PROGRAMACION LINEAL

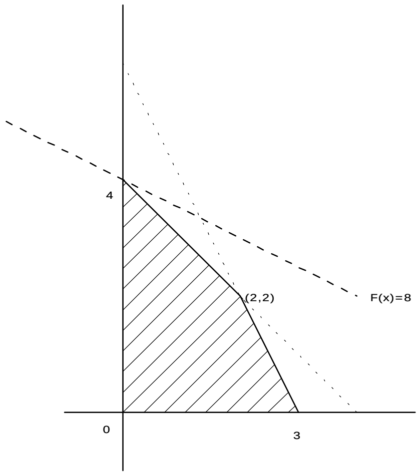
Identificación de las soluciones con GAMS

Max $F(x) = x_1 + 2\,x_2$

s.a: $x_1 + x_2 \leq 4$

$2\,x_1 + x_2 \leq 6$

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$




```
*EJEMPLO N-1
*POLIEDRO - VERTICE
VARIABLES X1, X2, F;
POSITIVE VARIABLES X1, X2;
EQUATIONS
OBJ, R1, R2;
OBJ..     F =E= X1 + 2*X2;
R1..      X1 + X2 =L= 4;
R2..      2*X1 + X2 =L= 6;
MODEL EJEM1 /ALL/;
SOLVE EJEM1 USING LP MAXIMIZING F;
```

Solución:

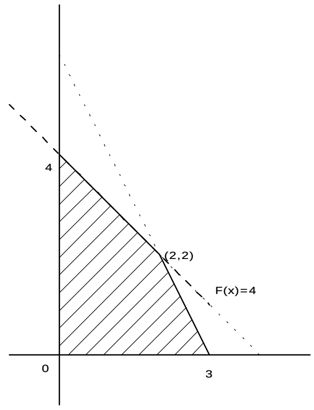
```
EXIT -- OPTIMAL SOLUTION FOUND


                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- EQU OBJ             .         .         .        1.000
---- EQU R1            -INF      4.000     4.000      2.000
---- EQU R2            -INF      4.000     6.000       .


                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- VAR X1              .         .       +INF      -1.000
---- VAR X2              .       4.000     +INF        .
---- VAR F             -INF      8.000     +INF        .


**** REPORT SUMMARY :          0     NONOPT
                               0 INFEASIBLE
                               0  UNBOUNDED
```

$$\text{Max } F(x) = x_1 + x_2$$

s.a: $x_1 + x_2 \leq 4$

$2\,x_1 + x_2 \leq 6$

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$




```
*EJEMPLO N-2
*POLIEDRO - ARISTA
VARIABLES X1, X2, F;
POSITIVE VARIABLES X1, X2;
EQUATIONS
OBJ, R1, R2;
OBJ..    F =E= X1 + X2;
R1..     X1 + X2 =L= 4;
R2..     2*X1 + X2 =L= 6;
MODEL EJEM2 /ALL/;
SOLVE EJEM2 USING LP MAXIMIZING F;
```

Solución:

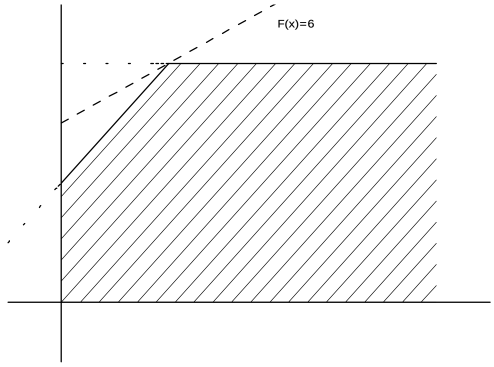
```
EXIT -- OPTIMAL SOLUTION FOUND


                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- EQU OBJ             .         .         .        1.000
---- EQU R1            -INF      4.000     4.000      1.000
---- EQU R2            -INF      4.000     6.000        .

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- VAR X1              .         .       +INF        EPS (ENTRA)
---- VAR X2              .       4.000     +INF         .
---- VAR F             -INF      4.000     +INF         .

**** REPORT SUMMARY :        0     NONOPT
                             0 INFEASIBLE
                             0  UNBOUNDED
```

$$\text{Max } F(x) = -x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.a:} \quad -x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_2 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$




```
*EJEMPLO N-3
*POLITOPO  - VERTICE
VARIABLES X1, X2, F;
POSITIVE VARIABLES X1, X2;
EQUATIONS
OBJ, R1, R2;
OBJ..    F =E= -X1 + 2*X2;
R1..     - X1 + X2 =L= 2;
R2..     X2 =L= 4;
MODEL EJEM3 /ALL/;
SOLVE EJEM3 USING LP MAXIMIZING F;
```

