra indica que Gödel consideraba su demostración de consistencia relativa del axioma de elección y de la hipótesis generalizada del continuo como resultados de tipo 'positivista' (pues la jerarquía de los construibles se encuentra ligada con consideraciones sintácticas); Rodríguez Consuegra no menciona, que desde un punto de vista realista, Gödel conjeturaba que el tamaño real del continuo debía ser, y que muchos de los esfuerzos posteriores de Gödel consistieron en encontrar axiomas de la teoría de conjuntos que forzaran de manera natural el resultado. A tal búsqueda, Gödel parece haberle dedicado un tiempo considerable, en el período de seclusión en el Institute of Advanced Study, que Rodríguez Consuegra querría ver como únicamente filosófico (ni siquiera es claro aún que lo fuera preponderantemente).

En las secciones anteriores he usado ampliamente la tercera evaluación de Rodríguez Consuegra [RC3] sobre la 'edición oficial'. Por lo tanto aquí consigno solamente otros comentarios adicionales:

(i) [RC3, 415] menciona *dudas* de Gödel acerca de diversas formas del platonismo. Este es un punto que debería estudiarse más a fondo pues los visos platónicos de Gödel están a menudo lejos de estar bien definidos, aunque en las discusiones de su filosofía se los asuma de entrada como bien determinados; (ii) [RC3, 415] señala que el trabajo de Gödel sobre universos rotacionales surge de inquietudes inequívocamente filosóficas, se trata de un hecho documentable que sostiene las tesis de Rodríguez Consuegra; (iii) [RC3, 418-419] compara muy modestamente [UPE] y [CW3] y se queda bastante corto en la comparación, esperamos que esa comparación haya quedado, con esta reseña, plenamente realizada.

VII

Cuando se habla de filosofía de las matemáticas y, particularmente, cuando se discuten temas acerca de la *realidad* de los objetos matemáticos, las intuiciones de lo *general*, la problemática *análisis/síntesis* referida a los enunciados matemáticos, las analogías o divergencias entre *matemáticas y física*, debería ser de obligada referencia consultar la obra de Charles Sanders Peirce (1839-1914). La importancia fundamental de esa obra es aún desconocida para la mayoría de los matemáticos y, aún, para la mayoría de los historiadores y filósofos de la matemática. Se trata de una obra que, empezando por su volumen, supera de lejos a cualquier otra en la modernidad. Peirce dejó publicadas en vida alrededor de 10,000 páginas, y su *Nachlass* se compone de cerca de 100,000 páginas manuscritas. Por otro lado, la calidad de esa obra es totalmente asombrosa: plenamente original,[6] antecede, por sólo citar algunos de los campos más representativos, muchas de las ideas más profundas de la semiótica, la lógica y la física contemporáneas.[7]

Durante años (1900-1930), por culpa de rencores personales y desplantes sociales generados por su figura iconoclasta, Peirce fue catalogado por el *establishment* académico norteamericano como un genio

6. Roman Jakobson, uno de los primeros en detectar la profundidad inusual de Peirce, comentaba [1977]

> cuando se pondera una afirmación de Peirce se siente uno constantemente sorprendido. ¿Cuáles son las raíces de su pensamiento? Cuando Peirce cita y comenta la opinión de alguna otra persona, se vuelve extremadamente innovadora y original. E incluso cuando se cita a sí mismo, crea a menudo una nueva idea y nunca deja de impresionar a su lector. Solía yo decir que era tan grande que ninguna universidad encontró lugar para él.

