PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA

CUADERNO DE PRÁCTICAS DE ORDENADOR CON GAMS

CURSO 2005/2006

DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA
ECONÒMICO EMPRESARIAL

Índice de Contenidos.

1.- Planteamiento de un problema de optimización.

En los problemas de optimización hemos de determinar claramente los tres elementos básicos:

1. Determinar las decisiones a tomar: Variables.
2. Analizar las limitaciones del problema: Restricciones
3. Plantear la función objetivo, y la dirección de optimización

Para ello consideremos el siguiente ejemplo:

Una tienda dedicada a la fabricación de trofeos deportivos recibe el encargo de un ayuntamiento de elaborar una serie de trofeos para la Semana Deportiva Municipal. Los trofeos que se han de entregar corresponden a las modalidades de fútbol, basket, carrera y tenis. La tienda ingresa 1200 u.m. por cada trofeo de fútbol, 750 por cada trofeo de basket, 800 por cada uno de carrera y 1000 u.m. por cada trofeo de tenis.

Cada trofeo requiere una serie de materiales para su fabricación: madera para la base, acero para la estructura y oro para los dorados y embellecedores. Además, se conocen las horas de mano de obra que necesita cada trofeo. Los datos aparecen en la siguiente tabla:

	Madera (en kilos)	***Acero (en kilos)***	***Oro (en kilos)***	***Mano de obra (en horas)***
Fútbol	*0.4*	*0.6*	*0.2*	*2.2*
Basket	*0.5*	*0.3*	*0.1*	*1.7*
Carrera	*0.6*	*0.3*	*0.1*	*1.2*
Tenis	*0.4*	*0.45*	*0.15*	*1.3*

Las disponibilidades de la tienda son: 55 kilos de madera, 39 kilos de acero, 23 kilos de oro y 175 horas de mano de obra.

Determinar cual debe ser la producción que maximiza los ingresos.

1.- Decisiones a tomar: Variables.

Lo que hay que decidir es la cantidad de trofeos que ha que producir, en este caso, el número de trofeos de fútbol (se identificará con F), Basket (B), Carrera (C) y Tenis (T). Sobre estas variables debemos considerar además una serie de condiciones, algunas son evidentes como que el numero de trofeos a producir han de ser no negativas. Otras condiciones son por ejemplo, si el numero de trofeos ha de ser un numero entero o bien se pueden entender que el numero de trofeos no terminados en el periodo de tiempo especificado pueden hacerlo en el periodo siguiente.

La denominación (o nombre de las variables) es una cuestión importante, pero en este caso solamente las denominaremos como: F, B, C, y T.

2..- Analizar las limitaciones del problema: Restricciones

En nuestro ejemplo, las limitaciones se basan en los materiales disponibles para la fabricación de los diversos trofeos. Así por ejemplo, uno de los materiales disponibles es la madera. De madera se disponen de 55 kilos, la cual se usa en la producción de los diferentes trofeos. Así debemos considerar las participación en cada trofeo de ese factor de producción. Siguiendo con el recurso de la madera, sabemos que cada trofeo de fútbol utiliza 0.4 kilos de madera, así si en lugar de producir un trofeo de fútbol se producen 10, entonces los kilos de madera utilizados serán 4. De forma similar sabemos que cada trofeo de basket necesita 0.5 kilos, un trofeo de carrera usa 0.6 kilos y un trofeo de tenis necesita 0.4 kilos. Pero es evidente que lo que no se utiliza para un tipo de trofeo se puede utilizar para el otro.

Para este recurso (madera) como para los otros hay un limite de disponibilidad, en este caso de 55 kilos, por tanto la formalización matemática de esta restricción sería de la forma:

$$\text{Madera)} \qquad 0.4\,F + 0.5\,B + 0.6\,C + 0.4\,T \leq 55$$

conviene observar , y tener en cuenta, que las unidades de medida de todos los términos de la restricción son iguales (kilos de madera).

Para las restantes restricciones tendremos:

Acero)	$0.6\ F + 0.3\ B + 0.3\ C + 0.45\ T \leq 39$
Oro)	$0.2\ F + 0.1\ B + 0.1\ C + 0.15\ T \leq 23$
Mano de Obra)	$2.2\ F + 1.7\ B + 1.2\ C + 1.3\ T \leq 175$

3..- Plantear la función objetivo, y la dirección de optimización.

El ejercicio plantea la producción que maximiza los ingresos, por tanto lo que debemos determinar es el ingreso total. La función de ingreso total será la suma de los ingresos producidos por cada uno de los diferentes trofeos, ya que de los cuales conocemos cual es el su ingreso unitario. Así, por cada trofeo de fútbol la tienda ingresa 1.200 u.m., mientras que por los trofeos de basket son de 750 , por los carrera son 800 y por los de tenis, 1.000 u.m..

La formalización matemática será:

Ingreso) $1200\ F + 750\ B + 800\ C + 1000\ T$

La dirección de optimización será de Maximizar estos ingresos.

Por tanto desde el punto de vista matemático, el planteamiento del problema será:

$$\mathbf{Max\ I = 1200\ F + 750\ B + 800\ C + 1000\ T}$$

s.a.:

Madera)	$\mathbf{0.4\ F + 0.5\ B + 0.6\ C + 0.4\ T \leq 55}$
Acero)	$\mathbf{0.6\ F + 0.3\ B + 0.3\ C + 0.45\ T \leq 39}$
Oro)	$\mathbf{0.2\ F + 0.1\ B + 0.1\ C + 0.15\ T \leq 23}$
Mano de Obra)	$\mathbf{2.2\ F + 1.7\ B + 1.2\ C + 1.3\ T \leq 175}$

$$\mathbf{F \geq 0,\ \ B \geq 0;\ \ C \geq 0;\ \ T \geq 0;}$$

2.- GAMS. Instalación. Creación de ficheros y corrección de errores. Uso de las librerias

GAMS son las iniciales de: GENERAL ALGEBRAIC MODELLING SYSTEM, un software de optimización desarrollado inicialmente por técnicos del Banco Mundial para evaluar los modelos de crecimiento de países en vías de desarrollo, y que posteriormente ha ido ampliando sus posibilidades y capacidades.

En la actualidad esta gestionado por una compañía denominada GAMS Corporation que comercializa este tipo de software y da soporte a los diferentes usuarios, existiendo una lista de consultas: GAMS-L, en donde se envían y resuelven cuestiones por parte de GAMS o de otros usuarios.

La practica totalidad de empresa dedicadas a desarrollar software van actualizando progresivamente las versiones de sus productos haciéndolas cada vez accesibles, tanto en el uso como en las prestaciones. GAMS Corporation no podía ser menos, y por ello durante los últimos años ha estado desarrollado una versión de su producto en un entorno integrado, es decir, que sea capaz de aprovechar todas las prestaciones que en la actualidad dispone el sistema operativo Windows®, tanto para las versiones 95, 98 o 2000. Ese esfuerzo ha desembocado en las sucesivas versiones del GAMS-IDE (Integrated Development Enviroment).

Durante mucho tiempo GAMS ha desarrollado su potencial bajo los sistemas DOS y UNIX mientras una parte de su "competencia" LINDO, GINO, etc. desarrollaba sus aplicaciones para Windows. Por ello, ahora nos referiremos a la nueva versión de GAMS-IDE.

Lo primero que necesitamos saber es como poder disponer de una versión del programa. Para obtener una copia de este programa, es necesario conectar con la siguiente dirección:

http://www.gams.com/download/

En esa pagina web (web site) es necesario registrarse con una dirección de correo electrónico. Una vez registrados se recibe una contraseña para poder acceder a la pagina de descarga de los archivos necesarios. En la misma pagina de registro se informa de las limitaciones de esta versión si es usada para construcción y resolución de modelos de optimización:

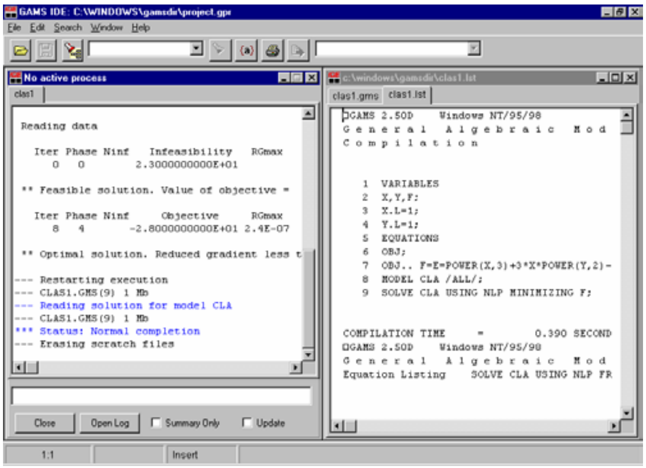
Máximo numero de filas:	300
Máximo numero de columnas:	300
Máximo numero de elementos distintos de cero:	2000
Máximo numero de elementos no lineales:	1000
Máximo numero de variables discretas:	50

Una vez copiados los archivos en el disco, se procede a la instalación automática del programa. En esa instalación se crean el fichero de ayuda necesarias, así como una serie de manuales de ayuda (todos ellos en formato PDF). Estos manuales incluyen una guía de usuario de casi 300 paginas. Además incluye un "Tutorial" de 30 paginas, además de una breve referencia en la ayuda del programa. Pero no solo tiene ayuda sobre el programa, sino también tiene referencias y guías sobre los solvers que se usan como MINOS, CPLEX, OSL, etc.

Una vez instalado se puede ejecutar alguno de los modelos de la librería de programas, ya sea lineal, no lineal, entero, PNL no diferenciable, Programación complementaria, etc.

Como se ha comentado con anterioridad, la versión que se obtiene gratuitamente es una versión "demo" o estudiante, que es perfectamente aplicable a las explicaciones docentes o de apoyo a las clases practicas. Si se requiere resolver modelos de mayor tamaño, la solución inmediata consiste en adquirir una versión "académica" que no tiene limite de capacidad, ya que la única limitación es la disposición del sistema operativo del ordenador sobre el que esta instalado. Esto ocurre con todos los programas "comerciales", que disponen de una versión "reducida" y si se quiere ampliar es necesario adquirir la licencia correspondiente. Sin embargo, si se quiere ampliar la potencia de resolución del programa puede acudirse a una segunda opción, que se comentará más adelante.

En las imágenes anteriores se puede observar la primera portada del programa (dependiendo de la versión), mientras que en la siguiente podemos ver los resultados de la ejecución y los ficheros GMS y LST.



En los ficheros de modelos, hay que organizar una serie de bloques que son obligatorios y otros bloques que son opcionales.

Nos centraremos en los bloques obligatorios, nombrando solamente los optativos.

Los bloques obligatorios son:

Variables	VARIABLES
Ecuaciones	EQUATIONS
Modelo	MODEL
Solución	SOLVE

Los bloques optativos son:

Conjuntos	SET
Datos	DATA
Visualización	DISPLAY

Antes de explicar brevemente cada uno de los bloques obligatorios, siempre comenzaremos el fichero con una serie de indicaciones y comentarios respecto al problemas que vamos a crear.

Estas líneas de comentario o explicación se pueden realizar de dos formas: a) comenzando cada línea con un asterisco (*), en este caso hay que tomar en consideración que ciertos símbolos están prohibidos, como por ejemplo los acentos, b) bien definiendo un bloque de comentarios que comienzan el la primera línea con la marca $ONTEXT y finaliza con la marca de $OFFTEXT, y entre ambas marcas se puede escribir cualquier expresión..

Bloque de variables. Este bloque debe comenzar con la palabra VARIABLES. Dentro de este bloque se han de definir las variables que se van a usar en el modelo, indicando que case son, que tipo de restricciones presentan, si tienen o no cotas, el punto de partida de cada uno de los

Bloque de ecuaciones. Este bloque ha de comenzar con él titulo EQUATIONS. En este bloque hay que declarar y definir las ecuaciones que se van a usar en el modelo.

Bloque de modelo. En este grupo se ha de definir las ecuaciones que componen el modelo. No es obligatorio definir todas las ecuaciones utilizadas. Este bloque tiene que comenzar con el nombre de MODEL.

Bloque de solución. En este bloque hay que indicar que tipo de algoritmo deseamos usar para poder resolver el modelo que se ha definido previamente. A la hora de inicializar este bloque ha de aparecer la palabra SOLVE.

Además de estos cuatro bloques obligatorios, y como ya se ha indicado con anterioridad, se pueden definir otros tres bloques de carácter opcional:

<u>Bloque de Conjuntos. SET</u>. Consiste en definir una serie de conjuntos, por lo general índices, que asignarles unos valores a estos conjuntos.

<u>Bloque de Datos. DATA</u>. no se trata de un único bloque, sino que puede contener diferentes grupos. Se usa para definir una serie de datos fijos dentro del modelo, así podemos definir parámetros (PARAMETERS), tablas (TABLES) y escalares (SCALARS).

<u>Bloque de visualización. DISPLAY</u>. Este bloque permite indicar la clase de salida de datos, y formato, deseamos para el problema. Posteriormente haremos referencia a las diferentes opciones, en principio nos limitaremos a comentarla salida estándar (por defecto) que proporciona GAMS.

Vamos a comenzar por explicar la construcción de un fichero de datos, con los bloques obligatorios.

El fichero lo crearemos utilizando un editor utilizando el nombre de UTILGAMS.GMS. La extensión GMS es la que por defecto se usa para identificar a los ficheros de GAMS.

Comenzaremos la construcción del fichero con una serie de líneas de comentario que nos permitan identificar el problema que vamos a resolver.

Los comentarios pueden ser como los recogidos en el bloque siguiente:

```
$ONTEXT

        Se trata de la creaci¢n de un fichero de datos que permita
crear y resolver un problema clasico de maximizaci¢n de la utilidad
de un consumidor sujeto a una restriccion presupuestaria.

        Para definir el problema, comenzaremos por considerar dos
bienes ( denominaremos X e Y ), cuyos precios de mercado son de
4 y 6 unidades monetarias respectivamente.

        La cantidad total disponible por el consumidor es de 130 u.m.

        La funcion de utilidad del consumidor es:

        U(X,Y) = ( X + 2) * ( Y + 1)

        Por tanto, el problema a resolver sera:

        Max U(X,Y)
        s.a:
        Px * X + Py * Y <= D

        En este problema consideraremos, que nos se pueden adquirir
cantidades negativas de ambos bienes, por tanto, las dos variables
estaran sujetas a las condiciones de no negatividad

A lo largo de la construcci¢n del problema, y mediante un asterisco *
iremos indicando los comentarios pertinente.

        Este bloque de comentarios finalizar con la marca de:

$OFFTEXT
```

El siguiente bloque obligatorio es el bloque de variables. Como su nombre indica este bloque debe ser identificado con la palabra VARIABLES, y dentro de este grupo podemos diferenciar varios apartados.

a) *Nombre de las variables del problema*. (Obligatorio). El nombre de las variables puede ser arbitrario, es decir, x1, Y, alfa, etc., pero siempre de hasta ocho caracteres. Junto al nombre podemos añadir los comentarios pertinentes. Conviene hacer notar que a la hora de definir las variables hemos de definir las variables del modelo, incluyendo la variable que represente el valor de la función objetivo, no obstante, podemos relacionar más variables aunque no se utilicen con posterioridad.

Al final de este bloque, al igual que en todos los bloques, se ha de indicar que ha finalizado mediante un punto y coma (;).

b) *Clase de variables*. Una vez definidas las variables podemos asociar a que clase pertenecen, es decir, si se trata de variables no negativas (POSITIVE), variables libres (FREE), variables binarias (BINARY), variables enteras (INTEGER), etc. El valor por defecto es de variables libre, es decir, que sino indicamos nada de cada variable, se consideran variables libres.

c) *Cotas sobre las variables*. Podemos restringir los valores que pueden tomar las variables introduciendo un valor para las cotas superiores o inferiores de las variables. En caso de no definir las cotas, la opción por defecto, es que las variables pueden tomar cualquier valor entre menos infinito e infinito. Para definir las cotas usaremos:

Cota Superior	Nombre.UP = {valor}
Cota Inferior	Nombre.LO = {valor}

d) *Valores iniciales de las variables*. Aunque posteriormente haremos referencia a la conveniencia de introducir unos valores iniciales de las variables. Todos los algoritmos de resolución necesitan un punto inicial en donde comenzar el proceso iterativo de búsqueda de la solución, por ello es conveniente fijar un punto de partida. En caso de no definir este punto inicial el algoritmo asume que se inicia el proceso en el origen de coordenadas, es decir, (0,0,..0).

La definición de realiza como:

Punto de Partida Nombre.L = {valor}

Vamos a ilustrar lo anterior con el bloque de variables del fichero UTILGAMS.GMS:

```
*PRIMER BLOQUE OBLIGATORIO: BLOQUE DE VARIABLES
*IDENTIFICACION:

VARIABLES

* RELACION DE LAS VARIABLES A INCLUIR:

X       BIEN-1
Y       BIEN-2

* HAY QUE INCLUIR UNA VARIABLE PARA RECOGER EL VALOR DE LA
* FUNCION OBJETIVO. CADA GRUPO FINALIZAR CON UN ;
```

```
F;

*DENTRO DE ESTE MISMO BLOQUE, PODEMOS INCLUIR DOS APARTADOS:
*A) DEFINICION DE LA CLASE DE VARIABLES: NO NEGATIVAS X e Y.

POSITIVE VARIABLES X,Y;

*B) INDICACION DEL PUNTO DE PARTIDA DEL ALGORITMO. PUNTO (1,1)

X.L = 1.0;
Y.L = 1.0;

*FINAL DEL BLOQUE DE VARIABLES.
```

Las dos variables introducidas (X e Y) representan la cantidad a adquirir de cada uno de los dos bienes, mientras que la variable F representa el valor de la función de utilidad. Tal como recoge el enunciado del problema, las cantidades a adquirir de los dos bienes no pueden ser negativas, por tanto, se definen ambas variables como POSITIVE VARIABLES, mientras que la variable F no se clasifica, con lo que se asume que es una variable libre.

Alternativamente a esto se podrían haber utilizado las definiciones de las cotas de las dos variables, en lugar de la etiqueta de variables positivas. Es decir, bastaría con definir una cota inferior de cero para cada variable, y considerar a estas como variables libres. Evidentemente, la formulación elegida es más cómoda a la hora de "visualizar" el problema. La alternativa sería:

```
* RELACION DE LAS VARIABLES A INCLUIR:

X       BIEN-1
Y       BIEN-2

* HAY QUE INCLUIR UNA VARIABLE PARA RECOGER EL VALOR DE LA
* FUNCION OBJETIVO. CADA GRUPO FINALIZAR CON UN ;

F;

*DENTRO DE ESTE MISMO BLOQUE, PODEMOS INCLUIR DOS APARTADOS:
*A) DEFINICION DE COTAS PARA LAS VARIABLES

X.LO = 0.0;
Y.LO = 0.0;
```

Una vez definido el bloque de variables, hemos de incluir el bloque de ecuaciones. Bloque que ha de comenzar con el identificativo EQUATIONS.

Dentro de este bloque podemos considerar dos parte:

a) *Nombre de las funciones o ecuaciones*. Esta primera parte del bloque sirve para relacionar el nombre de todas las funciones que se han de utilizar en el modelo. El nombre de las ecuaciones puede ser arbitrario, y como máximo de ocho caracteres, pudiendo añadirse los comentarios pertinentes. Este grupo finaliza con un punto y coma (;).

b) *Definición de las funciones*. En este apartado hemos de relacionar algebraicamente las variables para formar las funciones. Inicialmente usaremos la notación de:

suma	+		
diferencia	-		
producto	*		
cociente	/		
exponente	**	ó	POWER(X,n)

Para indicar la relación entre la función y los términos independientes de las restricciones usaremos los siguientes símbolos:

igualdad	=E=
menor-igual	=L=
mayor-igual	=G=

Al final de cada ecuación hemos de poner la marca de final, es decir, un punto y coma.

Vamos a ver como hemos construido este bloque en el fichero UTILGAMS.GMS

```
*SEGUNDO BLOQUE OBLIGATIRIO: ECUACIONES.
*INDENTIFICACION:

EQUATIONS

* PRIMERA PARTE DEL BLOQUE: DEFINICION DE LAS FUNCIONES:

UTIL    FUNCION DE UTILIDAD
```

```
RP      RESTRICCION PRESUPUESTARIA;

*SEGUNDA PARTE: DECLARACION DE LAS FUNCIONES:

UTIL.. F =E= (X+2)*(Y+1);

RP.. 4 * X + 6 * Y =L= 130;
```

A partir del enunciado del problema, hemos definido la función de utilidad con el nombre de UTIL y la restricción presupuestaria con el nombre RP.

La función de utilidad la hemos definido tal como aparece en el enunciado del problema, mientras que la restricción presupuestaria se ha obtenido sin más que multiplicar la cantidad a adquirir de cada bien (variables) por el precio correspondiente. El limite de gasto es de 130 unidades monetarias, pero dado que no se exige gastar toda la cantidad disponible, la restricción es de la forma menor-igual.

Nótese que al final de cada ecuación se ha incluido la marca (;).

El tercer bloque obligatorio corresponde al grupo MODEL. En este bloque hay que asignar un nombre al modelo que queremos resolver, así como relacionar las ecuaciones que forman parte del modelo. En el caso que se usen todas las ecuaciones definidas, se puede sustituir el nombre de cada una de ellas por la palabra ALL, es decir, todas las ecuaciones. En este fichero hemos preferido relacionar el nombre todas las ecuaciones. Así, el formato sería:

```
*TERCER BLOQUE OBLIGATORIO: BLOQUE DE MODELO.
* HAY QUE INDICAR EL NOMBRE DEL MODELO Y LAS ECUACIONES QUE
* FORMAN PARTE DEL MISMO.

MODEL UTILGAMS/UTIL,RP/;
```

El cuarto bloque obligatorio a relacionar es del bloque de SOLVE. Aquí hay que indicar lo que queremos hacer con el modelo, es decir, resolverlo. Este bloque consta de tres grupos, aunque se relacionan uno a continuación del otro, indicando:

a) El nombre del modelo a resolver.
b) La clase de modelo de que se trata: LP, NLP. MIP, etc.

c) La dirección de optimización de la función objetivo, es decir, maximizar o minimizar.

El formato sería:

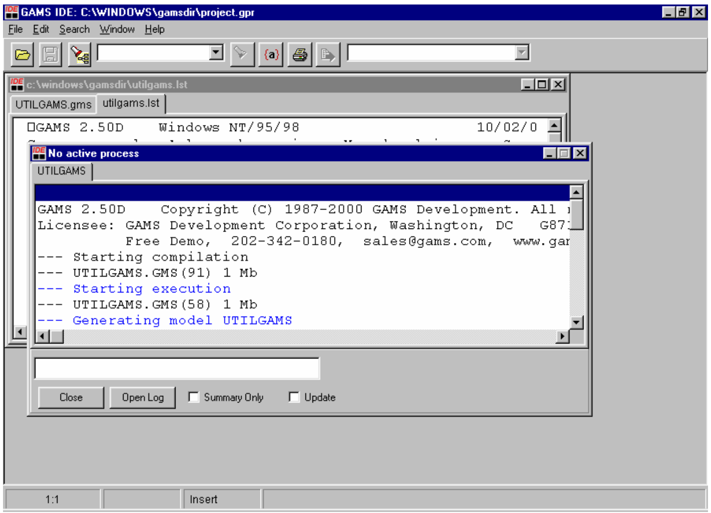
```
*CUARTO BLOQUE OBLIGATORIO: BLOQUE DE SOLUCION.
* DADO QUE SE TRATA DE UN PROBLEMA NO LINEAL, HEMOS DE INDICAR
* QUE HEMOS DE USAR UN PROGRAMA DE PNL (NLP).
* TAMBIEN HEMOS DE INDICAR LA DIRECCION DE OPTIMIZACION:
* MAXIMIZACION O MINIMIZACION DE LA FUNCION OBJETIVO.

SOLVE UTILGAMS USING NLP MAXIMIZING F;
```

Con todo el fichero completo seria de la siguiente forma:

```
$ONTEXT

        Se trata de la creaci¢n de un fichero de datos que permita
crear y resolver un problema clasico de maximizaci¢n de la utilidad
de un consumidor sujeto a una restricci¢n presupuestaria.

        Para definir el problema, comenzaremos por considerar dos
bienes ( denominaremos X e Y ), cuyos precios de mercado son de
4 y 6 unidades monetarias respectivamente.

        La cantidad total disponible por el consumidor es de 130 u.m.

        La funci¢n de utilidad del consumidor es:

        U(X,Y) = ( X + 2) * ( Y + 1)

        Por tanto, el problema a resolver ser :

        Max U(X,Y)
        s.a:
        Px * X + Py * Y <= D

        En este problema consideraremos, que nos se pueden adquirir
cantidades negativas de ambos bienes, por tanto, las dos variables
estaran sujetas a las condiciones de no negatividad

A lo largo de la construcci¢n del problema, y mediante un asterisco *
iremos indicando los comentarios pertinente.

        Este bloque de comentarios finalizar con la marca de:

$OFFTEXT

*PRIMER BLOQUE OBLIGATORIO: BLOQUE DE VARIABLES
*IDENTIFICACION:

VARIABLES

* RELACION DE LAS VARIABLES A INCLUIR:
```

```
X       BIEN-1
Y       BIEN-2

* HAY QUE INCLUIR UNA VARIABLE PARA RECOGER EL VALOR DE LA
* FUNCION OBJETIVO. CADA GRUPO FINALIZAR CON UN ;

F;

*DENTRO DE ESTE MISMO BLOQUE, PODEMOS INCLUIR DOS APARTADOS:
*A) DEFINICION DE LA CLASE DE VARIABLES: NO NEGATIVAS X e Y.

POSITIVE VARIABLES X,Y;

*B) INDICACION DEL PUNTO DE PARTIDA DEL ALGORITMO.

X.L = 1.0;
Y.L = 1.0;

*FINAL DEL BLOQUE DE VARIABLES.

*SEGUNDO BLOQUE OBLIGATIRIO: ECUACIONES.
*INDENTIFICACION:

EQUATIONS

* PRIMERA PARTE DEL BLOQUE: DEFINICION DE LAS FUNCIONES:

UTIL    FUNCION DE UTILIDAD
RP      RESTRICCION PRESUPUESTARIA;

*SEGUNDA PARTE: DECLARACION DE LAS FUNCIONES:

UTIL.. F =E= (X+2)*(Y+1);

RP.. 4 * X + 6 * Y =L= 130;

*TERCER BLOQUE OBLIGATORIO: BLOQUE DE MODELO.
* HAY QUE INDICAR EL NOMBRE DEL MODELO Y LAS ECUACIONES QUE
* FORMAN PARTE DEL MISMO.

MODEL UTILGAMS/UTIL,RP/;

*CUARTO BLOQUE OBLIGATORIO: BLOQUE DE SOLUCION.
* DADO QUE SE TRATA DE UN PROBLEMA NO LINEAL, HEMOS DE INDICAR
* QUE HEMOS DE USAR UN PROGRAMA DE PNL (NLP).
* TAMBIEN HEMOS DE INDICAR LA DIRECCION DE OPTIMIZACION:
* MAXIMIZACION O MINIMIZACION DE LA FUNCION OBJETIVO.

SOLVE UTILGAMS USING NLP MAXIMIZING F;
```

Una vez creado, y archivado, el fichero correspondiente, es necesario resolverlo. Para ello hay que ejecutar el programa GAMS. Para ello se elige la opción RUN en FILE o pulsando F9, con ello se obtiene una pantalla como la siguiente:



