Quaderns de filosofia i ciència, 40, 2010, pp. 7-20

Las reglas de inferencia en *La Conceptografía*

José Pedro Úbeda Rives
Jose.P.Ubeda@uv.es
Universitat de Valencia

Abstract

In this paper we go through the rules of inference which Frege uses in the *Begriffsschrift.* We think over the rules of substitutions. We have a proposal about an interpretation and enunciation of the rules of inference in order to explain the whole proofs what Frege has put forward.

Keywords: Rules of inference, substitution, *Begriffsschrift*, G. Frege.

1. Introducción

Para analizar las inferencias que usa Frege en *La Conceptografía* presentamos en primer lugar su sistema formal,[1] para posteriormente estudiar con detalle el uso que Frege hace de las reglas de inferencia en sus demostraciones fijándonos en las más "conflictivas" como las demostraciones de las fórmulas 68, 77, 93 y 95.

2. Sistema formal de *La Conceptografía*

En *La Conceptografía* [3],[2] Frege distingue dos tipos de signos: "*aquellos por medio de los cuales pueden entenderse diferentes objetos* y *aquellos que tienen un significado completamente determinado.* Los primeros son *letras* y sirven principalmente para expresar *generalidad"*.[3] Actualmente los primeros suelen denominarse *variables* o *parámetros*; los segundos, *constantes.*

Los conceptos claves de *La Conceptografía* son los siguientes:

1. Los *contenidos conceptuales* (que abreviaré como **cc**) que Frege clasifica en *contenidos enjuiciables* (que abreviaré como **ccj**), que son aquellos que pueden llegar a ser juicios, y en *contenidos no enjuiciables* (que abreviaré como **ccNOj**), que son aquellos que no pueden llegar a ser juicios, como, por ejemplo, el contenido conceptual de "casa".[4] En terminología moderna los **ccj** pueden identificarse con las fórmulas bien hechas (algunas veces con enunciados) y los **ccNOj** con los términos.

[1] Veánse [8] y [9] para un estudio de los sistemas formales en Frege.

[2] Las citas se referirán a su reedición por I. Angelelli en *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, Georg Holms, Hidesheim, 1964.

[3] "Alle Zeichen, die ich anwende, theile ich daher ein *in solche, unter denen man sich Verschiedenes vorstellen kann,* und *in solche die einen ganz bestimmten Sinn haben.* Die ersten sind die *Buchstaben*, und diese sollen hauptsächlich zum Ausdrucke der *Allgemeinheit* dienen." ([3, §1, p. 1].)

[4] Los conceptos de *contenido conceptual* (*begrifflichen Inhalt*), *contenido enjuiciable* (*beurtheilbare Inhalt*) y *contenido no enjuiciable* (*unbeurtheilbare Inhalt*) los presenta en [3, §2] y [3, §3].

2. Las constantes lógicas: el condicional, la negación, la generalización y la identidad de contenido.[5] Para ellas usaré, además de los símbolos de Frege, los siguiente símbolos: $\rightarrow$, $\neg$, $\forall$ y $\equiv$.

3. Las funciones y sus argumentos,[6] para lo que Frege usa la notación:[7] $\Psi(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$.

A partir de estos conceptos podemos deducir[8] de la parte I de *La Conceptografía* las siguientes reglas de formación[9] de expresiones del lenguaje:

R1 Si Ψ es una función de n argumentos y $A_1, A_2, ..., A_n$ son **cc**, entonces $\Psi(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ es **cc**.[10]

R2 Si A y B son **cc**, entonces $(A \equiv B)$ es **ccj**.

R3 Si A y B son **ccj**, entonces $(A \rightarrow B)$ es **ccj**.[11]

R4 Si A es **ccj**, entonces $\neg A$ es **ccj**.[12]

R5 Si $\Phi(A)$ es **ccj**, tiene ocurrencias del signo A para un **cc** y $\mathfrak{a}$ no ocurre en $\Phi(A)$, entonces $\forall \mathfrak{a} \Phi(\mathfrak{a})$ es **ccj**.[13]

R6 Si $\Psi(\Phi)$ es **ccj**, tiene ocurrencias del signo de función Φ y $\mathfrak{F}$ no ocurre en $\Psi(\Phi)$, entonces $\forall \mathfrak{F} \Psi(\mathfrak{F})$ es **ccj**.[14]

---

[5]El condicional (*Bedingtheit*), la negación (*Verneinung*), la identidad de contenido (*Inhaltsgleichheit*) y la generalización (*Allgemeinheit*) las presenta en [3, §5, §7, §8 y §11] respectivamente. Otras constantes lógicas, correspondientes a la disyunción inclusiva, la conjunción y la disyunción exclusiva, son tratadas de pasada ([3, §7, pp. 11-12]). Igualmente se trata el existencial ([3, §12, p. 23]) cuando dice:

> “
>
> 
>
>
> Man kann es daher übersetzen: „es giebt Λ‘s“”

[Que puede traducirse por „existe un Λ“.]

[6]Sobre funciones y argumentos habla esencialmente en el Prefacio y los parágrafos §9 y §10 de [3].

[7]Frege sólo usa notaciones para funciones con uno o dos argumentos, aunque habla de funciones con más de dos argumentos.