7. Pueden consultarse respectivamente [Liszka 1996], [Houser 1997] y [Moore 1993].

incoherente y desperdiciado. Luego, entre los años 1930-1950, Harvard procedió a una edición de sus *Collected Papers*, que puede considerarse como un verdadero atentado intelectual (ejemplos de lo que *no* debe hacer un editor, contrariamente a los ejemplos positivos que hemos mencionado en las páginas anteriores). Los escritos de Peirce fueron mutilados desvergonzadamente, a menudo cortando y desperdigando un texto unitario entre varios volúmenes de la edición, y reafirmando de esa manera la supuesta 'incoherencia' del pensamiento peirceano. Se entiende así que, hasta los años ochenta de este siglo —¡casi ciento cincuenta años después del nacimiento de Peirce!—, su importancia fuera considerada como menor. En las últimas dos décadas del siglo XX, sin embargo, se ha empezado a organizar una justa recuperación de la obra peirceana: nueva edición (cronológica) de sus escritos (en curso; cinco volúmenes publicados; treinta proyectados) [Peirce 1982-93], más de cincuenta monografías sobre los más variados aspectos de su pensamiento, y varias recopilaciones de conferencias. La ignorancia de la obra de Peirce, por lo tanto, ya no puede seguirse justificando. Tanto la reedición de sus escritos, como los estudios cuidadosos de su obra, indican una notabilísima *coherencia* en el pensamiento de Peirce, contrariamente a las falsas imágenes que se tenían, en general, hasta los años 70. En el centro de la arquitectónica de su edificio se encuentran, de manera muy explícita, las matemáticas y la lógica; las consideraciones de Peirce son de tanta relevancia para la matemática y la lógica *actuales* (lógica topológica, lógica categórica)[8] como lo fueron para las matemáticas de su época (lógica algebraica, teoría de conjuntos).

La *máxima pragmaticista* (término considerado por Peirce lo suficientemente desagradable como para que no se lo apropiaran los demás pragmatistas, que tendían ya a un conductismo determinista del cual Peirce necesitaba desligarse) indica que el conocimiento es representacional, contextual y relacional, y que un tal proceso de comprensión es el único posible (no existirían esencias en sí, trascendentes, incognoscibles): el conocimiento de un objeto (o concepto) consiste en el estudio de *todos los posibles* efectos contextuales (reacciones, relaciones) que se originan en las representaciones de ese objeto (o concepto). El pragmaticismo de Peirce está ligado a un estudio fundamental de modalidades y a un amplio espectro de la realidad, que no sólo incluye lo actualmente dado (particulares) sino también 'reales

8. Un reporte de mis trabajos en curso sobre el particular [Zalamea 1997] se encuentra por aparecer en *Mathesis*.

generales' y 'posibilidades reales' (Peirce, al recuperar la creencia escotista de la existencia de generales en la realidad, llamaba a su doctrina 'realismo escolástico'). Dentro del espectro de lo real peirceano (definido como el límite *potencial* al que convergerían los conocimientos de las comunidades de investigadores, si sus investigaciones pudiesen proceder indefinidamente) caben entonces los objetos matemáticos, ya que a menudo son generales (*e.g.* el continuo, el transfinito cantoriano) o posibilidades reales (*e.g.* los modelos no-estándar), así como caben las posibilidades reales de la física subatómica contemporánea. El realismo peirceano (ligado muy estrechamente a principios de continuidad y desarrollado sistemáticamente en los últimos veinte años de su vida) lucha explícitamente —recuérdese, en *cientos* de páginas, y aquí se trata efectivamente de varios cientos de páginas— contra el nominalismo imperante en muchas tendencias científicas. Si recordamos que Gödel consideraba que "uno de los problemas básicos de la filosofía" era "la cuestión de la realidad objetiva de los conceptos y sus relaciones" [EI, 138], y que su lucha más encarnizada consistía en desmontar y descalificar el nominalismo (véanse las múltiples entradas sobre el tema en el índice analítico de [UPE]), vemos que un interlocutor fundamental para reentender a Gödel en el futuro deberá ser Peirce. Obsérvese que Gödel puede haberse encontrado cercano del 'sinejismo' peirceano: en una críptica anotación a la conferencia Gibbs ([CW3, 319, 468]; no aparece en las ediciones de Rodríguez Consuegra), Gödel se refiere a la 'continuidad de la creación'.

En la visión de Peirce, los objetos matemáticos, conceptos y relaciones, entran dentro de los ámbitos modales de una realidad objetiva, no restringida a lo actual y a lo determinista. Peirce insistió en la importancia de una intuición de lo *general*, intuición que se iría desarrollando y afinando con la especie (como consecuencia, los a prioris estarían marcados por la evolución de las mentes humanas y muchas discusiones inconcluyentes podrían redimensionarse al instalarlas en los contextos históricos y relacionales adecuados). La intuición, sin embargo, según Peirce, no debía considerarse como trascendente, como método incognoscible de percepción (lucha contra preceptos del cartesianismo que llevaría a Peirce a la primera elaboración de su pragmatismo). Aquí Peirce y Gödel se distancian, pues la intuición matemática gödeliana parece estar mucho más cercana a una intuición pura, dada inmanentemente, mientras que la intuición peirceana consiste en una adaptación progresiva de la mente a las formas de la realidad, incluyéndose aquí una fundamental intuición evolutiva de lo general, muy típica de las matemáticas (la intuición peirceana está más cercana de las ideas de Tarski [EI, 100-103]).