De esa pantalla, lo más importante es el fichero LST:

```
GAMS Rev 121  Windows NT/95/98                    05/14/01 21:11:22  PAGE      1
G e n e r a l   A l g e b r a i c   M o d e l i n g   S y s t e m
C o m p i l a t i o n



              Se trata de la creaci¢n de un fichero de datos que permita
      crear y resolver un problema clasico de maximizaci¢n de la utilidad
      de un consumidor sujeto a una restricci¢n presupuestaria.

              Para definir el problema, comenzaremos por considerar dos
      bienes ( denominaremos X e Y ), cuyos precios de mercado son de
      4 y 6 unidades monetarias respectivamente.

              La cantidad total disponible por el consumidor es de 130 u.m.

              La funci¢n de utilidad del consumidor es:

              U(X,Y) = ( X + 2) * ( Y + 1)

              Por tanto, el problema a resolver ser :

              Max U(X,Y)
              s.a:
              Px * X + Py * Y <= D

              En este problema consideraremos, que nos se pueden adquirir
      cantidades negativas de ambos bienes, por tanto, las dos variables
      estaran sujetas a las condiciones de no negatividad

      A lo largo de la construcci¢n del problema, y mediante un asterisco *
      iremos indicando los comentarios pertinente.

              Este bloque de comentarios finalizar con la marca de:


       *PRIMER BLOQUE OBLIGATORIO: BLOQUE DE VARIABLES
       *IDENTIFICACION:

       VARIABLES
```

```

* RELACION DE LAS VARIABLES A INCLUIR:

X       BIEN-1
Y       BIEN-2

* HAY QUE INCLUIR UNA VARIABLE PARA RECOGER EL VALOR DE LA
* FUNCION OBJETIVO. CADA GRUPO FINALIZAR CON UN ;

F;

*DENTRO DE ESTE MISMO BLOQUE, PODEMOS INCLUIR DOS APARTADOS:
*A) DEFINICION DE LA CLASE DE VARIABLES: NO NEGATIVAS X e Y.

POSITIVE VARIABLES X,Y;

*B) INDICACION DEL PUNTO DE PARTIDA DEL ALGORITMO.

X.L = 1.0;

GAMS Rev 121  Windows NT/95/98                05/14/01 21:11:22  PAGE      2
G e n e r a l   A l g e b r a i c   M o d e l i n g   S y s t e m
C o m p i l a t i o n


Y.L = 1.0;

*FINAL DEL BLOQUE DE VARIABLES.

*SEGUNDO BLOQUE OBLIGATIRIO: ECUACIONES.
*INDENTIFICACION:

EQUATIONS

* PRIMERA PARTE DEL BLOQUE: DEFINICION DE LAS FUNCIONES:

UTIL    FUNCION DE UTILIDAD
RP      RESTRICCION PRESUPUESTARIA;

*SEGUNDA PARTE: DECLARACION DE LAS FUNCIONES:

UTIL.. F =E= (X+2)*(Y+1);

RP.. 4 * X + 6 * Y =L= 130;

*TERCER BLOQUE OBLIGATORIO: BLOQUE DE MODELO.
* HAY QUE INDICAR EL NOMBRE DEL MODELO Y LAS ECUACIONES QUE
* FORMAN PARTE DEL MISMO.

MODEL UTILGAMS/UTIL,RP/;

*CUARTO BLOQUE OBLIGATORIO: BLOQUE DE SOLUCION.
* DADO QUE SE TRATA DE UN PROBLEMA NO LINEAL, HEMOS DE INDICAR
* QUE HEMOS DE USAR UN PROGRAMA DE PNL (NLP).
* TAMBIEN HEMOS DE INDICAR LA DIRECCION DE OPTIMIZACION:
* MAXIMIZACION O MINIMIZACION DE LA FUNCION OBJETIVO.

SOLVE UTILGAMS USING NLP MAXIMIZING F;

```

```
COMPILATION TIME     =        0.000 SECONDS    0.7 Mb      WIN200-121
====================================================================
GAMS Rev 121  Windows NT/95/98                05/14/01 21:11:22  PAGE      3
G e n e r a l   A l g e b r a i c   M o d e l i n g   S y s t e m
Equation Listing    SOLVE UTILGAMS USING NLP FROM LINE 90


---- UTIL  =E=  FUNCION DE UTILIDAD


UTIL..  - (2)*X - (3)*Y + F =E= 0 ; (LHS = -6, INFES = 6 ***)


---- RP  =L=  RESTRICCION PRESUPUESTARIA


RP..  4*X + 6*Y =L= 130 ; (LHS = 10)
====================================================================


GAMS Rev 121  Windows NT/95/98                05/14/01 21:11:2  PAGE      4
G e n e r a l   A l g e b r a i c   M o d e l i n g   S y s t e m
Column Listing      SOLVE UTILGAMS USING NLP FROM LINE 90


---- X  BIEN-1


X
                (.LO, .L, .UP = 0, 1, +INF)
      (-2)      UTIL
        4       RP


---- Y  BIEN-2


Y
                (.LO, .L, .UP = 0, 1, +INF)
      (-3)      UTIL
        6       RP


---- F


F
                (.LO, .L, .UP = -INF, 0, +INF)
        1       UTIL
====================================================================

GAMS Rev 121  Windows NT/95/98                05/14/01 21:11:22  PAGE      5
G e n e r a l   A l g e b r a i c   M o d e l i n g   S y s t e m
Model Statistics    SOLVE UTILGAMS USING NLP FROM LINE 90

MODEL STATISTICS

BLOCKS OF EQUATIONS        2     SINGLE EQUATIONS        2
BLOCKS OF VARIABLES        3     SINGLE VARIABLES        3
NON ZERO ELEMENTS          5     NON LINEAR N-Z          2
DERIVATIVE POOL            5     CONSTANT POOL           8
CODE LENGTH               18
```

```
GENERATION TIME      =        0.050 SECONDS    1.9 Mb      WIN200-121


EXECUTION TIME       =        0.050 SECONDS    1.9 Mb      WIN200-121
======================================================================

GAMS Rev 121  Windows NT/95/98                   05/14/01 21:11:22  PAGE      6
G e n e r a l   A l g e b r a i c   M o d e l i n g   S y s t e m



               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   UTILGAMS            OBJECTIVE  F
     TYPE    NLP                 DIRECTION  MAXIMIZE
     SOLVER  MINOS5              FROM LINE  90

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      2 LOCALLY OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE              216.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.109      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT         3         10000
 EVALUATION ERRORS              0             0

 MINOS5        Mar 21, 2001 WIN.M5.M5 20.0 108.043.039.WAT

     B. A. Murtagh, University of New South Wales
       and
     P. E. Gill,  W. Murray,  M. A. Saunders and M. H. Wright
     Systems Optimization Laboratory, Stanford University.


 Work space allocated           --    0.04 Mb



 EXIT -- OPTIMAL SOLUTION FOUND
 MAJOR ITNS, LIMIT            1     200
 FUNOBJ, FUNCON CALLS         8       0
 SUPERBASICS                  1
 INTERPRETER USAGE         0.00
 NORM RG / NORM PI     6.280E-16

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU UTIL            .         .         .        1.000
---- EQU RP            -INF    130.000   130.000     3.000

  UTIL  FUNCION DE UTILIDAD
  RP  RESTRICCION PRESUPUESTARIA

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR X               .       16.000     +INF       EPS
---- VAR Y               .       11.000     +INF        .
---- VAR F             -INF    216.000     +INF        .

  X  BIEN-1
```

```
  Y  BIEN-2
  F
======================================================================

GAMS Rev 121  Windows NT/95/98                05/14/01 21:11:22  PAGE      7
G e n e r a l   A l g e b r a i c   M o d e l i n g   S y s t e m



**** REPORT SUMMARY :        0     NONOPT
                             0 INFEASIBLE
                             0  UNBOUNDED
                             0     ERRORS


EXECUTION TIME       =        0.000 SECONDS    0.7 Mb      WIN200-121


USER: Ramon Sala Garrido                                G010426:1108AV-
WIN

**** FILE SUMMARY

INPUT      D:\UTILGAMS.GMS
OUTPUT     C:\UTILGAMS.LST
```

Las primeras paginas, en este caso las paginas 1 y 2, recogen el fichero de datos (UTILGMS.GMS). En el caso que se haya producido errores en el fichero original, el programa los detecta y señala adecuadamente, así como da una breve indicación del procedimiento de solución.

En este caso no se han producido errores, y por ello, recoge el fichero de datos original, sin mas que numerar las filas del texto fuera del espacio marcado con ONTEXT-OFFTEXT. Esta parte del fichero se conoce con el nombre de *compilación de datos*

También se indica el tiempo, en segundos, que se ha tardado en realizar el proceso de compilación

Una vez relacionado el fichero de datos, GAMS realiza un análisis de las ecuaciones y de las variables del modelo. Las paginas 4 y 5 recogen estos análisis.

La pagina 3 se dedica a relacionar las ecuaciones utilizadas, con los coeficientes, evaluados en el punto de partida, y analizando si se cumplen o no las ecuaciones en ese punto. Así por ejemplo, en el caso de la restricción presupuestaria, donde los coeficientes de las variables son constantes (4 y 6) están asociados a cada una de las variables, y en el punto de partida (1,1), el valor de la función es de 10, frente a 130 que vale el termino independiente, por ello no advierte que tres asteriscos que no se cumple la ecuación, pero no tiene mayor importancia, ya que el propio algoritmo buscara un punto factible posteriormente.

En la pagina 4 se recoge la información relativa a las variables, así por ejemplo, referente a la variable X, o BIEN-1, aparece por una parte: (.LO, .L, .UP = 0, 1, +INF), esta expresión nos informa de las cotas y el punto de partida de la variable. La cota inferior (.LO) es cero, ya que la variable ha sido declarada como no negativa, la cota superior (.UP) no ha sido definida y por tanto el valor que toma por defecto es más infinito. El punto de partida que hemos elegido es 1, por ello (.L = 1).

Además, aparecen los coeficientes asociados a cada una de las variables en las diferentes ecuaciones. Aquí, conviene advertir que los que aparecen asociados a la función objetivo llevan el signo de minimización (sí el problema es de máximo se le cambia el signo) y el valor inicial asociado a las restantes variables.

El contenido de estas paginas es el siguiente:

La pagina 5 informa sobre la estadística del modelo ejecutado, es decir, nos informa sobre el número de variables y ecuaciones, del numero de elementos distintos de cero, etc. Asimismo, nos muestra el tiempo empleado en general el código compilado y el tiempo de ejecución del problema.

El formato de esta pagina es el siguiente:

De todas las paginas de la solución la más importante de todas ellas es la pagina titulada REPORT SOLUTION. Como indica su nombre nos informa sobre la solución del problema.

Dentro de este informe podemos distinguir claramente tres partes:

a) *Resumen de la solución (SOLVE SUMMARY).* En esta parte se informa del comportamiento de la solución, del tipo de modelo usado, la dirección de la optimización, etc. Es importante hacer notar, tanto aquí como a lo largo del fichero, que hay que prestar una extraordinaria atención a las líneas inicializadas con cuatro asteriscos (****), en este caso nos advierten que se ha completado correctamente el proceso y que la solución es optima (en esta caso localmente optima)

Este primer bloque se recoge a continuación, junto a la información del algoritmo usado (MINOS5).

b) El segundo bloque corresponde a la *solución propiamente dicha*. Aparece en primer lugar el comportamiento de las ecuaciones, es decir, el valor que toma cada una de las restricciones y la función objetivo.

La información respecto a la función objetivo es prácticamente nula. La restricción RP es una restricción de la forma menor-igual, por tanto esta acotada superiormente por el valor del termino independiente, mientras que la cota inferior es de menos infinito. El valor de la restricción en el punto solución optima es el mismo que el del termino independiente - se comporta como una igualdad, esta saturada -, además hay que destacar que la columna MARGINAL recoge el valor de los multiplicadores de las restricciones, es decir, las variables duales.

Cuando aparece un punto (.)significa que el valor es cero, mientras que si aparece el símbolo EPS (épsilon) el valor es prácticamente cero pero no es nulo.

La información de las variables es similar, al de las ecuaciones, aparecen las cotas inferiores y superiores, así como el valor de la solución (LEVEL), es este caso podemos comprobar que los valores son X = 16, Y = 11, siendo el valor de la función objetivo de F = 216. Este grupo se recoge en el siguiente bloque:

c) El ultimo *bloque esta destinado a indicarnos los errores aparecidos* durante la ejecución de las búsqueda de la solución. En este caso observamos que en el bloque comienza con cuatro asteriscos, y por tanto es importante hacer una referencia a esta información. Los resultados nos indican el numero de variables no optimas , infactibles o no acotadas que se han encontrado, así como el numero de errores. Al ser todos ellos 0, la solución es correcta.

Aparece información referente al tiempo de ejecución, el nombre del usuario, y de los ficheros de datos y solución.

Con lo que acabamos de exponer podemos crear y resolver un modelo con GAMS. Aunque ya se ha expuesto con anterioridad es bastante fácil cometer errores, sobre todo al inicio del uso de GAMS, en la creación de los ficheros de datos. Para ello, vamos a dar una serie de indicaciones de como detectar, y corregir, algunos de los errores que se comenten con mayor frecuencia.

Comenzaremos por crear un fichero de datos, que vamos a denominar: **UTILERR.GMS**. Este fichero es similar al que hemos creado con anterioridad.

El contenido del fichero de datos es el siguiente:

```
VARIABLES


X        BIEN-1
Y        BIEN-2
F;

POSITIVE VARIABLES X,Y

X.L = 1.0;
Y.L = 1.0;

EQUATIONS

UTIL     FUNCION DE UTILIDAD
RP       RESTRICCION PRESUPUESTARIA;

UTIL.. F = (X+2)*(Y+1;

RP.. 4X + 6 * Y =L= 130;

MODEL UTILGAMS/UTIL,RP1/;

SOLVE UTILGAMS USING NLP MAXIMIZING F;
```

Al ejecutar este fichero de datos con GAMS, nos proporciona el fichero de resultados, obviamente con errores, pero además nos informa sobre la naturaleza de los errores cometidos y/o la forma de subsanarlos.

Vamos a analizar línea a línea los errores. Obsérvese que debajo de cada línea aparecen cuatro asteriscos así como una serie de numero precedidos por el símbolo $.

```
GAMS Rev 121  Windows NT/95/98                    05/14/01 21:16:51  PAGE      1
G e n e r a l   A l g e b r a i c   M o d e l i n g   S y s t e m
C o m p i l a t i o n

   1
   2  VARIABLES
   3
   4
   5  X       BIEN-1
   6  Y       BIEN-2
   7  F;
   8
   9  POSITIVE VARIABLES X,Y
  10
  11  X.L = 1.0;
****    $142$97
  12  Y.L = 1.0;
  13
  14  EQUATIONS
  15
  16  UTIL    FUNCION DE UTILIDAD
  17  RP      RESTRICCION PRESUPUESTARIA;
  18
  19  UTIL.. F = (X+2)*(Y+1;
****                     $8,37
  20
  21  RP.. 4X + 6 * Y =L= 130;
****        $37,409
  22
  23  MODEL UTILGAMS/UTIL,RP1/;
****                      $140
  24
  25  SOLVE UTILGAMS USING NLP MAXIMIZING F;
****                                    $257
GAMS Rev 121  Windows NT/95/98                    05/14/01 21:16:51  PAGE      2
G e n e r a l   A l g e b r a i c   M o d e l i n g   S y s t e m
Error Messages

  8  ')' expected
 37  '=l=' or '=e=' or '=g=' operator expected
 97  Explanatory text can not start with '$', '=', or '..'
       (-or- check for missing ';' on previous line)
140  Unknown symbol
142  No suffix allowed here - suffix ignored
257  Solve statement not checked because of previous errors
409  Unrecognizable item - skip to find a new statement
       looking for a ';' or a key word to get started again

**** 8 ERROR(S)   0 WARNING(S)

COMPILATION TIME     =        0.050 SECONDS     0.7 Mb      WIN200-121

USER: Ramon Sala Garrido                              G010426:1108AV-WIN

**** FILE SUMMARY
INPUT      D:\UTILERR.GMS
OUTPUT     C:\UTILERR.LST
**** USER ERROR(S) ENCOUNTERED
```

La primera línea con indicación de errores es la línea 11. Los números de codificación de los errores corresponden al 142 y 97. En la pagina 2, estos números corresponden a los mensajes de error que informan que en la línea anterior falta la marca de final (;). Es decir, en la línea 8 la instrucción POSITIVE VARIABLES X,Y ha de finalizar con un punto y coma.

En la línea 19, nos indica dos errores - números 8 y 37 -, que corresponden a: Falta un paréntesis y el operador =E=. Evidentemente falta el paréntesis final y el signo de igualdad en las ecuaciones no es = sino =E=.

A veces aparecen varios números de errores, sin aparente relación con el error cometido originalmente, pero es necesario analizarlos todos. Así por ejemplo, en la línea 21, los mensajes de error son los números: 37 y 409. Siendo el verdadero error el que se ha omitido el signo * entre el coeficiente y la variable X.

En la línea 23, aparece el error 140 - símbolo desconocido -, ello se debe a que hemos declarado que el modelo esta formado por una ecuación que no hemos definido en el bloque de variables.

Siempre que aparecen errores de usuario en el fichero, también se especifica el error 257, que significa que no se ha resuelto el modelo porque se han detectado errores anteriores.

Una vez analizados los errores en el fichero *.LST, hay que volver a editar el fichero *.GMS y corregir en este fichero los errores detectados. Una vez corregidos hay que volver a ejecutar el fichero *.GMS y comprobar que se han subsanado los mismos, ya que en caso contrario hay que volver a repetir la operación de análisis de los errores.

A veces el tamaño del problema hace difícil resolver el problema por las limitaciones del solver se hace necesario usar un segundo procedimiento y es a través de Internet.

A veces es posible acudir a ejemplo o modelos ya desarrollados, es decir, hacer uso de las librerías de modelos. Por ello vamos a exponer brevemente el uso de las librerías de modelos

GAMS dispone de la posibilidad de consultar unas librerías de modelos ya construidos. Las librerías que pueden consultarse son la de GAMS o las que defina el propio usuario.

3.- Problemas de Programación Clásica sin restricciones.

Los problemas de programación clásica se caracterizan por no tener ningún tipo de condiciones sobre las variables, y donde la función objetivo no esta sujeta a ningún tipo de restricciones o limitaciones, o si estas existen son restricciones de igualdad.

Comenzaremos con unos ejemplos de problemas sin restricciones.

Ejemplo 3.1:

$$\mathbf{Min\ Z = (x-2)^2 + (y-3)^2}$$

El fichero GMS correspondiente será:

```
*EJEMPLO 3.1
*Minimizar un funcion sin restricicones

VARIABLES
Z, X, Y;

X.L = 1;
Y.L = 2;

EQUATIONS
OBJ;
OBJ.. Z =E= POWER(X-2, 2) + POWER(Y-3,2);

MODEL EJ31 /OBJ/;

SOLVE EJ31 USING NLP MINIMIZING Z;
```

La solución será:

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   EJ31                 OBJECTIVE  Z
     TYPE    NLP                  DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER  MINOS5               FROM LINE  16

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      2 LOCALLY OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE               0.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT           0.109      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT          1         10000
 EVALUATION ERRORS               0             0

 MINOS5        Mar 21, 2001 WIN.M5.M5 20.0 108.043.039.WAT

     B. A. Murtagh, University of New South Wales
       and
     P. E. Gill,  W. Murray,  M. A. Saunders and M. H. Wright
     Systems Optimization Laboratory, Stanford University.


 Work space allocated           --    0.04 Mb



 EXIT -- OPTIMAL SOLUTION FOUND
 MAJOR ITNS, LIMIT             1     200
 FUNOBJ, FUNCON CALLS          6       0
 SUPERBASICS                   2
 INTERPRETER USAGE          0.00
 NORM RG / NORM PI     0.000E+00

                      LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU OBJ            .         .         .        1.000

                      LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR Z             -INF       .        +INF        .
---- VAR X             -INF      2.000     +INF       EPS
---- VAR Y             -INF      3.000     +INF       EPS
```

Ejemplo 3.2: Dada la función:

$$F(x, y) = x^3 + 3\,x\,y^2 - 15\,x - 12\,y$$

Obtener los máximos y los mínimos de esta función:

Para obtener los máximos, el fichero GMS será:

```
*EJEMPLO 3.2.A
*MAXIMIZAR un funcion sin restriciciones

VARIABLES
F, X, Y;

X.L = 1;
Y.L = 1;

EQUATIONS
OBJ;
OBJ.. F =E= POWER(X,3) + 3*X*POWER(Y,2) - 15*X - 12*Y;
MODEL EJ32A /OBJ/;
SOLVE EJ32A USING NLP MAXIMIZING F;
```

La solución es:

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   EJ32A               OBJECTIVE  F
     TYPE    NLP                 DIRECTION  MAXIMIZE
     SOLVER  MINOS5              FROM LINE  14

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      2 LOCALLY OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE               28.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.164      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT         1         10000
 EVALUATION ERRORS              0             0

 MINOS5        Mar 21, 2001 WIN.M5.M5 20.0 108.043.039.WAT

 Work space allocated           --    0.04 Mb

 EXIT -- OPTIMAL SOLUTION FOUND
 MAJOR ITNS, LIMIT             1     200
 FUNOBJ, FUNCON CALLS          6       0
 SUPERBASICS                   2
 INTERPRETER USAGE          0.00
 NORM RG / NORM PI     3.553E-15
```

```
                         LOWER      LEVEL      UPPER     MARGINAL

---- EQU OBJ               .          .          .         1.000

                         LOWER      LEVEL      UPPER     MARGINAL

---- VAR F                -INF      28.000      +INF        .
---- VAR X                -INF      -2.000      +INF       EPS
---- VAR Y                -INF      -1.000      +INF       EPS
```

Pero si variamos ligeramente el punto de partida, podremos comprobar que la solución es muy inestable.

```
*EJEMPLO 3.2.A-1
*MAXIMIZAR un funcion sin restricicones

VARIABLES
F, X, Y;

X.L = 10;
Y.L = 10;

EQUATIONS
OBJ;
OBJ.. F =E= POWER(X,3) + 3*X*POWER(Y,2) - 15*X - 12*Y;
MODEL EJ32A1 /OBJ/;
SOLVE EJ32A1 USING NLP MAXIMIZING F;
```

Se tiene:

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   EJ32A1              OBJECTIVE  F
     TYPE    NLP                 DIRECTION  MAXIMIZE
     SOLVER  MINOS5              FROM LINE  14

**** SOLVER STATUS     5 EVALUATION ERROR LIMIT
**** MODEL STATUS      7 INTERMEDIATE NONOPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE             3730.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.109      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT         0         10000
 EVALUATION ERRORS              1             0

 MINOS5        Mar 21, 2001 WIN.M5.M5 20.0 108.043.039.WAT

 Work space allocated           --    0.04 Mb

 EXIT -- Termination requested by User in subroutine FUNOBJ after         9
calls
 MAJOR ITNS, LIMIT             1     200
 FUNOBJ, FUNCON CALLS          9       0
 SUPERBASICS                   2
 INTERPRETER USAGE          0.00
 NORM RG / NORM PI     5.880E+02

**** ERRORS(S) IN EQUATION OBJ
     1 instance(s) of - INTEGER POWER OVERFLOW (RETURNED  0.1E+21)

                         LOWER      LEVEL      UPPER     MARGINAL
```

```
---- EQU OBJ              .         .         .        1.000

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- VAR F              -INF   3730.000     +INF        .
---- VAR X              -INF  2.0488E+8     +INF  1.272E+17  NOPT
---- VAR Y              -INF  2.0593E+8     +INF  2.532E+17  NOPT

**** REPORT SUMMARY :        2     NONOPT ( NOPT)
                             0 INFEASIBLE
                             0  UNBOUNDED
                             1     ERRORS ( ****)
```

Para determinar los mínimos:

```
*EJEMPLO 3.2.B
*Minimizar un funcion sin restricicones

VARIABLES
F, X, Y;

X.L = 1;
Y.L = 1;

EQUATIONS
OBJ;
OBJ.. F =E= POWER(X,3) + 3*X*POWER(Y,2) - 15*X - 12*Y;
MODEL EJ32B /OBJ/;
SOLVE EJ32B USING NLP MINIMIZING F;
```

La solución:

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   EJ32B               OBJECTIVE  F
     TYPE    NLP                 DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER  MINOS5              FROM LINE  14

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      2 LOCALLY OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE              -28.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.117      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT         4         10000
 EVALUATION ERRORS              0             0

 MINOS5        Mar 21, 2001 WIN.M5.M5 20.0 108.043.039.WAT

 EXIT -- OPTIMAL SOLUTION FOUND
 MAJOR ITNS, LIMIT             1     200
 FUNOBJ, FUNCON CALLS         12       0
 SUPERBASICS                   2
 INTERPRETER USAGE          0.00
```

```
 NORM RG / NORM PI      2.013E-07

                        LOWER      LEVEL      UPPER     MARGINAL

---- EQU OBJ              .          .          .         1.000

                        LOWER      LEVEL      UPPER     MARGINAL

---- VAR F               -INF    -28.000      +INF        .
---- VAR X               -INF      2.000      +INF       EPS
---- VAR Y               -INF      1.000      +INF       EPS
```

Pero al igual que antes una ligera modificación del punto de partida:

```
*EJEMPLO 3.2.B
*Minimizar un funcion sin restricicones

VARIABLES
F, X, Y;

X.L = 10;
Y.L = 10;

EQUATIONS
OBJ;
OBJ.. F =E= POWER(X,3) + 3*X*POWER(Y,2) - 15*X - 12*Y;
MODEL EJ32B /OBJ/;
SOLVE EJ32B USING NLP MINIMIZING F;
```

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   EJ32B               OBJECTIVE  F
     TYPE    NLP                 DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER  MINOS5              FROM LINE  14

**** SOLVER STATUS      5 EVALUATION ERROR LIMIT
**** MODEL STATUS       7 INTERMEDIATE NONOPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE             3730.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT           0.000      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT          0         10000
 EVALUATION ERRORS               1             0

 MINOS5        Mar 21, 2001 WIN.M5.M5 20.0 108.043.039.WAT

 EXIT -- Termination requested by User in subroutine FUNOBJ after       9
calls
 MAJOR ITNS, LIMIT              1     200
 FUNOBJ, FUNCON CALLS           9       0
 SUPERBASICS                    2
 INTERPRETER USAGE           0.00
 NORM RG / NORM PI      5.880E+02

**** ERRORS(S) IN EQUATION OBJ
     1 instance(s) of - INTEGER POWER OVERFLOW (RETURNED  0.1E+21)

                        LOWER      LEVEL      UPPER     MARGINAL

---- EQU OBJ              .          .          .         1.000

                        LOWER      LEVEL      UPPER     MARGINAL
```

```
---- VAR F              -INF   3730.000     +INF       .
---- VAR X              -INF  -2.049E+8     +INF  1.272E+17  NOPT
---- VAR Y              -INF  -2.059E+8     +INF  2.532E+17  NOPT


