MATEMÁTICAS I
Grado en Química

Julián Toledo
Dpto. Análisis Matemático
Univ. València

Burjassot, 2016

Las siguientes notas de Matemáticas tienen que verse como una guía, y deben completarse con los apuntes tomados en clase, donde se dan más conceptos y ejemplos, se resuelven problemas y se ofrecen más razonamientos que aquí.

Tema 1

Preliminares

1.1. Logaritmos

Dado un número real y positivo x se llama *logaritmo en base a* (siendo a un número real positivo distinto de 1) al número y tal que $a^y = x$. Se denota entonces

$$y = \log_a x.$$

En matemáticas las base más comúnmente usada es $a = e := \lim_n (1 + \frac{1}{n})^n = 2{,}718281...$, en cuyo caso escribimos $y = \log x$ ó $y = \ln x$, denominado *logaritmo neperiano*, y que por tanto es la inversa de la exponencial e^x. Al ser éste un curso de Cálculo trabajaremos con este logaritmo.

La fórmula de cambio de una base a a otra b es:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \log_b x . \log_a b$$

Para obtenerla basta con tomar logaritmos de base b en la expresión $a^x = y$.

Veamos ahora las propiedades fundamentales de los logaritmos neperianos (para cualquier otra base serían análogas) que se deducen de las leyes de la exponencial:

$$e^{\log x} = x$$

$$\log 1 = 0 \qquad \log e = 1$$

$$\log(x.y) = \log x + \log y \qquad \log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y$$

$$\log(x^p) = p.\log x \qquad \log(\sqrt[n]{x}) = \frac{\log x}{n}$$

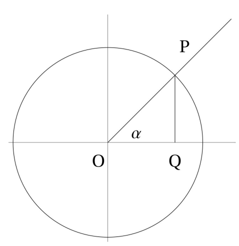
Es importante recordar que, en general,

$$\log(a+b) \neq \log a + \log b.$$

1.2. Trigonometría

La trigonometría es una rama de la geometría clásica en la que se estudian ciertos invariantes de los ángulos: seno, coseno... Para medir ángulos se usan dos sistemas: el sexagesimal, cuya unidad es el *grado*, de forma que la circunferencia tiene 360 grados (denotamos 360^0), y el radial, cuya unidad es el *radian* que se define como aquel ángulo que cumple que cualquier arco que le corresponda tiene como longitud el radio, r, del arco. Como la longitud de la circunferencia es $2\pi r$ un giro completo tiene 2π radianes. Conviene memorizar las medidas de los ángulos más usuales tanto en grados como en radianes (es muy práctico recordar que π radianes equivalen a 180^0). En este curso usaremos el sistema radial al trabajar con números reales y usar representaciones en el plano de las funciones trigonométricas.

Tomemos una circunferencia de centro el origen y radio r, de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$. Véase la figura.



Sea α un ángulo expresado en radianes, $0 \leq \alpha < 2\pi$. El punto P tiene como coordenadas (x, y): Sea $Q := (x, 0)$ su proyección sobre el eje X. Se llama *seno* del ángulo al cociente entre la ordenada y el radio, $\dfrac{y}{r}$ y *coseno* al cociente entre la abscisa y el radio, $\dfrac{x}{r}$. Los representamos como $\sin\alpha$ y $\cos\alpha$. Estas definiciones coinciden con las clásicas en un triángulo rectángulo (úsese aquí el POQ, en el que el seno de un ángulo es el cateto opuesto partido por la hipotenusa y el coseno el cateto contiguo partido por la hipotenusa), con la ventaja de no tener que trabajar sólo con ángulos agudos. De la ecuación de la circunferencia se deduce la denominada *identidad fundamental de la trigonometría* (Teorema de Pitágoras)

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1\,.$$

Se definen la tangente, como:

$$\tan\alpha := \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

para aquellos α que no hagan cero el denominador.

