CONVEXIDAD: CONCEPTOS BÁSICOS

El estudio de la convexidad de conjuntos y funciones, tiene especial relevancia a la hora de la búsqueda de los óptimos de las funciones, así como en el desarrollo de los algoritmos de resolución de los problemas de optimización, dado que cuando se verifique la convexidad del conjunto de oportunidades se pueden desarrollar métodos de resolución eficientes para los problemas de optimización.

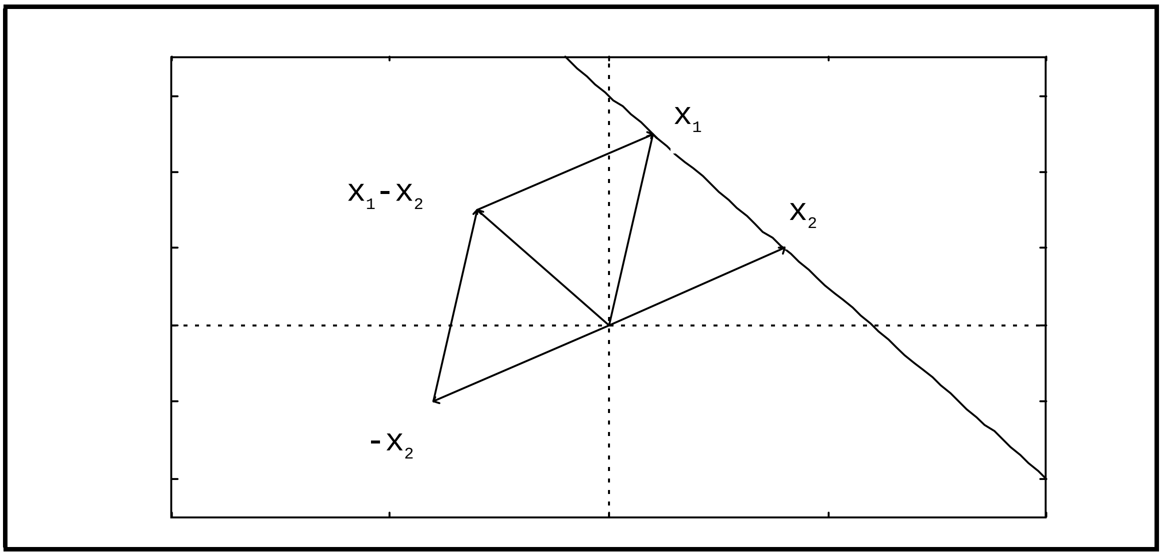
Recta en R^n .

Recta en R^n es el conjunto de puntos $x \in R^n$ que cumplen la siguiente condición:

$$r = \{ x \in R^n / x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 ; \ x_1,x_2 \in R^n ; \ \lambda \in R \}$$

$$= \{ x \in R^n /x = x_2 + \lambda (x_1 - x_2) ; \ x_1,x_2 \in R^n ; \ \lambda \in R \}$$

Gráficamente



Semirecta en R^n.

De la definición anterior (recta) pero restringiendo el valor de λ al subconjunto de R no negativos (R^+) o R no positivos[1] (R^-) , es decir:

$$S^+ r = \{ x \in R^n / x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 ; \ x_1,x_2 \in R^n ; \ \lambda \in R^+\}$$

$$S^- r = \{ x \in R^n / x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 ; \ x_1,x_2 \in R^n ; \ \lambda \in R^-\}$$

