IMPOSICION DE ESTRUCTURAS Y FACTORIZACION DINAMICA

Cristina Rechea y Julio Seoane

Univ. de Santiago y Univ. de Valencia

En este artículo se expone un modelo de Análisis Factorial cuyas características de cálculo, tremendamente sencillas, proporcionan una nueva perspectiva de este técnica multivariada. Por un lado no es necesario dejar que la matemática establezca, con su técnica, la estructura de las interrelaciones de nuestros datos; por el contrario, es posible que el investigador sea capaz de plantearse hipótesis de los factores probables y caomprobar su existencia en la matriz de correlaciones. Por otro lado, la solución factorial "única" no tiene por que ser la mejor y, con este nuevo modelo factorial se puede analizar una matriz de correlaciones desde todos los puntos de vista o aspectos que interese

También se incluyen los programas de computador que efectúan los cálculos necesarios para la obtención de los factores correspondientes.

1. El Modelo

Dentro de la tradición de las soluciones factoriales ortogonales, vamos a presentar un modelo factorial de gran utilidad y manejabilidad, con el que se pretende alcanzar una matriz factorial con estructura simple de la forma más sencilla posible. Antecedentes de este tipo de solución pueden encontrarse en **OVERALL y KLEIT (1972) y COOLEY y LOHNES (1971).**

Aunque el resultado final del Análisis Factorial es una matriz factorial, los factores suelen calcularse por separado, de uno en uno. Nuestro modelo no difiere en absoluto en este punto de otros modelos; las cargas factoriales del primer factor se calculan aplicando un vector hpótesis, b1, a la matriz de correlaciones $\underline{\underline{R}}$ de la siguiente manera

$$\underline{\underline{R}}b_1d_1 = f_1$$

donde, $\underline{\underline{R}}$ contiene las correlaciones entre las $\underline{m}$ variables empíricas,

b_1 es el vector de $\underline{m}$ elementos que se ha elegido como hipótesis para cumplir los objetivos del análisis,

d_1 es una constante igual a $1/\sqrt{b_1' \underline{\underline{R}} b}$ que transforma el vector b_1 de forma que $b_1' d_1 \underline{\underline{R}} b_1 d_1 = 1$, lo que implica la tipificación de las varianzas de los factores para que las cargas factoriales puedan interpretarse como coeficientes de correlación. Y, por último,

f_1 es el vector de $\underline{m}$ elementos que contiene las correlaciones entre las $\underline{m}$ variables originales y el primer factor.

A partir de este primer factor se calcula la primera matriz residual, restando de la matriz de correlaciones la varianza asociada con el mismo; esto es,

$$\underline{\underline{R}}_1 = R_1 - f_1 f_1'$$

Esta operación es equivalente a restar de las puntuaciones originales su relación lineal con este factor y, calcular a continuación la matriz de correlciones entre las puntuaciones residuales. Como estas puntuaciones residuales son totalmente independientes del primer factor, cualquier factor calculado sobre la matriz de correlaciones residual será totalmente ortogonal al anterior (este razonamiento es idéntico al que se hace en el cálculo de Componentes Principales).

Las cargas factoriales de un segundo factor se pueden calcular de forma idéntica al anterior; esto es, aplicando un segundo vector hipótesis a $\underline{\underline{R}}_1$

$$\underline{\underline{R}}_1 b_2 d_2 = f_2$$

donde, b_2 es un vector linealmente independiente de b_1

d_2 es una constante de ponderación del vector b_2, con la misma estructura y función que d_1 en el factor anterior, y

f_2 es el vector que contiene las correlaciones entre las $\underline{m}$ variables y el segundo factor.

Las cargas factoriales de los sucesivos factores, ortogonales a todos los anteriores, pueden calcularse como sigue:

$$\underline{\underline{R}}_2 = \underline{\underline{R}}_1 - f_2 f_2'$$
$$\underline{\underline{R}}_2 b_3 d_3 = f_3$$
$$\underline{\underline{R}}_3 = \underline{\underline{R}}_2 - f_3 f_3'$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\underline{\underline{R}}_{k-1} = \underline{\underline{R}}_{k-2} - f_{k-1} f_{k-1}'$$
$$\underline{\underline{R}}_{k-1} b_k d_k = f_k$$
$$\underline{\underline{R}}_k = \underline{\underline{R}}_{k-1} - f_k f_k'$$

El número de factores, $\underline{k}$, puede variar desde 1 hasta $\underline{m}$ (número de variables), siempre que la matriz residual correspondiente no sea una matriz nula.

