SEMINARI PREDOC
FACULTAT DE MATEMÀTIQUES, BURJASSOT, MAYO 2025

Derivors y morfismos entre sistemas de reescritura

Raúl Ruiz Mora
Departament de Matemàtiques
Universitat de València



01

Álgebra universal

Álgebra sin particularizar estructuras concretas

Signaturas y Σ-algebras

Dada una signatura $\Sigma = (\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, una **$\Sigma$-álgebra** es un par $\mathbf{A} = (A, F)$ donde A es un conjunto y $F = (F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de aplicaciones:

$$\begin{array}{rccc} F_n: & \Sigma_n & \to & \mathrm{Hom}(A^n, A) \\ & \sigma & \mapsto & \sigma^{\mathbf{A}} \end{array}$$

$\sigma^{\mathbf{A}}$ es la interpretación de σ como operación en A.

Signaturas y Σ-algebras

EJEMPLO

La signatura de los grupos sería

$$\Sigma_2 = \{\cdot\}, \quad \Sigma_1 = \{(\bullet)^{-1}\}, \quad \Sigma_0 = \{1\} \quad \text{y} \quad \Sigma_n = \emptyset \text{ si } n \geq 3$$

Así, el grupo de los números enteros es la Σ-álgebra que tiene como universo $\mathbb{Z}$ y donde las operaciones se interpretan:

$$\cdot^{\mathbf{Z}} = +, \quad (\bullet)^{-1\mathbf{Z}} = -, \quad 1^{\mathbf{Z}} = 0.$$

Σ-homomorfismo

Dadas dos Σ-álgebras $\mathbf{A} = (A, F)$ y $\mathbf{B} = (B, G)$, un **Σ-homomorfismo** es una aplicación $f : A \to B$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, cada $\sigma \in \Sigma_n$ y cada $(a_i)_{i \in n} \in A^n$,

$$f(\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i \in n}) = \sigma^{\mathbf{B}}((f(a_i))_{i \in n})$$

Σ-homomorfismo

Dadas dos Σ-álgebras $\mathbf{A} = (A, F)$ y $\mathbf{B} = (B, G)$, un **Σ-homomorfismo** es una aplicación $f : A \to B$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, cada $\sigma \in \Sigma_n$ y cada $(a_i)_{i \in n} \in A^n$,

$$f(\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i \in n}) = \sigma^{\mathbf{B}}((f(a_i))_{i \in n})$$

EJEMPLO

Un homomorfismo de grupos de $\mathbf{G}$ en $\mathbf{H}$ es una aplicación $f \colon G \to H$ tal que

$$f(a \cdot^{\mathbf{G}} b) = f(a) \cdot^{\mathbf{H}} f(b), \quad f(a^{-1\mathbf{G}}) = f(a)^{-1\mathbf{H}}, \quad f(1^{\mathbf{G}}) = 1^{\mathbf{H}}.$$

Términos

Dados un conjunto de variables X y una signatura Σ el conjunto de **Σ-términos sobre X**, denotado $\mathrm{T}_\Sigma(X)$, es el menor conjunto que satisface que

Términos

Dados un conjunto de variables X y una signatura Σ el conjunto de **Σ-términos sobre X**, denotado $\mathrm{T}_\Sigma(X)$, es el menor conjunto que satisface que

1. $X \subseteq \mathrm{T}_\Sigma(X)$; y

Términos

Dados un conjunto de variables X y una signatura Σ el conjunto de **Σ-términos sobre X**, denotado $\mathrm{T}_\Sigma(X)$, es el menor conjunto que satisface que

1. $X \subseteq \mathrm{T}_\Sigma(X)$; y
2. Si $n \in \mathbb{N}$, $\sigma \in \Sigma_n$ y $(P_i)_{i\in n} \in \mathrm{T}_\Sigma(X)$, entonces
$$\sigma((P_i)_{i\in n}) \in \mathrm{T}_\Sigma(X).$$

Términos

Dados un conjunto de variables X y una signatura Σ el conjunto de **Σ-términos sobre X**, denotado $\mathrm{T}_\Sigma(X)$, es el menor conjunto que satisface que

1. $X \subseteq \mathrm{T}_\Sigma(X)$; y
2. Si $n \in \mathbb{N}$, $\sigma \in \Sigma_n$ y $(P_i)_{i\in n} \in \mathrm{T}_\Sigma(X)$, entonces
$$\sigma((P_i)_{i\in n}) \in \mathrm{T}_\Sigma(X).$$

EJEMPLO

Si el conjunto de variables es $X = \{x, y\}$, entonces

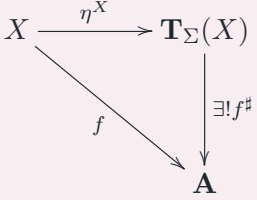
$$x, \quad xy, \quad x^2y, \quad x^2yx^{-1}, \quad x^2yx^{-1}1, \ldots$$

son Σ-términos sobre X.