Solución:

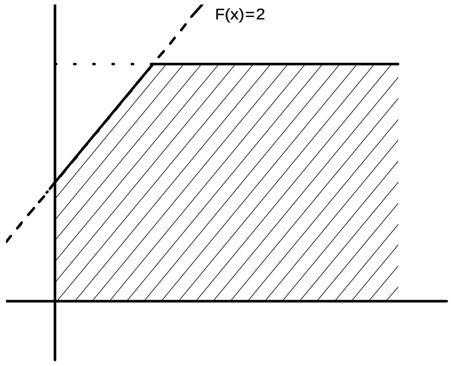
```
EXIT -- OPTIMAL SOLUTION FOUND


                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- EQU OBJ             .         .         .        1.000
---- EQU R1             -INF      2.000     2.000     1.000
---- EQU R2             -INF      4.000     4.000     1.000


                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- VAR X1              .        2.000     +INF        .
---- VAR X2              .        4.000     +INF        .
---- VAR F              -INF      6.000     +INF        .


**** REPORT SUMMARY :        0     NONOPT
                             0 INFEASIBLE
                             0  UNBOUNDED
```

$$\text{Max } F(x) = -x_1 + x_2$$

$$\text{s.a:} \quad -x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_2 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$




```
*EJEMPLO N-4
*POLITOPO - ARISTA
VARIABLES X1, X2, F;
POSITIVE VARIABLES X1, X2;
EQUATIONS
OBJ, R1, R2;
OBJ..    F =E= -X1 + X2;
R1..     - X1 + X2 =L= 2;
R2..     X2 =L= 4;
MODEL EJEM4 /ALL/;
SOLVE EJEM4 USING LP MAXIMIZING F;
```

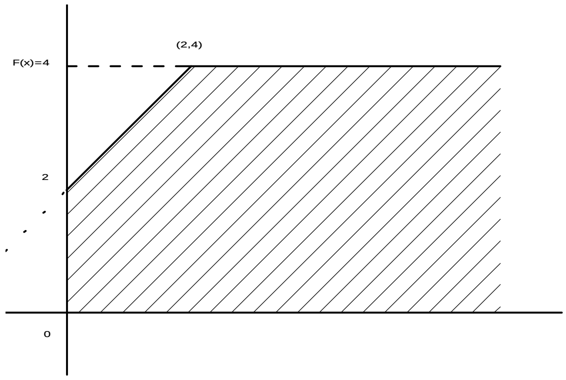
```
EXIT -- OPTIMAL SOLUTION FOUND

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- EQU OBJ             .         .         .        1.000
---- EQU R1            -INF      2.000     2.000      1.000
---- EQU R2            -INF      2.000     4.000        .

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- VAR X1              .         .       +INF       EPS (ENTRA)
---- VAR X2              .       2.000     +INF         .
---- VAR F             -INF      2.000     +INF         .

**** REPORT SUMMARY :        0     NONOPT
                             0 INFEASIBLE
                             0  UNBOUNDED
```

$$\text{Max } F(x) = x_2$$

$$\text{s.a:} \quad -x_1 + x_2 \le 2$$

$$x_2 \le 4$$

$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$$




```
*EJEMPLO N-5
*POLITOPO - ARISTA INFINITA
VARIABLES X1, X2, F;
POSITIVE VARIABLES X1, X2;
EQUATIONS
OBJ, R1, R2;
OBJ..    F =E=  X2;
R1..     - X1 + X2 =L= 2;
R2..     X2 =L= 4;
MODEL EJEM5 /ALL/;
SOLVE EJEM5 USING LP MAXIMIZING F;
```