El vector b_i

A parte de otros aspectos, sobre los que hablaremos más adelante, una de las características más interesantes del modelo es el vector b_i que se propone para la obtención del factor f_i correspondiente. Se le ha denominado **vector hipótesis** porque representa las expectativas de de f_i; esto es, se supone que el vector b_i es uno de los posibles factores de la matriz $\underline{\underline{R}}$ que se analiza.

Cuando esta última suposición es cierta, esto es, cuando b_i es, realmente, un factor de la matriz $\underline{\underline{R}}$, entonces $b_i = f_i$. Se puede comprobar esta afirmación con el siguiente ejemplo:

$$\underline{\underline{R}}b_1d_1 = \begin{bmatrix} 1.00 & .67 & -.10 \\ .67 & 1.00 & -.29 \\ -.10 & -.29 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .854 \\ .914 \\ -.454 \end{bmatrix} \quad 1/1.7687 = \begin{bmatrix} .8539 \\ .9135 \\ -.4545 \end{bmatrix} = f_1$$

donde b_1 es, en este caso, el primer factor obtenido de la factorización de la matriz $\underline{\underline{R}}$ por el método de Componentes Principales y, por lo tanto, un factor cuya existencia se ha comprobado en la matriz $\underline{\underline{R}}$.

En el caso en que el vector hipótesis propuesto no exista exactamente como tal en la matriz de correlaciones, el modelo aquí presentado obtendrá un factor que se aproximará lo más posible a la hipótesis. Comprobemos esto con la matriz del ejemplo anterior y otro vector b_1:

$$\underline{\underline{R}}b_1d_1 = \begin{bmatrix} 1.00 & .67 & -.10 \\ .67 & 1.00 & -.29 \\ -.10 & -.29 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 1/1.8276 = \begin{bmatrix} .9138 \\ .9138 \\ -.2134 \end{bmatrix} = f_1$$

Como se puede ver por este resultado, el vector hipotético propuesto no existe como factor en la matriz de correlaciones $\underline{\underline{R}}$, por lo que es imposible que aparezca como tal. Pero, de hecho, el modelo ha conseguido encontrar el factor de la matriz $\underline{\underline{R}}$ que más se aproxima al propuesto.

Como acabamos de ver, el vector b_i puede tener aspectos muy variados. Sabemos que de una matriz de correlaciones se pueden obtener múltiples descomposiciones factoriales. El modelo clásico del Análisis Factorial que consiste en el cálculo de los Componentes Principales de una matriz de correlaciones, para aplicar a éstos una rotación Varimax, persigue la obtención de una matriz factorial que, dentro de otro contexto, había definido ya **THURSTONE** en **1935** como la matriz de **estructura simple.** La definición de esta matriz, si bien matemáticamente no es muy útil, es exactamente la solución que intuitivamente desea cualquier factorialista para sus datos **(THURSTONE, 1935 y 1947).** Llevada a sus máximas consecuencias, un ejemplo de lo que sería una matriz factorial con un estructura simple podría ser:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si estamos interesados en obtener una matriz factorial de las características propuestas por Thurstone, lo ideal sería intentar comprobar si tal matriz factorial existe desde el primer momento. En el caso del análisis de la matriz de tres variables del ejemplo, la matriz de estructura simple que acabamos de exponer podría ser una solución interesante. Así podríamos utilizar sobre nuestra matriz $\underline{\underline{R}}$ de 3x3, como vector hipótesis, cada una de las columnas de dicha matriz. Si dichos vectores existen como factores de la matriz de correlaciones, se obtendrá ese mismo factor.