[8]Los textos sobre los que se basa la interpretación dada son los siguientes parágrafos de [3]: §2 (especialmente el texto “*Was auf den Inhaltsstrich folgt, muss immer einen beurtheilbaren Inhalt haben*” [*Lo que sigue a la raya de contenido siempre debe ser un contenido enjuiciable.*], §4 (la negación), §5 (el condicional), §8 (la identidad de contenido), §9 y §10 (las funciones) y §11 (la generalización).

[9]H. Scholz dice que en *La Conceptografía* falta una formulación explícita de estas reglas. “In **Bf** sehlen diese Ausdruchsbestimmungen” [5, p. 2]

[10]Frege ejemplifica los casos en que n es 1 y 2. Respecto al caso en que $n > 0$ nos dice “Diesem entsprechend werden unbestimmte Functionen mehrer Argumente ausgedrückt” [3, §12, p. 18] [De forma análoga serán expresadas funciones indeterminadas de más argumentos.]. Todas las funciones que usa son tales que su valor es **ccj**. En los parágrafos §9 y §10 de [3] usa las letras mayúsculas griegas Φ, Ψ y X como *metavariables* para funciones y las letras griegas mayúsculas A y B para los argumentos. En otros parágrafos utiliza además para funciones las letras griegas mayúsculas siguientes: A, B, Λ, P y M [3, §11 y §12].

[11]Con los símbolos de Frege: si A y B son **ccj**, entonces es **ccj**

En los parágrafos de la primera parte en la que habla del condicional y la negación usa como *metavariables* las letras griegas mayúsculas: A, B, Γ, Λ, M, N y Δ. No distingue formalmente entre metavariables para funciones, para **cc** y para **ccj**.

[12]Con los símbolos de Frege: si A es **ccj**, entonces es **ccj**

[13]Con los símbolos de Frege: Si $\Phi(A)$ es **ccj**, tiene ocurrencias del signo A para un **cc** y $\mathfrak{a}$ no ocurre en $\Phi(A)$, entonces es **ccj**

Usa las letras góticas: $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{d}$ y $\mathfrak{F}$. Actualmente estas letras reciben el nombre de *variables ligadas*.

[14]Con los símbolos de Frege: Si $\Psi(\Phi)$ es **ccj**, tiene ocurrencias del signo de función Φ y $\mathfrak{F}$ no ocurre en

A estas hay que añadir reglas que establezcan la base de la definición por inducción y que nos digan algo de la forma:

Rα La letra F con o sin subíndices es un signo para una función.

Rβ La letra a con o sin subíndices es un signo para un **cc**.

Rγ La letra p con o sin subíndices es un signo para un **ccj**.

Rβ Si A es **ccj**, entonces es **cc**.

Frege utiliza casi cualquier letra como signo para **cc**, para **ccj** y para función.[15] Un estudio de la aparición de las distintas letras puede resumirse en el siguiente cuadro, donde los números hacen referencia a las fórmulas de *La Conceptografía*:

letra	*ccj*	*cc*	función	Binaria	góticas
a	1-51, 61, 82	61,119-122			58- 71, 75-80 85-90, 93-94 110, 115-119 123, 130
b	1-26, 28-30, 32-40 47-51, 67,68	59-60			
c	2-7, 9, 11-25, 29-30 34-35, 37, 44-51, 90	52-58, 67-68			
d	6-8, 10, 12-23, 25, 48, 51	52-53, 55-57			69, 115-117 130
e	10, 14-16, 20, 22-23				115
f	22		52-53, 56-68	69-133	
g			59-60, 62-66 83		
h			60, 64-66, 83		
m	63	123-133			
v		101-102,107, 108, 111			
x		62-66, 70-74 76-77, 79-106 109-110, 112-114 116-129, 132-133			
y		64, 71-74, 76-77, 79-96, 98, 107-108 110-111, 117-129 132-133			
z		87-88, 92, 94-96 98-108, 111-114			
F			69-75, 77-88		76, 89-90, 93-94

$\Psi(\Phi)$, entonces es **ccj**

$$\smile^{\mathfrak{F}}\ \Psi(\mathfrak{F})$$

Torretti [7, p. 131] dice

> Frege admite la posibilidad de hacer generalizaciones referentes a propiedades y relaciones, pero no la reglamenta expresamente.

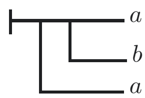
Sin embargo su reglamentación implícitamente es análoga a la de la generalización de **cc**.