**** REPORT SUMMARY :         2     NONOPT ( NOPT)
                              0 INFEASIBLE
                              0  UNBOUNDED
                              1     ERRORS ( ****)
```

Ejemplo 3.3:

Problemas sin restricciones: Modelo de Inventario de Whitin. EOQ.

En este apartado vamos a describir uno de los modelos básicos sobre inventarios o almacenes, se trata de un modelo debido a Within (1916) aunque también es conocido como EOQ (economic order quantity) o modelo del lote económico.

En general, los modelos de inventarios tratan de optimizar la relación entre la compra y el almacenamiento de las mercancías que mantienen las empresas. Aunque existen muchos modelos sobre esto, trataremos el primero de ellos, un modelo determinista, y con una o varias variables, según se desee.

Como consideración general, los problemas de almacenamiento o inventarios viene determinado por distintas variables, cuantificables o no, y de entre ellas podemos resaltar las siguientes:

a) Ritmo de entrada de los productos en el almacén.

b) Cadencia de salida del almacén.

c) La capacidad de almacenamiento.

d) La aptitud de la mercancía para ser almacenada, así como su tiempo máximo.

e) Los precios de mercado del producto, tanto los actuales como las previsiones sobre la evolución de los precios en un futuro.

f) Los gastos de conservación y mantenimiento del almacén.

g) El coste de capital, o de oportunidad, aplicable al inmovilizado en los almacenes.

h) Las mermas de los productos almacenados.

i) Otros rendimientos y perdidas de los almacenes.

El modelo de Within lo que plantea es la determinación del volumen de pedido que hay que realizar. En este modelo se esta asumiendo una serie de hipótesis que cuanto menos serian discutibles, que la eliminación de ellas da lugar a diferentes variantes de este modelo básico. No obstante, por razones de simplicidad las vamos a considerar como relevantes en este caso. Así por ejemplo, se supone que existe previsión perfecta en cuanto a la evolución de la demanda, y por ello no es necesario mantener ningún stock de seguridad.

En este caso usaremos la siguiente notación:

- q: el volumen del pedido.
- c: el numero de unidades físicas que salen del almacén por unidad de tiempo, es decir, por día, por semana, etc. Por tanto, la ratio $\frac{q}{c}$ representa el numero de periodos de tiempo en que se tarda en agotar un pedido. Este ratio se conoce también con el nombre de periodo de aprovisionamiento.
- p: precio de adquisición del producto.
- g: gastos variables de mantenimiento del almacén. Supondremos que estos gastos son proporcionales a la cantidad de producto almacenado. Con el fin de facilitar su incorporación, los asociaremos al stock medio ($\frac{q}{2}$).
- F: gastos fijos del almacén.
- V: Numero de unidades vendidas por periodo de tiempo.
- k: los costes que origina cada uno de los pedidos a realizar. Como el numero total de pedidos por periodo de tiempo es : $\frac{V}{q}$.

El coste total de gestión del almacén incorporará:

a) los costes de adquisición: V p

b) los gastos variables del almacén: g $\frac{q}{2}$

c) los costes de los pedidos: k $\frac{V}{q}$

d) los costes fijos del almacén F

Por tanto la función de costes a minimizar será:

$$\mathbf{C = V\,p + g\,\frac{q}{2} + k\,\frac{V}{q} + F}$$

Se trata de encontrar el mínimo de esta función con relación a la cantidad q. Si no se consideran ningún otro tipo de cuestiones (no negatividad de las variables u otras restricciones implícitas) se trata de un problema de optimización clásica. Por ello, la condición de primer orden de punto critico es:

$$\frac{\partial C}{\partial q} = \frac{q}{2} - \frac{k V}{q^2} = 0.$$

la solución es:

$$q = \pm \sqrt{\frac{2 k V}{g}}$$

Evidentemente, de las dos soluciones hemos de descartar " a posteriori" la solución negativa, ya que es incompatible con las condiciones de carácter económico. Sin embargo, aunque desde el punto de vista matemático el planteamiento el correcto, quedan por considerar una serie de cuestiones que es necesario tener presente.

1.- La solución que se ha obtenido, ha sido utilizando la condición de primer orden, es decir, que se trata de un punto critico, pero puede ser un mínimo, un máximo o un punto de silla. Para identificar que se trata de un mínimo, hemos de aplicar la condición de segundo orden, es decir, analizar el signo de la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana (en este caso el signo de la derivada segunda).

2.- En el proceso no se ha tomado en consideración la condición de no negatividad de las variables, ya que solo se ha tomado al final del proceso para eliminar una de las soluciones. El incorporar "a priori" esta condición significa el tener que utilizar las condiciones de Kuhn-Tucker de PNL en lugar de la programación clásica.

Una alternativa al análisis del punto critico, es analizar si la función cumple alguna propiedad relacionada con la convexidad de funciones. Estudiando el signo de la derivada segunda tenemos:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial q^2} = 2 k V q^{-3} > 0$$

Esta derivada segunda es mayor que cero para valores de q > 0, por lo tanto la función de costes es una función estrictamente convexa. Esta propiedad, nos sirve para poder afirmar que el punto critico obtenido es un mínimo global del problema. Esta consideración si que es importante para poder analizar el comportamiento de la función de costes anterior.

Vamos a considerar el siguientes ejemplo, para determinar el lote económico del producto A. sabiendo que:

Precio de adquisición: 100 u.m.

Numero de unidades vendidas por mes: 10.000 unidades.

Gastos variables 50.000 u.m. por mes.

Gastos fijos: 1.000.000 u.m. al mes.

Coste de cada pedido: 500.000 u.m..

El fichero GMS que recoge el problema anterior es:

```
* EJEMPLO 3.3
* PROBLEMA DE LOTE ECONOMICO

SCALAR
V, P, G, F, K;
*VENTAS
V = 10000;
*PRECIO DE COMPRA
P = 100;
*GASTOS VARIABLES
G = 50000;
*GASTOS FIJOS
F = 1000000;
*GASTOS DE PEDIDO
K = 500000;

VARIABLES
Q,C;
Q.L = 10;

EQUATIONS
COSTE;
COSTE.. C =E= V*P + G*(Q/2) + K*(V/Q) + F;

MODEL EOQ1 /COSTE/;
SOLVE EOQ1 USING NLP MINIMIZNG C;
```

La solución que se obtiene es la siguiente:

```
                        LOWER      LEVEL      UPPER    MARGINAL

---- EQU COSTE      2.0000E+6 2.0000E+6 2.0000E+6     1.000

                        LOWER      LEVEL      UPPER    MARGINAL

---- VAR Q               -INF    447.214      +INF        EPS
---- VAR C               -INF  2.4361E+7      +INF         .
```

Como podemos observar la cantidad a solicitar en cada uno de los diferentes pedidos es de 447,214 unidades, o lo que redondeando seria de 447.

Sin embargo, a veces se suelen cometer errores en la creación de los ficheros, así por ejemplo podemos invertir la dirección de optimización y encontrarnos con una solución como la siguiente:

```
                        LOWER      LEVEL      UPPER    MARGINAL

---- EQU COSTE      2.0000E+6 2.0000E+6 2.0000E+6    -1.000

                        LOWER      LEVEL      UPPER    MARGINAL

---- VAR Q               -INF   -447.214      +INF        EPS
---- VAR C               -INF  -2.036E+7      +INF         .

**** REPORT SUMMARY :         0     NONOPT
                              0 INFEASIBLE
                              0  UNBOUNDED
                              0     ERRORS
```

Se trata de una solución sin sentido económico, pero que a veces nos podemos encontrar. Una alternativa a evitar este tipo de errores es definir la clase de variables, es decir, declarar la variable Q como positiva. En este caso nos encontraríamos con un fichero de salida como el siguiente:

```
**** SOLVER STATUS      1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS       3 UNBOUNDED
**** OBJECTIVE VALUE    4571876404894132000.0000

                        LOWER      LEVEL      UPPER    MARGINAL

---- EQU COSTE       2.0000E+6 2.0000E+6 2.0000E+6    -1.000

                        LOWER      LEVEL      UPPER    MARGINAL

---- VAR Q                .          .        +INF      UNDF   NOPT
---- VAR C              -INF   4.572E+18     +INF        .

**** REPORT SUMMARY :         1     NONOPT ( NOPT)
                              0 INFEASIBLE
                              0  UNBOUNDED
                              0     ERRORS
```

En el podemos observar claramente que se ha cometido un error grave y que hay que revisar, mientras que en el caso anterior no podíamos detectar ningún error. Por ello, siempre que exista alguna característica relevante del modelo hay que incorporarla, como es en este caso la condición de POSITIVE VARIABLES Q.

4. - Problemas de Programación Clásica con restricciones de igualdad.

Al igual que en el caso anterior plantearemos una serie de ejemplos ilustrativos.

Ejemplo 4.1:

$$\textbf{Min } F = x^2 + y^2$$
$$\textbf{s.a.:} \quad x + y = 2$$

El fichero GMS será:

```
*Ejemplo 4.1
*Programacion clasica con restricciones.
VARIABLES
F, X, Y;
X.L = 10;
Y.L = 10;
EQUATIONS
OBJ, R;
OBJ..     F =E= POWER(X,2) + POWER(Y,2);
R..       X + Y =E= 2;
MODEL EJ41 /ALL/;
SOLVE EJ41 USING NLP MINIMIZING F;
```

La solución:

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   EJ41                OBJECTIVE  F
     TYPE    NLP                 DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER  MINOS5              FROM LINE  12

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      2 LOCALLY OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE               2.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.063      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT         1         10000
 EVALUATION ERRORS              0             0

 MINOS5        Mar 21, 2001 WIN.M5.M5 20.0 108.043.039.WAT

 EXIT -- OPTIMAL SOLUTION FOUND
 MAJOR ITNS, LIMIT            1     200
 FUNOBJ, FUNCON CALLS         4       0
 SUPERBASICS                  1
 INTERPRETER USAGE         0.00
 NORM RG / NORM PI     0.000E+00

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- EQU OBJ             .         .         .        1.000
---- EQU R              2.000     2.000     2.000     2.000

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- VAR F              -INF      2.000     +INF       .
---- VAR X              -INF      1.000     +INF       .
---- VAR Y              -INF      1.000     +INF      EPS
```

Ejemplo 4.2: Encontrar el mínimo del siguiente problema:

$$\mathbf{F(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 - 3xy}$$

$$\mathbf{s.a.:}\quad \mathbf{x - y + z = 0}$$

$$\mathbf{y + 2z = 1}$$

El fichero GMS será:

```
*Ejemplo 4.2
*Programacion clasica con restricciones.
VARIABLES
F, X, Y, Z;
X.L = 1;
Y.L = 1;
Z.L = 1;
EQUATIONS
OBJ, R1, R2;
OBJ..    F =E= POWER(X,3) + POWER(Y,2) + POWER(Z,2) - 3*X*Y;
R1..     X - Y + Z =E= 0;
R2..     Y + 2*Z =E= 1;
MODEL EJ42 /ALL/;
SOLVE EJ42 USING NLP MINIMIZING F;
```

```
              S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   EJ42                 OBJECTIVE  F
     TYPE    NLP                  DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER  MINOS5               FROM LINE  14

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      2 LOCALLY OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE               -1.0638

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.000      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT         3         10000
 EVALUATION ERRORS              0             0

 MINOS5        Mar 21, 2001 WIN.M5.M5 20.0 108.043.039.WAT

 EXIT -- OPTIMAL SOLUTION FOUND

                      LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- EQU OBJ           .         .         .        1.000
---- EQU R1            .         .         .        0.829
---- EQU R2           1.000     1.000     1.000    -0.475

                      LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- VAR F            -INF     -1.064     +INF       .
---- VAR X            -INF      1.182     +INF       .
---- VAR Y            -INF      1.122     +INF       .
---- VAR Z            -INF     -0.061     +INF      EPS
```

Ejemplo 4.3:

La función de beneficios (en unidades monetarias) de un empresario que produce dos bienes en cantidades x e y viene dad por la siguiente función:

$$F(x,y) = x^2 + 2\,y^2 + 10\,x\,y$$

Para la fabricación de dichos bienes dispone de dos trabajadores que pueden realizar conjuntamente 70 horas semanales, utilizando para la producción de una unidad del primer producto una hora y para producir una unidad del segundo producto, dos horas. Determinar cuál ha de ser el número de unidades semanales a producir de cada producto para obtener el máximo beneficio.

Para la modelización de este ejercicio, seguiremos los pasos establecidos:

a) Definición de las variables: x e y son las unidades a producir de los dos bienes. En esta caso no hay condiciones sobre las variables, ya que aunque pudiera pensarse en que las variables deberían ser no negativas, al tratar de resolverlo como un problema de programación clásica no podemos introducir este tipo de condiciones.

b) Estudio de las restricciones. En este caso la limitación existen es la de las horas disponibles (70 horas semanales) a distribuir entre los dos productos. Al igual que en el epígrafe anterior, al tratarlo como un problema de programación clásica, la restricción debe ser de igualdad, es decir, debemos utilizar todas las horas disponibles.
c) La función objetivo. En este caso la función es a maximizar es

$$F(x,y) = x^2 + 2\,y^2 + 10\,x\,y$$

Por tanto el planteamiento matemático del problema es:

$$\textbf{Max } F(x,y) = x^2 + 2\,y^2 + 10\,x\,y$$
$$\textbf{s.a.: } x + 2y = 70$$

El fichero GMS será:

```
*Ejemplo 4.3
*Problema de programcion clasica con restricciones.
VARIABLES
F, X, Y;
X.L = 10;
Y.L = 10;

EQUATIONS
OBJ, R;
OBJ..     F =E= POWER(X,2) + 2*POWER(Y,2) + 10*X*Y;
R..       X + 2*Y =E= 70;
MODEL EJ43 /ALL/;
SOLVE EJ43 USING NLP MAXIMIZING F;
```

La solución es:

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   EJ43                OBJECTIVE  F
     TYPE    NLP                 DIRECTION  MAXIMIZE
     SOLVER  MINOS5              FROM LINE  13

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      2 LOCALLY OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE             8050.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.000      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT         2         10000
 EVALUATION ERRORS              0             0

 MINOS5        Mar 21, 2001 WIN.M5.M5 20.0 108.043.039.WAT

EXIT -- OPTIMAL SOLUTION FOUND
 MAJOR ITNS, LIMIT            1     200
 FUNOBJ, FUNCON CALLS         6       0
```

```
 SUPERBASICS                  1
 INTERPRETER USAGE         0.00
 NORM RG / NORM PI    0.000E+00

                     LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU OBJ           .         .         .        1.000
---- EQU R           70.000    70.000    70.000   230.000

                     LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR F            -INF   8050.000     +INF        .
---- VAR X            -INF     40.000     +INF        .
---- VAR Y            -INF     15.000     +INF       EPS
```

En este ejemplo podemos introducir el estudio del multiplicador de la restricción: λ = 230. Es decir que por cada unidad (infinitesimal) que aumente o disminuya el termino independiente, se modificara en el valor del multiplicador, el valor de la función objetivo.

Termino independiente: 71

```
*Ejemplo 4.3.A
*Problema de programcion clasica con restricciones.
VARIABLES
F, X, Y;
X.L = 10;
Y.L = 10;

EQUATIONS
OBJ, R;
OBJ..    F =E= POWER(X,2) + 2*POWER(Y,2) + 10*X*Y;
R..      X + 2*Y =E= 71;
MODEL EJ43A /ALL/;
SOLVE EJ43A USING NLP MAXIMIZING F;
```

La solución será:

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   EJ43A              OBJECTIVE  F
     TYPE    NLP                DIRECTION  MAXIMIZE
     SOLVER  MINOS5             FROM LINE  13

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      2 LOCALLY OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE             8281.6429
```

La solución debería ser:

F = 8050

λ = 230

$F' = F + \Delta F = F + \lambda \, \Delta b = 8050 + 230 \; 1 = 8280$

El valor real es: F = 8281.6429

El error se debe a que el incremento de una unidad respecto de 70 no es infinitesimal, pero nos sirve como aproximación.

Termino independiente: 69

```
*Ejemplo 4.3.B
*Problema de programcion clasica con restricciones.
VARIABLES
F, X, Y;
X.L = 10;
Y.L = 10;

EQUATIONS
OBJ, R;
OBJ..    F =E= POWER(X,2) + 2*POWER(Y,2) + 10*X*Y;
R..      X + 2*Y =E= 69;
MODEL EJ43B /ALL/;
SOLVE EJ43B USING NLP MAXIMIZING F;
```

La solución será:

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   EJ43B               OBJECTIVE  F
     TYPE    NLP                 DIRECTION  MAXIMIZE
     SOLVER  MINOS5              FROM LINE  13

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      2 LOCALLY OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE             7821.6429
```

Usando el razonamiento anterior, el valor que se debería obtener:

$F' = F + \Delta F = F + \lambda \, \Delta b = 8050 + 230 \, (-1) = 8050 - 230 = 7820$

El valor real obtenido es: 7821.6429

Se ha cometido el error de la aproximación "no infinitesimal".

5.- Problemas de Programación No lineal. Condiciones de no negatividad.

En el caso de los problema de programación no lineal, por se un caso más general podremos introducir restricciones de desigualdad, condiciones de no negatividad sobre las variables etc.

Ejemplo 5.1:

$$\textbf{Min } F(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\textbf{s.a:} \qquad x + y \leq 1$$

El fichero GMS será

```
*Ejemplo 5.1
*Problema de programcion no lineal.
VARIABLES
F, X, Y;
X.L = 10;
Y.L = 10;

EQUATIONS
OBJ, R;
OBJ..    F =E= POWER(X,2) + 2*POWER(Y,2) ;
R..      X + Y =L= 1;

MODEL EJ51 /ALL/;
SOLVE EJ51 USING NLP MINIMIZING F;
```

La solución:

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   EJ51                OBJECTIVE  F
     TYPE    NLP                 DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER  MINOS5              FROM LINE  14

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      2 LOCALLY OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE               0.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.109      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT         4         10000
 EVALUATION ERRORS              0             0

                      LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU OBJ            .         .         .        1.000
---- EQU R            -INF        .       1.000      EPS

                      LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR F            -INF        .        +INF       .
---- VAR X            -INF        .        +INF       .
---- VAR Y            -INF        .        +INF      EPS
```

Ejemplo 5.2:

$$\textbf{Max } F(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\textbf{s.a:} \quad x + y \le 1$$

$$x - y \le 0$$

$$x \ge 0$$

El fichero GMS será

```
*Ejemplo 5.2
*Problema de programcion no lineal.
VARIABLES
F, X, Y;
POSITIVE VARIABLE X;
X.L = 3;
Y.L = 3;
EQUATIONS
OBJ, R1, R2;
OBJ..     F =E= POWER(X,2) + 2*POWER(Y,2) ;
R1..      X + Y =L= 1;
R2..      X - Y =L= 0;

MODEL EJ52 /ALL/;
SOLVE EJ52 USING NLP MAXIMIZING F;
```

La solución:

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   EJ52                OBJECTIVE  F
     TYPE    NLP                 DIRECTION  MAXIMIZE
     SOLVER  MINOS5              FROM LINE  15

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      2 LOCALLY OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE               2.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.219      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT         2         10000
 EVALUATION ERRORS              0             0

 MINOS5        Mar 21, 2001 WIN.M5.M5 20.0 108.043.039.WAT

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU OBJ             .         .         .        1.000
---- EQU R1            -INF      1.000     1.000      4.000
---- EQU R2            -INF     -1.000       .          .

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR F             -INF      2.000     +INF         .
---- VAR X               .         .       +INF     -4.000
---- VAR Y             -INF      1.000     +INF         .
```

Ejemplo 5.3:

$$\text{Min } F(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$$

$$\text{s.a:} \quad (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 1$$

$$x \leq 1$$

$$y \leq 1$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

El fichero GMS será

```
*Ejemplo 5.3
*Problema de programcion no lineal.
VARIABLES
F, X, Y;
POSITIVE VARIABLE X, Y;
X.L = 0.5;
Y.L = 0.5;
X.UP = 1;
Y.UP = 1;
EQUATIONS
OBJ, R;
OBJ..     F =E= POWER(X-1,2) + 2*POWER(Y-1,2) ;
R..       POWER(X-1,2) + 2*POWER(Y-1,2) =G= 1;
MODEL EJ53 /ALL/;
SOLVE EJ53 USING NLP MINIMIZING F;
```

La solución:

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   EJ53                OBJECTIVE  F
     TYPE    NLP                 DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER  MINOS5              FROM LINE  15

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      2 LOCALLY OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE               1.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.164      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT         9         10000
 EVALUATION ERRORS              0             0

 MINOS5        Mar 21, 2001 WIN.M5.M5 20.0 108.043.039.WAT

                      LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU OBJ            .         .         .        1.000
---- EQU R            1.000     1.000     +INF      1.000

                      LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR F            -INF      1.000     +INF       .
---- VAR X              .       0.491     1.000      .
---- VAR Y              .       0.391     1.000     EPS
```

Ejemplo 5.4:

$$\text{Max } F(x,y) = x$$

$$\text{s.a:} \quad y - (1-x)^3 \leq 0$$

$$y \geq 0$$

El fichero GMS:

```
*Ejemplo 5.4
*Problema de programAcion no lineal.
VARIABLES
F, X, Y;
POSITIVE VARIABLE Y;
X.L = 5;
Y.L = 5;
EQUATIONS
OBJ, R;
OBJ..     F =E= x;
R..       Y - POWER(1-X,3) =L= 0;
MODEL EJ54 /ALL/;
SOLVE EJ54 USING NLP MAXIMIZING F;
```

La solución:

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   EJ54                OBJECTIVE  F
     TYPE    NLP                 DIRECTION  MAXIMIZE
     SOLVER  MINOS5              FROM LINE  13

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      2 LOCALLY OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE                1.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.219      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT         1         10000
 EVALUATION ERRORS              0             0

 MINOS5        Mar 21, 2001 WIN.M5.M5 20.0 108.043.039.WAT

                      LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU OBJ            .         .         .        1.000
---- EQU R             -INF       .         .    1.0000E+8

                      LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR F             -INF      1.000     +INF       .
---- VAR X             -INF      1.000     +INF       .
---- VAR Y              .         .        +INF  -1.000E+8
```

Ejemplo 5.5:

En este caso se trata de analizar dos ejercicios de forma simultanea, aunque en primer lugar los resolveremos de forma separada:

A.- Un consumidor puede elegir entre dos bienes (x e y), cuyos precios son respectivamente de 4 y 6 unidades monetarias. Dispone de una renta de 240 unidades para distribuir entre ambos bienes. La función de utilidad de los dos bienes es la siguiente:

$$U(x,y) = 10 * x^{0.3} * y^{0.7}$$

Se pide:

a) Plantear el problema como un problema no lineal, es decir, con una restricción de desigualdad y con condiciones de no negatividad para las variables, de forma que se maximice la utilidad del consumidor.

b) Resolver el problema anterior, obteniendo los valores de las variables (x e y), el valor de la función de utilidad y el valor del multiplicador asociado a la restricción.

c) Interpretar el significado del multiplicador. Resolver de nuevo el problema para el caso en que la renta disponible del consumidor sea de 241 unidades. Comparar los resultados de ambos problemas.

B.- Un consumidor quiere minimizar el gasto para alcanzar una determinada utilidad. Los bienes que puede consumir son dos (x e y). Los precios unitarios de ambos bienes son de 4 y 6 unidades monetarias respectivamente. La función de utilidad del consumidor es :

$$U(x,y) = 10 * x^{0.3} * y^{0.7}$$

el consumidor quiere garantizarse al menos una utilidad de 245,241.

Se pide:

a) Plantear el problema como un problema no lineal, es decir, con una restricción de desigualdad y con condiciones de no negatividad para las variables, de forma que se minimice el gasto a realizar.

b) Resolver el problema anterior, obteniendo los valores de las variables (x e y), el valor de la función de utilidad y el valor del multiplicador asociado a la restricción.

c) Interpretar el significado del multiplicador. Resolver de nuevo el problema para el *caso en que la utilidad a alcanzar por el consumidor sea de 246,241 unidades.*

Comparar los resultados de ambos problemas.

<u>*Ejercicio 5.5.A:*</u>

Planteamiento matemático:

$$\textbf{Max } U(x,y) = 10\, x^{0.3}\, y^{0.7}$$

s.a:

$$4x + 6y \leq 240$$

$$x \geq 0,\ y \geq 0$$

con ello, el problema anterior es un problema de programación no lineal. Podemos analizar este problema desde el punto de vista matemático. La función objetivo es una función cóncava, el conjunto de oportunidades es un conjunto convexo ya que esta formado por la intersección de un semiespacio (restricción presupuestaria) y los dos semiespacios definidos por las condiciones de no negatividad.

Por todo ello, la solución de este problema será un máximo global.

b) Para obtener la solución de este problema vamos a usar GAMS, y con ello el fichero de datos es el siguiente:

```
*PROBLEMA 5.5.A
VARIABLES
X, Y, U;
POSITIVE VARIABLES X,Y;
X.L=10;
Y.L=10;
EQUATIONS
OBJ, RP;
OBJ.. U =E= 10*(X**0.3)*(Y**0.7);
RP.. 4*X + 6*Y =L= 240;
MODEL EJ55A /OBJ,RP/;
SOLVE EJ55A USING NLP MAXIMIZING U;
```

La solución es:

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   EJ55A               OBJECTIVE  U
     TYPE    NLP                 DIRECTION  MAXIMIZE
     SOLVER  MINOS5              FROM LINE  12

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      2 LOCALLY OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE              245.2406

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.164      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT         2         10000
 EVALUATION ERRORS              0             0

 MINOS5        Mar 21, 2001 WIN.M5.M5 20.0 108.043.039.WAT

                      LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU OBJ            .         .         .        1.000
---- EQU RP            -INF    240.000   240.000     1.022

                      LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR X              .       18.000     +INF  -4.198E-6
---- VAR Y              .       28.000     +INF       .
---- VAR U             -INF    245.241     +INF       .
```

Los valores de la solución son :

x = 18

y = 28

U = 245.241

el valor del multiplicador de Lagrange asociado a la restricción presupuestaria es:

λ = 1.022

c) Como ya conocemos el valor del multiplicador representa en incremento que se produce en el valor de la función objetivo cuando en termino independiente de la restricción se incrementa en una unidad (infinitesimal). A partir de aquí podríamos deducir que si el termino independiente pasa de 240 a 241, el valor de la función de utilidad será U = 245.241 + 1.022 = 246.263

Vamos a comprobar esto a través de la solución del problema anterior, sin mas que sustituir el termino independiente de la restricción por 241. El nuevo fichero de datos será:

```
*PROBLEMA 5.5.A.1
VARIABLES
X, Y, U;
POSITIVE VARIABLES X,Y;
X.L=10;
Y.L=10;
EQUATIONS
OBJ, RP;
OBJ.. U =E= 10*(X**0.3)*(Y**0.7);
RP.. 4*X + 6*Y =L= 241;
MODEL EJ55A1 /OBJ,RP/;
SOLVE EJ55A1 USING NLP MAXIMIZING U;
```

La solución es:

```
              S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   EJ55A1              OBJECTIVE  U
     TYPE    NLP                 DIRECTION  MAXIMIZE
     SOLVER  MINOS5              FROM LINE  12

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      2 LOCALLY OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE              246.2624
```

Como podemos comprobar el nuevo valor de la función de utilidad es: U = 246.2624, resultado que era de esperar. Aunque no es exactamente igual debido al redondeo por el uso de los decimales en las soluciones de los dos problemas.

Ejercicio 5.B:

Planteamiento matemático:

Min G(x,y) = 4 x + 6 y

s.a:

$$10\, x^{0.3}\, y^{0.7} \geq 245{,}241$$

$$x \geq 0,\ y \geq 0$$

con ello, el problema anterior es un problema de programación no lineal. Podemos analizar este problema desde el punto de vista matemático. La función objetivo es una función lineal, el conjunto de oportunidades es el conjunto de nivel superior definido por una función cóncava, que junto con las condiciones de no negatividad definen un conjunto convexo.