La aplicación de la primera columna de la matriz hipotética, que llamaremos desde ahora matriz $\underline{\underline{F}}_h$, ha dado como resultado el factor f_1 calculado más arriba. Ahora, la aplicación del segundo vector hipótesis o segunda columna de $\underline{\underline{F}}_h$ conseguirá un segundo factor que también se aproximará lo más posible a sí mismo, siempre que la información necesaria esté contenida en la primera matriz residual.

Para determinar esta matriz residual, $\underline{\underline{R}}_1$, es preciso calcular la matriz de varianzas del primer factor; esto es,

$$f_1 f_1'$$

y restarla de la matriz $\underline{\underline{R}}$ con lo que se obtendrá $\underline{\underline{R}}_1$; esto es,

$$\underline{\underline{R}} - f_1 f_1' = \begin{bmatrix} .1650 & -.1650 & .0950 \\ -.1650 & .1650 & -.0950 \\ .0950 & -.0950 & .9545 \end{bmatrix} = \underline{\underline{R}}_1$$

El proceso para obtener f_2 es idéntico al seguido para el cálculo de f_1 pero considerando, en este caso, la matriz $\underline{\underline{R}}_1$; esto es,

$$\underline{\underline{R}}_1 b_2 d_2 = f_2$$

donde, b_2 es la segunda columna de la matriz hipotética inicial, y d_2 será, por lo tanto, igual a $1/\sqrt{b_2' \underline{\underline{R}}_1 b_2}$

Con esto tendremos que f_2 es igual al siguiente vector:

$$\begin{bmatrix} .0972 \\ -.0972 \\ .9770 \end{bmatrix}$$

que, aunque no consigue igual al vector hipótesis, lo aproxima de forma sorprendente.

Así pues, si el vector b_i es el planteamiento hipotético de un factor f_i, los valores de los elementos del mismo deben estar comprometidos entre $\pm$ 1, que es el rango de la posible correlación o carga factorial. Por la misma causa, los vectores b_i consecutivos deben ser linealmente independientes, pues no tiene sentido obtener dos factores iguales de la misma matriz de correlaciones.

2. Aspectos Metodológicos.

La posibilidad de establecer vectores hipótesis es el aspecto metodológico más interesante del modelo.

En primer lugar, siempre había sido una aspiración de los factorialistas la aplicación del Análisis Factorial en la verificación de hipótesis. Casi todas las técnicas existentes en este momento (**HARMAN, 1976**) que intentan un ajuste de una estructura factorial nueva a otra ya dada, se efectúa con técnicas de rotación sobre una matriz factorial obtenida por el método de factores principales o Componentes Principales. En el caso de nuestro modelo, se puede intentar el ajuste directamente a partir de la matriz de correlaciones, como acabamos de ver. Esto supone, no sólo un ahorro de cálculos, sino también de tiempo y energía.

Pero, como también acabamos de ver, los vectores hipotéticos no tienen por qué ser necesariamente factores ya obtenidos en otros Análisis Factoriales, si no que pueden expresar agrupaciones sugeridas al investigador por sus teorías o por la inspección de los datos de sus resultados experimentales. Por ejemplo, la matriz de correlaciones analizada anteriormente ofrece información suficiente como para suponer la existencia de los dos factores expresados en la matriz $\underline{\underline{F}}_h$, donde la 1ª y 2ª variables se integran en un sólo factor (su intercorrelación es positiva y suficientemente alta) y la variable 3ª aparece significativamente cargada , ella sola, en un segundo factor. Hipótesis que se ha visto confirmada, casi exactamente, en los factores correspondientes obtenidos (el grado de ajuste que se consigue entre la hipótesis propuesta y el factor calculado puede establecerse por medio de cualquiera de los **índices de congruencia)** expuestos por **HARMAN** en **1976**, (págs. 341-347).

Así pues, no solo se pueden comprobar hipótesis representadas por factores de otros análisis, sino que el investigador puede construir sus propias hipótesis, ya sean estas previas a la obtención de los datos o como consecuencia de la inspección de la matriz de correlaciones. Y todo ello, sin necesidad de acudir a las técnicas de rotación, lo que simplifica enormemente los cálculos.

