Respuesta en frecuencia.

Interés y uso en PDS.

Tiene el mismo uso que en sistemas continuos: determinar la salida de un sistema (**en estado estacionario**; cuando t $\rightarrow\infty$) cuando la entrada es una combinación de sinusoides.

Alternativas a este método son la convolución y usar Transformadas Z$\rightarrow$ $Y(z)=H(z)\cdot X(z)$ para, posteriormente, aplicar transformadas inversas. De esta forma se obtiene el término transitorio y estacionario (para t$\rightarrow$0). Esta forma de cálculo tiene una alta complejidad en la mayoría de las ocasiones (recordáis los problemas del tema anterior??).

Cabe preguntarse por qué estamos interesados en las sinusoides; como veremos en los siguientes temas siempre puedo descomponer la inmensa mayoría de señales digitales como una combinación de sinusoides. **¡¡TENEMOS UNA FORMA SENCILLA DE DETERMINAR LA SALIDA DE CUALQUIER SISTEMA ANTE CUALQUIER ENTRADA EN ESTADO ESTACIONARIO!! .**

Origen de la respuesta en frecuencia.

Supongamos que se se tiene un sistema L.T.I definido por la respuesta impulsional h(k) y queremos determinar la salida de dicho sistema cuanto la entrada es la exponencial compleja

$$x(n) = A \cdot e^{jwn}$$

Aplicando convolución

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot x(n-k) \longrightarrow y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot A \cdot e^{jw(n-k)} \longrightarrow y(n) = A \cdot e^{jwn} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot e^{-jwk}$$

Si se define la función compleja H(e^{jw}) como

$$H(e^{jw}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot e^{-jwk}$$

Se tiene entonces

$$y(n) = H(e^{jw}) \cdot x(n)$$

¡¡Sólo necesito la función H(e^{jw}) para determinar la salida!!; dicha función se conoce como **respuesta en frecuencia del sistema.**

Dado que es una función compleja se tiene

$$H(e^{jw}) = \left|H(e^{jw})\right| \cdot e^{j\phi(H(jw))}$$

$$y(n) = \left|H(e^{jw})\right| \cdot A \cdot e^{j\left(wn + \phi\left(H(e^{jw})\right)\right)}$$

LA RESPUESTA EN FRECUENCIA ACTÚA SOBRE LA AMPLITUD Y LA FASE DE LA SEÑAL X(N)

Si..pero nuestras señales suelen ser causales

La señal usada para obtener la respuesta en frecuencia era no causal....veamos qué ocurre con una exponencial compleja causal.

$$x(n) = A \cdot e^{jwn} \cdot u(n)$$

Aplicando convolución

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot x(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot A \cdot e^{jw(n-k)} \cdot u(n-k)$$

$$y(n) = A \cdot e^{jwn} \cdot \sum_{k=-\infty}^{n} h(k) \cdot e^{-jwk}$$

Jugando con la última expresión llegamos a

$$y(n) = A \cdot e^{jwn} \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot e^{-jwk} - \sum_{k=n+1}^{\infty} h(k) \cdot e^{-jwk} \right]$$

$$y(n) = -A \cdot e^{jwn} \cdot \left[\sum_{k=n+1}^{\infty} h(k) \cdot e^{-jwk} \right] + A \cdot e^{jwn} \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot e^{-jwk} \right]$$

El segundo término es el obtenido anteriormente y, el término entre paréntesis es, justamente, la respuesta en frecuencia.

En la última expresión hay que destacar que el primer término entre corchetes desaparece si el sistema es estable BIBO (¿por qué?) cuando n→∞. Esta situación se corresponde con el **estado estacionario** del sistema por lo que en este estado sólo es necesaria la respuesta en frecuencia para determinar la salida del sistema.

Comentarios sobre la respuesta en frecuencia.