Por todo ello, la solución de este problema será un mínimo global.

b) Para obtener la solución de este problema vamos a usar GAMS, y con ello el fichero de datos es el siguiente:

```
*PROBLEMA 5.5.B
*Problema de programacion no lineal
VARIABLES
X, Y, G;
POSITIVE VARIABLES X,Y;
X.L=10;
Y.L=10;
EQUATIONS
OBJ, R;
OBJ..    G=E= 4*X + 6*Y ;
R..      10*(X**0.3)*(Y**0.7)=G= 245.241;
MODEL EJ55B/OBJ,R/;
SOLVE EJ55B USING NLP MINIMIZING G;
```

La solución es:

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   EJ55B               OBJECTIVE  G
     TYPE    NLP                 DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER  MINOS5              FROM LINE  13

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      2 LOCALLY OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE              240.0004

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.172      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT        17         10000
 EVALUATION ERRORS              0             0

 MINOS5        Mar 21, 2001 WIN.M5.M5 20.0 108.043.039.WAT


 EXIT -- OPTIMAL SOLUTION FOUND

**** ERRORS(S) IN EQUATION R
     1 instance(s) of -
     DERIVATIVE OF X**Y NOT DEFINED FOR X=0, 0<Y<1 (RETURNED  1.0E+10)

                      LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU OBJ            .         .         .        1.000
---- EQU R           245.241   245.241     +INF      0.979

                      LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR X              .       18.000     +INF       EPS
---- VAR Y              .       28.000     +INF        .
---- VAR G            -INF     240.000     +INF        .
```

Los valores de la solución son:

x = 18

y = 28

G = 240

el valor del multiplicador de Lagrange asociado a la restricción es: $\mu = 0.979$

c) Como ya conocemos el valor del multiplicador representa en incremento que se produce en el valor de la función objetivo cuando en termino independiente de la restricción se incrementa en una unidad (infinitesimal). A partir de aquí podríamos deducir que si el termino independiente pasa de 245.241 a 246.241, el valor de la función Del gasto total G será: $G = 240 + 0.979 = 240.979$

Vamos a comprobar esto a través de la solución del problema anterior, sin mas que sustituir el termino independiente de la restricción por 246.241. El nuevo fichero de datos será:

```
*PROBLEMA 5.5.B.1
*Problema de programacion no lineal
VARIABLES
X, Y, G;
POSITIVE VARIABLES X,Y;
X.L=10;
Y.L=10;
EQUATIONS
OBJ, R;
OBJ..    G=E= 4*X + 6*Y ;
R..      10*(X**0.3)*(Y**0.7)=G= 246.241;
MODEL EJ55B1 /OBJ,R/;
SOLVE EJ55B1 USING NLP MINIMIZING G;
```

La solución es:

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   EJ55B1              OBJECTIVE  G
     TYPE    NLP                 DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER  MINOS5              FROM LINE  13

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      2 LOCALLY OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE             240.9790
```

Como podemos comprobar el nuevo valor de la función es: G = 240.979, resultado que era de esperar.

Una vez resueltos por separados ambos problemas no queda por:

Comparar los resultados de ambos problemas.

Los resultados que tenemos de ambos problemas los podemos compara en la siguiente tabla:

Ejercicio 5.5.A	**Ejercicio 5.5.B**
Planteamiento: Max $U(x,y) = 10\ x^{0.3}\ y^{0.7}$ s.a: $4\ x + 6\ y \leq 240$ $x \geq 0,\ y \geq 0$	Planteamiento: Min $G(x,y) = 4\ x + 6\ y$ s.a: $10\ x^{0.3}\ y^{0.7} \geq 245{,}241$ $x \geq 0,\ y \geq 0$
Solución: $x = 18$ $y = 28$ $U = 245.241$ $\lambda = 1.022$	Solución: $x = 18$ $y = 28$ $G = 240$ $\mu = 0.979$

Como podemos observar los resultados son prácticamente los mismos, en concreto son iguales para el valor de las variables x e y, los valores de las funciones objetivo de cada problema se corresponden con los términos independientes de la restricción del otro problema. Pero lo que queda por dilucidar es si existe alguna relación entre el valor de los multiplicadores.

Comenzaremos por analizar el significado de los multiplicadores con relación a cada uno de los problemas.

Así, λ representa el incremento que se produce en la utilidad cuando se incrementa el gasto en una unidad infinitesimal, es decir:

$$\lambda = \frac{\partial U}{\partial G}$$

En el otro ejercicio, μ representa en incremento que se produce en el gasto cuando se incrementa en una unidad infinitesimal la utilidad, es decir:

$$\mu = \frac{\partial G}{\partial U}$$

Si comparamos ambas expresiones, tenemos:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\frac{\partial U}{\partial G}} = \frac{\partial G}{\partial U} = \mu$$

Comparando los valores numéricos tenemos que:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1.022} \approx 0.979 = \mu$$

6.- Programación lineal.

Los problemas de programación lineal se plantean, en forma canónica, de la siguiente forma. Para el caso de máximización

$$\begin{aligned} &\text{Max } F(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \\ &\text{s.a:} \quad a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \le b_1 \\ &\qquad a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \le b_2 \\ &\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\qquad a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \le b_m \\ &\qquad x_1 \ge 0 \;\; x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \end{aligned}$$

Para los problemas de mínimo

$$\begin{aligned} &\text{Min } F(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \\ &\text{s.a:} \quad a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \ge b_1 \\ &\qquad a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \ge b_2 \\ &\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\qquad a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \ge b_m \\ &\qquad x_1 \ge 0 \;\; x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \end{aligned}$$

En notación matricial dichos problemas pueden expresarse del modo siguiente

$$\begin{aligned} &\text{Max } F(x) = c^t x \\ &\text{s.a:} \quad A x \le b \\ &\qquad\quad x \ge 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} &\text{Min } F(x) = c^t x \\ &\text{s.a:} \quad A x \ge b \\ &\qquad\quad x \ge 0 \end{aligned}$$

en donde:

$$c \in R^n \qquad x \in R^n \qquad b \in R^m \qquad A \in M_{mxn}$$

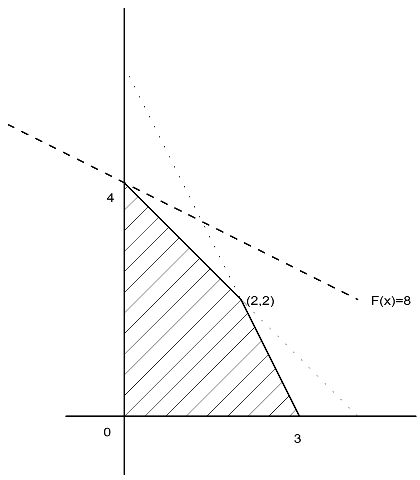
El planteamiento de la forma estándar significa que se plantean todas las restricciones en forma de igualdad. Esta forma es esencial a la hora de plantear el método del simplex para la resolución de los problemas lineales.

$$\begin{aligned} \text{Max } F(x) &= c^t x \\ \text{s.a:} \quad A x &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Vamos a comenzar con unos ejemplos sencillos en los que usaremos los mismos bloques que en los casos anteriores, y además nos servirán para poder ilustrar los diferentes tipos de soluciones de los problemas lineales

Ejemplo 6.1:

$$\begin{aligned} \textbf{Max } F(x) &= x_1 + 2\, x_2 \\ \textbf{s.a:} \quad x_1 + x_2 &\leq 4 \\ 2\, x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$




```
*EJEMPLO 6.1
*POLIEDRO - VERTICE
VARIABLES X1, X2, F;
POSITIVE VARIABLES X1, X2;
EQUATIONS
OBJ, R1, R2;
OBJ..    F =E= X1 + 2*X2;
R1..     X1 + X2 =L= 4;
R2..     2*X1 + X2 =L= 6;
MODEL EJ61 /ALL/;
SOLVE EJ61 USING LP MAXIMIZING F;
```

Solución:

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   EJ61                  OBJECTIVE  F
     TYPE    LP                    DIRECTION  MAXIMIZE
     SOLVER  OSL                   FROM LINE  11

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      1 OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE               8.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.049      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT         1         10000

 OSL Version 1 Mar 21, 2001 WIN.OS.SE 20.0 058.043.039.WAT

 Work space allocated           --     0.09 Mb

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU OBJ             .         .         .        1.000
---- EQU R1            -INF      4.000     4.000      2.000
---- EQU R2            -INF      4.000     6.000       .

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR X1              .         .       +INF      -1.000
---- VAR X2              .       4.000     +INF        .
---- VAR F             -INF      8.000     +INF        .
```

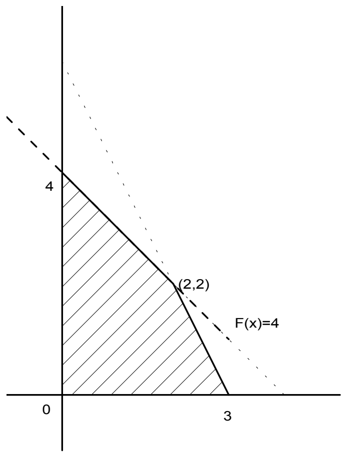
Ejemplo 6.2:

$$\text{Max } F(x) = x_1 + x_2$$

$$\text{s.a:} \quad x_1 + x_2 \le 4$$

$$2x_1 + x_2 \le 6$$

$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$$




```
*EJEMPLO 6.2
*POLIEDRO - ARISTA
VARIABLES X1, X2, F;
POSITIVE VARIABLES X1, X2;
EQUATIONS
OBJ, R1, R2;
OBJ..     F =E= X1 + X2;
R1..      X1 + X2 =L= 4;
R2..      2*X1 + X2 =L= 6;
MODEL EJ62 /ALL/;
SOLVE EJ62 USING LP MAXIMIZING F;
```

Solución:

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   EJ62                 OBJECTIVE  F
     TYPE    LP                   DIRECTION  MAXIMIZE
     SOLVER  OSL                  FROM LINE  11

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      1 OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE               4.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.109      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT         2         10000

 OSL Version 1 Mar 21, 2001 WIN.OS.SE 20.0 058.043.039.WAT

 Work space allocated           --     0.09 Mb

                      LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU OBJ            .         .         .        1.000
---- EQU R1           -INF      4.000     4.000      1.000
---- EQU R2           -INF      6.000     6.000       EPS   (ENTRA)

                      LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR X1             .       2.000     +INF        .
---- VAR X2             .       2.000     +INF        .
---- VAR F            -INF      4.000     +INF        .
```

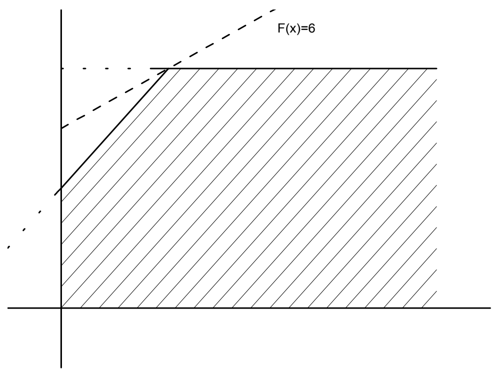
Ejemplo 6.3:

$$\textbf{Max } F(x) = -x_1 + 2x_2$$

$$\textbf{s.a:} \quad -x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_2 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$




```
*EJEMPLO 63
*POLITOPO  - VERTICE
VARIABLES X1, X2, F;
POSITIVE VARIABLES X1, X2;
EQUATIONS
OBJ, R1, R2;
OBJ..    F =E= -X1 + 2*X2;
R1..     - X1 + X2 =L= 2;
R2..     X2 =L= 4;
MODEL EJ63 /ALL/;
SOLVE EJ63 USING LP MAXIMIZING F;
```

Solución:

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   EJ63                 OBJECTIVE  F
     TYPE    LP                   DIRECTION  MAXIMIZE
     SOLVER  OSL                  FROM LINE  11

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      1 OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE                6.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.051      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT         2         10000

 OSL Version 1 Mar 21, 2001 WIN.OS.SE 20.0 058.043.039.WAT


 Work space allocated           --     0.09 Mb


                      LOWER      LEVEL      UPPER     MARGINAL

---- EQU OBJ            .          .          .         1.000
---- EQU R1           -INF       2.000      2.000       1.000
---- EQU R2           -INF       4.000      4.000       1.000

                      LOWER      LEVEL      UPPER     MARGINAL

---- VAR X1             .        2.000      +INF         .
---- VAR X2             .        4.000      +INF         .
---- VAR F            -INF       6.000      +INF         .
```

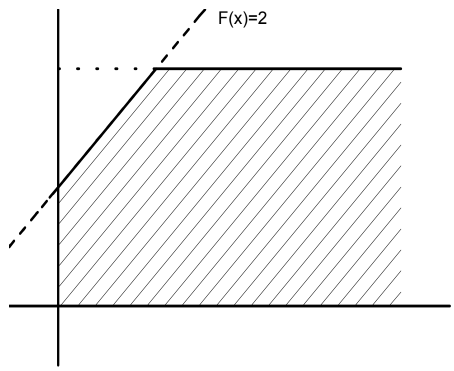
Ejemplo 6.4:

$$\textbf{Max } F(x) = -x_1 + x_2$$

$$\textbf{s.a:} \quad -x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_2 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$




```
*EJEMPLO 64
*POLITOPO - ARISTA
VARIABLES X1, X2, F;
POSITIVE VARIABLES X1, X2;
EQUATIONS
OBJ, R1, R2;
OBJ..     F =E= -X1 + X2;
R1..      - X1 + X2 =L= 2;
R2..      X2 =L= 4;
MODEL EJ64 /ALL/;
SOLVE EJ64 USING LP MAXIMIZING F;
```

Solución:

```
                S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   EJ64                   OBJECTIVE  F
     TYPE    LP                     DIRECTION  MAXIMIZE
     SOLVER  OSL                    FROM LINE  11

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      1 OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE                2.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT           0.000      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT          1         10000

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- EQU OBJ             .         .         .        1.000
---- EQU R1            -INF      2.000     2.000      1.000
---- EQU R2            -INF      2.000     4.000       .

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- VAR X1              .         .       +INF       EPS  (ENTRA)
---- VAR X2              .       2.000     +INF        .
---- VAR F             -INF      2.000     +INF        .
```

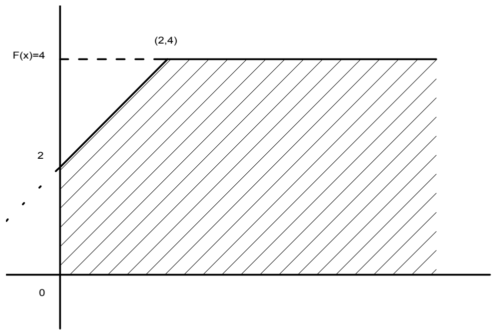
Ejemplo 6.5:

$$\text{Max } F(x) = x_2$$

$$\text{s.a:} \quad -x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_2 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$




```
*EJEMPLO 65
*POLITOPO - ARISTA INFINITA
VARIABLES X1, X2, F;
POSITIVE VARIABLES X1, X2;
EQUATIONS
OBJ, R1, R2;
OBJ..     F =E=  X2;
R1..      - X1 + X2 =L= 2;
R2..      X2 =L= 4;
MODEL EJ65 /ALL/;
SOLVE EJ65 USING LP MAXIMIZING F;
```

Solución:

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   EJ65                  OBJECTIVE  F
     TYPE    LP                    DIRECTION  MAXIMIZE
     SOLVER  OSL                   FROM LINE  11

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      1 OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE                4.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.000      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT         2         10000

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU OBJ             .         .         .        1.000
---- EQU R1            -INF      2.000     2.000      EPS(ENTRA)
---- EQU R2            -INF      4.000     4.000      1.000

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR X1              .       2.000     +INF        .
---- VAR X2              .       4.000     +INF        .
---- VAR F             -INF      4.000     +INF        .
```

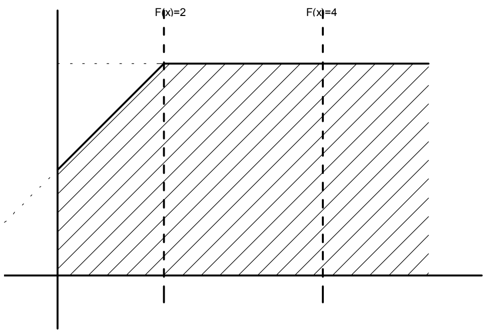
Ejemplo 6.6:

$$\text{Max } F(x) = x_1$$

$$\text{s.a:} \quad -x_1 + x_2 \le 2$$

$$x_2 \le 4$$

$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$$




```
*EJEMPLO 66
* NO ACOTADO
VARIABLES X1, X2, F;
POSITIVE VARIABLES X1, X2;
EQUATIONS
OBJ, R1, R2;
OBJ..     F =E=  X1;
R1..      - X1 + X2 =L= 2;
R2..      X2 =L= 4;
MODEL EJ66 /ALL/;
SOLVE EJ66 USING LP MAXIMIZING F;
```

Solución:

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   EJ66                 OBJECTIVE  F
     TYPE    LP                   DIRECTION  MAXIMIZE
     SOLVER  OSL                  FROM LINE  11

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      3 UNBOUNDED
**** OBJECTIVE VALUE                0.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.109      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT         0         10000
 Model is unbounded

**** ERRORS(S) IN VARIABLE X1
     1 instance(s) of - Unbounded variable

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- EQU OBJ             .         .         .        1.000
---- EQU R1            -INF        .        2.000      .
---- EQU R2            -INF        .        4.000      .

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- VAR X1              .         .        +INF      1.000 UNBND
---- VAR X2              .         .        +INF       EPS
---- VAR F             -INF        .        +INF       .

**** REPORT SUMMARY :         0     NONOPT
                              0 INFEASIBLE
                              1  UNBOUNDED (UNBND)
```

Ejemplo 6.7:

$$\text{Max } F(x) = x_1 + x_2$$

$$\text{s.a:} \quad -x_1 + 2\,x_2 \leq 4$$

$$-\,2\,x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

```
*EJEMPLO 67
* INFACTIBLE
VARIABLES
X1, X2, F;
POSITIVE VARIABLES X1, X2;
EQUATIONS
OBJ, R1, R2;
OBJ..     F =E=  X1 + X2 ;
R1..      - X1 + 2*X2 =L= 4;
R2..      -2*X1 + X2 =G= 4;
MODEL EJ67 /ALL/;
SOLVE EJ67 USING LP MAXIMIZING F;
```

Solución:

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   EJ67                OBJECTIVE  F
     TYPE    LP                  DIRECTION  MAXIMIZE
     SOLVER  OSL                 FROM LINE  12

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      4 INFEASIBLE
**** OBJECTIVE VALUE               4.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.059      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT         0         10000

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU OBJ             .         .         .        1.000
---- EQU R1            -INF      8.000     4.000       .     INFES
---- EQU R2            4.000     4.000     +INF      1.000

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR X1              .         .       +INF      3.000
---- VAR X2              .       4.000     +INF        .
---- VAR F             -INF      4.000     +INF        .

**** REPORT SUMMARY :        0     NONOPT
                             1 INFEASIBLE (INFES)
                    SUM      4.000
                    MAX      4.000
                    MEAN     4.000
                             0  UNBOUNDED
```

Para este tipo de problemas de programación lineal es cuando GAMS alcanza un nivel superior de desarrollo al poder utilizar bloques opcionales que facilitan su escritura, y además permiten combinar varios ficheros, unos con datos y otros con el modelo básico.

Para el ejemplo 6.1, mostraremos, solamente a fines ilustrativos como seria el fichero de datos en GAMS usando los bloques opcionales.

Así, el ejemplo anterior:

$$\mathbf{Max\ F(x) = x_1 + 2\,x_2}$$

$$\mathbf{s.a:}\quad \mathbf{x_1 + x_2 \le 4}$$

$$\mathbf{2\,x_1 + x_2 \le 6}$$

$$\mathbf{x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0}$$

lo podemos escribir como:

$$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^{n} c_j \, x_j$$

s.a:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j \le b_i \, , \forall \, i=1, 2, ..., m$$

$$x_j \ge 0$$

Siendo en este caso:

$c_j = (1, 2)$

$$b_i = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto tenemos el fichero GMS:

```
*EJEMPLO 6.1
*Notacion con bloques opcionales
SET I   /1*2/;
SET J   /1*2/;
PARAMETER C(J)
        /1      1
         2      2/;
PARAMETER B(I)
        /1      4
         2      6/;
TABLE A(I,J)
        1       2
1       1       1
2       2       1;
VARIABLES
Z,X(J);
POSITIVE VARIABLES X(J);

EQUATIONS
OBJ, R(I);
OBJ..    Z =E= SUM(J, C(J)*X(J));
R(I)..   SUM( J, A(I,J)*X(J)) =L= B(I);
MODEL EJ61OP /ALL/;
SOLVE EJ61OP USING LP MAXIMIZING Z;
*Para resumir los resultados
DISPLAY X.L, Z.L;
```

El fichero LST nos proporciona el listado de filas (ecuaciones del modelo como):

```
Equation Listing    SOLVE EJ61OP USING LP FROM LINE 24

---- OBJ  =E=

OBJ..  Z - X(1) - 2*X(2) =E= 0 ; (LHS = 0)


---- R  =L=

R(1)..  X(1) + X(2) =L= 4 ; (LHS = 0)

R(2)..  2*X(1) + X(2) =L= 6 ; (LHS = 0)
```

Como podemos comprobar coincide con el modelo planteado.

La solución (incluyendo la opción display), es:

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   EJ61OP              OBJECTIVE  Z
     TYPE    LP                  DIRECTION  MAXIMIZE
     SOLVER  CPLEX               FROM LINE  24

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      1 OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE               8.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.060      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT         2         10000

Optimal solution found.

Objective :           8.000000

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU OBJ             .         .         .        1.000

---- EQU R

     LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

1     -INF      4.000     4.000     2.000
2     -INF      4.000     6.000       .

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR Z              -INF      8.000     +INF        .

---- VAR X

     LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

1      .         .        +INF     -1.000
2      .        4.000     +INF       .
```

```
**** REPORT SUMMARY :         0     NONOPT
                              0 INFEASIBLE
                              0  UNBOUNDED

GAMS Rev 121  Windows NT/95/98                  05/11/01 17:15:58  PAGE      6
G e n e r a l   A l g e b r a i c   M o d e l i n g   S y s t e m
E x e c u t i o n


----      26 VARIABLE  X.L

2 4.000


----      26 VARIABLE  Z.L                    =        8.000
```

7.- Dualidad.

Ejemplo 7.1: Consideremos el siguiente problema lineal:

$$\text{Min } Z(x) = 2\,x_1 + 3\,x_2 + 5\,x_3 + 2\,x_4 + 3\,x_5$$

$$\text{s.a:} \quad x_1 + x_2 + 2\,x_3 + x_4 + 3\,x_5 \geq 4$$

$$2\,x_1 - x_2 + 3\,x_3 + x_4 + x_5 \geq 3$$

$$x_1 \geq 0\,,\ x_2 \geq 0\,,\ x_3 \geq 0\,,\ x_4 \geq 0\,,\ x_5 \geq 0$$

Dado que se trata de un programa lineal en forma canónica, ello nos proporciona un dual en forma simétrica como el siguiente:

$$\text{Max } G(\lambda) = 4\,\lambda_1 + 3\,\lambda_2$$

$$\text{s.a:} \quad \lambda_1 + 2\,\lambda_2 \leq 2$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 \leq 3$$

$$2\,\lambda_1 + 3\,\lambda_2 \leq 5$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 \leq 2$$

$$3\,\lambda_1 + \lambda_2 \leq 3$$

$$\lambda_1 \geq 0\,,\ \lambda_2 \geq 0$$

Los ficheros de ambos problemas son:

Para el primal:

```
*EJEMPLO 7.1.P
*PROBLEMA PRIMAL
VARIABLES
Z, X1, X2, X3, X4, X5;
POSITIVE VARIABLES X1, X2, X3, X4, X5;
EQUATIONS
OBJ, R1, R2;
OBJ..    Z =E= 2*X1 + 3*X2 + 5*X3 + 2*X4 +3*X5;
R1..     X1 + X2 + 2*X3 + X4 + 3*X5 =G= 4;
R2..     2*X1 - X2 + 3*X3 + X4 + X5 =G= 3;
MODEL EJ71P /ALL/;
SOLVE EJ71P USING LP MINIMIZING Z;
```

Para el dual:

```
*EJEMPLO 7.1.D
*PROBLEMA DUAL
VARIABLES
G, Y1, Y2;
POSITIVE VARIABLES Y1, Y2;
EQUATIONS
OBJ, RD1, RD2, RD3, RD4, RD5;
OBJ..    G =E= 4*Y1 + 3*Y2;
RD1..    Y1 + 2*Y2   =L= 2;
RD2..    Y1 - Y2     =L= 3;
RD3..    2*Y1 + 3*Y2 =L= 5;
RD4..    Y1 + Y2     =L= 2;
RD5..    3*Y1 + Y2   =L= 3;
MODEL EJ71D /ALL/;
SOLVE EJ71D USING LP MAXIMIZING G;
```

Vamos a comprobar que resolviendo los dos problemas podemos establecer las relaciones entre las soluciones de ambos problemas:

Las soluciones son las siguientes:

PRIMAL

```
        S O L V E      S U M M A R Y

    MODEL   EJ71P      OBJECTIVE  Z
    TYPE    LP         DIRECTION  MINIMIZE
    SOLVER  CPLEX      FROM LINE  11

**** SOLVER STATUS      1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS       1 OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE     5.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT  0.050       1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT    2          10000

Optimal solution found.

Objective :             5.000000

          LOWER     LEVEL     UPPER     MARG

 EQU OBJ  .          .         .       1.000
 EQU R1  4.000      4.000     +INF     0.800
 EQU R2  3.000      3.000     +INF     0.600

          LOWER     LEVEL     UPPER     MARG

 VAR Z    -INF      5.000     +INF      .
 VAR X1    .        1.000     +INF      .
 VAR X2    .         .        +INF     2.800
 VAR X3    .         .        +INF     1.600
 VAR X4    .         .        +INF     0.600
 VAR X5    .        1.000     +INF      .
```

DUAL

```
        S O L V E      S U M M A R Y

    MODEL   EJ71D      OBJECTIVE  G
    TYPE    LP         DIRECTION  MAXIMIZE
    SOLVER  CPLEX      FROM LINE  14

**** SOLVER STATUS      1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS       1 OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE   5.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT  0.440       1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT 3          10000

Optimal solution found.