Un segundo aspecto original del modelo es la posibilidad de extraer exhaustivamente la información factorial existente en una matriz de correlaciones. Durante muchos años se estuvo investigando y estudiando para encontrar una solución factorial "única", con la que todos los investigadores estuviesen de acuerdo; consecuencia de estos estudios fue la llamada solución clásica: Componentes Principales y Rotación Varimax.

Pero, si realmente en una matriz de correlaciones existen múltiples soluciones factoriales, ¿por qué limitarnos a una sola de ellas?. De alguna forma, al aceptar la única solución factorial, se está despreciando la información obtenida con nuestros datos y que está presente en la matriz de correlaciones. Con el modelo aquí presentado se puede intentar obtener una matriz factorial de unas características y, a continuación, otra estructura factorial completamente diferente o alternativa a la anterior.

Así mismo, no es necesario que toda la matriz factorial hipotética esté predeterminada antes de empezar el análisis. Por ejemplo, es suficiente plantear el primer vector hipótesis y una vez obtenido el factor correspondiente y su matriz residual, decidir cual será la estructura del segundo vector hipótesis y así sucesivamente hasta que se obtengan todos los factores que interesen.

Esta forma de actuar no sólo va a permitir sacarle todo el jugo posible a la matriz de correlaciones, si no que proporciona también un criterio bastante fiable para detener la factorización puesto que no sólo dependerá del número de factores hipotéticos que nos interesen, sino también del estado en que se encuentra la matriz residual en cada momento, después de la extracción de cada factor.

Hemos dicho repetidas veces que una de las ventajas de este modelo es que no necesita de las técnicas de rotación para poder llegar a una estructura simple. Ello no implica que no se pueda aplicar estas técnicas a los factores obtenidos por el modelo, pero sería una redundancia. Sin embargo, existe una ocasión en que se puede aplicar la rotación con propiedad: cuando se desée obtener factores oblicuos o no ortogonales. Como ya hemos visto, los factores que se obtienen de este modelo son factores ortogonales o independientes, no correlacionados; si en algún estudio fuera necesario la obtención de factores correlacionados, ya porque se consiguiese así una estructura simple mejor, ya porque las hipótesis del investigador fueran en este sentido, pueden conseguirse sin más que aplicar cualquier método de rotación oblicua de los descritos por **HARMAN (1976)** o por cualquier otro estudioso del Análisis Factorial como **COMREY (1973)**, **GORSUCH (1974)** o **MULAIK (1972)**, de los cuales suelen existir programas en las bibliotecas de casi todos los computadores.

Otro aspecto accesorio del modelo es que también es posible, con los factores de este modelo calcular las puntuaciones factoriales. Aunque este es un tema en el que no están interesados muchos factorialistas, el cálculo de puntuaciones factoriales puede permitir verificar empiricamente los factores abstractos obtenidos de la transformación matricial. En el caso, no probable, de extracción de tantos factores como variables, el cálculo de las puntuaciones factoriales se haría aplicando la siguiente fórmula:

$$\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{Z}}$$

donde, $\underline{\underline{P}}$ sería la matriz de las $\underline{m}$ puntuaciones factoriales para los $\underline{n}$ sujetos.

$\underline{\underline{F}}^{-1}$ sería la inversa de la matriz de coeficientes factoriales, y

$\underline{\underline{Z}}$ sería la matriz de puntuaciones típicas de los $\underline{n}$ sujetos en las $\underline{m}$ variables.

Cuando el número de factores es menor que $\underline{m}$, la matriz $\underline{\underline{F}}$ no tiene inversa y, por lo tanto, el cálculo se realizará aplicando la siguiente fórmula:

$$\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{C}}\underline{\underline{Z}}$$

donde

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{R}}^{-1} \underline{\underline{F}}$$

Y, por último, hay otro aspecto muy interesante que puede ser tratado con este modelo; nos referimos al control de variables extrañas. Cuando se tiene la certeza, o se conoce a ciencia cierta que una variable influye en unos resultados experimentales, se puede aplicar cualquiera de los métodos típicos de control: constancia, balanceo, contrabalanceo, etc. Pero cuando se conoce que la relación que se establece entre una serie de variables se debe, de alguna forma, a la relación que ese conjunto de variables mantiene con otra variable, sólo existe una posibilidad de controlar estos efectos: una parcialización del efecto de esa variable sobre las otras.