[15] Torretti dice

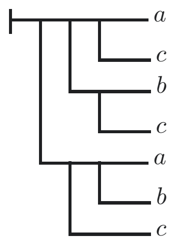
> No llega a dar un inventario formal de la letras que pueden usarse como variables y constantes en *BS*, ni una codificación exhaustiva del modo de utilizarlas. ([7, p. 131])

El cálculo que presenta Frege en la parte I consta de los axiomas:[16]

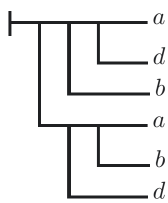
F1. $a \to (b \to a)$



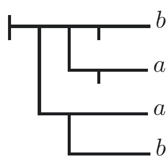
F2. $((c \to (b \to a)) \to ((c \to b) \to (c \to a))$



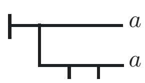
F3. $((d \to (b \to a)) \to (b \to (d \to a))$



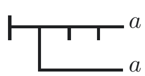
F4. $(b \to a) \to (\neg a \to \neg b)$



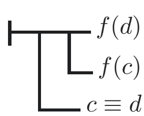
F5. $\neg\neg a \to a$



F6. $a \to \neg\neg a$

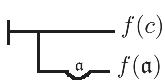


F7. $c \equiv d \to (F(c) \to F(d))$

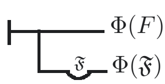


F8. $c \equiv c$

F9. $\forall \mathfrak{a} F(\mathfrak{a}) \to F(c)$



F10. $\forall \mathfrak{F} \Phi(\mathfrak{F}) \to \Phi(F)$



y de las siguientes reglas de inferencia:

a) *modus ponens*:[17]

[16] Todos son formulados explícitamente por Frege excepto el **F**10, que aquí se formula como un esquema de axioma diferenciándose de los otros 9.

[17] La formulación y justificación ocurre en el parágrafo §6.

$$\frac{\begin{array}{c}\Phi\\ \Phi \rightarrow \Psi\end{array}}{\Psi}$$

b) *generalización* en las formas:[18]

$$\frac{\Phi \rightarrow F(b)}{\Phi \rightarrow \forall \mathfrak{a} F(\mathfrak{a})}\ \mathbf{G}^1 \qquad \frac{\Phi \rightarrow \Psi(F)}{\Phi \rightarrow \forall \mathfrak{F} \Psi(\mathfrak{F})}\ \mathbf{G}^2$$

si b no ocurre en Φ ni $\mathfrak{a}$ en $F(b)$ en la primera regla y F no ocurre en Φ ni $\mathfrak{F}$ en $\Psi(F)$ en la segunda regla, donde b es una letra **cc** y F una letra de función.

c) *sustitución* para **ccj**:[19] está permitido sustituir una letra a que sea **ccj** por cualquier **ccj**; es decir de Φ puede inferirse $\Phi : a/\Psi$. La expresión $\Phi : a/\Psi$ se[20] obtiene al sustituir cada ocurrencia de a en Φ por Ψ.[21]

d) *sustitución* para **cc**: está permitido sustituir una letra a que sea **cc** por cualquier **cc**; es decir, de Φ puede inferirse $\Phi : a/\Psi$.[22]

e) *sustitución de variables ligadas*: está permitido sustituir una letra gótica minúscula (mayúscula) en todo su alcance por otra minúscula (mayúscula) determinada, si en los lugares donde antes había diferentes letras, después ocurren también diferentes.[23]

f) sustitución de variables funcionales: una letra funcional puede sustituirse por una expresión en la que se señalen los lugares donde deben ponerse los argumentos.[24]

3. Reglas de inferencia

En *La Conceptografía* hay 133 fórmulas que Frege clasifica en los siguientes tipos:

- 9 que Frege considera *axiomas* (las fórmulas con números 1, 2, 8, 28, 31, 41, 52, 54 y 58)[25];

[18] Frege sólo ejemplifica la primera forma, aunque su explicación permite establecer la segunda. Véase el parágrafo §11. En este parágrafo justifica no sólo la primera forma $\mathbf{G}^1$ sino también las siguientes reglas que pueden derivarse a partir de ella:

$\mathbf{G}^1_0$ De $X(a)$ inferir $\forall \mathfrak{a} X(\mathfrak{a})$

$\mathbf{G}^1_2$ De $B \rightarrow (C \rightarrow X(a))$ inferir $B \rightarrow (C \rightarrow \forall \mathfrak{a} X(\mathfrak{a}))$, si a no ocurre ni en B ni en G.

Por supuesto $\mathfrak{a}$ no debe ocurrir en $X(a)$. Análogo se tendría con $\mathbf{G}^2$, aunque no las explícita.

[19] Este es el único tipo de sustitución que aparece en la II parte de *La Conceptografía* hasta la fórmula **51**. Además la utiliza aplicando sustitución simultánea.

[20] Está terminología que en caso de sustitución simultánea toma la forma: $\Phi : a_1/\Psi 1, \cdots, a_n/\Psi_n$ es la usada por J. Łukasiewic y en forma bidimensional por Frege.

[21] Con la terminología de A. Church [1] la regla diría de Φ puede inferirse $S^{\alpha}_{\Phi}\Psi|$, donde $S^{\alpha}_{\Phi}\Psi|$ es la expresión obtenida al sustituir todas las ocurrencias de α en ψ por Φ, donde Ψ y Φ son expresiones del lenguaje y α es un símbolo del lenguaje. Si α no ocurre en Ψ, $S^{\alpha}_{\Phi}\Psi|$ es Ψ. La sustitución simultánea la explica Church diciendo que $S^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}_{\Phi_1 \ldots \Phi_n}\Psi|$ es la expresión obtenida al sustituir simultáneamente en Ψ todas las ocurrencias de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ por $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$. Esta sustitución simultánea puede reducirse a un máximo de $2n$ sustituciones normales. Se exige que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sean todas distintas.