La definición de la respuesta en frecuencia de un sistema L.T.I con una respuesta impulsional h(n) es

$$H\left(e^{jw}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot e^{-jwk}$$

De aquí es inmediato obtener

$$H\left(e^{jw}\right) = H(z)\Big|_{z=e^{jw}}$$

La respuesta en frecuencia es la evaluación de la Transformada Z en la circunferencia de radio unidad. Para tener dicha respuesta en frecuencia la Transformada Z debe converger en esa circunferencia; es decir, nuestra R.O.C debe incluir dicha circunferencia

De la expresión de la respuesta en frecuencia o de su relación con la Transformada Z se comprueba que es periódica de periodo $2 \cdot \pi$.

Además recordando nuestro rango de trabajo con las frecuencias digitales sólo habrá que evaluarla en el rango $0 \leqq w \leqq \pi$. Es decir, hay que evaluar la Transformada Z sólo en media circunferencia.

De la relación con la Transformada Z es inmediato obtener la siguiente relación:

$$\boxed{Y(z) = H(z) \cdot X(z) \Rightarrow Y(e^{jw}) = H\left(e^{jw}\right) \cdot X\left(e^{jw}\right)}$$

Donde

$$X\left(e^{jw}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot e^{-jwk} \Leftrightarrow Y\left(e^{jw}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k) \cdot e^{-jwk}$$

A estas últimas funciones, $Y(e^{jw})$ y $X(e^{jw})$ se les conoce como **TRANSFORMADAS DE FOURIER EN TIEMPO DISCRETO.**

Magnitud y fase de la respuesta en frecuencia.

Como ya se ha visto la respuesta en frecuencia modifica la amplitud y fase de la señal de entrada a través del módulo y la fase, respectivamente de la respuesta en frecuencia; se tendrán entonces dos representaciones: magnitud y fase.

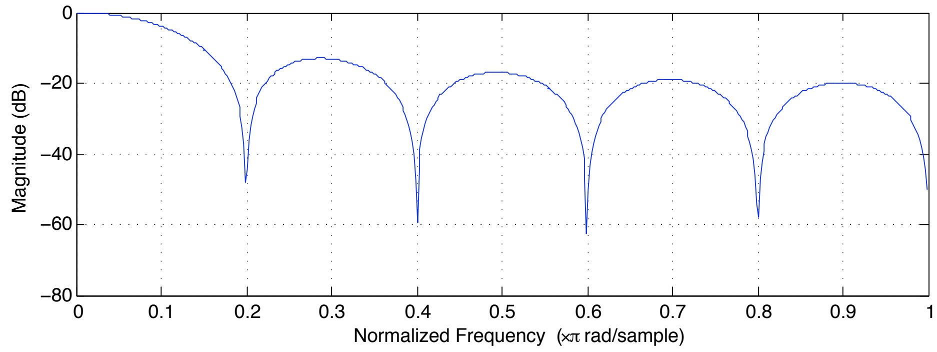
A modo de ejemplo se plantea determinar la repuesta en frecuencia (magnitud y fase) del sistema definido por la respuesta impulsional h(n)=0.1 · [u(n)-u(n-9)]

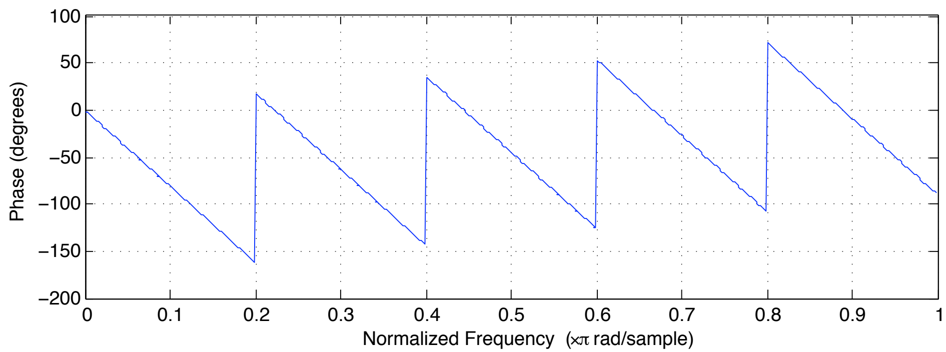
$$H(z) = 0.1 \cdot \sum_{k=0}^{9} z^{-k}$$

$$H(z) = 0.1 \cdot \frac{1 - z^{-10}}{1 - z^{-1}}$$

$$H(z)\Big|_{z=e^{jw}} = H(e^{jw})$$

$$H(e^{jw}) = 0.1 \cdot e^{-4.5 \cdot j \cdot w} \frac{sen(5w)}{sen(w)}$$





Retardo de fase y retardo de grupo.