Cuando se quiere parcializar el efecto de una variable de la relación que se establece entre otras dos, se realiza aplicando la técnica de la correlación parcial. A nivel multivariado, esto se hace por medio de la correlación parcial múltiple. El proceso de cálculo de la correlación parcial múltiple hace tan complicada la parcialización que esto no suele hacerse casi nunca, en cuestiones de control de variables extrañas. Para estos casos, cuando se quiere eliminar la influencia de una variable respecto del resto de las variables de una matriz, es posible utilizar el Modelo que aquí se presenta de una forma un tanto especial.

Dada la matriz de correlaciones con m variables, de las cuales interesa eliminar la influencia que una de ellas tiene sobre las m-1 restantes, una forma más sencilla que la parcialización es establecer un vector hipótesis que tenga una carga factorial máxima en la variable que se desea parcializar y ceros en el resto de las variables. El vector correspondiente contendrá toda la varianza que las m-1 variables tienen en común con la variable a controlar, esto es, el factor será igual a la columna de la matriz de correlaciones correspondiente a la variable parcializada. Al multiplicar este factor por su transpuesto y obtener la matriz residual, lo que se está haciendo, como ya se dijo, es restar de las puntuaciones originales su relación lineal con ese factor y calcular, a continuación, la matriz de correlaciones entre las puntuaciones residuales; esto es, la matriz residual será totalmente independiente del factor que se ha extraido, contendrá sólo las correlaciones de las m-1 variables dependientes a las que se les ha restado la influencia que la variable extraña tenía sobre todas ellas. La fila y la columna correspondiente a la variable extraña se habrán anulado y todos sus elementos serán iguales a cero.

Intentando resumir las ventajas metodológicas del modelo presentado, diremos que, en primer lugar, con su utilización no es necesario la aplicación a la matriz factorial de ninguna técnica de rotación ortogonal (aunque si se pueden aplicar técnicas de rotación oblicuas), lo que implica un gran ahorro de cálculos, tiempo y energía y que se pondrán todavía más de manifiesto en el próximo apartado, cuando veamos la programación. En segundo lugar, este modelo permite la comprobación directa e inmediata de hipótesis y la verificación de resultados previos. En tercer lugar, la existencia de unos planteamientos dinámicos en la propuesta de vectores hipótesis rompen con el estatismo de la solución única y permiten un análisis exhaustivo del contenido de la matriz de correlaciones. Otro aspecto del modelo permite el cálculo de puntuaciones factoriales con las que se completa el ciclo del Análisis Factorial, así como la eliminación de variables extrañas cuya influencia interese eliminar de la matriz de correlaciones.

3. La Programación.

Aunque el cálculo de factores por este método es bastante elemental, cuando se trata de una matriz de grandes dimensiones, las operaciones que se deben realizar, si se hacen con una calculadora, pueden resultar muy pesada y también pueden producirse errores muy difíciles de detectar. Así pues, aunque el proceso sea muy elemental, lo mejor es disponer de un programa de computador que realice en segundos y correctamente todos los cálculos. Por ello, a continuación pasamos a describir las características del programa que realiza estos cálculos y cuyo listado se encontrará al final de este apartado.

El programa funciona como programa principal y tiene como fin calcular unos factores a partir de una matriz de correlaciones. La matriz de correlaciones se le proporciona al computador como información de entrada, al igual que los sucesivos factores hipotéticos que se introducen de uno en uno. La información de entrada debe prepararse, pues, de la siguiente manera:

a) **Tarjeta parámetro.**

1ª tarjeta: nombre del problema, con Formato (4A2), escrito a partir de la columna 25. Corresponde a las variables PR1, PR2, PR3 y PR4.

2ª tarjeta: número de sujetos, con Formato (I6), a partir de la columna 20. Corresponde a la variable N.

3ª tarjeta: número de variables, con Formato (I6), a partir de la columna 20. Corresponde a la variable M.