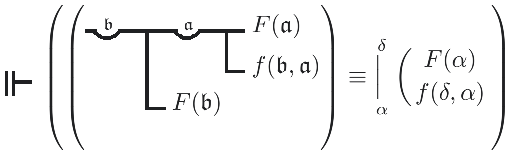
[22] Este tipo de sustitución lo usa Frege a partir de la fórmula 52, pero cuando Ψ no es una letra siempre es **ccj**.

[23] Su formulación está en el parágrafo §11.

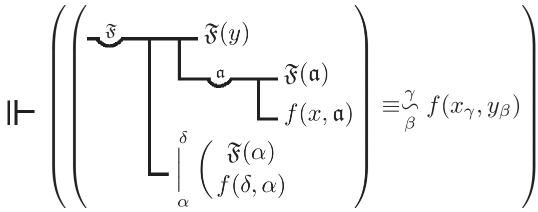
[24] Frege usa el siguiente simbolismo cuando F es una función de un argumento: $F(A)/\Phi$, donde Φ es una expresión que puede contener A y que es un **ccj** cuando A se sustituye por el argumento que tiene la F. Por supuesto A es la letra griega mayúscula que no ocurre en ninguna de las fórmulas demostradas por Frege. No hace nunca sustituciones de variables funcionales con más de un argumento.

[25] Łukasiewicz [6] mostró que la fórmula 8 era demostrable a partir de las fórmulas 1 y 2.

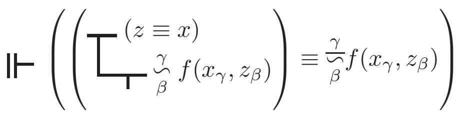
- 4 que Frege establece como *definiciones* (las fórmulas 69, 76, 95 y 115). La formulación de Frege para ellas es la siguiente:[26]



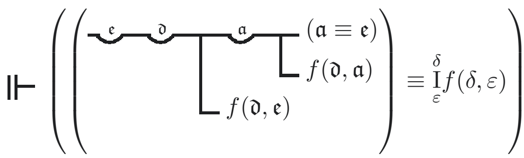
(**69**)



(**76**)



(**99**)



(**115**)

- 120 que Frege demuestra a partir de los axiomas y definiciones.

De las 120 fórmulas demostradas, 119 las demuestra Frege a partir de dos fórmulas anteriores aplicando una vez la regla de *modus ponens*[27] y posiblemente sustituciones y/o generalizaciones. Una de ellas, la fórmula 102 la demuestra a partir de tres fórmulas la 101, la 96 y 92 usando dos *modus ponens* y sustituciones.[28]

La regla de sustitución de letras **ccj** por expresiones **ccj** la usa para demostrar 100 de las 120 fórmulas demostradas (todas excepto las fórmulas 55, 57, 75, 81, 87, 89, 95, 100,

---

[26]Usaremos los siguientes símbolos en lugar de los que usa Frege:

a) Para el símbolo de la definición establecida en la fórmula **69**:

$$\overset{\delta}{\underset{\alpha}{\Big|}}\left(\begin{matrix}F(\alpha)\\ f(\delta,\alpha)\end{matrix}\right. \qquad \text{usaremos } f \bowtie F$$

b) Para el símbolo de la definición establecida en la fórmula **76**:

$$\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\smile}} f(x_\gamma, y_\beta) \qquad \text{usaremos } x \prec_f y$$

c) Para el símbolo de la definición establecida en la fórmula **99**:

$$\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\overline{\smile}}} f(x_\gamma, z_\beta) \qquad \text{usaremos } x \preceq_f z$$

d) Para el símbolo de la definición establecida en la fórmula **115**:

$$\overset{\delta}{\underset{\varepsilon}{\mathrm{I}}} f(\delta,\varepsilon) \qquad \text{usaremos } \mathbf{I}(f)$$

[27]La aplicación del *modus ponens* a las fórmulas con número n $(A \to B)$ y m (A) para dar la fórmula con número k (B) lo símbolizaremos como:

$$n = m \hookrightarrow k$$

[28]Abrevia en un paso la aplicación de los dos *modus ponens* como explica en §6.

102, 104, 105, 108, 110, 114, 118, 122, 126, 129, 131 y 133). En general aplica la sustitución simultánea.

La regla de sustitución de letras **cc** por **cc** que en todos los casos son letras la usa para demostrar 24 fórmulas (las fórmulas 57, 59, 60, 62, 65, 70, 72, 73, 91, 92, 94, 98, 102, 104, 107, 108, 109, 110, 114, 116, 118, 120, 126 y 129).

La regla de sustitución de letras **cc** por **ccj** la usa para demostrar 5 fórmulas (las fórmulas 68, 75, 89, 100 y 105).

La regla de sustitución de variables ligadas la usa para demostrar 3 fórmulas (las fórmulas 70, 116 y 118) y en todas ellas se sustituye una letra gótica minúscula por otra minúscula. No usa nunca la sustitución de letras góticas mayúsculas.

La regla de generalización $\mathbf{G}^1$ la usa para demostrar 3 fórmulas (97, 109 y 130),[29] la $\mathbf{G}^1_0$ para 2 fórmulas (97 y 109) y la $\mathbf{G}^1_2$ para 3 fórmulas (81, 123 y 130).[30]

La regla de generalización $\mathbf{G}^2$ la usa para demostrar 4 fórmulas (77, 91, 93 y 95).