Consideremos un sistema que, lo único que hace, es introducir un cierto retardo a la señal de entrada

$$y(n) = x(n - n_0)$$

Es inmediato comprobar la siguiente relación

$$H(z) = z^{-n_0} \Rightarrow H\left(e^{jw}\right) = e^{-jwn_0}$$

Distinguiendo magnitud y fase se obtiene

$$\left|H\left(e^{jw}\right)\right| = 1$$

$$\phi\left(H\left(e^{jw}\right)\right) = -w \cdot n_0$$

Se define **retardo de fase** a $\tau_f = -\frac{\left[\phi\left(H(e^{jw})\right)\right]}{w}$

Se observa que en nuestro caso define el retardo temporal entre la señal de entrada y la salida. En general esto es así para todo sistema.

Si se quiere que el sistema digital retarde igual todas las componentes sinusoidales se debe cumplir que el sistema sea de **fase lineal.**

Una magnitud relacionada y que da idea de la desviación de la linealidad en la fase es el **retardo de grupo**

$$\tau_g = -\frac{d\left[\phi\left(H(e^{jw})\right)\right]}{dw}$$

Esta magnitud podría representar el retardo "promedio" introducido por el sistema

Polos y ceros de H(z) y respuesta en frecuencia (I)

Existe una estrecha relación entre la Transformada Z de la respuesta impulsional de un sistema y su respuesta en frecuencia;

$$H\left(e^{jw}\right) = H(z)\Big|_{z=e^{jw}}$$

Podemos utilizar esta relación para diseñar sistemas con una determinada respuesta en frecuencia usando los polos/ceros de la transformada Z. Tomemos un ejemplo sencillo; sistema con 2 polos y 2 ceros (complejos en los dos casos).

$$H(z) = \frac{(z - z_1)\cdot(z - z_2)}{(z - p_1)\cdot(z - p_2)}$$

Considerando la relación Transformada Z-Respuesta en frecuencia se obtiene

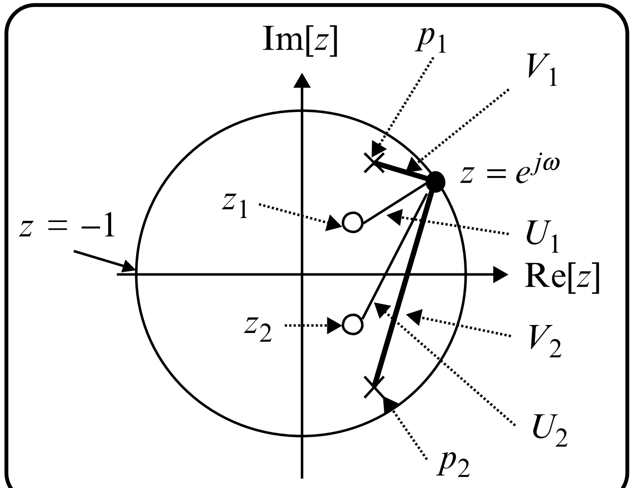
$$H\left(e^{jw}\right) = \frac{\left(e^{jw} - z_1\right)\cdot\left(e^{jw} - z_2\right)}{\left(e^{jw} - p_1\right)\cdot\left(e^{jw} - p_2\right)}$$