El Formato de lectura de estas tarjetas es el siguiente:

(24X,4A2/19X,I6/19X,I6)

b) **Matriz de Correlaciones.**

. Se introduce sólo el triángulo inferior de la matriz, por filas, entre cada fila se deja una ficha en blanco.
. El formato de lectura para toda la matriz es:

(/(10F7.4))

c) **Matriz Hipótesis.**

1ª tarjeta: número de factores a extraer, con Formato (I6), a partir de la primera columna. Corresponde a la variable K.

Las tarjetas siguientes: vectores hipótesis con Formato (10F7.4), cada uno en fichas independientes, a partir de la primera columna.

Los vectores dimensionados en este programa son:

. R(M(+1)/2) contiene los elementos de la matriz de correlaciones (triángulo inferior de la misma y diagonal principal).
. V(M) contiene, al principio del análisis un vector hipótesis y, después de todos los cálculos, los coeficientes factoriales correspondientes a ese factor.
. W(M) no es más que un vector auxiliar o de trabajo para poder efectuar los cálculos necesarios del análisis.
. S(M) al principio del análisis es un vector de ceros, en donde se van acumulando las varianzas explicadas por cada factor a lo largo del desarrollo del programa.

La información de salida que proporciona este programa es la siguiente:

. Nombre del Problema: PR1, PR2, PR3, PR4.

. Parámetros del Problema: N, M, K.

. Vector Hipótesis y su correspondiente Factor (k veces): V(M).

. Varianza explicada por cada uno de los k factores extraidos: S(M).

. Matriz residual después de la extracción de los k factores: R(M(M+1)/2).

¿ Por qué se ha dado a este programa el nombre de Factorización Impositiva? De alguna forma se ha pretendido hacer hincapié en el aspecto más original e importante del modelo y en lo que lo diferencia fundamentalmente de otros: cualquier método de Análisis Factorial pretende **descubrir** la estructura factorial subyacente en una matriz de correlaciones. El Modelo Impositivo **impone** una estrcutura a la matriz de correlaciones; esto es, pretende obtener una estructura predeterminada a una matriz de correlaciones dada.

Este programa calcula, paso a paso, una matriz factorial a partir de los vectores hipótesis que se le plantéan. Estos vectores hipótesis deben estar ya determinados, tanto en número como en estructura, al comienzo del programa. Así pues, con este programa no es posible modificar la estructura factorial hipotética ni recrearla en función de los resultados que se vayan obteniendo, tal como se comentaba en el apartado anterior

Para permitir este juego entre los resultados numéricos y los intereses del investigador, unas pequeñas modificaciones de este programa dan lugar a uno nuevo con el que es posible plantearse todas estas cuestiones. En vez de indicarle al principio el número de factores que debe calcular, se le proporciona la información necesaria para que calcule el primer factor y, al final de estos cálculos, se le pide que informe, no sólo de las cargas factoriales de este factor, si no también de la varianza explicada por el mismo y de la matriz residual existente en ese momento. Una vez que el investigador conoce estos datos, puede decidir si continúa con la extracción de factores o la detiene ya.

Esto se consigue haciendo que el computador lea la decisión tomada por el investigador. Por supuesto que esto implica la detención de los cálculos y que alarga el tiempo de utilización del computador, pero las ventajas que esto reporta al investigador superan el gasto que se produce.

A este programa se le ha dado el nombre de Modelo Dinámico o Factorización Dinámica, que implica la nueva concepción del Análisis Factorial que aquí se presenta. La información de entrada que debe proporcionarse a este programa es la siguiente:

a) **Tarjetas Parámetros:** idénticas al programa anterior.

b) **Matriz de Correlaciones:** igual que en el programa previo.

c) **Vector Hipótesis:** Con Formato (10F7.4), a partir de la primera columna.