El intento de Gödel por caracterizar a la matemática como analítica está sujeto a serias dudas, entre las cuales las más relevantes pueden ser el ataque de Quine a la distinción analítico/sintético (estudiado por Rodríguez Consuegra [EI, 67-71]), y la creación y el desarrollo de la teoría matemática de categorías, baluarte de recreación sintética de la mayoría de las matemáticas contemporáneas. Peirce anticipaba ya el interés de métodos sintéticos intrínsecos en el estudio del continuo (el continuo matemático propuesto por Peirce es un continuo modal y categórico en el que se pueden reinterpretar muy bien los resultados de consistencia obtenidos con el *forcing* de Cohen). En vez de tratar de precisar las fronteras entre lo analítico y lo sintético, Peirce propuso una lectura diferente de aspectos primordiales del razonamiento matemático (y, más generalmente, científico). Según Peirce, habría tres tipos básicos de inferencia: *abducción* (creación de hipótesis que expliquen una colección de datos; ámbito de las conjeturas posibles), *inducción* (detección de reglas que engloben una colección de datos; ámbito de las contrastaciones actuales), *deducción* (demostración de leyes que subsuman los datos en lo general; ámbito de las pruebas necesarias). La lógica de la investigación científica incorporaría entonces, ante la observación de ciertas regularidades que llaman poderosamente la atención, tres instancias explicativas: creación de hipótesis que expliquen el fenómeno observado (etapa abductiva), deducción de consecuencias que puedan ser contrastables con el fenómeno (etapa deductiva) y, finalmente, contrastación del fenómeno con las consecuencias obtenidas de las hipótesis (etapa inductiva). Esta demarcación participaría tanto de lo analítico como de lo sintético; la antigua distinción sería reemplazada por una nueva delimitación más cercana a los ámbitos modales de la realidad.

La analogía matemáticas-física sugerida por Gödel se encuentra mucho más mediatizada en la obra peirceana. En la clasificación final de las ciencias propuesta por Peirce (Peirce metodológicamente sometía todos sus escritos a prueba, como consecuencia coherente de su máxima pragmaticista; elaboró más de ciento cincuenta esquemas de clasificación de las ciencias, hasta quedar un poco más conforme con los últimos intentos), las matemáticas —vistas como estudio general de los ámbitos de posibilidad— se encuentran en el tope de la clasificación, mientras que la física —estudio particular, ligado a aspectos actuales de la realidad— se encuentra clasificada mucho más adelante (después de la filosofía, la fenomenología, las ciencias normativas, la metafísica, la sicología, entre otras). El distanciamiento es aquí patente y la analogía matemáticas-física es rechazada por Peirce.

En resumen, el realismo en matemáticas, demasiado ligado al platonismo gödeliano, merece reelaborarse y contrastarse con el realismo peirceano, muy desarrollado por su autor, y que parece ser más acorde a la complejidad de las matemáticas contemporáneas. Si las hipótesis de comprensión realistas prevalecen sobre las nominalistas (como lo esperaban Peirce y Gödel), debe entonces explicarse la intuición de lo general, la intuición de los conceptos abstractos, típica de las matemáticas; aquí, de nuevo, la obra de Peirce podría ser de gran utilidad. Por otro lado, los problemas de lo analítico *versus* lo sintético, y de la analogía matemáticas-física son, en Peirce, replanteados desde ópticas completamente diferentes, inconsistentes con las posiciones de Gödel; aquí el campo de contrastación parecería ser menos fructífero para entender mejor a Gödel. Mencionemos, finalmente, que algunas ideas de Russell (mera probabilidad de las leyes generales [EI, 87]) y de Quine (imposibilidad de verificar hipótesis aisladas [EI, 85]) se encuentran amplia, sistemática y mucho más profundamente estudiadas en los escritos pioneros de Peirce.

Referencias

[EI] Gödel, Kurt. 1994. *Ensayos inéditos*, edición a cargo de Francisco Rodríguez Consuegra. Barcelona: Mondadori.