Objective :             5.000000

          LOWER     LEVEL     UPPER     MARG

 EQU OBJ   .          .         .      1.000
 EQU RD1  -INF      2.000     2.000    1.000
 EQU RD2  -INF      0.200     3.000    .
 EQU RD3  -INF      3.400     5.000    .
 EQU RD4  -INF      1.400     2.000    .
 EQU RD5  -INF      3.000     3.000    1.000

          LOWER     LEVEL     UPPER     MARG

 VAR G   -INF       5.000     +INF      .
 VAR Y1    .        0.800     +INF      .
 VAR Y2    .        0.600     +INF      .
```

En el cuadro anterior podemos observar la relación entre ambas soluciones, tanto en lo que se refiere a la función objetivo (rojo), el valor de las variables del primal con los valores de las marginales de las restricciones del dual (azul y fucsia), y entre las marginales de las restricciones del primal con las variables del dual (verde y turquesa).

Vamos a considerar otro ejemplo de forma que podamos establecer el significado de las variables duales:

Ejemplo 7.2:

La empresa XZT, S.A., se dedica a la pintura de tableros y cajas metálicas suministrados por otros proveedores-clientes. La propia empresa fabrica sus pinturas, y en el proceso de pintura que se realiza diariamente, se desprenden una serie de productos que son contaminantes del medio ambiente.

La empresa dispone de un almacén donde guardar los productos que se pintan diariamente. El almacén dispone de 2.000 metros cuadrados de superficie útil. Todos los elementos pintados diariamente se retiran al final de la jornada laboral, con lo que al inicio de la siguiente está disponible la totalidad de la superficie útil.

La pintura de cada tablero desprende 0.02 metros cúbicos de materia contaminante, mientras que la pintura de cada caja desprende 0.03 m^3 *de aire contaminado. La normativa europea aplicable a este tipo de empresas establece un máximo de emisiones contaminante de 1* m^3 *diario.*

Cada tablero, una vez pintado, ocupa en el almacén un equivalente a 20 m^2 *, aproximadamente, es decir, incluidos pasillos de acceso y otros. Las cajas una vez pintadas ocupan un equivalente a 10* m^2 *(téngase en cuenta que no se pueden apilar para facilitar el secado de la pintura).*

La empresa percibe de los proveedores-clientes por cada tablero pintado 100.000 u.m., mientras que el precio de las cajas es de 50.000 u.m..

Con esta información, el gerente de la empresa debe determinar la cantidad de elementos metálicos (tableros y cajas) que debe pintar diariamente la empresa con el fin de maximizar los ingresos de la firma.

Además de esto, el gerente de la empresa tiene una oferta verbal del director de planta de una fabrica adyacente, que estaría dispuesto a cederle una parte de su almacén a un precio unitario de 700 u.m../m^2*. ¿ Le interesaría al gerente de la empresa XZT entrar a negociar una oferta en firme sobre el almacén de la empresa adyacente ?.*

El Departamento de Medio Ambiente está estudiando una nueva normativa para restringir los agentes contaminantes del medio ambiente. Ello repercutiría en la empresa XZT en que el máximo de emisión diaria permitida se situaría en 0.9 m^3*. Si la* *empresa mantiene el actual nivel de emisiones (1 m^3) recibiría una sanción de 70.000 u.m. diarias. Ante la entrada en vigor de la nueva normativa: ¿ Le interesaría a la empresa seguir manteniendo el actual nivel de emisiones contaminantes?. ¿Seria económicamente posible?, en el supuesto de que fuera económicamente factible, ¿Seria ético ?.*

El fichero de datos (GMS) es:

```
*EJEMPLO 7.2
VARIABLES
TABLEROS, CAJAS, INGRESOS;
POSITIVE VARIABLES TABLEROS, CAJAS;
EQUATIONS
OBJ, ALMACEN, CONTAMINA;
OBJ..            INGRESOS =E= 100000*TABLEROS + 50000*CAJAS;
ALMACEN..        20*TABLEROS + 10*CAJAS =L= 2000;
CONTAMINA..      0.02*TABLEROS + 0.03*CAJAS =L= 1;
MODEL EJ72 /ALL/;
SOLVE EJ72 USING LP MAXIMIZING INGRESOS;
```

La solución es:

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   EJ72                OBJECTIVE  INGRESOS
     TYPE    LP                  DIRECTION  MAXIMIZE
     SOLVER  CPLEX               FROM LINE  11

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      1 OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE          5000000.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT          1.640      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT         0         10000

GAMS/Cplex    Mar 21, 2001 WIN.CP.NA 20.0 019.019.039.WAT For Cplex 7.0
Optimal solution found.
Objective :      5000000.000000

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- EQU OBJ             .         .         .        1.000
---- EQU ALMACEN        -INF   1000.000  2000.000      .
---- EQU CONTAMINA      -INF      1.000     1.000 5.0000E+6

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
```

```
---- VAR TABLEROS         .       50.000      +INF        .
---- VAR CAJAS            .          .        +INF  -1.000E+5
---- VAR INGRESOS       -INF  5.0000E+6      +INF        .
```

Con relación a la oferta recibida por parte del director de planta de la fabrica adyacente, la respuesta debería ser negativa, es decir, no plantearse alquilar ningún espacio adicional, dado que con el actual nivel de pintura de los elementos, la cantidad de metros necesarios es inferior a los 2.000 metros cuadrados disponibles, por tanto, mientras no este usado a plena capacidad el almacén propio, no tiene ningún sentido ampliar la capacidad de almacenamiento. Desde el punto de vista matemático, este resultado es el que se expresa con el valor del rendimiento marginal de la variable de holgura asociada a esta restricción (w_{S1}), este valor es cero, lo que indica, que un aumento en el término (m^2) repercute en la función objetivo en cero unidades.

Un razonamiento similar podríamos emplear para responder a la cuestión de mantener el mismo nivel de emisiones contaminantes. Dado que se trata de una restricción activa o saturada, aquí si que tiene influencia los incrementos y disminuciones realizadas con el término independiente. La idea intuitiva es que si el coste de la sanción es mayor que el ingreso que proporciona el mantener el actual nivel de contaminación, entonces no sería rentable mantenerlo, ya que los ingresos adicionales serian inferiores al importe de la sanción. Por tanto debemos comparar el rendimiento marginal de la variable asociada a la segunda restricción (w_{S2}) con el importe de la sanción.

El rendimiento marginal de la variable, según la tabla, es de 5.000.000, mientras el coste de la sanción es de 70.000 u.m. día. Para determinar la repercusión sobre la función de ingresos de una disminución de 0,1 metros cúbicos de materia contaminante, aplicaremos la relación entre el incremento de la función y el incremento del termino independiente:

$$\Delta F \cong \lambda \,.\, \Delta b$$

En este caso el valor del multiplicador λ es de 5.000.000, mientras que Δb es -0,1. Por tanto el incremento de la función es ΔF = -500.000. Es decir, la empresa deja de ingresar, por la reducción de la capacidad contaminante, 500.000 u.m. diarias.

Esta reducción de ingresos es muy superior a la sanción que le correspondería por mantener el mismo nivel de contaminación, por tanto, si la empresa se mantiene en el actual nivel de contaminación los ingresos “reales” serian de 500.000 u.m. menos las 70.000 de la sanción, es decir, 430.000 u.m.. Por tanto, desde el punto de vista económico, a la empresa le resulta más rentable el mantener el actual nivel de contaminación, aunque para ello tenga que pagar las sanciones correspondientes.

Podemos comprobar lo anterior, simplemente sustituyendo en el fichero GMS, el lugar de 1, en la restricción CONTAMINA por 0,9.

Así tenemos:

```
*EJEMPLO 7.2.A
VARIABLES
TABLEROS, CAJAS, INGRESOS;
POSITIVE VARIABLES TABLEROS, CAJAS;
EQUATIONS
OBJ, ALMACEN, CONTAMINA;
OBJ..            INGRESOS =E= 100000*TABLEROS + 50000*CAJAS;
ALMACEN..        20*TABLEROS + 10*CAJAS =L= 2000;
CONTAMINA..      0.02*TABLEROS + 0.03*CAJAS =L= 0.9;
MODEL EJ72A /ALL/;
SOLVE EJ72A USING LP MAXIMIZING INGRESOS;
```

La solución es:

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   EJ72A               OBJECTIVE  INGRESOS
     TYPE    LP                  DIRECTION  MAXIMIZE
     SOLVER  CPLEX               FROM LINE  11

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      1 OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE          4500000.0000
```

8.- Análisis de sensibilidad. Post-optimización.

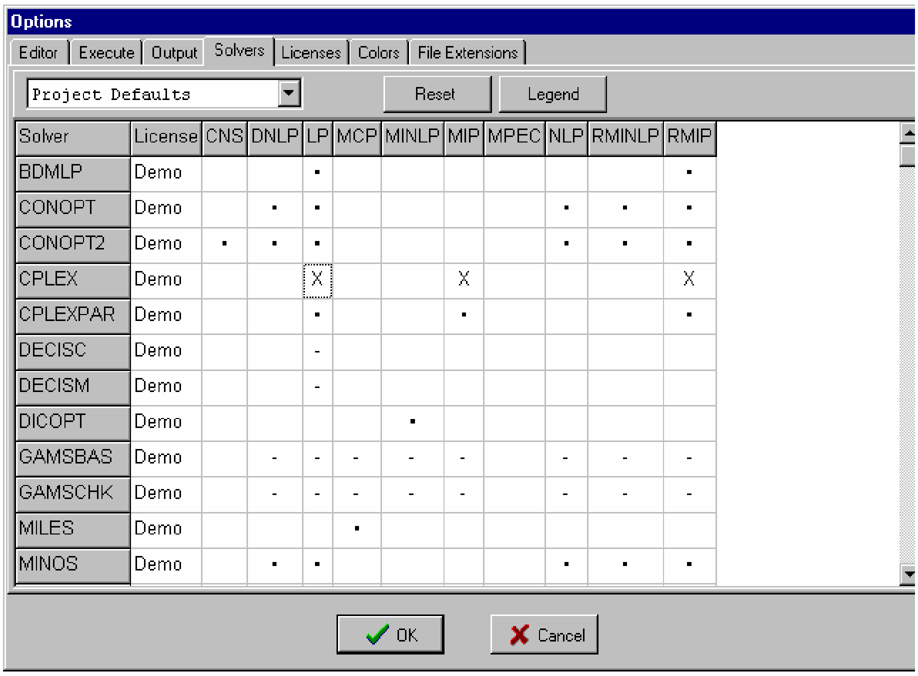
Un de los principales inconvenientes de GAMS a la hora de su aplicación total en los módulos de practicas de las materias de Programación Matemática y similares ha sido la falta de análisis de sensibilidad en los problemas lineales.

La ultima versión STUDENT de GAMS incorpora todos los solvers disponibles, aunque con las limitaciones relativas al numero de variables y elementos. La inclusión de todos los solvers hace posible que pueda superarse esta limitación con respecto al análisis de sensibilidad en programación lineal, ya que hay dos solvers (CPLEX y OSL) que si permiten incorporar la opción de análisis de sensibilidad mediante la creación de un fichero de opciones. En nuestro caso usaremos CPLEX.

Definición del solver.

Una vez instalado el programa GAMS, se pueden definir una serie de opciones, y de entre ellas merece destacar la elección de los solvers que, por defecto, usara GAMS. Así dentro de la opción **File** elegimos la característica **Options**, y nos aparece una cuadro de dialogo como el contenido en el gráfico 1. Dentro de él y en la posibilidad de elegir el solver para cada tipo de problema, dentro de la programación lineal LP, y de entre todos los posibles (marcados con •) seleccionamos (con doble click) el solver que deseamos y entonces cambia y parece una X en esa casilla.

También es posible omitir esta selección y definir dentro del fichero GMS el solver que deseamos. Esta selección dentro del fichero de entrada es conveniente cuando no podemos asegurar que instalación por defecto tiene el ordenador.



Solver	License	CNS	DNLP	LP	MCP	MINLP	MIP	MPEC	NLP	RMINLP	RMIP
BDMLP	Demo			•							•
CONOPT	Demo		•	•					•	•	•
CONOPT2	Demo	•	•	•					•	•	•
CPLEX	Demo			X			X				X
CPLEXPAR	Demo			•			•				•
DECISC	Demo			-							
DECISM	Demo			-							
DICOPT	Demo					•					
GAMSBAS	Demo		-	-	-	-	-		-	-	-
GAMSCHK	Demo		-	-	-	-	-		-	-	-
MILES	Demo				•						
MINOS	Demo		•	•					•	•	•

Gráfico 1

El análisis de sensibilidad se puede realizar sobre los términos independientes y los coeficientes de la función objetivo. El solver CPLEX los realiza de forma conjunta.

Análisis de Sensibilidad de los términos independientes o RHS.

Para pode explicar el análisis de sensibilidad con GAMS lo mejor es proceder con un ejemplo:*(Fuente: Decisiones de Optimización. Pág 301 y sig.)*

Ejemplo 8.1:

10.2.- *Un fabricante de muebles con la factoría y trabajadores que tiene actualmente puede producir comedores, dormitorios, y librerías y mesas para oficina, de distintos modelos cada uno de ellos simplemente variando determinados tipos de molduras, y cambiando el color del pulimento.*

La empresa está distribuida en tres secciones:

Sección de preparado con 25 trabajadores, donde se cortan y tornean las piezas de madera y se chapan las piezas que lo requieren.

Sección de manufacturado que cuenta con 18 operarios, donde se lijan, se *ajustan y se montan todos los muebles para comprobar que todas las piezas encajan de forma adecuada.*

Sección de pulimentado y calidad con 10 trabajadores, donde se pulimentan los muebles y se comprueba que no existe ningún defecto.

Todos los trabajadores de la empresa realizan una jornada laboral de ocho horas diarias.

El tiempo en horas/operario que requiere cada tipo de mueble viene dado por la siguiente tabla:

	Preparado	Manufacturado	Pulimento
Comedores (C)	8	6	4
Dormitorios (D)	6	3	2
Librerias (L)	4	2	2
Mesas (M)	2	1	2

El beneficio que obtiene la empresa por cada tipo de mueble es de 20.000 u.m., 14.000 u.m., 8.000 u.m. y 4.000 u.m. respectivamente.

Obtener la producción diaria a realizar de cada tipo de mueble.

Realizar el análisis de sensibilidad de la solución.

Solución:

El planteamiento matemático del problema y su solución se han obtenido en el capítulo 9 y son:

$$\text{Max } F(x) = 20000\ C + 14000\ D + 8000\ L + 4000\ M$$

$$\text{s.a:} \quad 8\ C + 6\ D + 4\ L + 2\ M \leq 200$$

$$6\ C + 3\ D + 2\ L + 1\ M \leq 144$$

$$4\ C + 2\ D + 2\ L + 2M \leq 80$$

$$C \geq 0, D \geq 0, L \geq 0, M \geq 0$$

La tabla del simplex seria:

		20000	14000	8000	4000	0	0	0	
		C	D	L	M	S1	S2	S3	
14000	D	0	1	0	-1	1/2	0	-1	20
0	S2	0	0	-1	-2	0	1	-3/2	24
20000	C	1	0	1/2	1	-1/4	0	3/4	10
	W_j	0	0	-2000	-2000	-2000	0	-1000	480000

Una alternativa es resolver con GAMS, para por generar un fichero GMS (realizado con las opciones de SET y PARAMETER) valdría de la misma forma usando todas las variables. El fichero es:

```
*EJEMPLO 8.1
* PROBLEMA LINEAL PARA SENSIBILIDAD
SET J   / COMEDOR, DORMIT, LIBRER, MESA/;
SET I   / PREPAR, MANUF, PULIM/;

PARAMETER C(J)
/
COMEDOR 20000
DORMIT  14000
LIBRER   8000
MESA     4000
/;

PARAMETER B(I)
/
PREPAR  200
MANUF   144
PULIM    80
/;

TABLE A(I,J)
        COMEDOR DORMIT  LIBRER  MESA
PREPAR  8       6       4       2
MANUF   6       3       2       1
PULIM   4       2       2       2
;
VARIABLES
X(J), Z;
POSITIVE VARIABLES X;
EQUATIONS
OBJ, RESTRIC(I);
OBJ..           Z=E= SUM(J, C(J)*X(J));
RESTRIC(I)..    SUM(J, A(I,J)*X(J)) =L= B(I);
MODEL EJ81 /ALL/;
OPTION LP = CPLEX;
EJ81.OPTFILE = 1;
SOLVE EJ81 USING LP MAXIMIZING Z ;
DISPLAY X.L, X.M;
```

La variación respecto de un fichero convencional de GAMS es la inclusión de una serie de opciones sobre el solver (CPLEX con **OPTION LP = CPLEX;**), y crear un fichero de opciones (**MUEBLES.OPTFILE = 1;)**..
EL fichero de opciones debe ser *<nombre modelo>.OPTFILE* (en este caso seria: **MUEBLES.OPTFILE = 1;)** es

```
objrng all
rhsrng all
```

En el fichero se ha escrito: **objrng all** y **rhsrng all** que significa que queremos el análisis del rango de los coeficientes de la función objetivo y de los términos independiente.

Al ejecutar el fichero, obtenemos la solución siguiente:

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   EJ81                OBJECTIVE  Z
     TYPE    LP                  DIRECTION  MAXIMIZE
     SOLVER  CPLEX               FROM LINE  38
**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      1 OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE           480000.0000

Optimal solution found. Objective :      480000.000000

EQUATION NAME                                LOWER      CURRENT         UPPER
-------------                                -----      -------         -----
OBJ                                           -INF            0          +INF
RESTRIC(PREPAR)                                160          200           240
RESTRIC(MANUF)                                 120          144          +INF
RESTRIC(PULIM)                               66.67           80            96

VARIABLE NAME                                LOWER      CURRENT         UPPER
-------------                                -----      -------         -----
X(COMEDOR)                               1.867e+004       2e+004      2.8e+004
X(DORMIT)                                    1e+004     1.4e+004      1.5e+004
X(LIBRER)                                     -INF         8000        1e+004
X(MESA)                                       -INF         4000          6000
Z                                             -INF            1          +INF
```

```
                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- EQU OBJ             .         .         .        1.000

---- EQU RESTRIC
          LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
PREPAR     -INF    200.000   200.000  2000.000
MANUF      -INF    120.000   144.000       .
PULIM      -INF     80.000    80.000  1000.000
---- VAR X
           LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
COMEDOR      .       10.000     +INF        .
DORMIT       .       20.000     +INF        .
LIBRER       .         .        +INF  -2000.000
MESA         .         .        +INF  -2000.000

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- VAR Z              -INF  4.8000E+5     +INF        .

**** REPORT SUMMARY :        0     NONOPT
                             0 INFEASIBLE
                             0  UNBOUNDED
E x e c u t i o n

----     39 VARIABLE X.L
COMEDOR 10.000,    DORMIT  20.000

----     39 VARIABLE X.M
LIBRER -2000.000,    MESA   -2000.000
```

Del fichero anterior podemos extraer la parte correspondiente al análisis de sensibilidad de los términos independientes:

EQUATION NAME	LOWER	CURRENT	UPPER
-------------	-----	-------	-----
OBJ	-INF	0	+INF
RESTRIC(PREPAR)	160	200	25Ð
RESTRIC(MANUF)	120	144	+INF
RESTRIC(PULIM)	66.67	80	96

Lo que nos indica el análisis para las restricciones del problema es que el termino independiente de la restricción:

Preparado, debe estar comprendido entre 160 y 240.

Manufacturado, debe estar comprendido entre 120 e infinito

Pulimentado, debe estar comprendido entre 66.67 y 96.

Análisis de Sensibilidad de los coeficientes de la función objetivo.

Si analizamos los coeficientes de la función objetivo, tenemos:

VARIABLE NAME	LOWER	CURRENT	UPPER
-------------	-----	-------	-----
X(COMEDOR)	1.867e+004	2e+004	2.8e+004
X(DORMIT)	1e+004	1.4e+004	1.5e+004
X(LIBRER)	-INF	8000	1e+004
X(MESA)	-INF	4000	6000
Z			

En esta caso el rango es similar como para los términos independientes.

Así, por ejemplo para el caso de la variable COM (coeficiente actual 20000 = 2e+004), lo que significa es que la solución actual se mantendrá como optima siempre que el coeficiente este comprendido entre:

[18667, 28000]

De la misma forma para el resto de variables, con lo que la solución se mantiene como optima mientras los beneficios de los diferentes artículos este comprendido entre:

COM, entre 18666,66 y 28000.

DOR entre 10000 y 15000

LIB entre 0 (o -INF) y 10000

MESA entre 0 (o -INF) y 6000

Vamos a considerar otro ejemplo que nos permita ilustrar el análisis de sensibilidad y la postoptimización.

Ejemplo 8.2:

El **problema de la dieta**, conocido por este nombre, fue uno de los primeros problemas sobre optimización, motivado por el deseo del ejercito americano de asegurar unos requerimientos nutricionales al menor coste. El problema fue analizado y resuelto por George Stigler usando la programación lineal en 1947.

Vamos a ver un ejemplo muy sencillo de este tipo de problema.

Un medico receta a una de sus pacientes una dieta especial de basada en tres productos (arroz, pescado y verduras frescas) que han de combinarse de manera que cumplan una serie de requisitos mínimos en cuanto a proteínas y calorías. Estos mínimos se sitúan en 3 unidades de proteínas y en 4.000 calorías.

Los productos que componen la dieta tienen las siguientes unidades por kilogramo: el arroz contiene 1 unidad de proteína y 2.000 calorías, el pescado tiene 3 unidades de proteínas y 3.000 calorías y, por ultimo, las verduras frescas poseen 2 unidades de proteínas y 1.000 calorías.

a) Si los precios de los tres productos básicos son respectivamente de 55, 125 y 55 u.m. el kilogramo, ¿ Cuál debe ser la combinación de productos que cubriendo las necesidades mínimas suponga un menor coste?.

b) Si aumenta el precio del pescado, y este pasa a ser de 140 u.m.. ¿La solución seguirá siendo optima?. Si la respuesta es negativa, cual será la nueva solución?

c) Si disminuye el precio del pescado, y este pasa a ser de 105 u.m.. ¿La solución seguirá siendo optima?. Si la respuesta es negativa, cual será la nueva solución?

d) Si el medico recomienda aumentar el numero de calorias por dia, pasando a 4500 calorias diarias. ¿La solución seguirá siendo optima?. Si la respuesta es negativa, cual será la nueva solución?

El fichero GMS , incluyendo la opción de análisis de sensibilidad es:

```
*EJEMPLO 8.2
* PROBLEMA DE LA DIETA
OPTIONS DECIMALS = 8;
VARIABLES
ARROZ, PESCADO, VERDURA, GASTO;
POSITIVE VARIABLES ARROZ, PESCADO, VERDURA;
EQUATIONS
OBJ     FUNCION DE GASTO
CALORIAS, PROTEINAS;
OBJ..            GASTO =E= 55*ARROZ + 125*PESCADO + 55*VERDURA;
CALORIAS..       2000*ARROZ + 3000*PESCADO + 1000*VERDURA =G= 4000;
PROTEINAS..      ARROZ + 3*PESCADO + 2*VERDURA =G= 3;
MODEL EJ82 /ALL/;
OPTION LP = CPLEX;
EJ82.OPTFILE = 1;
SOLVE EJ82 USING LP MINIMIZING GASTO;
```

El fichero solución es:

```
Optimal solution found.
Objective :         128.333333

EQUATION NAME                                  LOWER      CURRENT         UPPER
-------------                                  -----      -------         -----
OBJ                                             -INF            0          +INF
CALORIAS                                        1500         4000          6000
PROTEINAS                                          2            3             8

VARIABLE NAME                                  LOWER      CURRENT         UPPER
-------------                                  -----      -------         -----
ARROZ                                           27.5           55            70
PESCADO                                          110          125          +INF
VERDURA                                         27.5           55            70
GASTO                                           -INF            1          +INF

                       LOWER      LEVEL      UPPER    MARGINAL
---- EQU OBJ             .          .          .         1.000
---- EQU CALORIAS    4000.000   4000.000     +INF       0.018
---- EQU PROTEINAS      3.000      3.000     +INF      18.333

---- VAR ARROZ           .         1.667     +INF        .
---- VAR PESCADO         .          .        +INF      15.000
---- VAR VERDURA         .         0.667     +INF        .
```

b) Si aumenta el precio del pescado, y este pasa a ser de 140 u.m.. ¿La solución seguirá siendo optima?. Si la respuesta es negativa, cual será la nueva solución?

Del análisis de sensibilidad anterior, podemos observar que el rango de variación para el precio del pescado es: [110, +∞), en este caso como el nuevo precio está dentro del intervalo de variación, entonces podemos asegurar que la solución actual seguirá siendo valida, no obstante y a efectos de comprobación vamos a volver a resolver el problema y observar la diferencias:

```
*EJEMPLO 8.2.A
OPTIONS DECIMALS = 8;
VARIABLES
ARROZ, PESCADO, VERDURA, GASTO;
POSITIVE VARIABLES ARROZ, PESCADO, VERDURA;
EQUATIONS
OBJ     FUNCION DE GASTO
CALORIAS, PROTEINAS;
OBJ..            GASTO =E= 55*ARROZ + 140*PESCADO + 55*VERDURA;
CALORIAS..       2000*ARROZ + 3000*PESCADO + 1000*VERDURA =G= 4000;
PROTEINAS..      ARROZ + 3*PESCADO + 2*VERDURA =G= 3;
MODEL EJ82A /ALL/;
SOLVE EJ82A USING LP MINIMIZING GASTO;
```

La solución:

```
                          LOWER      LEVEL      UPPER     MARGINAL

---- EQU OBJ                .          .          .         1.000
---- EQU CALORIAS        4000.000   4000.000     +INF        0.018
---- EQU PROTEINAS          3.000      3.000     +INF       18.333

                          LOWER      LEVEL      UPPER     MARGINAL

---- VAR ARROZ              .         1.667     +INF         .
---- VAR PESCADO            .          .        +INF        30.000
---- VAR VERDURA            .         0.667     +INF         .
---- VAR GASTO            -INF      128.333     +INF         .
```

Podemos observar que la única diferencia respecto a la solución anterior es el cambio en valor del multiplicador asociado a la variable pescado.

c) Si disminuye el precio del pescado, y este pasa a ser de 105 u.m.. ¿La solución seguirá siendo optima?. Si la respuesta es negativa, cual será la nueva solución?

Como ya sabemos del análisis de sensibilidad anterior el rango de variación para el precio del pescado es: [110, +∞), en este caso como el nuevo precio (105) está fuera del intervalo de variación, entonces podemos asegurar que la solución actual dejará de ser valida, y tendremos que obtener la nueva solución. (**análisis de post-optimización**)

El fichero GMS será:

```
*EJEMPLO 8.2.B
OPTIONS DECIMALS = 8;
VARIABLES
ARROZ, PESCADO, VERDURA, GASTO;
POSITIVE VARIABLES ARROZ, PESCADO, VERDURA;
EQUATIONS
OBJ     FUNCION DE GASTO
CALORIAS, PROTEINAS;
OBJ..            GASTO =E= 55*ARROZ + 105*PESCADO + 55*VERDURA;
CALORIAS..       2000*ARROZ + 3000*PESCADO + 1000*VERDURA =G= 4000;
PROTEINAS..      ARROZ + 3*PESCADO + 2*VERDURA =G= 3;
MODEL EJ82B /ALL/;
SOLVE EJ82B USING LP MINIMIZING GASTO;
```

La solución es:

```
                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- EQU OBJ              .         .         .        1.000
---- EQU CALORIAS    4000.000  4000.000     +INF       0.020
---- EQU PROTEINAS      3.000     3.000     +INF      15.000

LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- VAR ARROZ            .        1.000     +INF        .
---- VAR PESCADO          .        0.667     +INF        .
---- VAR VERDURA          .         .        +INF       5.000
---- VAR GASTO          -INF     125.000     +INF        .
```

En este caso, podemos observa que la solución ha cambiado, así dejará de consumirse verdura para consumir en la misma proporción el pescado.

d) Si el medico recomienda aumentar el numero de calorías por día, pasando a 4500 calorías diarias. ¿La solución seguirá siendo optima?. Si la respuesta es negativa, cual será la nueva solución?