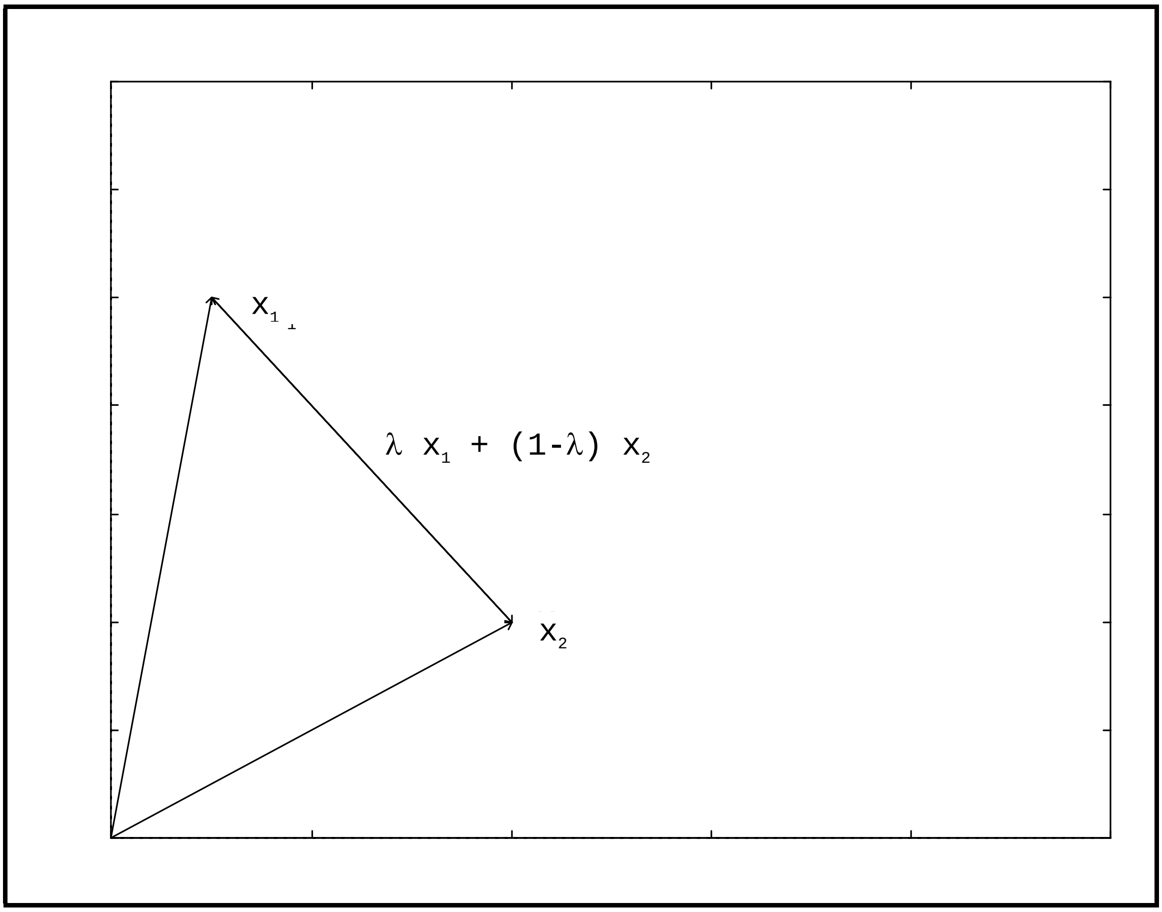
[1] $R^+=\{x\in R/x\geq 0\}$
$R^{++}=\{x\in R/x>0\}$
$R^-=\{x\in R/x\leq 0\}$
$R^{--}=\{x\in R/x<0\}$

Segmento lineal.

Definiremos segmento lineal entre dos puntos x_1 y x_2, y se representa: $[\ x_1,\ x_2\ ]$ es

$$[x_1,x_2] = \{\ x \in R^n\ /x = \lambda\ x_1 + (1-\lambda)\ x_2\ ;\ \ x_1,x_2 \in R^n\ ;\ \ \lambda \in [0,1]\ \}$$

Se trata de un ***segmento lineal cerrado***, ya que incluye los puntos extremos x_1 y x_2. Gráficamente, corresponde a la porción de recta que une los puntos x_1 y x_2 del gráfico.



En el caso que el segmento <u>no incluya</u> los dos puntos extremos, entonces, se trata de un *segmento lineal abierto*, la definición es idéntica a la anterior excepto que $\lambda \in\ ]0,1[$, es decir, no incluye las dos cotas del intervalo.

$$]x_1,x_2[\ = \{\ x \in R^n\ /x = \lambda\ x_1 + (1-\lambda)\ x_2\ ;\ \ x_1,x_2 \in R^n\ ;\ \ \lambda \in\ \ ]0,1[\}$$

También se pueden definir segmentos *abierto-cerrado* y *cerrado-abierto*, según incluya alguna de las dos cotas del intervalo.

Combinación lineal convexa.