Dividiendo bien por el cuadrado del coseno, bien por el cuadrado del seno, la identidad fundamental se deduce

$$1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Otras identidades importantes son:

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha.\cos\beta \pm \cos\alpha.\sin\beta \qquad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha.\cos\beta \mp \sin\alpha.\sin\beta \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta} \qquad \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

También son útiles las fórmulas:

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad ; \quad \sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad ; \quad \cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Aunque unas buenas tablas o una aceptable calculadora nos proporcionan los valores de las razones de cualquier ángulo con bastantes cifras decimales, se deben conocer y, a ser posible, recordar las razones trigonométricas de los ángulos 0 , $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ y cómo se deducen.

A modo de ejercicio comprobar la siguiente tabla:

ángulo	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	0

Como sugerencia para conocer las de $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{3}$ divídase un triángulo equilátero en dos iguales usando una altura, en cada parte se generan dos triángulos rectángulos cuyos ángulos no rectos son precísamente de 30^0 y 60^0. Para las de $\frac{\pi}{4}$ úsese un triángulo rectángulo isósceles cuyos ángulos no rectos son iguales y ambos de 45^0. Para el resto basta observar las coordenadas del punto P en la circunferencia.

Simplemente por inspección conocemos el signo de las razones de un ángulo según el cuadrante en el que se encuentra. Por ejemplo el seno (la ordenada) es positivo si el ángulo se encuentra en el primer y segundo cuadrante siendo negativo si el ángulo se encuentra en el tercer y cuarto cuadrante. Mientras tanto el coseno (la abscisa) es positivo si el ángulo se encuentra en el primer y cuarto cuadrante siendo negativo si el ángulo se encuentra en el segundo y tercer cuadrante.

Tanto el seno como el coseno de un ángulo toman sólo valores comprendidos entre -1 y 1 y los toman todos infinitas veces ya que

$$\sin\alpha = \sin(\alpha \pm 2\pi) = \sin(\alpha \pm 4\pi) = \cdots = \sin(\alpha \pm 2k\pi) = \cdots$$

$$\cos\alpha = \cos(\alpha \pm 2\pi) = \cos(\alpha \pm 4\pi) = \cdots = \cos(\alpha \pm 2k\pi) = \cdots$$

La trigonometría nació para medir triángulos (TRI-GONOS-METRÍA) y permite obtener importantes relaciones entre sus lados a, b , c y sus ángulos A, B y C (en la notación se entiende que, por ejemplo, A es el ángulo opuesto al lado a). Los más usuales son los denominados teoremas o fórmulas del seno, coseno y tangente:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

1.3. La distancia euclidea. Producto escalar

Dados dos puntos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, se define la distancia euclídea entre ellos como

$$\mathrm{d}(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2},$$

es decir $\mathrm{d}(x,y) = \|x - y\|$, $\|.\|$ la norma euclídea,

$$||x|| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}.$$

$||.||$ es un norma: $||x|| \geq 0$, $||x|| = 0$ sii $x = 0$, $||tx|| = |t|\,||x||$, $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Ejemplo 1.1 *Probar que* $\big|||x|| - ||y||\big| \leq ||x - y||$.

Así, por ejemplo si $n = 1$,

$$\mathrm{d}(x, y) = |x - y|,$$

si $n = 2$,

$$\mathrm{d}(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

y si $n = 3$,

$$\mathrm{d}(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

d es distancia porque cumple que, para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$,

$\mathrm{d}(x, y) \geq 0$,

$\mathrm{d}(x, y) = 0 \quad \text{sii} \quad x = y$,

$\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$, y

$\mathrm{d}(x, y) \leq \mathrm{d}(x, z) + \mathrm{d}(z, y)$.

Además, esta en especial cumple que, para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{d}(x + z, y + z) = \mathrm{d}(x, y), \quad \text{y} \quad \mathrm{d}(tx, ty) = |t| d(x, y) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dado $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Al conjunto de $\mathbb{R}^n$ dado por

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \mathrm{d}(x, y) < r\}$$

se le llama **bola abierta** de centro x y radio r, y al conjunto de $\mathbb{R}^n$

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \mathrm{d}(x, y) \leq r\}$$

se le llama **bola cerrada** de centro x y radio r. A

$$\overline{S}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \mathrm{d}(x, y) = r\}$$

se le llama esfera de centro x y radio r. Describirla en 2 y 3 dimensiones.