La regla de sustitución de funciones la usa para demostrar 25 fórmulas (55, 59, 60, 62, 65, 68, 70, 72, 75, 83, 89, 91, 92, 93, 97, 98, 100, 105, 109, 110, 116, 118, 120, 131 y 133).

Veamos algunas demostraciones que tienen un interés especial. Frege demuestra la fórmula **68** como sigue:

57 $\quad (c \equiv d) \rightarrow (f(d) \rightarrow f(c))$

67 $\quad ([(\forall \mathfrak{a} f(\mathfrak{a})) \equiv b] \rightarrow (b \rightarrow \forall \mathfrak{a} f(\mathfrak{a}))) \rightarrow ([(\forall \mathfrak{a} f(\mathfrak{a})) \equiv b] \rightarrow (b \rightarrow f(c)))$

$\quad 67 = 57 : f(A) \diagup A, c \diagup \forall \mathfrak{a} f(\mathfrak{a}), d \diagup b \hookrightarrow 68$

68 $\quad [(\forall \mathfrak{a} f(\mathfrak{a})) \equiv b] \rightarrow (b \rightarrow f(c))$

Como puede observarse las letras c y d son signos para **cc** en **57**. En **57** pide que c sea sustituida por un **ccj** ($\forall \mathfrak{a} f(\mathfrak{a})$) y d por b que en principio puede ser **cc**, lo que implicaría que el signo $\equiv$ conecta un **ccj** y un **cc**. Pero, pide que se haga también la sustitución $f(A) \diagup A$ en la fórmula **57** que sólo puede ser válida en el caso que f se esté aplicando a un **ccj** ya que se sustituye f por la función identidad y para que **68** sea una fórmula, tanto b como $\forall \mathfrak{a} f(\mathfrak{a})$ deben ser **ccj**.[31]

La demostración de la fórmula **95** la hace Frege como sigue:

88 $\quad f(y,z) \rightarrow (x \prec_f y \rightarrow (\forall \mathfrak{a}(f(x,\mathfrak{a}) \rightarrow F(\mathfrak{a})) \rightarrow ((f \bowtie F) \rightarrow F(z))))$

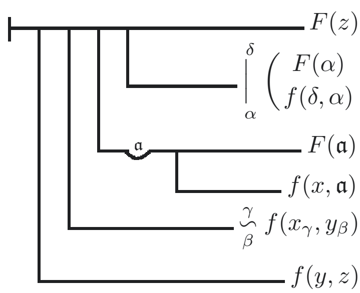
94 $\quad (f(y,z) \rightarrow (x \prec_f y \rightarrow (\forall \mathfrak{F}(\forall \mathfrak{a}(f(x,\mathfrak{a}) \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{a})) \rightarrow ((f \bowtie \mathfrak{F}) \rightarrow \mathfrak{F}(z)))))) \rightarrow$
$\qquad (f(y,z) \rightarrow (x \prec_f y \rightarrow x \prec_f z))$

$\quad 94 = 88 : F \diagup \mathfrak{F} \hookrightarrow 95$

95 $\quad f(y,z) \rightarrow (x \prec_f y \rightarrow x \prec_f z)$

En la demostración de la fórmula **95** usa la generalización de segundo orden ya que dice que se haga la sustitución de F por $\mathfrak{F}$ en la fórmula **88**:

88



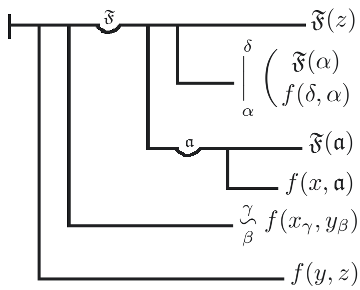
obteniéndose, usando la regla de generalización de segundo orden, la fórmula:

[29] R. Torretti [7, pg. 140] dice que "Frege no utiliza -por lo que veo- esta regla".

[30] Para representar que hace una generalización usa un simbolismo análogo al que usa para las sustituciones, así la generalización de la fórmula con número n ($\Psi(a)$) para obtener la fórmula con número m ($\forall \mathfrak{a} \Psi(\mathfrak{a})$) se simboliza por $m = n : a \diagup \mathfrak{a}$.

[31] La sustitución $f(A) \diagup A$ se usa para demostrar 5 fórmulas (68, 75, 89, 100 y 105) y se hace o sobre la fórmula 57 o la fórmula 52 que tratan ambas de la identidad de contenido.