Un punto x se dice que es combinación lineal de n puntos, si dicho punto se puede expresar de la siguiente forma:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \lambda_i \qquad\qquad \lambda_i \in R.$$

Como caso particular de combinación lineal de dos puntos se tiene el concepto de recta definido anteriormente.

Si los λ_i son no negativos ($\lambda_i \geq 0$), entonces podemos decir que se trata de una combinación lineal positiva de n puntos. Para n=2 se obtiene la definición de semirecta

*Un punto x es una **combinación lineal convexa** de n puntos si se cumple que :*

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \lambda_i$$

$$\lambda_i \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

es decir, a la condición de no negatividad de los escalares, se añade que su suma sea la unidad.

Conjunto Convexo

Un conjunto S es convexo sii cumple que:

$$\forall\, x_1, x_2 \in S \;\rightarrow\; \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in S,\ \lambda \in [0,1]$$

es decir, que dados dos puntos cualesquiera del conjunto, el segmento lineal cerrado que une los dos puntos está totalmente contenido en el conjunto.

Envoltura convexa

La propiedad de la convexidad de los conjuntos es una propiedad *deseable* en los problemas de optimización, aunque si no se cumple, se pueden aplicar otras condiciones que se verán más adelante.

No obstante, para algunos conjuntos no convexos es posible definir su *envoltura convexa $C_o(S)$*, concepto que podemos expresar como: “el menor conjunto convexo que contiene a S (no convexo)”, o también como “la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a S”.

Propiedades de los conjuntos convexos

Conjuntos convexo "por definición"

a) El conjunto vacío ($\emptyset$) es un conjunto convexo.

b) Los conjuntos de un único punto {a}, también son conjuntos convexos.

c) También el conjunto R^n (espacio total) es un conjunto convexo.

La intersección, finita o infinita, de conjuntos convexos es un conjunto convexo.

La unión de conjuntos convexos, en general, no tiene porque ser un conjunto convexo.

La combinación lineal de conjuntos convexos es un conjunto convexo.

Hiperplano.

Se define un hiperplano como :

$$H = \{ x \in R^n / c^t x = \alpha \ ; \ \alpha \in R \ , c^t \in R^n, c^t \neq 0 \}$$

es decir, se trata de la expresión: $c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n = \alpha$, que para el caso de n=2, se tiene: $c_1 x_1 + c_2 x_2 = \alpha$, ecuación que corresponde a la de una recta en el plano.

Por tanto, un hiperplano, es la generalización al espacio n-dimensional del concepto de recta.

Semiespacio.

A partir del concepto de hiperplano podemos definir el concepto de semiespacio, como el conjunto de puntos que verifica que:

$$S = \{ x \in R^n / c^t x \leq \alpha \ ; \ \alpha \in R, \} \qquad \textit{(1)}$$

o bien:

$$S = \{ x \in R^n / c^t x \geq \alpha \ ; \ \alpha \in R, \} \qquad \textit{(2)}$$

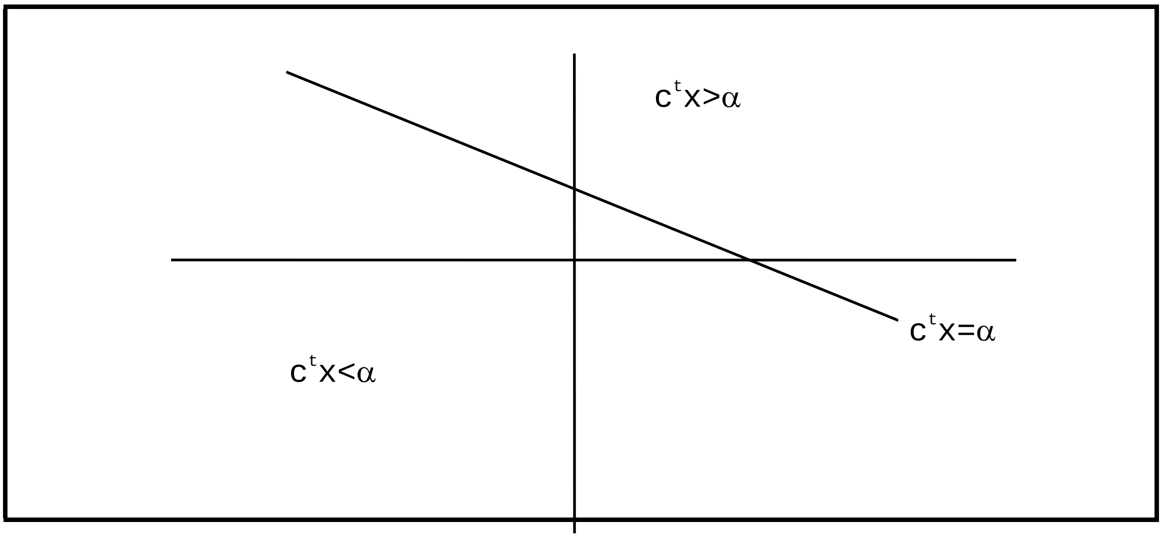
En el primer caso *(1)* lo denominamos *semiespacio inferior* y en el segundo*(2) semiespacio superior.*