[UPE] GÖDEL, Kurt. 1995. *Unpublished Philosophical Essays*, edited by Francisco Rodríguez Consuegra, Basel: Birkhäuser.

[RC1] RODRÍGUEZ Consuegra, Francisco. 1992. "Gödel's first works, 1929-1936: *Mathematics without philosophy*? Review of Kurt Gödel, *Collected Works*. Publications 1929-1936. Volume 1", Modern Logic **3**: 58-74.

[RC2] RODRÍGUEZ Consuegra, Francisco. 1994. "Gödel's last works, 1938-1974: *The emerging philosophy*. Review of Kurt Gödel, *Collected Works. Publications 1938-1974*. Volume 2", *Modern Logic* **4**: 318-327.

[RC3] RODRÍGUEZ Consuegra, Francisco. 1996. "Gödel's unpublished manuscripts, *1930-1970: The official edition*. Review of Kurt Gödel, *Collected Works*. Volume 3. Unpublished essays and lectures", *Modern Logic* **6**: 413-421.

[CW1] GÖDEL, Kurt. 1986. *Collected Works. Volume I. Publications 1929-1936*, editor-in-chief Solomon Feferman, New York: Oxford University Press.

[CW2] GÖDEL, Kurt. 1990. *Collected Works. Volume II. Publications 1938-1974*, editor-in-chief Solomon Feferman, New York: Oxford University Press.

[CW3] GÖDEL, Kurt. 1995. *Collected Works. Volume III. Unpublished essays and lectures*, editor-in-chief Solomon Feferman, New York: Oxford University Press.

Referencias adicionales.

DAWSON, Jr., John. 1991. "The reception of Gödel's incompleteness theorems", en: Thomas Drucker (ed.). *Perspectives on the History of Mathematical Logic*. Boston: Birkhäuser, 84-100.

GIRARD, Jean Yves. 1987. *Proof Theory and Logical Complexity, volume I*, Napoli: Bibliopolis.
GÖDEL, Kurt. 1981. *Obras completas*, edición a cargo de Jesús Mosterín, Madrid: Alianza Universidad.
HERBRAND, Jacques. 1931. "Sur la non-contradiction de l'arithmétique", en: J. Herbrand, *Ecrits logiques* (ed. Jean van Heijenoort), Paris: Presses Universitaires de France, 1968, 221-232.
HOUSER, Nathan. 1997. *Studies in the Logic of Charles S. Peirce* (N. Houser, D. Roberts, J. Van Evra, eds.), Bloomington: Indiana University Press.
JACOBSON, Roman. 1977. "Algunas observaciones sobre Peirce, precursor en la ciencia del lenguaje", en: R. Jakobson, *El marco del lenguaje*, México, Fondo de Cultura Económica (traducción de 1988), 33-40.
KREISEL, Georg. 1980. "Kurt Gödel", *Biogr. Memoirs of Fellows of the Royal Society* **26**: 149-224.
LISZKA, James Jakób. 1996. *A General Introduction to the Semeiotic of Charles Sanders Peirce*, Bloomington: Indiana University Press.
MADDY, Peneloppe. 1988. "Believing the axioms I". *Journal of Symbolic Logic* **53** (2): 481-511.
_________. "Believing the axioms II". *Journal of Symbolic Logic* **53** (3): 736-764.
MOORE, Edward. 1993. *Charles S. Peirce and the Philosophy of Science*, Tuscaloosa: The University of Alabama Press.
PEIRCE, Charles Sanders. 1982-93. *Writings of Charles S. Peirce. A Chronological Edition*, (5 vols.), Bloomington: Indiana University Press.
TORRES Alcaraz, Carlos. 1995. "Kurt Gödel: Ensayos inéditos". *Mathesis* **11**: 251-283.
ZALAMEA, Fernando. 1997. "Pragmaticismo, tríadas y continuidad. Aspectos globales y locales de la lógica matemática contemporánea desde perspectivas peirceanas", Reporte de trabajo, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia.

Fernando Zalamea (1959, Bogotá) es profesor asociado en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia. Ph. D. (1991) de la Universidad de Massachussetts (Recursión en Categorías). Ensayista (libro sobre Bajtin) y crítico cultural (reseñas semanales en la prensa colombiana). Dirige, desde 1992, un Seminario de Historia de la Lógica Matemática.