Dados dos vectores $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ definimos el siguiente producto escalar entre ellos:

$$< x, y >= x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

$< .,. >$ es un producto escalar pues

$$
\begin{aligned}
&< x, x > > 0 \ \forall x \neq 0,\\
&< x, y >=< y, x >,\\
&< tx, y >= t < x, y >,\\
&< x + y, z >=< x, z > + < y, z >.
\end{aligned}
$$

Observar que la norma euclídea proviene del dicho producto escalar:

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >}.$$

Se cumple que $| < x, y > |^2 \leq < x, x > < y, y >$ (desigualdad de Cauchy-Schwarz) y se tiene que, si $x \neq 0$ e $y \neq 0$ (aquí 0 es el vector $(0, 0, ..., 0)$),

$$\cos(\text{ang}(x, y)) = \frac{< x, y >}{||x||\,||y||},$$

donde $\text{ang}(x, y)$ es el angulo que forman los vectores x e y

Se dice que los vectores x e y son ortogonales si $< x, y >= 0$. Los vectores de la base canónica lo son. Si dos vectores $x,\ y$ son ortogonales entonces

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 \quad \text{(Teorema de Pitágoras).}$$

1.4. Números complejos

Un número complejo se escribe como $z = x + yi$ donde $x = \Re e z$ se denomina parte real de z e $y = \Im m z$ parte imaginaria. Los números complejos se pueden identificar con los vectores del plano, pero en ellos se define, además de la suma (similar a la de los vectores del plano) un producto, si $z = a + bi$ y $w = c + di$:

$$z + w = (a + c) + (b + d)i,$$

$$z \cdot w = ac - bd + (ad + bc)i,$$

en el que $i \cdot i = i^2 = -1$.

El número $\overline{z} = x - iy$ se llama el complejo conjugado de z.

El valor absoluto, o módulo, de $z = x + iy$ se define como

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}.$$

Todo número complejo $z \neq 0$ se puede escribir en coordenadas polares usando la fórmula de Euler (forma polar)

$$z = |z|(\cos t + i \text{ sen } t) = |z|e^{it},$$

siendo $t \in \mathbb{R}$. Cada uno de los valores t que cumplen la anterior igualdad se dice que es un argumento de z. Dos de estos valores difieren en un múltiplo de 2π, con lo cual sólo hay un valor en el intervalo $] - \pi, \pi]$, que se denomina argumento principal. Multiplicar complejos con la anterior descripción es muy sencillo, si $z = Ae^{it}$ y $w = Be^{is}$ entonces

$$z \cdot w = ABe^{i(t+s)}.$$

En los siguientes problemas se utilizan únicamente las propiedades elementales de las operaciones con números complejos.

Proposición 1.2 *Para $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene que:*

1. $\Re\mathrm{e} z = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $\Im\mathrm{m} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.
2. $|\overline{z}| = |z|$.
3. $|z \cdot w| = |z||w|$.
4. $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, *for* $z \neq 0$.
5. $|\Re\mathrm{e} z| \leq |z|$, $|\Im\mathrm{m} z| \leq |z|$.
6. $|z+w| \leq |z| + |w|$, $||z| - |w|| \leq |z-w|$.

1.4.1. Raíces de números complejos

Si $z \in \mathbb{C}$, con $z \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces existen exactamente n números complejos diferentes z_0, z_1, ... ,z_{n-1} tales que $z_k^n = z$ para $k = 0, \dots, n-1$.

Escribiendo $z = |z|(\cos t + i \text{ sen } t\ ) = |z|e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi[$, las raíces vienen dadas por las fórmulas

$$z_k = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{t+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{t+2k\pi}{n} + i \text{ sen } \frac{t+2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Por tanto, dado $z \neq 0$, la expresión $\sqrt[n]{z}$ designa un conjunto de n elementos, conjunto que descrito en el plano forma un polígono regular de k lados.

Ejemplo 1.3 *Vamos a calcular las raíces cúbicas de* 1.