Tomando módulos

$$\left|H\left(e^{jw}\right)\right| = \frac{U_1 \cdot U_2}{V_1 \cdot V_2}$$

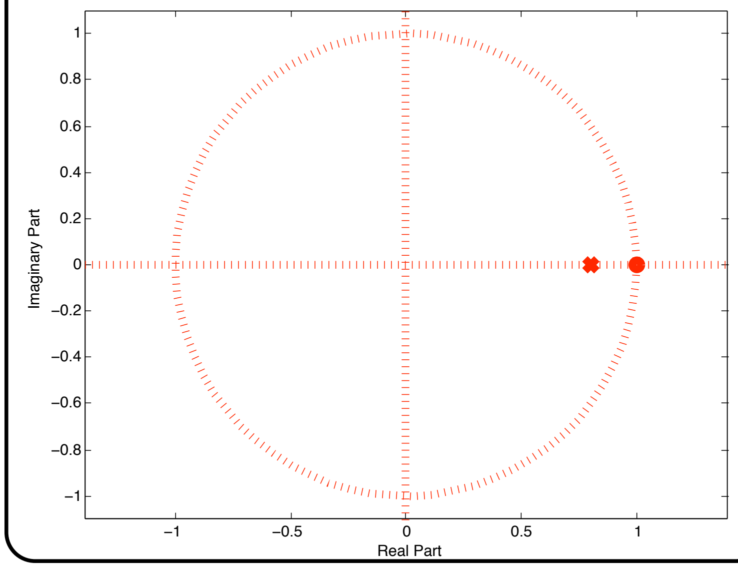
Donde U_i es la distancia de e^{jw} al cero z_i y V_i es la distancia de e^{jw} al polo p_i

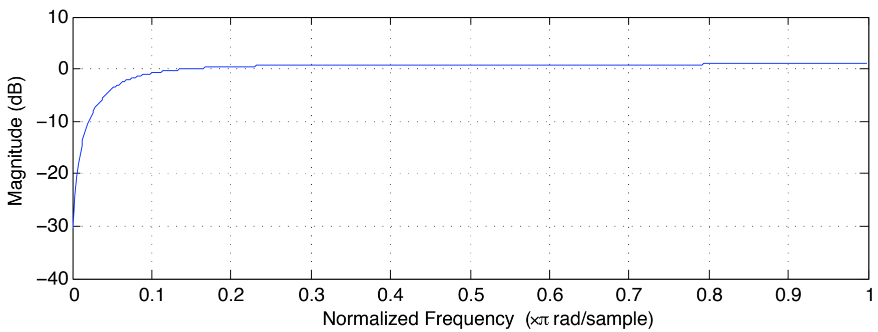
De forma gráfica.



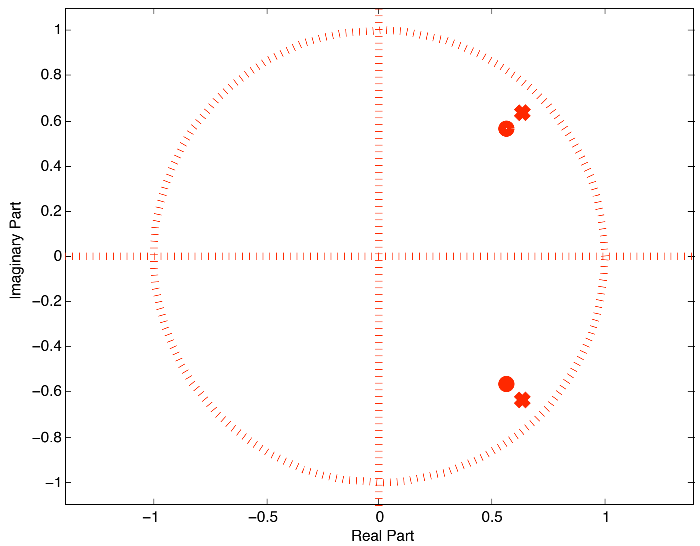
Polos y ceros de H(z) y respuesta en frecuencia (II)

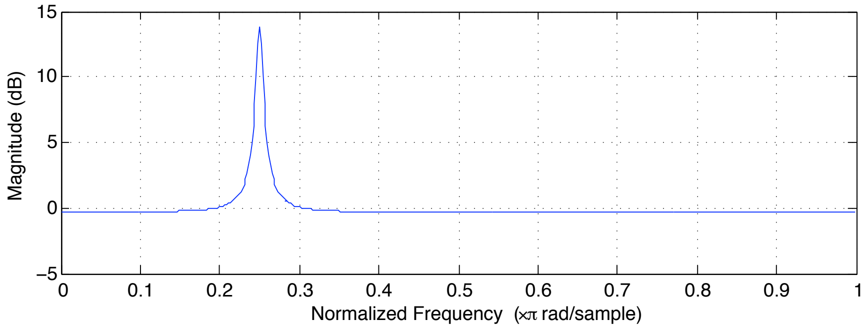
$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - \alpha \cdot z^{-1}} \quad \alpha \approx 1$$





$$H(z) = \frac{1 - 2 \cdot r_1 \cdot \cos(\theta) \cdot z^{-1} + r_1^2 \cdot z^{-2}}{1 - 2 \cdot r_2 \cdot \cos(\theta) \cdot z^{-1} + r_2^2 \cdot z^{-2}}$$