Términos

PROPIEDAD UNIVERSAL

Sea $\mathbf{A}$ una Σ-álgebra. Si $f\colon X \to \mathbf{A}$, entonces



02

Derivors

¿Cómo comparar diferentes signaturas?

Derivors

Un **derivor** de Σ en Λ escrito $c : \Sigma \to \Lambda$ es una familia de aplicaciones $c = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donde

$$c_n : \Sigma_n \to \mathrm{T}_\Lambda(V_n).$$

Derivors

Un **derivor** de Σ en Λ escrito $c : \Sigma \to \Lambda$ es una familia de aplicaciones $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde

$$c_n : \Sigma_n \to \mathrm{T}_\Lambda(V_n).$$

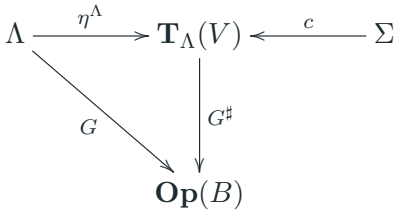
EJEMPLO

En lógica es habitual la noción de la implicación material $P \to Q = \neg P \vee Q$. Así, podemos construir el derivor

$$c_2(\to) = \neg v_0 \vee v_1.$$

Σ-álgebra derivada

Dado un derivor $c : \Sigma \to \Lambda$ y una Λ-álgebra $\mathbf{B} = (B, G)$ podemos considerar su **Σ-álgebra derivada** $c_0^*(\mathbf{B}) = (B, G^\sharp \circ c)$:



La categoría $\mathbf{Sig}_{\partial}$

La categoría $\mathbf{Sig}_{\mathfrak{d}}$

Dada una signatura Σ definimos el derivor **identidad** $\mathrm{id}^{\Sigma} \colon \Sigma \to \Sigma$ como

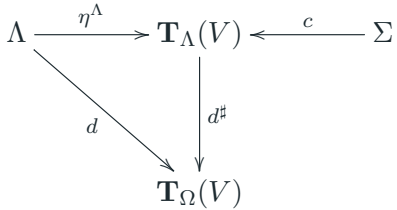
$$\begin{array}{rccl} \mathrm{id}_n^{\Sigma} \colon & \Sigma_n & \to & \mathrm{T}_{\Sigma}(V_n) \\ & \sigma & \mapsto & \sigma(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}) \end{array}$$

La categoría $\mathbf{Sig}_{\mathfrak{d}}$

Dada una signatura Σ definimos el derivor **identidad** $\mathrm{id}^{\Sigma} \colon \Sigma \to \Sigma$ como

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{id}^{\Sigma}_n \colon & \Sigma_n & \to & \mathrm{T}_{\Sigma}(V_n) \\ & \sigma & \mapsto & \sigma(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}) \end{array}$$

Dados dos derivors $c \colon \Sigma \to \Lambda$ y $d \colon \Lambda \to \Omega$ definimos su **composición** $d \circ c$ como $d^{\sharp} \circ c$



La categoría $\mathbf{Sig}_{\mathfrak{d}}$

Se comprueba que

1. La operación $\circ$ es asociativa.
2. Para cada $c\colon \Sigma \to \Lambda$, $\mathrm{id}^{\Lambda} \circ c = c$ y $c \circ \mathrm{id}^{\Sigma} = c$.

La categoría $\mathbf{Sig}_{\mathfrak{d}}$

Se comprueba que

1. La operación $\circ$ es asociativa.
2. Para cada $c\colon \Sigma \to \Lambda$, $\mathrm{id}^{\Lambda} \circ c = c$ y $c \circ \mathrm{id}^{\Sigma} = c$.

TEOREMA

Las signaturas con los derivors como morfismos forman una categoría $\mathbf{Sig}_{\mathfrak{d}}$.

03

0-morfismos

¿Cómo comparar diferentes signaturas y diferentes variables?