Con esta información, el programa comienza a funcionar e imprime

Programa de Factorización Impositiva.

```
      DIMENSION R(4851), V(98), W(98), S(98)
   13 READ (2,100) PR1, PR2, PR3, PR4, N, M
      EM=M
      DO 1 I=1,M
      L1=I+(I*I-I)/2
      L=(L1+1)-I
    1 READ (2,101) (R(J),J=L,L1)
      READ (2,102) K
      WRITE(3,104) PR1, PR2, PR3, PR4, N, M, K
      DO 7 II=1,K
      S(II)=0.0
      READ (2,103) (V(J),J=1,M)
      WRITE(3,108) II,(V(J),J=1,M)
      C=0.0
      DO 3 I=1,M
      W(I)=0.0
      DO 2 J=1,M
      IF(I-J)9,10,10
    9 L=I+(J*J-J)/2
      GO TO 2
   10 L=J+(I+I-I)/2
    2 W(I)=W(I)+V(J)*R(L)
    3 C=C+W(I)*V(I)
      C=SQRT(C)
      DO 4 J=1,M
      W(J)=V(J)/C
    4 V(J)=0.0
      DO 5 I=1,M
      DO 5 J=1,M
      IF(I-J)11,12,12
   11 L=I+(J*J-J)/2
      GO TO 5
   12 L=J+(I*I-I)/2
    5 V(I).V(I)+R(L)*W(J)
      DO 6 I=1,M
      S(II)=S(II)+V(I)**2
      DO 6 J=1,M
      L=I+(J*J-J)/2
    6 R(L)=R(L)-V(I)*V(J)
      WRITE (3,105) II,(V(J),J=1,M)
    7 CONTINUE
      WRITE (3,106) (S(J),J=1,K)
      WRITE (3,109)
      DO 8 I=1,M
      L1=I+(I*I-I)/2
      L=(L1+1)-I
    8 WRITE (3,107) I, (R(J),J=L,L1)
      GO TO 13
```

```
100   FORMAT (24X,4A2/19X,I6/19X,I6)
101   FORMAT (/(10F7.4))
102   FORMAT (I6)
103   FORMAT ((10F7.4))
104   FORMAT (1H0,5X,30HFACTORIZACION IMPOSITIVA......,4A2//3X,12HNO. DE
     *CASOS,4X,I6/3X,16HNO. DE VARIABLES,I6/3X,15HNO. DE FACTORES,1X,
     *I6/)
105   FORMAT (1H0,5X,7H FACTOR,I3/(10F7.4))
106   FORMAT (1H0,5X,18HVARIANZA EXPLICADA/(7F10.4))
107   FORMAT (1H0,1X,4HFILA,I4/(15F8.4))
108   FORMAT (1H0,5X,19H VECTOR HIPOTETICO,I3/(10F7.4))
109   FORMAT (1H0,//,5X,21HMATRIZ RESIDUAL FINAL)
 14   CALL EXIT
      END
```

Programa de Factorización Dinámica.

```
      DIMENSION R(4851), V(98), W(98)
   13 READ (2,100) PR1, PR2, PR3, PR4, N, M
      EM=M
      DO 1 I=1,M
      L1=I+(I*I-I)/2
      L=(L1+1)-I
    1 READ (2,101) (R(J),J=L,L1)
      WRITE(3,104) PR1, PR2, PR3, PR4, N, M
      II=0
    7 II=II+1
      READ (2,103) (V(J),J=1,M)
      WRITE(3,108) II,(V(J),J=1,M)
      C=0.0
      DO 3 I=1,M
      W(I)=0.0
      DO 2 J=1,M
      IF(I-J)9,10,10
    9 L=I+(J*J-J)/2
      GO TO 2
   10 L=J+(I*I-I)/2
    2 W(I)=W(I)+V(J)*R(L)
    3 C=C+W(I)*V(I)
      C=SQRT(C)
      DO 4 J=1,M
      W(J)=V(J)/C
    4 V(J)= 0.0
      DO 5 I=1,M
      DO 5 J=1,M
      IF (I-J)11,12,12
   11 L=I+(J*J-J)/2
      GO TO 5
   12 L=J+(I*I-I)/2
    5 V(I)=V(I)+R(L)+W(J)
      DO 6 I=1,M
      S=S+V(I)**2
      DO 6 J=I,M
      L=I+(J*J-J)/2
    6 R(L)=R(L)-V(I)*V(J)
      WRITE(3,105) II,(V(J),J=1,M)
      WRITE(3,106) S
      WRITE(3,109) II
      DO 8 I=1,M
      L1=I+(I*I-I)/2
      L=(L1+1)-I
    8 WRITE (3,107) I, (R(J), J=L,L1)
      PAUSE
      READ(6,102) K
      IF(K) 13,13,7
  100 FORMAT (24X,4A2/19X,I6/19X,I6)
```

```
101  FORMAT (/(10F7.4))
102  FORMAT (I6)
103  FORMAT ((10F7.4))
104  FORMAT (1H0,5X,30HFACTORIZACION DINAMICA........,4A2//3X,12HNO. DE
    *CASOS,4X,I6/3X,16HNO. DE VARIABLES,I6/)
105  FORMAT (1H0,5X,7HFACTOR,I3/(10F7.4))
106  FORMAT (1H0,5X,18HVARIANZA EXPLICADA,F10.4)
107  FORMAT (1H0,1X,4HFILA,I4/(15F8.4))
108  FORMAT (1H0,5X,19H VECTOR HIPOTETICO,I3/(10F7.4))
109  FORMAT (1H0,//,5X,15HMATRIZ RESIDUAL,I2)
 14  CALL EXIT
     END
```