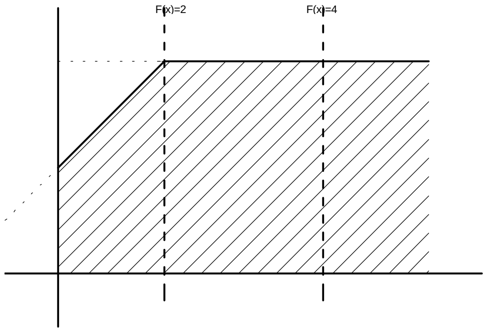
```
EXIT -- OPTIONAL SOLUTION FOUND

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- EQU OBJ             .         .         .        1.000
---- EQU R1            -INF      2.000     2.000        EPS (ENTRA)
---- EQU R2            -INF      4.000     4.000      1.000

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- VAR X1              .       2.000     +INF         .
---- VAR X2              .       4.000     +INF         .
---- VAR F             -INF      4.000     +INF         .

**** REPORT SUMMARY :        0     NONOPT
                             0 INFEASIBLE
                             0  UNBOUNDED
```

$$\text{Max } F(x) = x_1$$

$$\text{s.a:} \quad -x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_2 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$




```
*EJEMPLO N-6
* NO ACOTADO
VARIABLES X1, X2, F;
POSITIVE VARIABLES X1, X2;
EQUATIONS
OBJ, R1, R2;
OBJ..     F =E=  X1;
R1..      - X1 + X2 =L= 2;
R2..      X2 =L= 4;
MODEL EJEM6 /ALL/;
SOLVE EJEM6 USING LP MAXIMIZING F;
```

```
EXIT -- THE PROBLEM IS UNBOUNDED  (OR BADLY SCALED).

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- EQU OBJ             .         .         .        1.000
---- EQU R1            -INF      2.000     2.000     -1.000 UNBND
---- EQU R2            -INF      4.000     4.000      1.000

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- VAR X1              .       2.000     +INF        .
---- VAR X2              .       4.000     +INF        .
---- VAR F             -INF      2.000     +INF        .

**** REPORT SUMMARY :        0     NONOPT
                             0 INFEASIBLE
                             1  UNBOUNDED (UNBND)
```

$$\text{Max } F(x) = x_1 + x_2$$

s.a: $-x_1 + 2\,x_2 \leq 4$

$- 2\,x_1 + x_2 \geq 4$

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$

```
*EJEMPLO N-7
* INFACTIBLE
VARIABLES
X1, X2, F;
POSITIVE VARIABLES X1, X2;
EQUATIONS
OBJ, R1, R2;
OBJ..    F =E=  X1 + X2 ;
R1..     - X1 + 2*X2 =L= 4;
R2..     -2*X1 + X2 =G= 4;
MODEL EJEM7 /ALL/;
SOLVE EJEM7 USING LP MAXIMIZING F;
```

```
EXIT -- THE PROBLEM IS INFEASIBLE

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU OBJ             .         .         .         EPS
---- EQU R1             -INF      4.000     4.000    -0.250
---- EQU R2             4.000     2.000     +INF        .    INFES

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR X1              .         .        +INF      0.750
---- VAR X2              .        2.000     +INF        .
---- VAR F              -INF      2.000     +INF        .



**** REPORT SUMMARY :         0     NONOPT
                              1 INFEASIBLE (INFES)
                    SUM       2.000
                    MAX       2.000
                    MEAN      2.000
                              0  UNBOUNDED
```

Ejemplo:

La empresa XZT, S.A., se dedica a la pintura de tableros y cajas metálicas suministrados por otros proveedores-clientes. La propia empresa fabrica sus pinturas, y en el proceso de pintura que se realiza diariamente, se desprenden una serie de productos que son contaminantes del medio ambiente.

La empresa dispone de un almacén donde guardar los productos que se pintan diariamente. El almacén dispone de 2.000 metros cuadrados de superficie útil. Todos los elementos pintados diariamente se retiran al final de la jornada laboral, con lo que al inicio de la siguiente está disponible la totalidad de la superficie útil.