Estas dos definiciones de semiespacio se refieren a semiespacios *cerrados*, ya que las desigualdades son de la forma mayor (menor) -igual.

Si las desigualdades son estrictas, es decir, mayor (menor) estrictamente entonces decimos que se trata de *semiespacios abiertos.*

$$S = \{ x \in R^n / c^t x < \alpha \ ; \ \alpha \in R \} \ \text{ o } \ S = \{ x \in R^n / c^t x > \alpha \ ; \ \alpha \in R \}$$

Cada hiperplano define dos semiespacios. Gráficamente se trata de la porción del espacio que esta por encima del hiperplano (semiespacio superior) o por debajo del hiperplano (semiespacio inferior).



Los semiespacios, tanto abiertos como cerrados, son conjuntos convexos.

Los hiperplanos son conjuntos convexos.

Hiperplano de separación.

Dados dos conjuntos S y T , subconjuntos de R^n y no vacíos, un hiperplano :

$$H = \{x \in R^n \,/\, c^t x = \alpha \,;\; \alpha \in R\}$$

separa los dos conjuntos S y T cuando se verifica que:

$$x \in S \Rightarrow c^t x \geq \alpha$$

$$y \in T \Rightarrow c^t y \leq \alpha$$

Hiperplano soporte (o de apoyo).

Dado $S \subseteq R^n$, no vacío y convexo, se dice que el hiperplano H_a es un hiperplano de apoyo o soporte de S, si:

1) $H_a \cap S \neq \varnothing$

2) S está contenido en uno de los dos semiespacios definido por H_a.

Poliedro. Politopo*:*

Se denomina ***politopo*** a todo conjunto de R^n que es intersección de un número finito de semiespacios cerrados.

Todo politopo es un conjunto convexo por ser la intersección de un número finito de semiespacios cerrados, y como los semiespacios son conjuntos convexos aplicando la propiedad de la intersección, sabemos que los politopos son conjuntos convexos..

Cuando el politopo está acotado se denomina ***poliedro.***

Punto extremo*.*

Dado un conjunto convexo $S \subseteq R^n$, $x \in S$ es un vértice o un punto extremo del conjunto S, cuando no es posible expresar x como combinación lineal convexa de otros dos puntos distintos de S.

Es decir, x es un punto extremo si: $\nexists\ x_1,x_2 \in S$, $x_1 \neq x_2$ / $x = \lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2$

Arista.

Dados dos puntos extremos (x_1 y x_2) pertenecientes a un conjunto S, convexo y no vacío, se dice que el segmento lineal cerrado que los une es una arista de S cuando dicho segmento está contenido en un hiperplano de apoyo de S.

Arista infinita.