0-morfismos

Un 0-**morfismo** de (Σ, X) en (Λ, Y) escrito $\mathbf{f}^{(0)} \colon (\Sigma, X) \to (\Lambda, Y)$ es un par $\mathbf{f}^{(0)} = (c, f^{(0)})$ donde

0-morfismos

Un 0-**morfismo** de (Σ, X) en (Λ, Y) escrito $\mathbf{f}^{(0)} \colon (\Sigma, X) \to (\Lambda, Y)$ es un par $\mathbf{f}^{(0)} = (c, f^{(0)})$ donde

- c es un derivor de Σ en Λ

$$c_n \colon \Sigma_n \to \mathrm{T}_\Lambda(V_n);$$

0-morfismos

Un 0-**morfismo** de (Σ, X) en (Λ, Y) escrito $\mathbf{f}^{(0)} \colon (\Sigma, X) \to (\Lambda, Y)$ es un par $\mathbf{f}^{(0)} = (c, f^{(0)})$ donde

- c es un derivor de Σ en Λ

$$c_n \colon \Sigma_n \to \mathrm{T}_\Lambda(V_n);$$

- $f^{(0)}$ es una aplicación

$$f^{(0)} \colon X \to \mathrm{T}_\Lambda(Y).$$

La categoría $\mathbf{Rws}_{\mathfrak{d}}^{(0)}$

La categoría $\mathbf{Rws}_{\mathfrak{d}}^{(0)}$

Dado un par (Σ, X) definimos el 0-morfismo **identidad** $\mathrm{id}^{(\Sigma,X)} \colon (\Sigma, X) \to (\Sigma, X)$ como

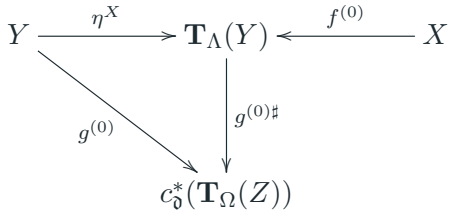
$$\mathrm{id}^{(\Sigma,X)} = (\mathrm{id}^{\Sigma}, \eta^{X}).$$

La categoría $\mathbf{Rws}_{\mathfrak{d}}^{(0)}$

Dado un par (Σ, X) definimos el 0-morfismo **identidad** $\mathrm{id}^{(\Sigma,X)}\colon (\Sigma, X) \to (\Sigma, X)$ como

$$\mathrm{id}^{(\Sigma,X)} = (\mathrm{id}^{\Sigma}, \eta^{X}).$$

Dados dos 0-morfismos $(c, f^{(0)})\colon (\Sigma, X) \to (\Lambda, Y)$ y $(d, g^{(0)})\colon (\Lambda, Y) \to (\Omega, Z)$ definimos su **composición** $(d, g^{(0)}) \circ (c, f^{(0)})$ como $(d^{\sharp} \circ c, g^{(0)\sharp} \circ f^{(0)})$



La categoría $\mathbf{Rws}_{\mathfrak{d}}^{(0)}$

Se comprueba que

1. La operación $\circ$ es asociativa.
2. Para cada $\mathbf{f}^{(0)} \colon (\Sigma, X) \to (\Lambda, Y)$, $\mathrm{id}^{(\Lambda,Y)} \circ \mathbf{f}^{(0)} = \mathbf{f}^{(0)}$ y $\mathbf{f}^{(0)} \circ \mathrm{id}^{(\Sigma,X)} = \mathbf{f}^{(0)}$.

La categoría $\mathbf{Rws}_{\mathfrak{d}}^{(0)}$

Se comprueba que

1. La operación $\circ$ es asociativa.
2. Para cada $\mathbf{f}^{(0)} \colon (\Sigma, X) \to (\Lambda, Y)$, $\mathrm{id}^{(\Lambda,Y)} \circ \mathbf{f}^{(0)} = \mathbf{f}^{(0)}$ y $\mathbf{f}^{(0)} \circ \mathrm{id}^{(\Sigma,X)} = \mathbf{f}^{(0)}$.

TEOREMA

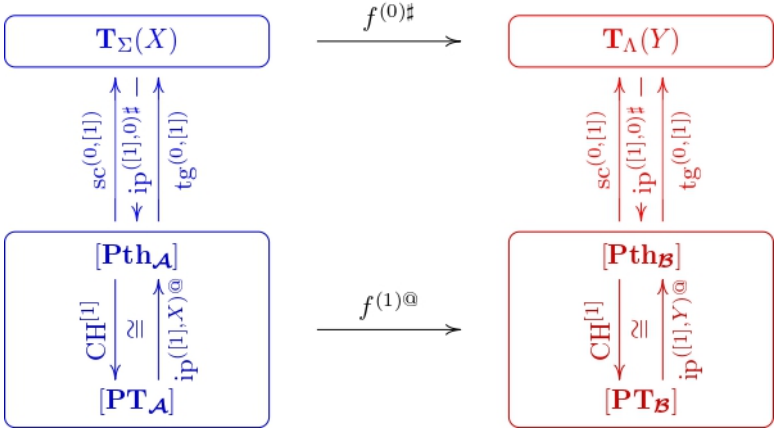
Los pares (Σ, X) con los 0-morfismos forman una categoría $\mathbf{Rws}_{\mathfrak{d}}^{(0)}$.