88_1



La demostración de la fórmula **77** la hace Frege como sigue:

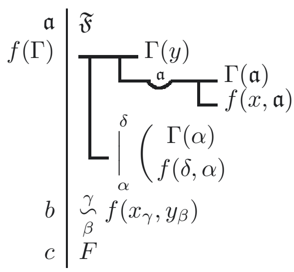
76 $\quad \forall\mathfrak{F}((f \bowtie \mathfrak{F}) \to (\forall\mathfrak{a}(f(x,\mathfrak{a}) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})) \to \mathfrak{F}(y))) \equiv x \prec_f y$

$\quad 68 : \mathfrak{a}\diagup\mathfrak{F}, f(\Gamma)\diagup(f \bowtie \Gamma) \to (\forall\mathfrak{a}(f(x,\mathfrak{a}) \to \Gamma(\mathfrak{a})) \to \Gamma(y)), b\diagup x \prec_f y, c\diagup F =$

$\quad\quad 76 \hookrightarrow 77$

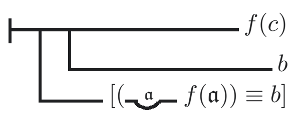
77 $\quad x \prec_f y \to ((f \bowtie F) \to \forall\mathfrak{a}(f(x,\mathfrak{a}) \to F(\mathfrak{a})) \to F(y))$

En la demostración de la fórmula **77** se dice que se haga en la fórmula **68** la siguiente sustitución:

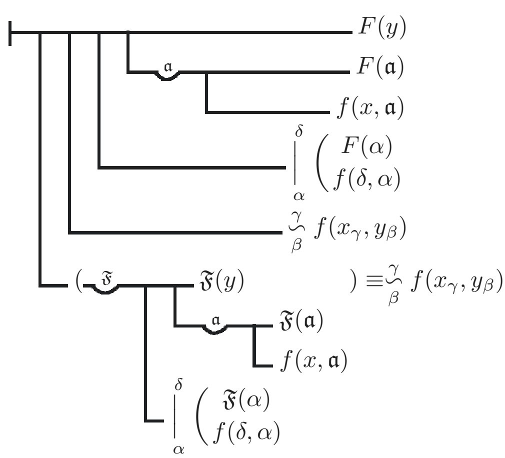


Así,[32] pasamos de la fórmula

68



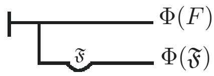
a la fórmula:



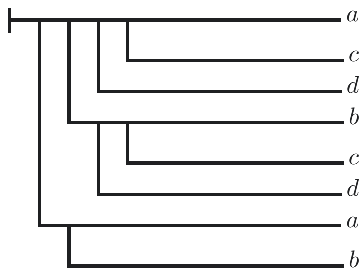
[32]Frege dice a continuación de la sustitución: “Hier sind nach §10 $F(y)$, $F(\mathfrak{a})$, $F(\alpha)$ als verschiedene Functionen des Arguments F anzusehen” (pp. 62). [“Aquí de acuerdo con §10 $F(y)$, $F(\mathfrak{a})$ y $F(\alpha)$ se consideran diferentes funciones del argumento F”]

Pero esto no parece demasiado riguroso ya que se pide sustituir letras **cc** por funciones. Para ello hubiera sido mejor establecer el axioma correspondiente a lógica de segundo orden, donde $\Phi(F)$ es una fórmula en la que ocurre el signo de función F:

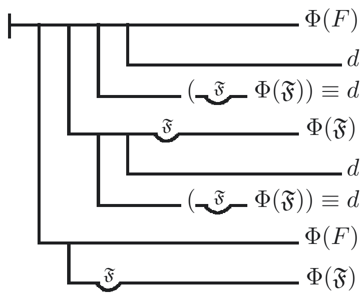
58^{2^o}



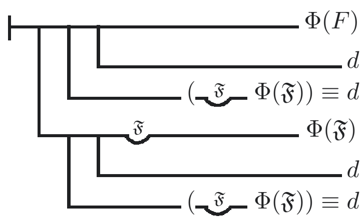
Usar la fórmula **7**



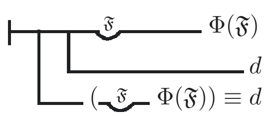
sustituyendo simultáneamente a por $\Phi(F)$, b por $\overset{\mathfrak{F}}{\smile}\ \Phi(\mathfrak{F})$, c por d y d por $\overset{\mathfrak{F}}{\smile}\ \Phi(\mathfrak{F})) \equiv d$ para obtener:



Aplicando *modus ponens* a esta fórmula y al axioma de segundo orden se tiene:

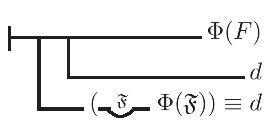


y aplicando *modus ponens* a esta fórmula y a la fórmula **57** con la función f sustituida por la identidad y la c por $\overset{\mathfrak{F}}{\smile}\ \Phi(\mathfrak{F})$ que es la fórmula:



tendríamos

68^{2^o}



La nueva demostración de la fórmula **77** sería como sigue:

68^{2^o} $\quad [\forall \mathfrak{F}\Phi(\mathfrak{F}) \equiv d] \to (d \to \Phi(F))$

$\quad 68^{2^o} : \Phi(\Gamma)/(f \bowtie \Gamma) \to (\forall \mathfrak{a}(f(x,\mathfrak{a}) \to \Gamma(\mathfrak{a})) \to \Gamma(y)), d/x \prec_f y = 76 \hookrightarrow 77$

77 $\quad x \prec_f y \to ((f \bowtie F) \to \forall \mathfrak{a}(f(x,\mathfrak{a}) \to F(\mathfrak{a})) \to F(y))$

La demostración de la fórmula **93** la hace Frege como sigue:

90 $\quad (c \to (\forall \mathfrak{F}((f \bowtie F) \to ((\forall \mathfrak{a}(f(x,\mathfrak{a}) \to F(\mathfrak{a})) \to \mathfrak{F}(y)))))) \to (c \to x \prec_f y)$

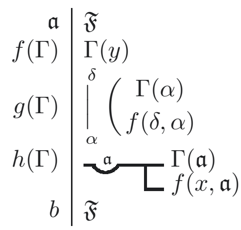
60 $\quad \forall \mathfrak{a}(h(\mathfrak{a}) \to (g(\mathfrak{a}) \to f(\mathfrak{a}))) \to (g(b) \to (h(b) \to f(b)))$

$\quad 90 : c/\forall \mathfrak{F}(\forall \mathfrak{a}(f(x,\mathfrak{a}) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})) \to ((f \bowtie \mathfrak{F}) \to \mathfrak{F}(y))) =$

$\qquad 60 : a/\mathfrak{F}, f(\Gamma)/\Gamma(y), g(\Gamma)/(f \bowtie \Gamma), h(\Gamma)/\forall \mathfrak{a}(f(x,\mathfrak{a}) \to \Gamma(\mathfrak{a})), b/\mathfrak{F} \hookrightarrow$
93

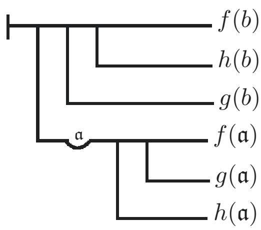
93 $\quad \forall \mathfrak{F}(\forall \mathfrak{a}(f(x,\mathfrak{a}) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})) \to ((f \bowtie \mathfrak{F}) \to \mathfrak{F}(y))) \to x \prec_f y$

En esta demostración de la fórmula **93** se dice que hay que hacer las siguientes sustituciones en la fórmula **60**:



Ahora bien, la fórmula **60** es la siguiente:

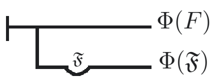
60



y si se hacen las sustituciones anteriores se sustituyen variables "individuales" por variables de predicados, mezclándose tipos diferentes.[33] Sin embargo, como se ha hecho antes respecto a la demostración de la fórmula **77**, debería hacerse lo siguiente:

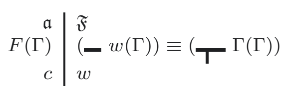
a) establecer el axioma correspondiente a lógica de segundo orden, donde $\Phi(F)$ es una fórmula en la que ocurre el signo de función F:

58^{2^o}

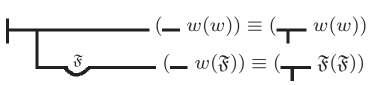


b) hacer en la fórmula **12** las siguientes sustituciones:

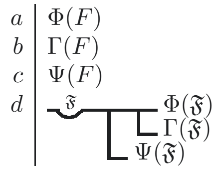
[33] R. Torretti [7, nota 6, pp. 131] destaca este hecho. Y, para establecer la paradoja de Russell en *La Conceptografía*, Torretti en [7, nota 22, pp. 143] basándose en este hecho hace en la fórmula 58 las sustituciones



obteniendo

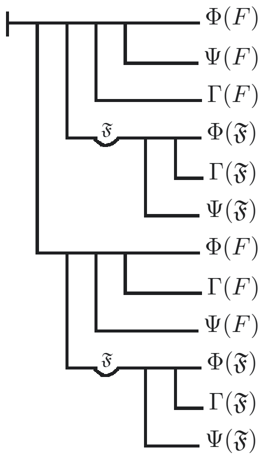


Esta formula creo que Frege no la consideraría bien hecha.

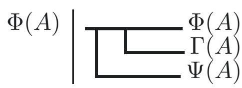


donde $\Phi(F)$, $\Psi(F)$ y $\Gamma(F)$ son expresiones donde ocurre F, obteniéndose la fórmula

12_1

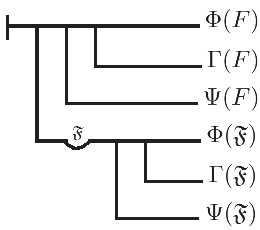


c) hacer en $\mathbf{58}^{2^{\circ}}$ la sustitución:



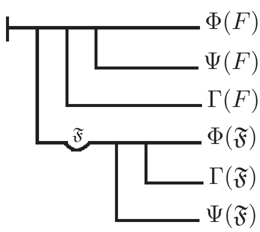
obteniéndose la fórmula

58_1

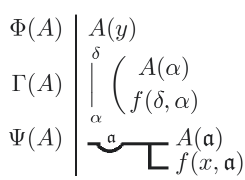


d) aplicando *modus ponens* a las dos fórmulas anteriores obtenemos:

60_1

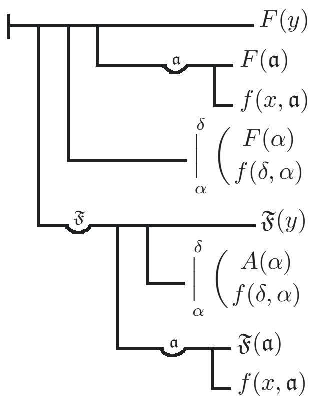


e) hacer en la fórmula 60_1 las sustituciones:



obteniéndose la fórmula

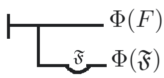
60_2



que es la fórmula que utiliza para la demostración de la fórmula **93**.