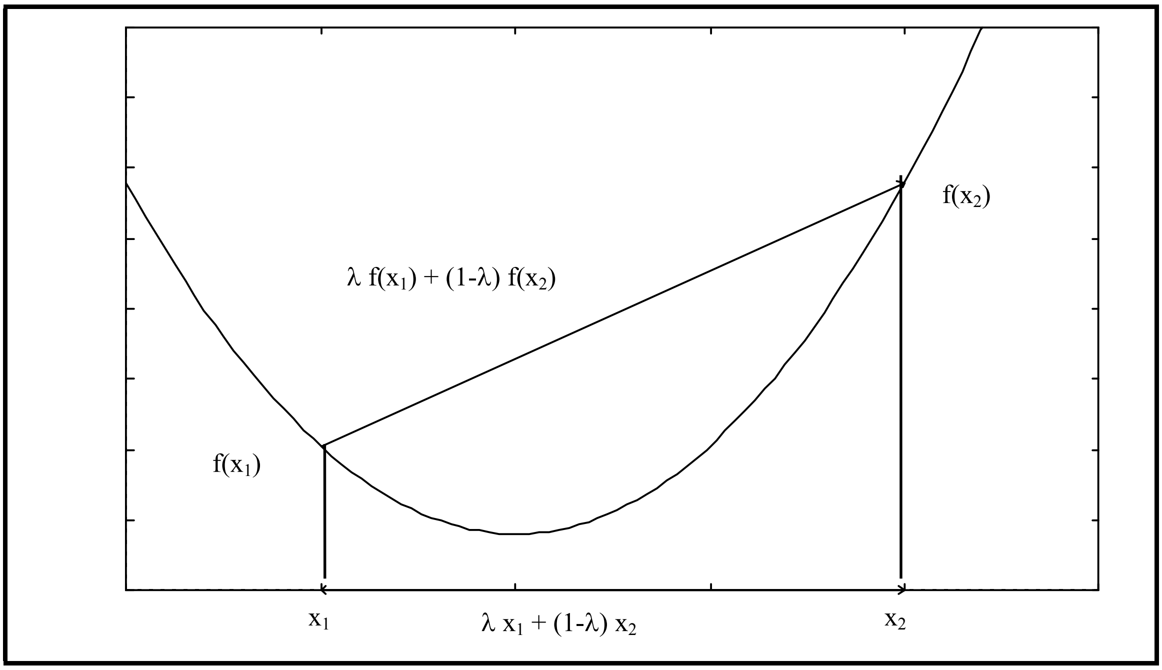
Dado un punto extremo $x^o \in S \subset R^n$, convexo y no vacío, si existe un punto $x \in S$, tal que el conjunto de puntos: $\{\ y \in R^n\ /\ y = x^o + \lambda\ (\ x - x^o\ ),\ \lambda \in R^+\ \}$, está contenido en S y es intersección con un hiperplano soporte del conjunto, entonces se dice que esa semirrecta es una arista infinita del conjunto con origen en x^o .

Función conevxa

Sea $S \subseteq R^n$, un conjunto convexo y no vacío, y sea f: $S \to R$, f es una función ***convexa en S***, si y solo si:

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2] \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

$$\forall \lambda \in [0,1] \quad y \quad \forall x_1, x_2 \in S.$$



Cuando la desigualdad se verifica en sentido estricto, entonces decimos que la función es estrictamente convexa , es decir

f es una función ***estrictamente convexa** en S*, si:

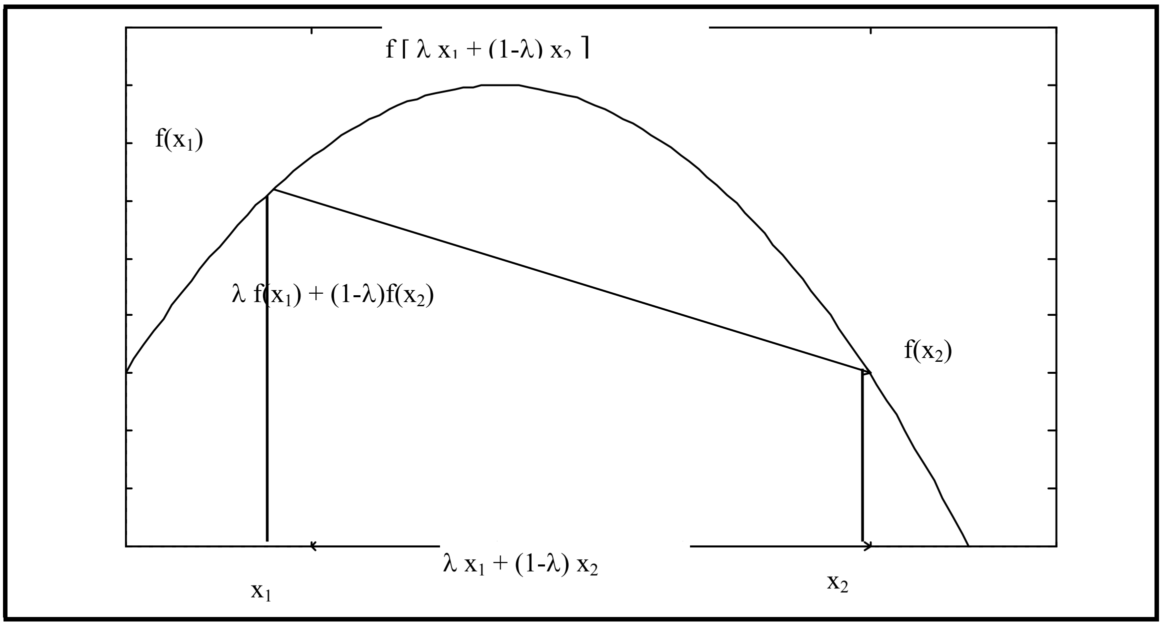
$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2] < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