Por ser $1 = \cos 0 + i \text{ sen } 0$, *se sigue de la fórmula anterior que las raíces cúbicas son* $z_0 = \cos 0 + i \text{ sen } 0 = 1$, $z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i \text{ sen } \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ *y* $z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i \text{ sen } \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ejemplo 1.4 *Calcular las siguientes expresiones.*

(i) $\sqrt[3]{2+2i}$.

(ii) $\sqrt[4]{i}$.

(iii) $\sqrt[4]{\sqrt{3}+3i}$.

(iv) $\sqrt[3]{-1}$.

Ejemplo 1.5 *Probar que las raíces n-ésimas de la unidad distintas de* 1 *satisfacen la ecuación*

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = 0.$$

Matemáticas I para G. Químicas

Tema 2

Cálculo Diferencial

2.1. Gráficas

Dada una función U en V,

$$f : U \to V,$$

al conjunto U se le denomina dominio de f, al conjunto $f(U) = \{v \in V : v = f(u),\ u \in U\}$ se le denomina rango o imagen de f, y al subconjunto de $U \times V$,

$$G(f) = \{(u, v) \in U \times V : u \in U,\ v = f(u)\}.$$

se le denomina **gráfica** de f, y esta caracteriza a la función f.

Nosotros nos ocuparemos, en general, de funciones definidas sobre conjuntos de $\mathbf{R}$ (la recta real), de $\mathbf{R}^2$ (el plano), de $\mathbf{R}^3$ (el espacio), o del espacio-tiempo, $\mathbf{R}^3 \times [0, +\infty[$, y con imagen en $\mathbf{R}$; en estos casos hablaremos de funciones (reales) de una, dos o tres variables (reales).

Ejemplo 2.1 *$f(x) = x^2$, está definida para todo $x \in \mathbf{R}$, luego es una función con dominio todo $\mathbf{R}$. Su rango es $[0, +\infty[$ y su gráfica es una parábola.*

Ejemplo 2.2 *$f(x) = \sqrt{x + 1}$, está definida para todo $x \in [-1, +\infty[$, por tanto es una función con dominio $[-1, +\infty[$. Su rango es $[0, +\infty[$, ¿cuál es su gráfica?.*

Ejemplo 2.3 *Para la función $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$, como no nos dicen nada sobre el dominio a tener en cuenta, éste es el conjunto más amplio donde $f(x, y)$ tiene sentido, en este caso,*

$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 25 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 5^2\},$$

es decir, como $\sqrt{x^2+y^2}$ es la distancia euclídea de (x,y) al origen, la región encerrada por la circunferencia de centro el origen y radio cinco.

Su rango es $R(f)=\{z\in\mathbf{R} : 0\le z\le 5\}$, mientras que la gráfica viene dada por

$$G(f)=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : (x,y)\in D,\ z=f(x,y)\}=$$
$$=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2=25,\ z\ge 0\},$$

que son los puntos de la esfera de radio 5 que están situados en el semiplano superior $z\ge 0$.

2.1.1. Conjuntos de nivel

En general no es fácil dibujar la gráfica de una función de dos variables y es por ello útil usar para su visualización los llamados conjuntos de nivel de f o curvas de nivel[1]. Estos conjuntos están formados por los puntos (x,y) del plano tales que $f(x,y)=c$, para el nivel $c\in\mathbf{R}$. En el ejemplo anterior, las curvas de nivel son las circunferencias determinadas por las ecuaciones $x^2+y^2=25-c^2$ para $0\le c\le 5$ y el conjunto vacío para el resto de valores de c.

Ejemplo 2.4 *Supongamos que la temperatura en cada punto (x,y) de una región del plano es $T(x,y)=100-x^2-y^2$ grados Celsius. Describir las curvas de nivel de T, que en este caso se denominan curvas isotermas.*

EJERCICIO 2.4 *Determinar el dominio, rango y trazar las curvas de nivel de las funciones:*

(1) $f(x,y)=x+y$. *(2)* $f(x,y)=x^2+4y^2$. *(3)* $f(x,y)=x^2-y^2$.

(4) $f(x,y)=xy$. *(5)* $f(x,y)=\sqrt{9-3x^2-y^2}$. *(6)* $f(x,y)=\sqrt{x+y}$.