La pintura de cada tablero desprende 0.02 metros cúbicos de materia contaminante, mientras que la pintura de cada caja desprende 0.03 m^3 *de aire contaminado. La normativa europea aplicable a este tipo de empresas establece un máximo de emisiones contaminante de 1* m^3 *diario.*

Cada tablero, una vez pintado, ocupa en el almacén un equivalente a 20 m^2 *, aproximadamente, es decir, incluidos pasillos de acceso y otros. Las cajas una vez pintadas ocupan un equivalente a 10* m^2 *(téngase en cuenta que no se pueden apilar para facilitar el secado de la pintura).*

La empresa percibe de los proveedores-clientes por cada tablero pintado 100.000 pesetas, mientras que el precio de las cajas es de 50.000 pesetas.

Con esta información, el gerente de la empresa debe determinar la cantidad de elementos metálicos (tableros y cajas) que debe pintar diariamente la empresa con el fin de maximizar los ingresos de la firma.

Además de esto, el gerente de la empresa tiene una oferta verbal del director de planta de una fabrica adyacente, que estaría dispuesto a cederle una parte de su almacén a un precio unitario de 700 ptas./m^2*. ¿ Le interesaría al gerente de la empresa XZT entrar a negociar una oferta en firme sobre el almacén de la empresa adyacente ?.*

El Departamento de Medio Ambiente está estudiando una nueva normativa para restringir los agentes contaminantes del medio ambiente. Ello repercutiría en la empresa XZT en que el máximo de emisión diaria permitida se situaría en 0.9 m^3*. Si la empresa mantiene el actual nivel de emisiones (1* m^3*) recibiría una sanción de 70.000 pesetas diarias. Ante la entrada en vigor de la nueva normativa: ¿ Le interesaría a la empresa seguir manteniendo el actual nivel de emisiones contaminantes?. ¿Seria económicamente posible?, en el supuesto de que fuera económicamente factible, ¿Seria ético ?.*

El fichero de datos (GMS) es:

```
VARIABLES
TABLEROS, CAJAS, INGRESOS;
POSITIVE VARIABLES TABLEROS, CAJAS;
EQUATIONS
OBJ, ALMACEN, CONTAMINA;
OBJ..            INGRESOS =E= 100000*TABLEROS + 50000*CAJAS;
ALMACEN..        20*TABLEROS + 10*CAJAS =L= 2000;
CONTAMINA..      0.02*TABLEROS + 0.03*CAJAS =L= 1;
MODEL XYZ /ALL/;
OPTION LP = CPLEX;
XYZ.DICTFILE = 4;
XYZ.OPTFILE = 1;
SOLVE XYZ USING LP MAXIMIZING INGRESOS;
```

La solución incluyendo el análisis de sensibilidad, es:

```
Optimal solution found.

Objective :     5000000.000000

EQUATION NAME                                  LOWER      CURRENT        UPPER
-------------                                  -----      -------        -----
OBJ                                             -INF            0         +INF
ALMACEN                                         1000         2000         +INF
CONTAMINA                                          0            1            2

VARIABLE NAME                                  LOWER      CURRENT        UPPER
-------------                                  -----      -------        -----
TABLEROS                                  -6.667e+004           0         +INF
CAJAS                                           -INF            0      1e+005
INGRESOS                                   1.11e-016            1         +INF

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- EQU OBJ             .         .         .        1.000
---- EQU ALMACEN        -INF   1000.000  2000.000       .
---- EQU CONTAMINA      -INF      1.000     1.000 5.0000E+6

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- VAR TABLEROS        .       50.000     +INF        .
---- VAR CAJAS           .         .        +INF  -1.000E+5
---- VAR INGRESOS       -INF  5.0000E+6     +INF        .
```

El **problema de la dieta**, conocido por este nombre, fue uno de los primeros problemas sobre optimización, motivado por el deseo del ejercito americano de asegurar unos requerimientos nutricionales al menor coste. El problema fue analizado y resuelto por George Stigler usando la programación lineal en 1947.

Vamos a ver un ejemplo muy sencillo de este tipo de problema.