$$\forall \lambda \in]0,1[\quad y \quad \forall x_1, x_2 \in S. \text{ con } x_1 \neq x_2$$

funcion cóncavas : Sea $S \subseteq R^n$, un conjunto convexo y no vacío, y sea f: $S \to R$ f es una función ***cóncava** en S*, si y solo si:

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2] \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

$$\forall \lambda \in [0,1] \quad y \quad \forall x_1, x_2 \in S.$$



Una función es ***estrictamente cóncava*** si la desigualdad se verifica en sentido estricto, es decir:

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2] > \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

$$\forall \lambda \in (0,1) \quad y \quad \forall x_1, x_2 \in S. \text{ con } x_1 \neq x_2$$

Si f(x) es una función convexa en S (convexo y no vacío), entonces la función [-f(x)] es una función cóncava en S.

Propiedades:

Toda combinación lineal con coeficientes positivos de funciones convexas es una función convexa.

*Sea $S \subseteq R^n$ un conjunto convexo y no vacío, y sea $f\colon S \to R$ una función convexa. Entonces el **conjunto de nivel inferior** $S_\alpha = \{x \in S \,/\, f(x) \leq \alpha\}$, es un conjunto convexo.*

S*i f es un función cóncava el **conjunto de nivel superior** $S^\alpha = \{x \in S/f(x) \geq \alpha\}$, es un conjunto convexo.*

Caracterización de funciones convexas

Caracterización de funciones de clase C^1.

Dada una función f: $S \subseteq R^n \longrightarrow R$, donde S es un conjunto convexo y no vacío, y f' $\in C'(S)$-función con derivada continua en S-, entonces se cumple que:

a) f es convexa en S <u>sii</u> se cumple:

$$f(x_1) - f(x_2) \geq (x_1 - x_2)^t \nabla f(x_2) \ ; \ \forall \ x_1 , x_2 \in S$$

b) f es estrictamente convexa en S <u>sii</u> se cumple:

$$f(x_1) - f(x_2) > (x_1 - x_2)^t \nabla f(x_2); \ \forall \ x_1 , x_2 \in S$$

c) f es cóncava en S <u>sii</u> se cumple:

$$f(x_1) - f(x_2) \leq (x_1 - x_2)^t \nabla f(x_2) \ ; \ \forall \ x_1 , x_2 \in S$$

d) f es estrictamente cóncava en S <u>sii</u> se cumple:

$$f(x_1) - f(x_2) < (x_1 - x_2)^t \nabla f(x_2) \ ; \ \forall \ x_1 , x_2 \in S$$

Caracterización de funciones de clase C^2.

Dada una función f: $S \subset R^n \longrightarrow R$, donde S es un conjunto convexo y no vacío, y f' $\in C^2(S)$-función con segunda derivada continua en S-, entonces se cumple que:

a) f es convexa en S <u>sii</u> se cumple Hf(x) es semidefinida positiva en S.

b) f es cóncava en S <u>sii</u> se cumple que Hf(x) es semidefinida negativa en S.

c) f es estrictamente convexa <u>solamente si</u> Hf(x) es definida positiva en S.

d) f es estrictamente cóncava <u>solamente si</u> Hf(x) es definida negativa en S.