Transformada inversa de Fourier en tiempo discreto

En transparencias anteriores se ha definido la **Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT)** como

$$Z\left(e^{jw}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z(k)\cdot e^{-jwk}$$

A partir de la DTFT se puede obtener la **Transformada Inversa de Fourier (IDTFT) en tiempo discreto**

$$z(n) = \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} Z\left(e^{jw}\right)\cdot e^{jwn}\cdot d\omega$$

Usando la IDTFT se tiene una interpretación de la DTFT cuando se aplica a señales digitales.

$$x(n) = \lim_{\Delta w\to 0}\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\sum_{k} X\left(e^{jk\Delta w}\right)\cdot e^{jk\Delta wn}\Delta w$$

La DTFT representaría los términos de un desarrollo de Fourier para señales aperiódicas (Δw→0; T→∞)

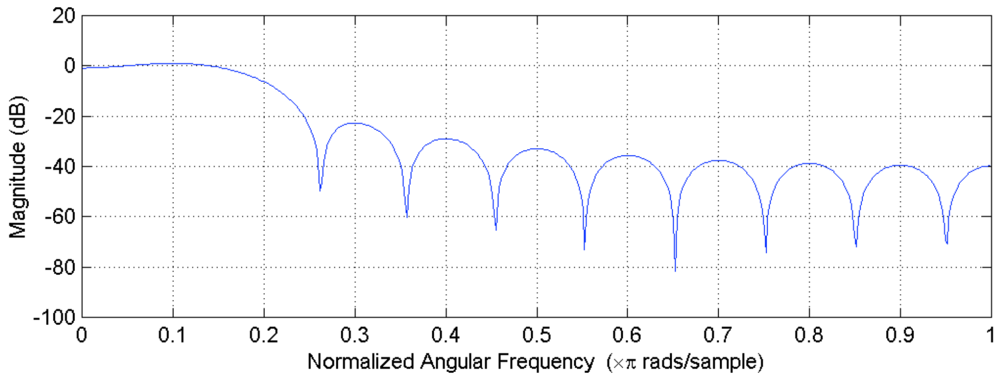
Cuando la DTFT representa una respuesta en frecuencia la IDTFT representa un camino para diseñar **filtros digitales** de una manera sencilla.

Filtro pasa-baja ideal.

$$H\left(e^{jw}\right) = \begin{cases} 1 & |w| < w_c \\ 0 & |w| \geq w_c \end{cases}$$

$$h(n) = \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} H\left(e^{jw}\right)\cdot e^{jwn}\cdot d\omega$$

$$\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-w_c}^{w_c} e^{jwn}\cdot d\omega = \frac{sen\left(w_c\cdot n\right)}{\pi\cdot n}$$



Algunos detalles a tener en cuenta......

El análisis frecuencial sólo determina el estado estacionario del sistema. Si se quiere determinar la evolución total (estacionario + transitorio) hay que aplicar métodos temporales o Transformada Z.

La DTFT tiene las mismas propiedades que la Transformada Z (evidente por la relación que existe entre ellas). Para no repetir no se han expuesto aquí ya que se tienen en el tema de Trasformada Z.

En el diseño de sistemas usando polos/ceros los polos siempre se sitúan en el interior de la circunferencia de radio unidad (¿por qué?) teniendo libertad para los ceros; aunque es preferible que también se sitúen en el interior (**sistemas de fase mínima**).

Lo que tiene que quedar bien claro del tema es el significado y uso de una respuesta en frecuencia y lo que supone en el análisis de sistemas L.T.I. **NO SE PUEDE USAR SI LOS SISTEMAS NO SON L.T.I**.