Un medico receta a una de sus pacientes una dieta especial de basada en tres productos (arroz, pescado y verduras frescas) que han de combinarse de manera que cumplan una serie de requisitos mínimos en cuanto a proteínas y calorías. Estos mínimos se sitúan en 3 unidades de proteínas y en 4.000 calorías.

Los productos que componen la dieta tienen las siguientes unidades por kilogramo: el arroz contiene 1 unidad de proteína y 2.000 calorías, el pescado tiene 3 unidades de proteínas y 3.000 calorías y, por ultimo, las verduras frescas poseen 2 unidades de proteínas y 1.000 calorías.

a) Si los precios de los tres productos básicos son respectivamente de 55, 125 y 55 pesetas el kilogramo, ¿ Cuál debe ser la combinación de productos que cubriendo las necesidades mínimas suponga un menor coste?.

b) Si aumenta el precio del pescado, y este pasa a ser de 140 pesetas. ¿La solución seguirá siendo optima?. Si la respuesta es negativa, cual será la nueva solución?

c) Si disminuye el precio del pescado, y este pasa a ser de 105 pesetas. ¿La solución seguirá siendo optima?. Si la respuesta es negativa, cual será la nueva solución?

d) Si el medico recomienda aumentar el numero de calorias por dia, pasando a 4500 calorias diarias. ¿La solución seguirá siendo optima?. Si la respuesta es negativa, cual será la nueva solución?

El fichero GMS , incluyendo la opción de análisis de sensibilidad es:

```
OPTIONS DECIMALS = 8;
VARIABLES
ARROZ, PESCADO, VERDURA, GASTO;
POSITIVE VARIABLES ARROZ, PESCADO, VERDURA;
EQUATIONS
OBJ     FUNCION DE GASTO
CALORIAS, PROTEINAS;
OBJ..            GASTO =E= 55*ARROZ + 125*PESCADO + 55*VERDURA;
CALORIAS..       2000*ARROZ + 3000*PESCADO + 1000*VERDURA =G= 4000;
PROTEINAS..      ARROZ + 3*PESCADO + 2*VERDURA =G= 3;
MODEL DIETA1 /ALL/;
OPTION LP = CPLEX;
DIETA1.DICTFILE = 4;
DIETA1.OPTFILE = 1;
SOLVE DIETA1 USING LP MINIMIZING GASTO;
```

El fichero solución es:

```
User supplied options:
objrng all
rhsrng all
Optimal solution found.
Objective :          128.333333

EQUATION NAME                                  LOWER      CURRENT        UPPER
-------------                                  -----      -------        -----
OBJ                                             -INF            0         +INF
CALORIAS                                        1500         4000         6000
PROTEINAS                                          2            3            8

VARIABLE NAME                                  LOWER      CURRENT        UPPER
-------------                                  -----      -------        -----
ARROZ                                          -27.5            0           15
PESCADO                                          -15            0         +INF
VERDURA                                        -27.5            0           15
GASTO                                              0            1         +INF

                       LOWER      LEVEL      UPPER    MARGINAL
---- EQU OBJ             .          .          .         1.000
---- EQU CALORIAS    4000.000   4000.000     +INF       0.018
---- EQU PROTEINAS      3.000      3.000     +INF      18.333

                       LOWER      LEVEL      UPPER    MARGINAL
---- VAR ARROZ           .         1.667     +INF        .
---- VAR PESCADO         .          .        +INF      15.000
---- VAR VERDURA         .         0.667     +INF        .
---- VAR GASTO          -INF     128.333     +INF        .

**** REPORT SUMMARY :        0     NONOPT
                             0 INFEASIBLE
                             0  UNBOUNDED
```