la siguiente salida:

1) Nombre del Problema: PR1, PR2, PR3, PR4.

2) Parámetros del Problema: N, M.

3) Vector Hipótesis y su correpondiente Factor: V(M).

4) Varianza explicada por el factor: S (ya no tiene dimensión).

5) Matriz residual de la extracción de ese factor: R(M(M+1)/2).

Cada vez que programa llega a este punto, se detiene y el usuario debe decidir si continúa extrayendo más factores o si se detiene definitivamente la ejecución. Para ello, debe introducir nueva información con Formato (I6):

. 1, si desea continuar el análisis: es necesario introducir también otro vector hipótesis. El programa informará de nuevo a partir de 3), pero refiriéndose a un nuevo factor.

. 0, si no desea continuar el análisis. El programa se detiene definitivamente.

Aunque el programa de Factorización Dinámica es más completo, útil y flexible y hasta puede utilizarse con matrices $\underline{\underline{F}}_h$ predeterminadas totalmente, se incluye el programa de Factorización Impositiva porque, en el caso en que tengamos la matriz $\underline{\underline{F}}_h$ totalmente establecida antes de comenzar el análisis, resulta mucho más económico y rápido utilizar este programa; se evitan además de las detenciones, las impresiones repetidas de las matrices residuales, después de la extracción de cada factor.

Cualquier persona que haya trabajado con un programa clásico de Análisis Factorial podrá darse cuenta, al ver estos programas, de las ventajas que aportan respecto a los mismos. Los aspectos básicos de estas ventajas son, por un lado, la sencillez de la programación que hace que cualquier persona, por muy pequeños que sean sus conocimientos en esta materia, pueda comprender y manejar dichos programas. Por otro lado, resaltamos el ahorro de tiempo que supone ya este modelo y que en los programas está conseguido al máximo en el de Factorización Impositiva. Y, por último, el ahorro de memoria en el computador, lo que permite que hasta con un minicomputador se pueda efectuar un Análisis Factorial, cosa impensable con los programas tradicionales de esta técnica de Estadística Multivariada.

BIBLIOGRAFIA

COMREY, A.I. (1973).- A First Course in Factor Analysis. New York, Academic Press.

COOLEY; W.W. y LOHNES, R .R. (1971) .- Multivariate Oata Analysis. New York, John Wiley and Sons Inc.

GORSUCH, R.L. (1974).- Factor Analysis. Philadelphia, W.B. Saunders Company.

HARMAN, H.H. (1976).- Modern Factor Analysis. Chicago, Univ. of Chicago Press (3ª Edic.).

MULAIK, S.A. (1972).- The Foundations of Factor Analysis. New York, McGraw-Hill.

OVERALL, J.E. y KLEIT, C.J. (1972).- Applied Multivariate Analysis. New York, McGraw-Hill.

THURSTONE, L.L. (1935): The Vectors of the Mind. Chicago, Univ. of Chicago Press.