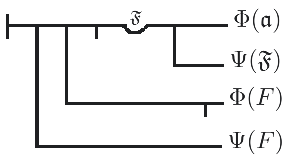
Estas últimas demostraciones muestran que Frege debería haber usado el axioma **F.10**:

$\forall\mathfrak{F}\Phi(\mathfrak{F}) \to \Phi(F)$

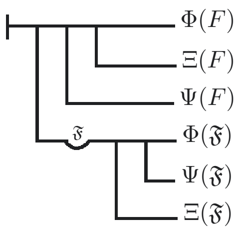


que es la fórmula 58^{2^o} y demostrar las fórmulas 59-68 para segundo orden:

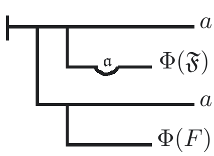
59^{2^o}



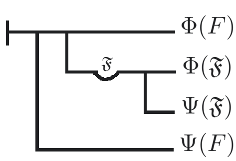
60^{2^o}



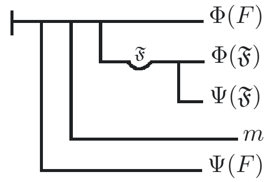
61^{2^o}



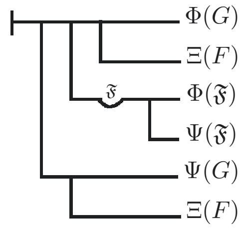
62^{2^o}



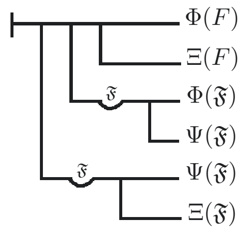
$63^{2^{\circ}}$



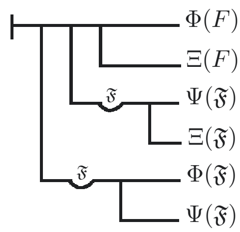
$64^{2^{\circ}}$



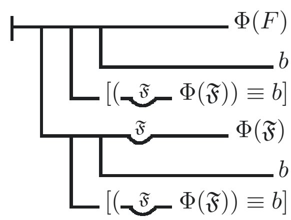
$65^{2^{\circ}}$



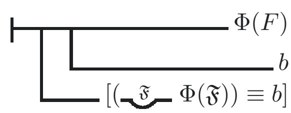
$66^{2^{\circ}}$



$67^{2^{\circ}}$



$68^{2^{\circ}}$



Sus demostraciones son análogas a las demostraciones de las fórmulas 58-68 de primer orden.

Ahora bien, $\mathbf{58^{2^{\circ}}}$ es un esquema de axioma lo que choca con el hecho de que los restantes son axiomas. Frege en *Las leyes fundamentales de la aritmética* [2] utiliza un axioma en lugar del esquema de axioma $58^{2^{\circ}}$ pero para ello introduce símbolos para funciones de segundo orden, es decir, de funciones cuyo argumento es una función de primer orden y entonces debe usar sustituciones para dichas funciones.

Referencias

[1] A. Church: *Introduction to Mathematical Logic*. Princeton University Press, 1956.

[2] G. Frege: *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet*. Jena, 1893 y 1903. Reeditada por Georg Olms, Hildesheim, 1962.

[3] G. Frege: *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Verlag von Louis Nebert, Halle, 1897. Reeditada en *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, Georg Holms, Hidesheim, 1964 por I. Angelelli. Traducción inglesa en [4, pp. 1-82]. Traducción castellana de H. Padilla, *Conceptografía* Los fundamentos de la aritmética** Otros estudios filosóficos, Universidad Nacional Autónoma de México, 1972.

[4] J. Van Heijenoort (editor): *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic*. Cambridge, 1967.

[5] H. Hermes and H. Scholz: Ein neuer Vollständigkeisbeweis für das reduzierte Fregesche Axiomensystem des Aussogenkalküls. *Forschungen zur Logik*, 1, pp. 1–40, 1936.

[6] J. Łukasiewicz: Z historii logiki zdań. *Przeglad̨ Filozoficzny*, 37:369–377, 1934. Versión alemana: Zur Geschichte der Aussagenlogik, *Erkenntnis*, 5, 1935-36, pp. 111-131. Traducción castellana de J. Sanmartín: *Para una historia de la lógica de enunciados*, Cuadernos Teorema 3, Valencia, 1974.

[7] R. Torretti: *El paraiso de Cantor. La tradición conjuntista en la Filosofía matemática*. Editorial universitaria, Santiago de Chile, 1998.

[8] J. P. Ubeda Rives: El sistema formal de La Conceptografía de Gottlog Frege. En *XIé Congrés Valencià de Filosofía. Ier Congrés de Filosofia a Andorra*, pp. 101–108. Valencia, 1996.

[9] J. P. Ubeda Rives: La lógica formal en Frege. En M. S. De Mora, A. Ibarra, B. Pérez Sedeño y I. Sánchez Balmaseda (editores): *Actas del III Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España*, pp. 83–91. Servicio Editorial Universidad del País Vasco, 2000.