b) Si aumenta el precio del pescado, y este pasa a ser de 140 pesetas. ¿La solución seguirá siendo optima?. Si la respuesta es negativa, cual será la nueva solución?

```
OPTIONS DECIMALS = 8;
VARIABLES
ARROZ, PESCADO, VERDURA, GASTO;
POSITIVE VARIABLES ARROZ, PESCADO, VERDURA;
EQUATIONS
OBJ     FUNCION DE GASTO
CALORIAS, PROTEINAS;
OBJ..            GASTO =E= 55*ARROZ + 140*PESCADO + 55*VERDURA;
CALORIAS..       2000*ARROZ + 3000*PESCADO + 1000*VERDURA =G= 4000;
PROTEINAS..      ARROZ + 3*PESCADO + 2*VERDURA =G= 3;
MODEL DIETA1 /ALL/;
OPTION LP = CPLEX;
DIETA1.DICTFILE = 4;
DIETA1.OPTFILE = 1;
SOLVE DIETA1 USING LP MINIMIZING GASTO;
```

```
                         LOWER      LEVEL      UPPER    MARGINAL

---- EQU OBJ               .          .          .        1.000
---- EQU CALORIAS     4000.000   4000.000      +INF       0.018
---- EQU PROTEINAS       3.000      3.000      +INF      18.333

                         LOWER      LEVEL      UPPER    MARGINAL

---- VAR ARROZ             .        1.667      +INF        .
---- VAR PESCADO           .          .        +INF      30.000
---- VAR VERDURA           .        0.667      +INF        .
---- VAR GASTO           -INF     128.333      +INF        .
```

c) Si disminuye el precio del pescado, y este pasa a ser de 105 pesetas. ¿La solución seguirá siendo optima?. Si la respuesta es negativa, cual será la nueva solución?

```
OPTIONS DECIMALS = 8;
VARIABLES
ARROZ, PESCADO, VERDURA, GASTO;
POSITIVE VARIABLES ARROZ, PESCADO, VERDURA;
EQUATIONS
OBJ     FUNCION DE GASTO
CALORIAS, PROTEINAS;
OBJ..             GASTO =E= 55*ARROZ + 105*PESCADO + 55*VERDURA;
CALORIAS..        2000*ARROZ + 3000*PESCADO + 1000*VERDURA =G= 4000;
PROTEINAS..       ARROZ + 3*PESCADO + 2*VERDURA =G= 3;
MODEL DIETA1 /ALL/;
OPTION LP = CPLEX;
DIETA1.DICTFILE = 4;
DIETA1.OPTFILE = 1;
SOLVE DIETA1 USING LP MINIMIZING GASTO;
```

```
                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU OBJ             .         .         .        1.000
---- EQU CALORIAS    4000.000  4000.000     +INF      0.020
---- EQU PROTEINAS      3.000     3.000     +INF     15.000

LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR ARROZ           .        1.000     +INF        .
---- VAR PESCADO         .        0.667     +INF        .
---- VAR VERDURA         .         .        +INF      5.000
---- VAR GASTO         -INF     125.000     +INF        .
```

d) Si el medico recomienda aumentar el numero de calorias por dia, pasando a 4500 calorias diarias. ¿La solución seguirá siendo optima?. Si la respuesta es negativa, cual será la nueva solución?

```
OPTIONS DECIMALS = 8;
VARIABLES
ARROZ, PESCADO, VERDURA, GASTO;
POSITIVE VARIABLES ARROZ, PESCADO, VERDURA;
EQUATIONS
OBJ     FUNCION DE GASTO
CALORIAS, PROTEINAS;
OBJ..            GASTO =E= 55*ARROZ + 125*PESCADO + 55*VERDURA;
CALORIAS..       2000*ARROZ + 3000*PESCADO + 1000*VERDURA =G= 4500;
PROTEINAS..      ARROZ + 3*PESCADO + 2*VERDURA =G= 3;
MODEL DIETA1 /ALL/;
OPTION LP = CPLEX;
DIETA1.DICTFILE = 4;
DIETA1.OPTFILE = 1;
SOLVE DIETA1 USING LP MINIMIZING GASTO;
```

```
                          LOWER      LEVEL      UPPER    MARGINAL

---- EQU OBJ                .          .          .         1.000
---- EQU CALORIAS    4500.000   4500.000      +INF        0.018
---- EQU PROTEINAS      3.000      3.000      +INF       18.333


                          LOWER      LEVEL      UPPER    MARGINAL

---- VAR ARROZ              .         2.000      +INF         .
---- VAR PESCADO            .          .         +INF       15.000
---- VAR VERDURA            .         0.500      +INF         .
---- VAR GASTO            -INF      137.500      +INF         .
```