Del análisis de sensibilidad anterior, podemos observar que el rango de variación de las calorías es de [1500, 6000]. El nuevo nivel de calorías es de 4500, en este caso como el nuevo nivel está dentro del intervalo de variación, entonces podemos asegurar que la solución actual seguirá siendo valida, no obstante y a efectos de comprobación vamos a volver a resolver el problema y observar las diferencias:

El fichero GMS

```
*EJEMPLO 8.2.C
OPTIONS DECIMALS = 8;
VARIABLES
ARROZ, PESCADO, VERDURA, GASTO;
POSITIVE VARIABLES ARROZ, PESCADO, VERDURA;
EQUATIONS
OBJ     FUNCION DE GASTO
CALORIAS, PROTEINAS;
OBJ..             GASTO =E= 55*ARROZ + 125*PESCADO + 55*VERDURA;
CALORIAS..        2000*ARROZ + 3000*PESCADO + 1000*VERDURA =G= 4500;
PROTEINAS..       ARROZ + 3*PESCADO + 2*VERDURA =G= 3;
MODEL EJ82C /ALL/;
SOLVE EJ82C USING LP MINIMIZING GASTO;
```

```
                       LOWER      LEVEL      UPPER    MARGINAL
---- EQU OBJ             .          .          .         1.000
---- EQU CALORIAS    4500.000   4500.000     +INF        0.018
---- EQU PROTEINAS      3.000      3.000     +INF       18.333

                       LOWER      LEVEL      UPPER    MARGINAL
---- VAR ARROZ           .         2.000     +INF         .
---- VAR PESCADO         .          .        +INF       15.000
---- VAR VERDURA         .         0.500     +INF         .
---- VAR GASTO         -INF      137.500     +INF         .
```

Podemos observar que el nivel de consumo de las variables se ha modificado, pasando de consumir 1.667 unidades de arroz a 2 unidades, y de 0.667 unidades de verdura a 0.5. Pero se ha de insistir que las variables básicas (arroz y verduras) siguen siendo las mismas.

Recuérdese que la condición de factibilidad significa que: $x_B = B^{-1} \cdot b \geq 0$, en este caso como se sigue cumpliendo la condición de no negatividad de las variables, pero no así el nivel o valor de las variables básicas.

9.- Programación lineal entera.

Los problemas de programación lineal entera se caracterizan porque las variables solamente pueden tomar un numero finito de valores (enteros o binarios).

Vamos a comenzar con una serie de sencillos ejemplos.

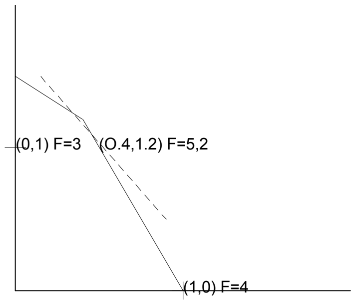
Ejemplo 9.1: Problema binario

$$\text{Max } F(X) = 4x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.a.} \quad 2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0 \, , \, x_2 \geq 0$$



El fichero GMS del problema es:

```
*EJEMPLO 9.1
* EJERCICIO DE PROGRAMACION LINEAL ENTERA-BINARIA.
VARIABLES X1, X2, F;
*DECLARACION QUE LAS VARIABLES SON BINARIAS, 0-1.
BINARY VARIABLES X1, X2;
EQUATIONS OBJ, R1, R2;
OBJ..    F=E= 4*X1 + 3*X2;
R1..     2*X1 + X2 =L= 2;
R2..     3*X1 + 4*X2 =L= 6;
MODEL EJ91 /ALL/;
* PARA RESOLVER LOS PROBLEMAS ENTEROS HAY QUE USAR MIP
SOLVE EJ91 USING MIP MAXIMIZING F;
```

La solución es:

```
Proven optimal solution.
MIP Solution  :            4.000000    (1 iterations, 0 nodes)
Final LP      :            4.000000    (0 iterations)
Best integer solution possible :           4.000000
Absolute gap          :                  0
Relative gap          :                  0
                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- EQU OBJ             .         .         .        1.000
---- EQU R1            -INF      2.000     2.000       .
---- EQU R2            -INF      3.000     6.000       .
                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- VAR X1              .       1.000     1.000     4.000
---- VAR X2              .         .       1.000     3.000
---- VAR F             -INF      4.000     +INF        .
**** REPORT SUMMARY :        0     NONOPT
                             0 INFEASIBLE
                             0  UNBOUNDED
```

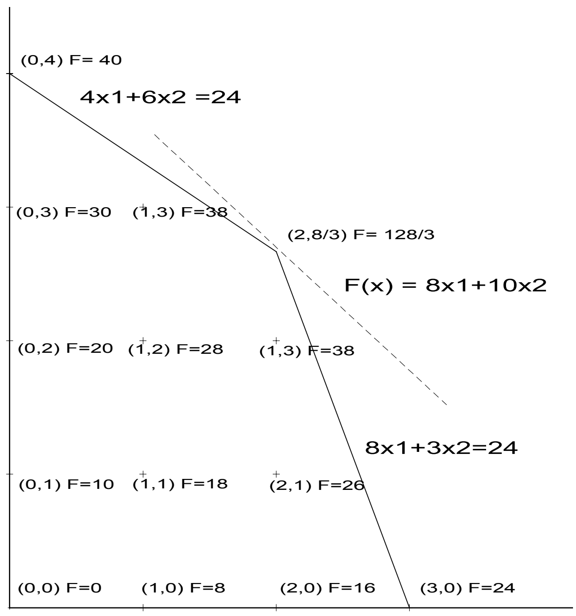
Ejemplo 9.2: Problema entero

$$\text{Max } F(X) = 8x_1 + 10x_2$$

$$\text{s.a.} \quad 4x_1 + 6x_2 \leq 24$$

$$8x_1 + 3x_2 \leq 24$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,\ x_1, x_2 \in Z^+$$



El fichero GMS es:

```
*EJEMPLO 9.2
* EJERCICIO DE PROGRAMACION LINEAL ENTERA
VARIABLES X1, X2, F;
*DECLARACION QUE LAS VARIABLES SON ENTERAS
INTEGER VARIABLES X1, X2;
EQUATIONS
OBJ, R1, R2;
OBJ..     F=E= 8*X1 + 10*X2;
R1..      4*X1 + 6*X2 =L= 24;
R2..      8*X1 + 3*X2 =L= 24;
MODEL EJ92 /ALL/;
SOLVE EJ92 USING MIP MAXIMIZING F;
```

La solución es:

```
                            S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   EJ92                OBJECTIVE  F
     TYPE    MIP                 DIRECTION  MAXIMIZE
     SOLVER  CPLEX               FROM LINE  11

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      8 INTEGER SOLUTION
**** OBJECTIVE VALUE               38.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT          2.800     1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT         4         10000
Solution satisfies tolerances.
MIP Solution   :          38.000000    (4 iterations, 3 nodes)
Final LP       :          38.000000    (0 iterations)
Best integer solution possible :          40.000000
Absolute gap          :                    2
Relative gap          :           0.0526316

                       LOWER      LEVEL      UPPER     MARGINAL
---- EQU OBJ             .          .          .         1.000
---- EQU R1            -INF      22.000     24.000        .
---- EQU R2            -INF      17.000     24.000        .

                       LOWER      LEVEL      UPPER     MARGINAL
---- VAR X1              .         1.000    100.000      8.000
---- VAR X2              .         3.000    100.000     10.000
---- VAR F             -INF      38.000      +INF         .
```

Si observamos la solución que nos proporciona GAMS con el gráfico anterior, podemos ver que la solución que ofrece GAMS no es la optima. Además GAMS ya nos advierte que la solución es:

```
**** MODEL STATUS      8 INTEGER SOLUTION
```

Es decir, es solamente entera, pero no es optima. Fácilmente podemos advertir que la solución optima es el punto (0,4) con una valor de 40.

Esto significa que GAMS no es capaz de encontrar la solución optima?. La respuesta es **NO**.

GAMS como todo programa de uso "profesional" incorpora la opción de búsqueda de una solución "buena" en poco tiempo antes que la optima usando muchos recursos, es decir, GAMS detiene el proceso de búsqueda en aquellas soluciones que difieran menos de un 10 por ciento de la mejor solución. Esto queda reflejado en el fichero LST:

```
Solution satisfies tolerances.
MIP Solution   :          38.000000    (4 iterations, 3 nodes)
Final LP       :          38.000000    (0 iterations)
Best integer solution possible :          40.000000
Absolute gap           :                   2
Relative gap           :          0.0526316
```

Esto quiere decir que la mejor solución será 40, pero la solución actual (38) difiere solamente un 5.26 por ciento (Relative gap) de la mejor solución. Como la solución actual está dentro del margen de tolerancia, entonces GAMS detiene el proceso.

Si se quiere encontrar el optimo, solamente hay que incorporar la opción de que la tolerancia sea muy baja, por ejemplo un 0.00001 (0.001 por ciento).

Así el fichero GMS será:

```
*EJEMPLO 9.2.A
* EJERCICIO DE PROGRAMACION LINEAL ENTERA
OPTION OPTCR=0.00001;
VARIABLES X1, X2, F;
*DECLARACION QUE LAS VARIABLES SON ENTERAS
INTEGER VARIABLES X1, X2;
EQUATIONS
OBJ, R1, R2;
OBJ..    F=E= 8*X1 + 10*X2;
R1..     4*X1 + 6*X2 =L= 24;
R2..     8*X1 + 3*X2 =L= 24;
MODEL EJ92A /ALL/;
SOLVE EJ92A USING MIP MAXIMIZING F;
```

La solución que se obtiene es:

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   EJ92A               OBJECTIVE  F
     TYPE    MIP                 DIRECTION  MAXIMIZE
     SOLVER  CPLEX               FROM LINE  13
**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      1 OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE                 40.0000
 RESOURCE USAGE, LIMIT          2.810      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT         5         10000
GAMS/Cplex    Aug  7, 2000 WIN.CP.NA 19.4 016.015.038.WAT For Cplex 6.6
Cplex 6.6.1, GAMS Link 16, Using a GAMS/Cplex demo license installed at runtime.
Proven optimal solution.
MIP Solution  :            40.000000    (5 iterations, 3 nodes)
Final LP      :            40.000000    (0 iterations)
Best integer solution possible :          40.000000
Absolute gap          :                  0
Relative gap          :                  0

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- EQU OBJ             .         .         .        1.000
---- EQU R1            -INF      24.000    24.000     2.000
---- EQU R2            -INF      12.000    24.000      .

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- VAR X1              .         .       100.000     EPS
---- VAR X2              .        4.000    100.000   -2.000
---- VAR F             -INF      40.000     +INF       .
```

Como podemos observar ahora GAMS si que nos ha proporcionado la solución optima, tal como indica el fichero LST

```
**** MODEL STATUS      1 OPTIMAL
```

En esta caso la diferencia está en que hace un mayor numero de iteraciones (4, con la condición de tolerancia y 5, sin esa condición), es decir, un 20 por ciento más de iteraciones.

No obstante las condiciones de "aceleración" y "desaceleración" son muchas y de muy diferentes características, para ello puede verse el Manual del Usuario de GAMS.

Ejemplo 9.3:

La empresa FERCA, S.A., se dedica al envasado de fertilizantes para el suministro a sus clientes, debe determinar el plan de envasado de tres tipos de fertilizantes (tipo 1, 2 y 3). Estos tipos de fertilizantes se envasan en cajas con peso diferentes, a partir de tres componentes básicos (A, B y C). Los beneficios obtenidos por cada tipo de fertilizante son de 25, 30 y 35 unidades monetarias, respectivamente.

Cada tipo de fertilizantes tiene una mezcla diferentes de componentes, así el tipo 1 requiere 10 kilos de componente A, 20 de la clase B y 18 de clase C. Para el tipo 2 los requerimientos son de 13, 22 y 20 kilos de cada uno de los componentes, mientras que para el tipo 3 los requerimientos son de 18, 20 y 24, respectivamente.

La empresa dispone en el almacén actualmente de 2324 kilos de componente A, de 2550 de B y de 1568 de C.

Con estos datos determinar el numero de cajas de fertilizantes que la empresa puede suministrar al mercado de forma que se maximice su beneficio.

El fichero GMS será el siguiente:

```
*EJEMPLO 9.3
* FERCA, S.A.
VARIABLES X1, X2, X3, F;
INTEGER VARIABLES X1, X2, X3;
EQUATIONS
OBJ, R1, R2, R3;
OBJ..     F=E= 25*X1 + 30*X2 + 35*X3;
R1..      10*X1 + 13*X2 + 18*X3 =L= 2324;
R2..      20*X1 + 22*X2 + 20*X3 =L= 2550;
R3..      18*X1 + 20*X2 + 24*X3 =L= 1568;
MODEL EJ93 /ALL/;
SOLVE EJ93 USING MIP MAXIMIZING F;
```

La solución que se obtiene es:

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   EJ93                OBJECTIVE  F
     TYPE    MIP                 DIRECTION  MAXIMIZE
     SOLVER  CPLEX               FROM LINE  11
**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      8 INTEGER SOLUTION
**** OBJECTIVE VALUE             2340.0000
 RESOURCE USAGE, LIMIT          2.690      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT         1         10000

Solution satisfies tolerances.
MIP Solution    :          2340.000000     (1 iterations, 1 nodes)
Final LP        :          2340.000000     (0 iterations)
Best integer solution possible :         2351.111111
Absolute gap           :              11.1111
Relative gap           :          0.00474834

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- EQU OBJ             .         .         .        1.000
---- EQU R1            -INF   1014.000  2324.000       .
---- EQU R2            -INF   1716.000  2550.000       .
---- EQU R3            -INF   1560.000  1568.000       .

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- VAR X1              .         .       100.000    25.000
---- VAR X2              .       78.000    100.000    30.000
---- VAR X3              .         .       100.000    35.000
---- VAR F             -INF   2340.000     +INF        .
```

El fichero de salida, ya nos advierte que la solución no es optima sino que simplemente es entera con un máximo del 10 por ciento de diferencia respecto a la mejor solución.

Para llegar a obtener la solución entera, debemos modificar la condición de tolerancia, de forma que el fichero GMS será ahora:

```
*EJEMPLO 9.3.A
* FERCA, S.A.
OPTION OPTCR = 0.00001;
VARIABLES X1, X2, X3, F;
INTEGER VARIABLES X1, X2, X3;
EQUATIONS
OBJ, R1, R2, R3;
OBJ..     F=E= 25*X1 + 30*X2 + 35*X3;
R1..      10*X1 + 13*X2 + 18*X3 =L= 2324;
R2..      20*X1 + 22*X2 + 20*X3 =L= 2550;
R3..      18*X1 + 20*X2 + 24*X3 =L= 1568;
MODEL EJ93A /ALL/;
SOLVE EJ93A USING MIP MAXIMIZING F;
```

La solución es:

```
               S O L V E      S U M M A R Y
     MODEL    EJ93A               OBJECTIVE  F
     TYPE     MIP                 DIRECTION  MAXIMIZE
     SOLVER   CPLEX               FROM LINE  12

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      1 OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE              2350.0000
 RESOURCE USAGE, LIMIT           2.750      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT          4         10000

Proven optimal solution.
MIP Solution  :          2350.000000     (4 iterations, 10 nodes)
Final LP      :          2350.000000     (0 iterations)
Best integer solution possible :         2350.000000
Absolute gap          :                    0
Relative gap          :                    0
```

```
                      LOWER      LEVEL      UPPER    MARGINAL
---- EQU OBJ            .          .          .        1.000
---- EQU R1           -INF   1024.000  2324.000        .
---- EQU R2           -INF   1712.000  2550.000        .
---- EQU R3           -INF   1568.000  1568.000       1.500

                      LOWER      LEVEL      UPPER    MARGINAL
---- VAR X1             .          .       100.000    -2.000
---- VAR X2             .        76.000   100.000      EPS
---- VAR X3             .         2.000   100.000    -1.000
---- VAR F            -INF   2350.000     +INF         .
```

Como puede observarse la solución es ahora optima, con un mejor valor de la función objetivo.

Ejemplo 9.4:

Vamos a presentar un típico de programación entera(binaria) mixta, es decir, con variables binarias y continuas: **problemas de localización de recursos o problemas con coste fijo.**

Este tipo de problemas vendría a representar una situación como la siguiente: Consideremos un problema de distribución en que hay n clientes y que el producto que estos clientes demandan se puede localizar o situar en m almacenes desde los cuales se va a transportar el producto para satisfacer las demandas.

Supongamos que el cliente j tiene una demanda del producto que estima en d_j unidades, y hay un coste asociado c_{ij} que incluye por unidad de producto, el coste de localización del producto en el almacén i y el envío del producto desde i al cliente j. Además, hay un coste fijo C_i , que representa el coste de utilización del almacén i , si este es el caso, además cada almacén tiene unas disponibilidades de O_i unidades. El problema que se plantea es: ¿Qué almacenes deben utilizar y que cantidad de producto hay que enviar desde los almacenes a los clientes, de forma que se satisfaga la demanda con un coste total mínimo?.

A la vista de la definición anterior del problema, deben ser dos los tipos de variables a considerar. Por una parte, las correspondientes a las cantidades de producto que hay que enviar desde los almacenes a los clientes que se indicaran como:

x_{ij} = cantidad de producto enviada desde el almacén *i* al cliente *j*.

Estas variables se pueden considerar como variables continuas o enteras, según las características del producto y del contexto del problema.

Por otra parte, debe considerarse la posibilidad de que se utilice o no un determinado almacén *i*, de forma que definimos las variables:

$$s_i = \begin{cases} 1 & \text{si se utiliza el almacen i} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función objetivo de este problema estará formada por dos sumandos, uno que represente los costes de envío del almacén i al cliente j , y el otro sumando incorporará los costes de utilización de los almacenes.

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} C_i s_i$$

Las restricciones serán:

a) La satisfacción de las demandas de los clientes. Consideraremos que se satisfacen totalmente (=), aunque podemos sustituir esta restricción por (≥):

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j$$

b) Los envíos desde cada uno de los almacenes:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i O_i$$

El significado de esta restricción lo podemos explicar que si la variables $s_i = 0$, no será posible enviar productos desde ese almacén a cualquiera de los clientes, y en tal caso $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 0$ y con ello $x_{ij} = 0$. Sin embargo si $s_i = 1$, se verifica que $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = O_i$ para el almacén i, que son las disponibilidades de ese almacen..

En resumen, el modelo construido para este problema, es un programa de programación entera mixta con variables binarias, y quedaría de la siguiente forma:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} C_i\, s_i$$

s.a:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i\, O_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$s_i \in \{0, 1\} \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

Una variante de este problema, es cuando se pretende localizar un único almacén con capacidad suficiente. En este caso la elección solo puede recaer un una variable $s_i = 1$, además debemos asegurar que el almacén elegido tenga la capacidad para satisfacer el total de la demanda de los cliente. Con ello el problema seria casi idéntico al anterior, con la salvedad que las oferta $O_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} C_i\, s_i$$

s.a:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i \sum_{j=1}^{n} d_j \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$s_i \in \{0, 1\} \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

Consideremos el siguiente ejemplo:

Una empresa tiene que servir seis zonas comerciales, con un máximo de cuatro fabricas. Las zonas comerciales y sus demandas (expresadas en unidades anuales de producto) son las siguientes:

ZONA	*DEMANDA*
CATALUNYA	*480*
NORTE	*356*
NOROESTE	*251*
LEVANTE	*349*
CENTRO	*598*
SUR	*326*

La empresa tiene en la actualidad dos fabricas en funcionamiento, una de ellas esta situada en Barcelona y tiene una capacidad productiva de 500 unidades/año, la segunda fabrica esta situada en Madrid y tiene una capacidad productiva de 700 unidades/año.

Las alternativas de inversión que se plantean en la empresa son las de ampliar las dos fabricas existentes o bien construir nuevas plantas en Bilbao y/o Valencia. Los costes variables de suministros cij, que comprenden tanto los costes de producción, de transporte y los de distribución en las zonas de demanda son los siguientes:

Planta\Zona	*Cataluña*	*Norte*	*Noroeste*	*Levante*	*Centro*	*Sur*
Barcelona	*10*	*62*	*110*	*35*	*62*	*100*
Bilbao	*62*	*10*	*63*	*63*	*40*	*83*
Madrid	*62*	*40*	*60*	*35*	*7*	*54*
Valencia	*35*	*63*	*96*	*10*	*35*	*67*

Las diferentes fabricas tienen los costes anuales y los niveles de producción siguientes:

	CAPACIDAD ACTUAL	***AMPLIACIÓN CAPACIDAD***	***COSTE FIJO***
BARNA	*500*	*1000*	*100000*
BILBAO		*1000*	*100000*
MADRID	*700*	*1000*	*80000*
VALENCIA		*1000*	*100000*

Cual ha de ser la decisión que tome la empresa de manera que se satisfagan las demandas y el coste sea mínimo.

La modelización de este problema es muy similar a un problema de transporte, excepto por la característica de incorporar la parte correspondiente al coste fijo de los almacenes, así como las restricciones de producción y de capacidad máxima de cada una de las plantas.

La construcción del fichero GMS con todas las variables (x y s) seria largo y complicado, pero afortunadamente GAMS permite crear un fichero "casi" como se ha escrito el modelo, simplemente definiendo previamente unos conjutnos de datos (SET, PARAMETER, TABLE, etc.), como sigue:

```
$TITLE PROBLEMA DE LOCALIZACION
*EJEMPLO 9.4
OPTION LIMROW=100;
OPTION LIMCOL =100;
OPTIONS OPTCR = 0.01;
SET     I       FABRICAS /BARNA,BILBAO,MADRID,VALENC/
        J       ZONAS /CATAL, NORTE, NOROE, LEVAN, CENTR, SUR/
TABLE C(I,J)    COSTES VARIABLES DE DISTRIBUCION Y TRANSPORTE
                CATAL   NORTE   NOROE   LEVAN   CENTR   SUR
BARNA           10      62      110     35      62      100
BILBAO          62      10      63      63      40      86
MADRID          62      40      60      35      7       54
VALENC          35      63      96      10      35      67;
PARAMETER F(I)  COSTES FIJOS
/BARNA  100000
BILBAO  100000
MADRID  80000
VALENC  100000/;
PARAMETER D(J) DEMANDA DE LA ZONAS
/CATAL  480
NORTE   356
NOROE   251
LEVAN   349
CENTR   598
SUR     326/;
PARAMETER CA(I)  CAPACIDAD DE LAS FABRICAS
/BARNA  1000
BILBAO  1000
MADRID  1000
VALENC  1000/;
PARAMETER CI(I)  CAPACIDAD INICIAL
/BARNA  500
BILBAO  0
MADRID  700
VALENC  0/;
VARIABLES
FO
COFI
X(I,J)
Y(I);
POSITIVE VARIABLES X(I,J);
BINARY VARIABLES Y(I);

EQUATIONS
OBJ
COSTEFIJO
DEMANDA(J)
MAXPROD(I);
COSTEFIJO.. COFI =E= SUM(I, F(I)*Y(I));
OBJ.. FO =E= SUM((I,J), C(I,J)*X(I,J)) + COFI;
DEMANDA(J).. SUM(I,X(I,J)) =G= D(J);
MAXPROD(I).. SUM(J,X(I,J)) =L= CI(I) + (CA(I)*Y(I));

MODEL EJ94 /ALL/;
SOLVE EJ94 USING MIP MINIZING FO;
DISPLAY X.L,Y.L,DEMANDA.L, MAXPROD.L;
```

Vamos a observa en primer lugar las ecuaciones de este problema:

```
---- OBJ          =E=
OBJ..   FO - COFI - 10*X(BARNA,CATAL) - 62*X(BARNA,NORTE) - 110*X(BARNA,NOROE) -
35*X(BARNA,LEVAN) - 62*X(BARNA,CENTR) - 100*X(BARNA,SUR) - 62*X(BILBAO,CATAL) -
10*X(BILBAO,NORTE) - 63*X(BILBAO,NOROE) - 63*X(BILBAO,LEVAN) - 40*X(BILBAO,CENTR) -
86*X(BILBAO,SUR) - 62*X(MADRID,CATAL) - 40*X(MADRID,NORTE) - 60*X(MADRID,NOROE) -
35*X(MADRID,LEVAN) - 7*X(MADRID,CENTR) - 54*X(MADRID,SUR) - 35*X(VALENC,CATAL) -
63*X(VALENC,NORTE) - 96*X(VALENC,NOROE) - 10*X(VALENC,LEVAN) - 35*X(VALENC,CENTR) -
67*X(VALENC,SUR) =E= 0 ;     (LHS = 0)

---- COSTEFIJO    =E=
COSTEFIJO..    COFI  -  100000*Y(BARNA)  -  100000*Y(BILBAO)  -  80000*Y(MADRID)  -
100000*Y(VALENC) =E= 0 ; (LHS = 0)

---- DEMANDA      =G=
DEMANDA(CATAL)..  X(BARNA,CATAL) + X(BILBAO,CATAL) + X(MADRID,CATAL)
 + X(VALENC,CATAL) =G= 480 ; (LHS = 0 ***)
DEMANDA(NORTE)..  X(BARNA,NORTE) + X(BILBAO,NORTE) + X(MADRID,NORTE)
 + X(VALENC,NORTE) =G= 356 ; (LHS = 0 ***)
DEMANDA(NOROE)..  X(BARNA,NOROE) + X(BILBAO,NOROE) + X(MADRID,NOROE)
 + X(VALENC,NOROE) =G= 251 ; (LHS = 0 ***)
DEMANDA(LEVAN)..  X(BARNA,LEVAN) + X(BILBAO,LEVAN) + X(MADRID,LEVAN)
 + X(VALENC,LEVAN) =G= 349 ; (LHS = 0 ***)
DEMANDA(CENTR)..  X(BARNA,CENTR) + X(BILBAO,CENTR) + X(MADRID,CENTR)
 + X(VALENC,CENTR) =G= 598 ; (LHS = 0 ***)
DEMANDA(SUR)..  X(BARNA,SUR)  + X(BILBAO,SUR)  + X(MADRID,SUR)  + X(VALENC,SUR)  =G=
326 ; (LHS = 0 ***)

---- MAXPROD      =L=
MAXPROD(BARNA)..  X(BARNA,CATAL) + X(BARNA,NORTE) + X(BARNA,NOROE)
 + X(BARNA,LEVAN) + X(BARNA,CENTR) + X(BARNA,SUR) - 1000*Y(BARNA) =L=
 500 ; (LHS = 0)
MAXPROD(BILBAO)..  X(BILBAO,CATAL) + X(BILBAO,NORTE) + X(BILBAO,NOROE)
 + X(BILBAO,LEVAN) + X(BILBAO,CENTR) + X(BILBAO,SUR) - 1000*Y(BILBAO)
 =L= 0 ; (LHS = 0)
MAXPROD(MADRID)..  X(MADRID,CATAL) + X(MADRID,NORTE) + X(MADRID,NOROE)
 + X(MADRID,LEVAN) + X(MADRID,CENTR) + X(MADRID,SUR) - 1000*Y(MADRID)
 =L= 700 ; (LHS = 0)
MAXPROD(VALENC)..  X(VALENC,CATAL) + X(VALENC,NORTE) + X(VALENC,NOROE)
 + X(VALENC,LEVAN) + X(VALENC,CENTR) + X(VALENC,SUR) - 1000*Y(VALENC)
      =L= 0 ; (LHS = 0)
```

En las ecuaciones anteriores podemos observar el planteamiento formal de las restricciones que afectan a cada una de las zonas y a cada una de las posibles localizaciones.