04

Generalización

¿Cómo comparar diferentes signaturas, diferentes variables, . . .?

Nivel 1


$\mathbf{T}_\Sigma(X)$
$f^{(0)\sharp}$
$\mathbf{T}_\Lambda(Y)$
$\mathrm{sc}^{(0,[1])}$
$\mathrm{ip}^{([1],0)\sharp}$
$\mathrm{tg}^{(0,[1])}$
$[\mathbf{Pth}_{\mathcal{A}}]$
$\mathrm{CH}^{[1]}$
$\cong$
$\mathrm{ip}^{([1],X)@}$
$[\mathbf{PT}_{\mathcal{A}}]$
$f^{(1)@}$
$[\mathbf{Pth}_{\mathcal{B}}]$
$[\mathbf{PT}_{\mathcal{B}}]$
$\mathrm{ip}^{([1],Y)@}$

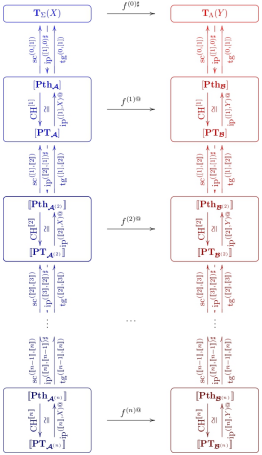
Nivel 1

Para determinar un 1**-morfismo** de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ en $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ asignamos

- a cada operación en Σ una operación derivada en $\mathrm{T}_\Lambda(V)$
- a cada variable en X un término en $\mathrm{T}_\Lambda(Y)$
- a cada regla de reescritura en $\mathcal{A}$, un camino en $\mathrm{Pth}_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$

La aplicación $f^{(1)@}\colon [\mathrm{Pth}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}] \to [\mathrm{Pth}_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}]$, se obtiene por **recursión Artiniana** y por la **propiedad universal** de los cocientes.

Nivel n


$\mathbf{T}_\Sigma(X)$
$f^{(0)\natural}$
$\mathbf{T}_\Lambda(Y)$
$\mathrm{sc}^{(0,1)}$
$\mathrm{ip}^{(0,1)}$
$\mathrm{tg}^{(0,1)}$
$[\mathbf{Pth}_{\mathcal{A}}]$
$\mathrm{CH}^{[1]}$
$\cong$
$\mathrm{ip}^{(1),\mathcal{A}}$
$[\mathbf{PT}_{\mathcal{A}}]$
$f^{(1)\natural}$
$[\mathbf{Pth}_{\mathcal{B}}]$
$\mathrm{ip}^{(1),\mathcal{B}}$
$[\mathbf{PT}_{\mathcal{B}}]$
$\mathrm{sc}^{([1],[2])}$
$\mathrm{ip}^{([2],[1])}$
$\mathrm{tg}^{([1],[2])}$
$[\mathbf{Pth}_{\mathcal{A}^{(2)}}]$
$\mathrm{CH}^{[2]}$
$\mathrm{ip}^{([2]),\mathcal{A}^{(2)}}$
$[\mathbf{PT}_{\mathcal{A}^{(2)}}]$
$f^{(2)\natural}$
$[\mathbf{Pth}_{\mathcal{B}^{(2)}}]$
$\mathrm{ip}^{([2]),\mathcal{B}^{(2)}}$
$[\mathbf{PT}_{\mathcal{B}^{(2)}}]$
$\mathrm{sc}^{([2],[3])}$
$\mathrm{ip}^{([3],[2])}$
$\mathrm{tg}^{([2],[3])}$
$\mathrm{sc}^{([n-1],[n])}$
$\mathrm{ip}^{([n],[n-1])}$
$\mathrm{tg}^{([n-1],[n])}$
$[\mathbf{Pth}_{\mathcal{A}^{(n)}}]$
$\mathrm{CH}^{[n]}$
$\mathrm{ip}^{([n]),\mathcal{A}^{(n)}}$
$[\mathbf{PT}_{\mathcal{A}^{(n)}}]$
$f^{(n)\natural}$
$[\mathbf{Pth}_{\mathcal{B}^{(n)}}]$
$\mathrm{ip}^{([n]),\mathcal{B}^{(n)}}$
$[\mathbf{PT}_{\mathcal{B}^{(n)}}]$

Bibliografía

[1] Juan Climent Vidal and Enric Cosme Llópez, **From higher-order rewriting systems to higher-order categorial algebras and higher-order Curry-Howard isomorphisms**, 2024. arXiv:2402.12051

SEMINARI PREDOC
FACULTAT DE MATEMÀTIQUES, BURJASSOT, MAYO 2025

Derivors y morfismos entre sistemas de reescritura

Raúl Ruiz Mora
Departament de Matemàtiques
Universitat de València