Para obtener la solución de este problema usaremos solamente los resultados de la opción DISPLAY. La solución a este problema es:

```
               S O L V E      S U M M A R Y
     MODEL   EJ94                 OBJECTIVE  FO
     TYPE    MIP                  DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER  CPLEX                FROM LINE  54

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      1 OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE           237425.0000
 RESOURCE USAGE, LIMIT           2.800     1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT         60         10000

Proven optimal solution.
MIP Solution  :       237425.000000    (60 iterations, 12 nodes)
Final LP      :       237425.000000    (1 iterations)
Best integer solution possible :      237425.000000
Absolute gap          :                   0
Relative gap          :                   0

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- EQU OBJ             .         .         .        1.000
---- EQU COSTEFIJO       .         .         .        1.000

---- EQU DEMANDA
         LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
CATAL   480.000   480.000     +INF     10.000
NORTE   356.000   356.000     +INF     10.000
NOROE   251.000   251.000     +INF     60.000
LEVAN   349.000   349.000     +INF     35.000
CENTR   598.000   598.000     +INF      7.000
SUR     326.000   326.000     +INF     54.000
```

```
---- EQU MAXPROD
          LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
BARNA      -INF    480.000   500.000      .
BILBAO     -INF   -644.000      .         .
MADRID     -INF    524.000   700.000      .
VALENC     -INF       .         .     -100.000

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- VAR FO             -INF  2.3743E+5     +INF       .
---- VAR COFI           -INF  1.8000E+5     +INF       .

---- VAR X
                LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
BARNA .CATAL      .      480.000     +INF       .
BARNA .NORTE      .         .        +INF     52.000
BARNA .NOROE      .         .        +INF     50.000
BARNA .LEVAN      .         .        +INF       EPS
BARNA .CENTR      .         .        +INF     55.000
BARNA .SUR        .         .        +INF     46.000
BILBAO.CATAL      .         .        +INF     52.000
BILBAO.NORTE      .      356.000     +INF       .
BILBAO.NOROE      .         .        +INF      3.000
BILBAO.LEVAN      .         .        +INF     28.000
BILBAO.CENTR      .         .        +INF     33.000
BILBAO.SUR        .         .        +INF     32.000
MADRID.CATAL      .         .        +INF     52.000
MADRID.NORTE      .         .        +INF     30.000
MADRID.NOROE      .      251.000     +INF       .
MADRID.LEVAN      .      349.000     +INF       .
MADRID.CENTR      .      598.000     +INF       .
MADRID.SUR        .      326.000     +INF       .
VALENC.CATAL      .         .        +INF    125.000
VALENC.NORTE      .         .        +INF    153.000
VALENC.NOROE      .         .        +INF    136.000
VALENC.LEVAN      .         .        +INF     75.000
VALENC.CENTR      .         .        +INF    128.000
VALENC.SUR        .         .        +INF    113.000

---- VAR Y
          LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
BARNA       .         .        1.000 1.0000E+5
BILBAO      .        1.000     1.000 1.0000E+5
MADRID      .        1.000     1.000 80000.000
VALENC      .         .        1.000      EPS
```

```
**** REPORT SUMMARY :          0     NONOPT
                               0 INFEASIBLE
                               0  UNBOUNDED
E x e c u t i o n (DISPLAY)

----      55 VARIABLE  X.L
             CATAL        NORTE        NOROE        LEVAN        CENTR          SUR
BARNA      480.000
BILBAO                  356.000
MADRID                               251.000      349.000      598.000      326.000

----      55 VARIABLE  Y.L
BILBAO 1.000,    MADRID 1.000

----      55 EQUATION  DEMANDA.L
CATAL 480.000,    NORTE 356.000,    NOROE 251.000,    LEVAN 349.000
CENTR 598.000,    SUR   326.000

----      55 EQUATION  MAXPROD.L
BARNA   480.000,    BILBAO -644.000,    MADRID  524.000

----      55 VARIABLE  FO.L                =   237425.000

EXECUTION TIME       =        0.220 SECONDS    1.4 Mb      WIN194-116
```

La estrategia óptima es la de ampliar la planta de Madrid y construir una planta en Bilbao. La nueva planta de Bilbao abastece a la zona Norte, mientras que la planta actual de Barcelona abastece a Cataluña, y muy residualmente a Levante. El resto de la demanda de la zona de Levante se abastece desde Madrid, así como a las restantes zonas.

10.- Colección de ejercicios para ordenador. Trabajos personales

Los estudiantes que deseen realizar una evaluación continua de las clases practicas deberán realizar los controles que se efectuaran a lo largo del curso, y deben presentar cuatro trabajos de la colección de ejercicios para ordenador. Cada uno de los ejercicios corresponderá a las diferentes partes en que esta dividida la materia: Clásica, No lineal, Lineal y Entera.

Existe un cuadernos especifico de problemas Teorico-Practicos y de ejercicios para ordenador.

Los trabajos se realizarán de forma conjunta por dos estudiantes, adecuándose a los modelos que figuran en el epígrafe 11 y deberán ser entregados de acuerdo con el calendario de practicas que se establezca al inicio del curso.

11.- Modelos para la realización de los trabajos personales.

PRÁCTICA PCP00

1.-ENUNCIADO

Una empresa trabaja con tres productos en cantidades x,y,z respectivamente. La función de costes de dicha empresa viene dada por la expresión $x^2+y^2+3z^2$. Por otra parte, los precios de los artículos son 15 unidades monetarias para el primero, 18 u.m. para el segundo y el precio del tercer artículo depende de la cantidad producida de los otros dos según la función 2x+y. Por razones de mercado, la empresa ha de cumplir los dos requisitos siguientes:

- Han de producirse exactamente 20 unidades más del primer producto que del segundo.
- Han de producirse exactamente 17 unidades entre el segundo y el tercer producto.

a) Modelizar como un problema de programación clásica y calcular las cantidades de los productos que se deben fabricar si se desea maximizar el beneficio.

b) ¿Le conviene a la empresa aumentar el número de unidades producidas entre el segundo y el tercer artículo?

2.- MODELIZACIÓN

Identificación de variables:

Las variables deben representar las decisiones que hay que tomar; por lo tanto, en nuestro problema, como se trata de decidir cuántas unidades se deben producir de cada producto, serán (como indica el enunciado):

x número de unidades a producir del producto 1.

y número de unidades a producir del producto 2.

z número de unidades a producir del producto 3.

Función objetivo:

El objetivo que se persigue es maximizar el beneficio. Ahora bien, el beneficio de una empresa se obtiene por diferencia entre ingresos y gastos.

La función de ingresos viene determinada (excepto que existan subvenciones u otros ingresos atípicos) por el número de unidades vendidas y el precio de venta de cada unidad. Así pues, la función de ingresos que representaremos por I es:

$$\mathbf{I = 15x+18y+(2x+y)z}$$

La función de costes viene dada en el enunciado y es la siguiente:

$$\mathbf{C = x^2+y^2+3z^2}$$

Por lo tanto, la función de beneficios, que representaremos por B, queda establecida como:

$$\mathbf{B = I\text{-}C = 15x+18y+(2x+y)z-[x^2+y^2+3z^2]}$$

Cabría decir que en cualquier empresa suele haber unos costes fijos que no dependen de las cantidades producidas (alquileres, amortizaciones, etc) y que en este caso no se han contemplado, pero este hecho no tiene mayor importancia, porque sería añadir una constante a la función de costes que no afectaría al punto óptimo, aunque sí al valor de la función.

Conjunto de oportunidades:

Las dos restricciones del problema vienen dadas por razones de mercado y consisten en:

1.- Han de producirse exactamente 20 unidades más del primer producto que del segundo, es decir, $x-y=20$.

2.- Han de producirse exactamente 17 unidades entre el segundo y el tercer producto, esto es, $y+z=17$.

Desde un punto de vista operativo, es más lógico que la empresa plantee las restricciones de producción en forma de menor o igual (con capacidades máximas de producción), pero dado que estamos planteando un problema de programación clásica sólo podemos utilizar restricciones de igualdad.

Como restricciones implícitas del problema, tendríamos que exigir condiciones de no negatividad para las tres variables puesto que, aunque matemáticamente sea correcto, económicamente no tendría ningún sentido que las cantidades a producir fuesen negativas.

Ahora bien, dado que como hemos dicho con anterioridad, estamos planteando un problema de programación clásica, no es posible exigir la no negatividad de las variables y sólo cabe esperar que la solución del problema cumpla con estos requisitos, pues de lo contrario no nos servirá de nada.

Modelo matemático:

$$\begin{aligned} \text{Max } B = I-C &= 15x+18y+(2x+y)z-[x^2+y^2+3z^2] \\ \text{s.a.} \quad & x-y=20 \\ & y+z=17 \end{aligned}$$

3.- SOLUCIÓN DEL MODELO

El fichero GMS del problema es:

```
* PROBLEMA PCP00.
* COMPONENTES DEL GRUPO:
* ESTUDIANTE # 1
* ESTUDIANTE # 2
VARIABLES
X UNIDADES DEL PRIMER PRODUCTO
Y UNIDADES DEL SEGUNDO PRODUCTO
Z UNIDADES DEL TERCER PRODUCTO
P3 PRECIO DEL TERCER PRODUCTO
I INGRESOS
C COSTES
B BENEFICIOS;
X.L=20;
Z.L=17;
EQUATIONS
PR3 PRECIO DEL TERCER PRODUCTO
INGRESOS FUNCION DE INGRESOS
COSTES FUNCION DE COSTES
BENEFI BENEFICIOS
R1 PRIMERA RESTRICCION DE MERCADO
R2 SEGUNDA RESTRICCION DE MERCADO;
PR3..P3=E=2*X+Y;
INGRESOS..I=E=15*X+18*Y+P3*Z;
COSTES..C=E=X**2+Y**2+3*Z**2;
BENEFI..B=E=I-C;
R1..X=E=Y+20;
R2..Y+Z=E=17;
MODEL PCP00/ALL/;
SOLVE PCP00 USING NLP MAXIMIZING B;
```

La solución:

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   PCP00               OBJECTIVE  B
     TYPE    NLP                 DIRECTION  MAXIMIZE
     SOLVER  MINOS5              FROM LINE  29

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      2 LOCALLY OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE               64.1250

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.438      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT        25         10000
 EVALUATION ERRORS              0             0

 MINOS5        Mar 21, 2001 WIN.M5.M5 20.0 108.043.039.WAT
EXIT -- OPTIMAL SOLUTION FOUND

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU PR3             .         .         .       10.375
---- EQU INGRESOS        .         .         .        1.000
---- EQU COSTES          .         .         .       -1.000
---- EQU BENEFI          .         .         .        1.000
---- EQU R1            20.000    20.000    20.000   -17.500
```

```
---- EQU R2           17.000    17.000    17.000    -2.375

  PR3  PRECIO DEL TERCER PRODUCTO
  INGRESOS  FUNCION DE INGRESOS
  COSTES  FUNCION DE COSTES
  BENEFI  BENEFICIOS
  R1  PRIMERA RESTRICCION DE MERCADO
  R2  SEGUNDA RESTRICCION DE MERCADO

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR X              -INF     26.625     +INF       .
---- VAR Y              -INF      6.625     +INF       .
---- VAR Z              -INF     10.375     +INF       .
---- VAR P3             -INF     59.875     +INF       .
GAMS Rev 121  Windows NT/95/98                   05/14/01 12:54:12   PAGE
7
G e n e r a l   A l g e b r a i c   M o d e l i n g   S y s t e m

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR I              -INF   1139.828     +INF      EPS
---- VAR C              -INF   1075.703     +INF       .
---- VAR B              -INF     64.125     +INF       .

  X  UNIDADES DEL PRIMER PRODUCTO
  Y  UNIDADES DEL SEGUNDO PRODUCTO
  Z  UNIDADES DEL TERCER PRODUCTO
  P3  PRECIO DEL TERCER PRODUCTO
  I  INGRESOS
  C  COSTES
  B  BENEFICIOS
```

4.- DISCUSIÓN DE LA SOLUCIÓN

Análisis de la globalidad de la solución:

Dado que el GAMS proporciona óptimos locales, vamos a estudiar si el máximo obtenido es también un máximo global. Para ello aplicaremos la condición de optimalidad global para problemas convexos de programación clásica con restricciones (teorema local-global).

La función objetivo del problema era

$$B=15x+18y+2xz+yz-x^2-y^2-3z^2$$

que, por ser un polinomio, es una función de clase 2 y, por lo tanto, podemos utilizar el teorema de caracterización de funciones convexas de clase 2.

$$\nabla B(x,y,z)=(15+2z-2x,18+z-2y,2x+y-6z)$$

$$HB(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Utilizando el criterio de los menores conducentes para clasificar el signo de la matriz hessiana, se tiene que:

A_1=-2<0, A_2=4>0, A_3=-14<0.

Por lo tanto, la matriz hessiana es definida negativa y la función estrictamente cóncava.

El conjunto de oportunidades está formado por la intersección de dos hiperplanos. Como los hiperplanos son conjuntos convexos y la intersección de convexos es un conjunto convexo, tenemos que el conjunto de oportunidades es convexo.

En consecuencia, podemos afirmar que el óptimo local calculado por el GAMS es un óptimo global del problema.

Interpretación de los multiplicadores de Lagrange:

El valor de un multiplicador nos indica la variación que sufre la función objetivo cuando varía infinitesimalmente el término independiente de la restricción a la que está asociado.

Como el primer multiplicador vale -17'5, esto quiere decir que si la empresa aumenta la diferencia de unidades producidas entre el primer y el segundo artículo, es decir, si produce más de 20 unidades del primero que del segundo, los beneficios disminuirán, mientras que si disminuye dicha diferencia los beneficios aumentarán. Por lo tanto, a la empresa le puede interesar disminuirla.

El segundo multiplicador vale -2'375, lo cual indica que si se producen más unidades entre el segundo y el tercer producto, los beneficios disminuyen y si se producen menos de 17, los beneficios aumentan. Por lo tanto, a la empresa le puede interesar producir menos de 17 unidades entre los dos.

Análisis del modelo:

Las variables principales toman los valores x=26'625, y=6'625, z=10'375. Esto quiere decir que la empresa deberá producir 26'625 unidades del primer producto, 6'625 unidades del segundo producto y 10'375 unidades del tercer producto.

Para que el modelo sea válido, debemos asumir que las unidades son divisibles, es decir, que se trata de algún tipo de producto que se puede producir en cualquier cantidad, no necesariamente entera (toneladas de abonos, litros de pinturas, etc) o bien que el periodo de planificación es muy corto y que las unidades no terminadas en dicho periodo se terminan en el siguiente.

En cuanto a la no negatividad de las variables, que como se ha comentado en la modelización, debería haber sido exigida, vemos que no ha sido necesario puesto que la solución cumple dicha restricción.

El precio de venta del tercer producto (el único que no era constante) es 59'875, que, como se observa, también cumple la condición de no negatividad.

La función de ingresos es de 1139'828 unidades monetarias y los costes son 1075'703 u.m., obteniéndose, en consecuencia, unos beneficios de 64'125 u.m.

Todos los resultados son, pues, coherentes desde el punto de vista económico, si bien como ya hemos apuntado con anterioridad el modelo está excesivamente simplificado y habría que considerar muchos más factores.

5.- CONTESTACIÓN A LAS PREGUNTAS PROPUESTAS

a) Calcular las cantidades de los productos que se deben fabricar si se desea maximizar el beneficio.

La empresa deberá producir 26'625 unidades del primer producto, 6'625 unidades del segundo producto y 10'375 unidades del tercer producto.

b) ¿Le conviene a la empresa aumentar el número de unidades producidas entre el segundo y el tercer artículo?

A la empresa le interesa producir menos de 17 unidades entre los dos porque el multiplicador asociado con la segunda restricción tiene signo negativo.

PRÁCTICA PNLP00

1.-ENUNCIADO

Una empresa de transportes fleta cuatro aviones, con un número de pasajeros x, y, z, t respectivamente. El precio de venta de cada pasaje en cada uno de ellos es una función decreciente del número de pasajes vendidos de acuerdo con la siguiente relación:

Precio del pasaje en el avión 1: 23000-x
Precio del pasaje en el avión 2: 14000-y
Precio del pasaje en el avión 3: 24000-z
Precio del pasaje en el avión 4: 15000-t

Por otra parte, el coste que le supone a la empresa el trayecto de cada avión tiene dos componentes; por una parte, un coste fijo de 20000, 25000, 30000 y 35000 unidades monetarias, respectivamente. Y por otra parte, un coste variable por pasajero de 4000 unidades monetarias para el primer avión, 1000 para el segundo, 2000 para el tercero y 1000 para el cuarto avión.

Teniendo en cuenta que la capacidad total de los cuatro aviones es de 1000 pasajeros, se pide:

a) Obtener el máximo beneficio de la empresa. ¿Cuántos pasajeros irán en cada avión?

b) ¿Le convendría a la empresa aumentar la capacidad total de sus cuatro aviones?

2.- MODELIZACIÓN

Identificación de variables:

En este problema, se trata de averiguar cuántos pasajeros irán en cada avión para que la empresa obtenga el máximo beneficio. Por tanto, las variables serán:

x pasajeros en el primer avión.

y pasajeros en el segundo avión.

z pasajeros en el tercer avión.

t pasajeros en el cuarto avión.

Función objetivo:

El objetivo que se persigue es maximizar el beneficio que podemos obtener como la diferencia entre ingresos y costes.

La única fuente de ingresos de que dispone la empresa, según el enunciado, es la venta de los pasajes. Multiplicando el precio de un pasaje en el primer avión por el número de pasajeros, esto es, $(23000 – x)x$, obtenemos las unidades monetarias que le reporta a la empresa el primer avión. Razonando de forma análoga para los aviones 2, 3 y 4 y sumando, la función de ingresos vendrá dada por:

$$\mathbf{I = (23000 - x)x + (14000 - y)y + (24000 - z)z + (15000 - t)t}$$

Por otra parte, el coste imputable a cada avión consta de dos componentes: un coste fijo por trayecto, que es independiente del número de pasajeros en dicho trayecto, y un coste variable directamente proporcional a los pasajeros que transporta el avión. Así, para el avión 1 tenemos que el coste total será $20000 + 4000x$. Aplicando el mismo procedimiento al resto de aviones y sumando, obtenemos que la función de coste total de la empresa es:

$$\mathbf{C= 4000x + 1000y + 2000z + 1000t + 110000}$$

La función de beneficios será:

$$\mathbf{B = I - C = [(23000 - x)x + (14000 - y)y + (24000 - z)z + (15000 - t)t] -}$$
$$\mathbf{[\ 4000x + 1000y + 2000z + 1000t + 110000]}$$

Conjunto de oportunidades:

La única restricción que tiene la empresa es la capacidad de los aviones. Puesto que el único dato de que disponemos es la capacidad global de los cuatro aviones, plantearemos la restricción como

número total de pasajeros transportados ≤ capacidad total de los aviones

esto es,

$$\mathbf{x + y + z + t \leq 1000}$$

Lo lógico sería establecer un modelo que introdujese las capacidades de cada uno de los aviones como cotas. Es evidente que, al introducir sólo la capacidad total, perdemos información importante del problema real. Ahora bien, dado que en el enunciado no aparecen estos datos, sólo podemos plantear la restricción anterior y esperar que la solución, correcta para el modelo matemático, también sea válida para el problema real. En cualquier caso, queremos hacer notar que la primera fase de recopilación de información no se ha efectuado correctamente.

Como restricciones inherentes al problema, y puesto que las variables representan el número de pasajeros, debemos considerar condiciones de no negatividad en todas las variables.

Modelo matemático:

$$\begin{aligned} \mathbf{Max\ B} &= \mathbf{[(23000 - x)x + (14000 - y)y + (24000 - z)z + (15000 - t)t] -} \\ &\quad \mathbf{[\,4000x + 1000y + 2000z + 1000t + 110000]} \\ \mathbf{s.a.} &\quad \mathbf{x + y + z + t \leq 1000} \\ &\quad \mathbf{x\,,\, y\,,\, z\,,\, t \geq 0} \end{aligned}$$

3.- SOLUCIÓN DEL MODELO

El fichero GMS es:

```
* PROBLEMA PNLP00.
* COMPONENTES DEL GRUPO:
* ESTUDIANTE # 1
* ESTUDIANTE # 2
VARIABLES
X numero de pasajeros en el avion 1
Y numero de pasajeros en el avion 2
Z numero de pasajeros en el avion 3
T numero de pasajeros en el avion 4
P1 precio del pasaje en el avion 1
P2 precio del pasaje en el avion 2
P3 precio del pasaje en el avion 3
P4 precio del pasaje en el avion 4
I ingresos
C costes
B beneficios;
POSITIVE VARIABLES X, Y, Z, T;
EQUATIONS
PR1 precio del pasaje en el avion 1
PR2 precio del pasaje en el avion 2
PR3 precio del pasaje en el avion 3
PR4 precio del pasaje en el avion 4
INGRESO ingresos
COSTE costes
BENEFICI beneficios
RC restriccion de capacidad;
PR1..P1=E=23000-X;
PR2..P2=E=14000-Y;
PR3..P3=E=24000-Z;
PR4..P4=E=15000-T;
INGRESO..I=E=P1*X+P2*Y+P3*Z+P4*T;
COSTE..C=E=110000+4000*X+1000*Y+2000*Z+1000*T;
BENEFICI..B=E=I-C;
RC..X+Y+Z+T=L=1000;
MODEL PNLP00/ALL/;
SOLVE PNLP00 USING NLP MAXIMIZING B;
```

La solución es:

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   PNLP00              OBJECTIVE  B
     TYPE    NLP                 DIRECTION  MAXIMIZE
     SOLVER  MINOS5              FROM LINE  36

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      2 LOCALLY OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE         20890000.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.223      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT        45         10000
 EVALUATION ERRORS              0             0

 MINOS5        Mar 21, 2001 WIN.M5.M5 20.0 108.043.039.WAT
```

```
EXIT -- OPTIMAL SOLUTION FOUND

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU PR1        23000.000 23000.000 23000.000      EPS
---- EQU PR2        14000.000 14000.000 14000.000      EPS
---- EQU PR3        24000.000 24000.000 24000.000  1000.000
---- EQU PR4        15000.000 15000.000 15000.000      EPS
---- EQU INGRESO        .         .         .         1.000
---- EQU COSTE      1.1000E+5 1.1000E+5 1.1000E+5    -1.000
---- EQU BENEFICI       .         .         .         1.000
---- EQU RC            -INF   1000.000  1000.000 20000.000

  PR1  precio del pasaje en el avion 1
  PR2  precio del pasaje en el avion 2
  PR3  precio del pasaje en el avion 3
  PR4  precio del pasaje en el avion 4
  INGRESO  ingresos
  COSTE  costes
  BENEFICI  beneficios
  RC  restriccion de capacidad

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR X              .         .        +INF  -1000.000
---- VAR Y              .         .        +INF  -7000.000
---- VAR Z              .      1000.000    +INF       .
---- VAR T              .         .        +INF  -6000.000
---- VAR P1            -INF  23000.000     +INF       .
---- VAR P2            -INF  14000.000     +INF       .
---- VAR P3            -INF  23000.000     +INF       .
---- VAR P4            -INF  15000.000     +INF       .
---- VAR I             -INF  2.3000E+7     +INF       .
---- VAR C             -INF  2.1100E+6     +INF       .
---- VAR B             -INF  2.0890E+7     +INF       .

  X  numero de pasajeros en el avion 1
  Y  numero de pasajeros en el avion 2
  Z  numero de pasajeros en el avion 3
  T  numero de pasajeros en el avion 4
  P1  precio del pasaje en el avion 1
  P2  precio del pasaje en el avion 2
  P3  precio del pasaje en el avion 3
  P4  precio del pasaje en el avion 4
  I  ingresos
  C  costes
  B  beneficios
```

4.- DISCUSIÓN DE LA SOLUCIÓN

Análisis de la globalidad de la solución:

Dado que el GAMS proporciona óptimos locales, vamos a estudiar si el máximo obtenido es también un máximo global. Para ello aplicaremos el teorema local-global.

La función objetivo del problema era

$$B = I - C = [(23000 - x)x + (14000 - y)y + (24000 - z)z + (15000 - t)t] - [\,4000x + 1000y + 2000z + 1000t + 110000]$$

que, por ser un polinomio, es una función de clase 2 y, por lo tanto, podemos utilizar el teorema de caracterización de funciones convexas de clase 2.

$$\nabla B(x,y,z,t)=(19000 - 2x \,,\, 13000 - 2y \,,22000 - 2z \,,\, 14000 - 2t)$$

$$HB(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Como los menores conducentes son determinantes de matrices diagonales, es evidente que:

$$A_1=-2<0, \quad A_2=4>0, \quad A_3=-8<0 \quad y \quad A_4=16>0$$

Por lo tanto, la matriz hessiana es definida negativa y la función estrictamente cóncava.

El conjunto de oportunidades está formado por la intersección de cuatro semiespacios. Como los semiespacios son conjuntos convexos y la intersección de convexos es un conjunto convexo, tenemos que el conjunto de oportunidades es convexo.

En consecuencia, podemos afirmar que el óptimo local calculado por el GAMS es un óptimo global del problema.

Interpretación del multiplicador de Kuhn y Tucker:

El valor de un multiplicador nos indica la variación que sufre la función objetivo cuando varía infinitesimalmente el término independiente de la restricción a la que está asociado. Para saber si la variación entre ambos tiene una relación directa o inversa se debe tener en cuenta el signo del multiplicador. En este problema, y puesto que se trata de un problema de maximización con la restricción en forma de menor o igual, debemos considerar signo positivo. El multiplicador de Kuhn y Tucker es $\lambda = 20000$. Esto significa que si la empresa puede, y decide, embarcar a un pasajero más en cualquiera de los cuatro aviones, sus beneficios aumentarán en 20000 unidades monetarias, mientras que si decide impedir el embarque de un pasajero en cualquiera de sus cuatro aviones, sus beneficios disminuirán en 20000 unidades monetarias. Notemos que la interpretación es correcta porque podemos considerar un pasajero como una unidad marginal frente a 1000 pasajeros, que es el termino independiente de la restricción.

Análisis del modelo:

Las variables principales toman los valores x=0, y=0, z=1000 y t=0, es decir, 1000 pasajeros tomarán el tercer avión dejando los otros tres vacíos. Este resultado es incoherente puesto que si los cuatro aviones tienen una capacidad total de 1000 pasajeros, es absurdo suponer que uno de ellos dispone de la capacidad completa. El problema es debido a que no nos han informado de las capacidades de cada uno de los aviones por separado, datos necesario para una buena modelización del problema que debieran haber sido introducidos como cotas.

Como no hemos planteado un modelo que represente el problema real de la empresa de transportes, no seguiremos analizando la solución. Nuestro siguiente paso debería ser acudir a la empresa para obtener los datos que consideremos necesarios para una buena modelización.

5.- CONTESTACIÓN A LAS PREGUNTAS PROPUESTAS

No es procedente contestar a las preguntas propuestas puesto que nuestro modelo no resuelve el problema real.

PRÁCTICA PLP00

1.- ENUNCIADO

Un experimento social interesante en la región del Mediterráneo es el sistema de kibbutzim, o comunidades agrícolas comunales en Israel. Es usual que algunos grupos de kibbutzim se unan para compartir los servicios técnicos comunes y coordinar su producción. Uno de estos grupos formado por tres kibbutzim es la Confederación Sur de Kibbutzim.

La planificación global de la Confederación Sur de Kibbutzim se hace en su oficina de coordinación técnica. En la actualidad están planificando la producción agrícola para el próximo año.

La producción agrícola está limitada tanto por la extensión de terreno disponible para irrigación como por la cantidad de agua que la Comisión de Aguas asigna para irrigarlo. Los datos son:

Kibbutzim	Terreno para uso (acres)	Asignación de agua (pies-acre)
1	400	600
2	600	800
3	300	375

El tipo de cosecha apropiada para la región incluye remolacha, algodón y sorgo, y éstas precisamente se están estudiando para la estación venidera. Las cosechas difieren primordialmente en su rendimiento neto por acre esperado y en su consumo de agua. Además, el Ministerio de Agricultura ha establecido una cantidad máxima de acres que la Confederación puede dedicar a estas cosechas. Las cantidades son:

Cosecha	Cant. máxima acres	Consumo agua pies-acre/acre	Rend. Neto dólar/acre
Remolacha	600	3	400
Algodón	500	2	300
Sorgo	325	1	100

Los tres kibbutzim que pertenecen a la Confederación Sur están de acuerdo en que cada kibbutzim sembrará la misma proporción de sus tierras irrigables disponibles. Cualquier combinación de estas cosechas se puede sembrar en cualquiera de los kibbutzim.

a) ¿Cuántos acres deben asignarse a cada tipo de cosecha en cada kibbutzim, cumpliendo con las restricciones dadas e intentando maximizar el rendimiento neto para la Confederación Sur?

b) Debido a la entrada de gran cantidad de algodón americano, ha disminuido el rendimiento neto del algodón israelí a 250 dólares por acre. ¿Cómo afecta este cambio a la planificación óptima realizada anteriormente por la Confederación Sur de kibbutzim?

2.- MODELIZACIÓN

Identificación de variables:

Las variables deben representar los acres que tienen que asignarse a cada tipo de cosecha en cada kibbutzim. Por lo tanto serán:

x_{ij}=acres que el kibbutzim i dedica al cultivo j donde i=1,2,3 y j=1,2,3.

Los cultivos están ordenados según el enunciado, esto es, el cultivo 1 es la remolacha, el cultivo 2, el algodón y el cultivo 3 es el sorgo.

Función objetivo:

El objetivo que se persigue en nuestro problema es maximizar el rendimiento neto para la Confederación Sur. Sabemos que el rendimiento neto por acre de la remolacha son 400 dólares. Tal y como hemos definido las variables, el número de acres de remolacha que se cultivan son $x_{11}+x_{21}+x_{31}$. Con lo que el rendimiento neto total que la remolacha proporciona a la Confederación Sur será $400(x_{11}+x_{21}+x_{31})$.

Razonando de forma análoga para el algodón y el sorgo, y después de hacer todas las operaciones pertinentes, tenemos que la función objetivo es:

Rend. neto=$400x_{11}+400x_{21}+400x_{31}+300x_{12}+300x_{22}+300x_{32}+100x_{13}+100x_{23}+100x_{33}$

Conjunto de oportunidades:

El primer grupo de restricciones vendrá dado por la extensión de terreno disponible para la irrigación que posee cada uno de los kibbutzim. El primer kibuttzim cultiva $x_{11}+x_{12}+x_{13}$ acres y dispone de 400 acres como máximo. Con lo cual, tenemos que $x_{11}+x_{12}+x_{13} \leq 400$. Del mismo modo, se debe cumplir que $x_{21}+x_{22}+x_{23} \leq 600$ para el segundo kibbutzim y $x_{31}+x_{32}+x_{33} \leq 300$ para el tercero.

Por otra parte, la Comisión de Aguas asigna una cantidad máxima a cada kibbutzim. En el caso del primer kibbutzim, se consumen $3x_{11}+2x_{12}+x_{13}$ pies por acre de agua, mientras que la cantidad asignada es de 600 pies por acre. Con lo que la restricción quedará como $3x_{11}+2x_{12}+x_{13} \leq 600$. Para los otros dos, las restricciones serán, respectivamente, $3x_{21}+2x_{22}+x_{23} \leq 800$ y $3x_{31}+2x_{32}+x_{33} \leq 375$.

Además, el Ministerio de Agricultura ha establecido una cantidad máxima de acres que la Confederación puede dedicar a cada una de las cosechas. En el caso de la remolacha, la Confederación cultiva $x_{11}+x_{21}+x_{31}$ acres y sólo puede dedicar 600 acres, es decir, $x_{11}+x_{21}+x_{31} \leq 600$. Para el algodón aparece la restricción, $x_{12}+x_{22}+x_{32} \leq 500$ y $x_{13}+x_{23}+x_{33} \leq 325$ para el sorgo.

Los tres kibbutzim de la Confederación Sur han llegado a un acuerdo según el cual cada kibbutzim sembrará la misma proporción de sus tierras irrigables disponibles. Por lo tanto, $(x_{11}+x_{12}+x_{13})/400 = (x_{21}+x_{22}+x_{23})/600 = (x_{31}+x_{32}+x_{33})/300$, que después de hacer las operaciones queda como:

$$600x_{11}+600x_{12}+600x_{13}-400x_{21}-400x_{22}-400x_{23}=0 \text{ y}$$

$$300x_{21}+300x_{22}+300x_{23}-600x_{31}-600x_{32}-600x_{33}=0$$

Por último, las variables tienen condiciones de no negatividad puesto que se trata de acres cultivables.

Modelo matemático:

Max $400x_{11}+400x_{21}+400x_{31}+300x_{12}+300x_{22}+300x_{32}+100x_{13}+100x_{23}+100x_{33}$

s.a. $x_{11}+x_{12}+x_{13} \leq 400$

$x_{21}+x_{22}+x_{23} \leq 600$

$x_{31}+x_{32}+x_{33} \leq 300$

$3x_{11}+2x_{12}+x_{13} \leq 600$

$3x_{21}+2x_{22}+x_{23} \leq 800$

$3x_{31}+2x_{32}+x_{33} \leq 375$

$x_{11}+x_{21}+x_{31} \leq 600$

$x_{12}+x_{22}+x_{32} \leq 500$

$x_{13}+x_{23}+x_{33} \leq 325$

$600x_{11}+600x_{12}+600x_{13}-400x_{21}-400x_{22}-400x_{23}=0$

$300x_{21}+300x_{22}+300x_{23}-600x_{31}-600x_{32}-600x_{33}=0$

$x_{ij}\geq 0 \quad i=1,2,3 \quad j=1,2,3$

3.- SOLUCIÓN DEL MODELO

El fichero GMS es:

```
* PROBLEMA PLP00.
* COMPONENTES DEL GRUPO:
* ESTUDIANTE # 1
* ESTUDIANTE # 2
VARIABLES Z;
POSITIVE VARIABLES
X11, X12, X13, X21, X22, X23, X31, X32, X33;

EQUATIONS
OBJ, TERRE1, TERRE2, TERRE3, AGUA1, AGUA2, AGUA3,
TIPO1, TIPO2, TIPO3, PROP1, PROP2;
;
OBJ..     Z =E= 400*X11 + 400*X21 + 400*X31 + 300*X12 +
          300*X22 + 300*X32 + 100*X13 + 100*X23 + 100*X33 ;
TERRE1.. X11 + X12 + x13 =L= 400;
TERRE2.. X21 + X22 + X23 =L= 600;
TERRE3.. X31 + X32 + X33 =L= 300;
AGUA1..  3*X11 + 2*X12 + X13 =L= 600;
AGUA2..  3*X21 + 2*X22 + X23 =L= 800;
AGUA3..  3*X31 + 2*X32 + X33 =L= 375;
TIPO1..  X11 + X21 + X31 =L= 600;
TIPO2..  X12 + X22 + X32 =L= 500;
TIPO3..  X13 + X23 + X33 =L= 325;
PROP1..  600*X11 + 600*X12 + 600*X13 - 400*X21 - 400*X22 - 400*X23 =E= 0;
PROP2..  300*X21 + 300*X22 + 300*X23 - 600*X31 - 600*X32 - 600*X33 =E= 0;

MODEL PLP00 /ALL/;
OPTION LP = CPLEX;
PLP00.DICTFILE = 4;
PLP00.OPTFILE = 1;
SOLVE PLP00 USING LP MAXIMIZNG Z;
```

La solución es:

```
              S O L V E       S U M M A R Y

     MODEL   PLP00               OBJECTIVE  Z
     TYPE    LP                  DIRECTION  MAXIMIZE
     SOLVER  CPLEX               FROM LINE  31

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
```

```
**** MODEL STATUS      1 OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE           253333.3333

GAMS/Cplex    Mar 21, 2001 WIN.CP.NA 20.0 019.019.039.WAT For Cplex 7.0
Cplex 7.0.0, GAMS Link 19

User supplied options:
objrng all
rhsrng all=2

Optimal solution found.

Objective :      253333.333333


EQUATION NAME                                 LOWER      CURRENT         UPPER
-------------                                 -----      -------         -----
OBJ                                            -INF            0          +INF
TERRE1                                        233.3          400          +INF
TERRE2                                          350          600          +INF
TERRE3                                          175          300          +INF
AGUA1                                         432.3          600         744.4
AGUA2                                         655.6          800         962.5
AGUA3                                         345.5          375           570
TIPO1                                         258.3          600          +INF
TIPO2                                           175          500         662.5
TIPO3                                             0          325          +INF
PROP1                                    -2.889e+004            0    5.778e+004
PROP2                                         -9750            0      3.9e+004


VARIABLE NAME                                 LOWER      CURRENT         UPPER
-------------                                 -----      -------         -----
Z                                       2.998e-015            1          +INF
X11                                          -81.25            0         56.52
X12                                          -24.07            0         54.17
X13                                            -INF            0         33.33
X21                                          -54.17            0         86.67
X22                                          -30.95            0         36.11
X23                                            -INF            0         33.33
X31                                          -108.3            0         48.15
X32                                          -21.67            0         72.22
X33                                            -INF            0         33.33
```

```
                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU OBJ             .         .         .        1.000
---- EQU TERRE1        -INF    233.333   400.000       .
---- EQU TERRE2        -INF    350.000   600.000       .
---- EQU TERRE3        -INF    175.000   300.000       .
---- EQU AGUA1         -INF    600.000   600.000    133.333
---- EQU AGUA2         -INF    800.000   800.000    133.333
---- EQU AGUA3         -INF    375.000   375.000    133.333
---- EQU TIPO1         -INF    258.333   600.000       .
---- EQU TIPO2         -INF    500.000   500.000     33.333
---- EQU TIPO3         -INF       .      325.000       .
---- EQU PROP1           .         .         .         EPS
---- EQU PROP2           .         .         .         EPS

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR Z             -INF  2.5333E+5     +INF        .
---- VAR X11             .     133.333     +INF        .
---- VAR X12             .     100.000     +INF        .
---- VAR X13             .        .        +INF     -33.333
---- VAR X21             .     100.000     +INF        .
---- VAR X22             .     250.000     +INF        .
---- VAR X23             .        .        +INF     -33.333
---- VAR X31             .      25.000     +INF        .
---- VAR X32             .     150.000     +INF        .
---- VAR X33             .        .        +INF     -33.333
```

4.- DISCUSIÓN DE LA SOLUCIÓN

Interpretación de las variables principales:

Según la solución que nos proporciona GAMS, la distribución de cultivos será la siguiente:

- ❖ Remolacha: el kibbutzim 1 cultivará 133'3333 acres, el kibbutzim 2, 100 acres y el kibbutzim 3, 25 acres.
- ❖ Algodón: el kibbutzim 1 cultivará 100 acres, el 2, 250 acres y el kibbutzim 3, 150 acres.
- ❖ Sorgo: ninguno de los tres kibbutzim cultivará sorgo.

Interpretación de las variables de holgura:

Las tres primeras variables de holgura están asociadas con las restricciones de disponibilidad máxima de terreno para cada uno de los kibbutzim, restricciones que son de $\leq$. Por ello, s_i, i=1,2,3, representan los acres del kibbutzim asociado a la restricción que no se dedican a ninguno de los tres cultivos.

En consecuencia, en el kibbutzim 1, 166'6666 acres de los 400 de que dispone en total, se dejan sin cultivar. En el kibbutzim 2, no se cultivan 250 acres de un total de 600 y en el kibbutzim 3, se dejan sin cultivar 125 acres de 300.

Las variables s_i, i=4,5,6, están asociadas con la cantidad de agua que la Comisión de Aguas ha asignado a cada uno de los kibbutzim y, puesto que las tres valen 0, significa que todos los kibbutzim consumen toda el agua de que disponen.

Las variables s_i, i=7,8,9, están asociadas a la cantidad máxima de acres que el Ministerio de Agricultura ha asignado para cada uno de los cultivos y representan los acres que dejan de cultivarse de remolacha, algodón y sorgo. Así, 341'6666 acres que, en principio podrían dedicarse al cultivo de remolacha, de los 600 que tiene asignados la Confederación Sur, no se cultivan. Se utilizan 500 acres para el cultivo del algodón (es decir, todos los asignados) y 325 acres (es decir, todos los disponibles) de sorgo no se cultivan.

Obsérvese que este último resultado es totalmente lógico, puesto que ya hemos visto en la interpretación de las variables principales que ninguno de los tres kibbutzim cultivaba sorgo.

Interpretación de los rendimientos marginales:

Los rendimientos marginales de las variables principales no básicas, x_{13} , x_{23} y x_{33} (producción de sorgo), son $w_{13} = w_{23} = w_{33} = -33'3333$, lo que nos indica que si alguno de los kibbutzim se dedicara a producir sorgo, el rendimiento neto de la Confederación Sur disminuiría en 33’3333 dólares por cada acre cultivado.

Los costes de oportunidad de las variables de holgura no básicas tienen una interpretación que, en este problema, está directamente relacionada con la interpretación de las variables duales. Así, w_{s4} = -133’3333, que es el rendimiento marginal de la cuarta variable de holgura introducida en la restricción del agua del kibbutzim, indica que si a éste se le asignara un pie-acre más de agua, el rendimiento neto de la Confederación Sur aumentaría en 133’3333 dólares. Del mismo modo podemos interpretar $w_{s5} = w_{s6}$ = -133’3333.

En cuanto a s_8, w_{s8} = -33’3333 nos dice que por cada acre más que le permitieran dedicar al cultivo de algodón, la Confederación Sur aumentaría su rendimiento neto en 33’3333 dólares.

Interpretación de la función objetivo:

La función objetivo representa el rendimiento neto total que obtiene la Confederación Sur al distribuir los cultivos según hemos dicho anteriormente. Dicho rendimiento será de 253.333'3 dólares.

Intervalos de sensibilidad de los coeficientes de la función objetivo:

El intervalo de sensibilidad para c_{11} (es decir, el coeficiente de x_{11}) es: [318'75,456'52], obtenido como 318’75=400-81’25 y 456’52=400+56’52.

También aparece como c_{21} con intervalo [345'833,486'667] y como c_{31} con intervalo [291'667,448'148].

Teniendo en cuenta que los intervalos de sensibilidad sirven para saber entre que dos valores puede variar un dato del problema de manera que el óptimo encontrado siga siendo válido, y por lo expuesto en el párrafo anterior, el intervalo de sensibilidad para el rendimiento unitario de la remolacha será la intersección de los tres intervalos anteriores, es decir, [345'833,448'148].

Así pues, si el rendimiento por acre de la remolacha sufre una variación:

- El óptimo no será válido si está por debajo de 345'833 dólares por acre o por encima de 448'148 dólares por acre.
- El óptimo seguirá siendo válido en caso contrario.

Razonando de forma análoga obtenemos que el intervalo de sensibilidad para el rendimiento neto del algodón (coeficientes c_{12}, c_{22} y c_{32}) es [278'333,336'11] y para el sorgo (coeficientes c_{13}, c_{23} y c_{33}) es]-∞,133'333].

Intervalos de sensibilidad de los términos independientes:

El primer término independiente b_1=400, representa la extensión máxima de terreno disponible para irrigación del kibbutzim 1. Si su intervalo de sensibilidad es [233'333,+∞[, esto significa que la solución seguirá siendo válida siempre que el kibbutzim 1 tenga al menos 233'333 acres destinados al cultivo de uno de los tres productos; este kibbutzim puede aumentar tanto como desee la extensión de tierras irrigables sin que por ello la base de la solución varíe.

De modo análogo, se interpretan los intervalos de b_2 (extensión máxima de terreno disponible para irrigación del kibbutzim 2) y de b_3 (lo mismo pero para el kibbutzim 3).

El cuarto término independiente b_4=600 son los pies por acre de agua que la Comisión de Aguas ha asignado al kibbutzim 1. Su intervalo de sensibilidad es [432'258,744'444], lo cual significa que si dicha Comisión decide variar la asignación de agua para el primer kibbutzim, la solución que hemos calculado seguirá siendo válida siempre que le dé más de 432'258 pies por acre o menos de 744'444 pies por acre de agua.

De modo análogo, interpretamos los intervalos de sensibilidad de b_5 ([655'556,962'5]) y de b_6 ([345'455,570]) referidos a los kibbutzim 2 y 3, respectivamente.

El intervalo de b_7 es [258'333,+∞). De modo que si el Ministerio de Agricultura decide cambiar la cantidad máxima de acres que la Confederación puede dedicar al cultivo de remolacha, el óptimo encontrado seguirá siendo válido si la nueva asignación no es menor de 258'333 acres, mientras que puede aumentar hasta cualquier valor.

De modo análogo, interpretamos los intervalos de b_8 ([175,662'5]) y de b_9 ([0,+∞)) referidos a los acres que la Confederación dedica al cultivo de algodón y sorgo, respectivamente.

Respecto a este último intervalo, nótese que decir que la solución sigue siendo válida si la cantidad de acres destinados al sorgo es cualquier valor entre 0 y +∞, es lo mismo que decir que, sea cual sea la cantidad máxima que el Ministerio establezca para el cultivo de sorgo, el óptimo será el mismo.

5.- CONTESTACIÓN A LAS PREGUNTAS PROPUESTAS

a) Remolacha: el kibbutzim 1 cultivará 133'3333 acres, el kibbutzim 2, 100 acres y el kibbutzim 3, 25 acres.

Algodón: el kibbutzim 1 cultivará 100 acres, el 2, 250 acres y el kibbutzim 3, 150 acres.

Sorgo: ninguno de los tres kibbutzim cultivará sorgo.

b) Puesto que 250 no está dentro del intervalo [278'333,336'11], la planificación óptima realizada ha dejado de ser válida.

PRÁCTICA PLEP00

1.- ENUNCIADO

Un bufete de abogados ha aceptado cinco nuevos casos, cada uno de los cuales puede ser llevado adecuadamente por cualquiera de los cinco asociados más recientes. Debido a la diferencia en experiencia y práctica, los abogados emplearán distintos tiempos en sus casos. Uno de los asociados más experimentados ha estimado las necesidades de tiempo (en horas) como sigue:

	Caso 1	**Caso 2**	**Caso 3**	**Caso 4**	**Caso 5**
Abogado 1	145	122	130	95	115
Abogado 2	80	63	85	48	78
Abogado 3	121	107	93	69	95
Abogado 4	118	83	116	80	105
Abogado 5	97	75	120	80	111

Determinar la forma óptima de asignar los casos a los abogados, de manera que cada uno de ellos se dedique a un caso diferente y que el tiempo total de horas empleadas sea mínimo.

2.- MODELIZACIÓN

Identificación de variables:

Este problema se puede modelizar como un problema de asignación. Puesto que se trata de decidir qué abogado llevará cada caso, definimos x_{ij} que valdrá 1 si el abogado i es asignado al caso j y 0 en caso contrario, donde i, j=1,...,5. Estas 25 variables son las variables principales del problema y nos indicarán que decisión tomar.

Función objetivo:

Nuestro objetivo es asignar óptimamente los abogados a los casos (o viceversa) siendo obvio que una asignación es mejor que otra si el número total de horas dedicadas a la preparación de los casos es menor. Por ello, la función objetivo debe representar el número de horas que los cinco abogados utilizan para preparar los cinco casos.

Si supiésemos *a priori* qué abogado prepara cada caso, sumaríamos las horas empleadas por los cinco y obtendríamos el tiempo total. Sin embargo, esto es precisamente lo que trata de resolver nuestro problema. Por ello, para poder plantear la función de tiempo total correctamente debemos razonar del siguiente modo: si el abogado 1 tiene que preparar el caso 1 empleará 145 horas mientras que si no tiene que prepararlo no empleará ninguna, es decir, empleará 0 horas. Según hemos definido las variables x_{ij}, podemos representar matemáticamente esta afirmación verbal con la expresión $145x_{ij}$. Repitiendo el mismo razonamiento para cada abogado y para cada caso, llegamos a la conclusión de que la función objetivo es

$$
\begin{aligned}
\textbf{Horas} = \quad & 145x_{11} + 122x_{12} + 130x_{13} + 95x_{14} + 115x_{15} + \\
& 80x_{21} + 63x_{22} + 85x_{23} + 48x_{24} + 78x_{25} + \\
& 121x_{31} + 107x_{32} + 93x_{33} + 69x_{34} + 95x_{35} + \\
& 118x_{41} + 83x_{42} + 116x_{43} + 80x_{44} + 105x_{45} + \\
& 97x_{51} + 75x_{52} + 120x_{53} + 80x_{54} + 111x_{55}
\end{aligned}
$$

Conjunto de oportunidades:

Las restricciones del problema surgen porque se exige que cada abogado se dedique a un caso diferente. Si el abogado 1 sólo puede llevar un caso, debe ocurrir que una, y sólo una, de las variables x_{1j} , j=1,...,5, valga 1, mientras que las otras cuatro deberán valer cero. Esta condición puede representarse por la ecuación

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1$$

Para el abogado 2, tendremos que:

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1$$

Y así sucesivamente para los abogados 3, 4 y 5.

Además, estas restricciones, junto con el hecho de que hay tantos abogados como casos, implican necesariamente que cada caso sólo puede ser preparado por un abogado. Por tanto, para el caso 1 exigiremos que:

$$\mathbf{x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1}$$

Y así sucesivamente para los casos 2, 3, 4 y 5.

Por último, no debemos olvidar que las condiciones que indican que las variables son binarias, $x_{ij} \in \{0,1\}$, también deben incluirse en el conjunto de oportunidades. No añadimos condiciones de no negatividad porque, en este caso, serían redundantes.

Modelo matemático:

$$\begin{aligned}
\text{Min Horas} = \ & 145x_{11} + 122x_{12} + 130x_{13} + 95x_{14} + 115x_{15} + \\
& 80x_{21} + 63x_{22} + 85x_{23} + 48x_{24} + 78x_{25} + \\
& 121x_{31} + 107x_{32} + 93x_{33} + 69x_{34} + 95x_{35} + \\
& 118x_{41} + 83x_{42} + 116x_{43} + 80x_{44} + 105x_{45} + \\
& 97x_{51} + 75x_{52} + 120x_{53} + 80x_{54} + 111x_{55}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{s.a.} \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1 \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 1 \\
& x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 1 \\
& x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} = 1 \\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1 \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1 \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 1 \\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 1 \\
& x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} = 1 \\
& x_{ij} \in \{0,1\} \quad , \quad i,j = 1,\ldots,5
\end{aligned}$$

3.- SOLUCIÓN DEL MODELO

El fichero GMS es:

```
* PROBLEMA PLPE00.
* COMPONENTES DEL GRUPO:
* ESTUDIANTE # 1
* ESTUDIANTE # 2
VARIABLES Z;
BINARY VARIABLES
X11, X12, X13, X14, X15, X21, X22, X23, X24, X25, X31, X32, X33,
X34, X35, X41, X42, X43, X44, X45, X51, X52, X53, X54, X55;

EQUATIONS
OBJ, A1, A2, A3, A4, A5, C1, C2, C3, C4, C5;
OBJ..    Z =E=145*X11 + 122*X12 + 130*X13 + 95*X14 + 115*X15 +
              80*X21 + 63*X22 + 85*X23 + 48*X24 + 78*X25 +
              121*X31 + 107*X32 + 93*X33 + 69*X34 + 95*X35 +
              118*X41 + 83*X42 + 116*X43 + 80*X44 + 105*X45 +
              97*X51 + 75*X52 + 120*X53 + 80*X54 + 111*X55;
A1..     X11 + X12 + X13 + X14 + X15 =E= 1;
A2..     X21 + X22 + X23 + X24 + X25 =E= 1;
A3..     X31 + X32 + X33 + X34 + X35 =E= 1;
A4..     X41 + X42 + X43 + X44 + X45 =E= 1;
A5..     X51 + X52 + X53 + X54 + X55 =E= 1;

C1..     X11 + X21 + X31 + X41 + X51 =E= 1;
C2..     X12 + X22 + X32 + X42 + X52 =E= 1;
C3..     X13 + X23 + X33 + X43 + X53 =E= 1;
C4..     X14 + X24 + X34 + X44 + X54 =E= 1;
C5..     X15 + X25 + X35 + X45 + X55 =E= 1;
MODEL PLPE00 /ALL/
SOLVE PLPE00 USING MIP MINIMIZING Z;
```

La solución es:

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   PLPE00              OBJECTIVE  Z
     TYPE    MIP                 DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER  OSL                 FROM LINE  29

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      1 OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE              436.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT          1.590      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT        12          10000

 OSL Version 1 Mar 21, 2001 WIN.OS.SE 20.0 058.043.039.WAT
```

```
                        LOWER      LEVEL      UPPER    MARGINAL

---- EQU OBJ              .          .          .        1.000
---- EQU A1              1.000      1.000      1.000    43.000
---- EQU A2              1.000      1.000      1.000      .
---- EQU A3              1.000      1.000      1.000    17.000
---- EQU A4              1.000      1.000      1.000    25.000
---- EQU A5              1.000      1.000      1.000    17.000
---- EQU C1              1.000      1.000      1.000    80.000
---- EQU C2              1.000      1.000      1.000    58.000
---- EQU C3              1.000      1.000      1.000    76.000
---- EQU C4              1.000      1.000      1.000    52.000
---- EQU C5              1.000      1.000      1.000    78.000

                        LOWER      LEVEL      UPPER    MARGINAL

---- VAR Z               -INF     436.000      +INF        .
---- VAR X11              .          .         1.000    22.000
---- VAR X12              .          .         1.000    21.000
---- VAR X13              .          .         1.000    11.000
---- VAR X14              .          .         1.000      EPS
---- VAR X15              .         1.000      1.000    -6.000
---- VAR X21              .          .         1.000      EPS
---- VAR X22              .          .         1.000     5.000
---- VAR X23              .          .         1.000     9.000
---- VAR X24              .         1.000      1.000    -4.000
---- VAR X25              .          .         1.000      EPS
---- VAR X31              .          .         1.000    24.000
---- VAR X32              .          .         1.000    32.000
---- VAR X33              .         1.000      1.000      EPS
---- VAR X34              .          .         1.000      EPS
---- VAR X35              .          .         1.000      EPS
---- VAR X41              .          .         1.000    13.000
---- VAR X42              .         1.000      1.000      EPS
---- VAR X43              .          .         1.000    15.000
---- VAR X44              .          .         1.000     3.000
---- VAR X45              .          .         1.000     2.000
---- VAR X51              .         1.000      1.000      EPS
---- VAR X52              .          .         1.000      EPS
---- VAR X53              .          .         1.000    27.000
---- VAR X54              .          .         1.000    11.000
---- VAR X55              .          .         1.000    16.000
```

4.- DISCUSIÓN DE LA SOLUCIÓN

Interpretación de las variables principales:

Según la solución que nos proporciona GAMS, tenemos que $x_{11} = 0$, lo cual significa que el abogado 1 no llevará el caso 1. Tampoco llevará los casos 2, 3 y 4 puesto que $x_{12}=x_{13}=x_{14}=0$. Pero como $x_{15} = 1$, el abogado 1 llevará el caso 5. El resto de las variables se interpreta de forma análoga.

Interpretación de la función objetivo:

La función objetivo representa el número total de horas invertidas en la preparación de los cinco casos. El bufete de abogados empleará un total de 436 horas.

5.- CONTESTACIÓN A LAS PREGUNTA PROPUESTA

la forma óptima de asignar los cinco casos a los cinco asociados más recientes del bufete es:

- El abogado 1 preparará el caso 5.
- El abogado 2 preparará el caso 4.
- El abogado 3 preparará el caso 3.
- El abogado 4 preparará el caso 2.
- El abogado 5 preparará el caso 1.

El tiempo mínimo que se requiere para la preparación de los cinco casos, teniendo en cuenta las condiciones dadas en el enunciado del problema, es de 436 horas.