(7) $f(x,y)=\ln(x^2-y^2)$. *(8)* $f(x,y)=\sqrt{y\sin x}$.

2.2. Derivación de funciones

Sea $]a,b[\subset\mathbb{R}$ un intervalo, sea $x\in]a,b[$, y sea $f:]a,b[\to\mathbb{R}$. Para h pequeño, de manera que $x+h$ quede en $]a,b[$, la cantidad (que pensamos dependiendo de h)

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

expresa la pendiente del segmento (o de la recta) que une $(x,f(x))$ y $(x+h,f(x+h))$; si dicha cantidad *se acerca* a un único número, que denotaremos $f'(x)$, cuando h *se acerca* a 0,

[1] Para funciones de tres variables, se definen de manera similar y se denominan superficies de nivel.

$$\text{“dado } \epsilon > 0,\ \exists\delta > 0 :\ 0 < |h| < \delta \to |\tfrac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)| < \epsilon\text{”}$$

esto se suele representar como

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \to f'(x) \quad \text{cuando } h \to 0,$$

o bien

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x),$$

se define dicha cantidad como la pendiente de la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$. La recta

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

que pasa por $(x_0, f(x_0))$ con pendiente $f'(x_0)$ se denomina recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$.

La derivada de una función representa la variación *instantánea* de la misma respecto de su variable. Así por ejemplo, si dicha función representa una distancia en función del tiempo, su derivada representa la velocidad instantánea; $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ representa la velocidad media entre los tiempos x y $x+h$.

Se dice que f es derivable en x si existe dicha pendiente $f'(x)$, y a dicha cantidad se le llama derivada de f en x.

Diremos que f es derivable en todo $]a, b[$ si es derivable en todo punto $x \in]a, b[$.

Observar que si $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ es derivable en $x \in]a, b[$ entonces $f(y)$ se acerca a $f(x)$ cuando y lo hace a x,

$$f(y) - f(x) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \cdot (y - x) \to f'(x) \cdot 0 = 0,$$

esto se conoce como continuidad de f en x.

Ejemplo 2.5 *$f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$, aunque notemos que es continua en $x = 0$.*

En efecto,

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{|h|}{h},$$

luego si $h > 0$,

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = 1,$$

que obviamente se acerca a 1, pero si $h < 0$,

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = -1,$$

que se acerca a -1, y por tanto
$$\frac{f(h)-f(0)}{h}$$
no se acerca a ningún número que podamos definir como $f'(0)$ cuando h se acerca a 0.

Sin embargo,
$$f(x)-f(0)=|x|\to 0 \quad \text{si } x\to 0.$$

Ejemplo 2.6

Si $f(x)=c$ (c una constante) entonces $f'(x)=0$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{c-c}{h}=0\to 0 \quad \textit{cuando } h\to 0.$$

Si $f(x)=x$ entonces $f'(x)=1$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{x+h-x}{h}=1\to 1 \quad \textit{cuando } h\to 0.$$

Si $f(x)=x^2$ entonces $f'(x)=2x$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=2x+h\to 2x \quad \textit{cuando } h\to 0.$$

En general, si $f(x)=x^n$ (n un número real distinto de cero, no sólo natural) entonces $f'(x)=nx^{n-1}$.

Si $f(x)=\ln x$ entonces $f'(x)=1/x$.

Si $f(x)=\sin x$ entonces $f'(x)=\cos x$.

Si $f(x)=\cos x$ entonces $f'(x)=-\sin x$.

Álgebra de Derivadas

Sean $f,g:]a,b[\to\mathbb{R}$ y $x\in]a,b[$. Supongamos que f y g son derivables en x. Entonces

1. $f+g$ es derivable en x y $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$,

2. fg es derivable en x y $(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$,

3. si $g(x)\neq 0$ (con lo que existe un entorno de x donde existe $\frac{f}{g}$) entonces $\frac{f}{g}$ es derivable en x y
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Ejemplo 2.7 *Si* $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ *es constante en* $]a,b[$*, entonces* f *es derivable en* $]a,b[$ *y* $f'(x) = 0$ *para todo* $x \in]a,b[$.

Ejemplo 2.8 *Sabemos que si* $f(x) = x$ *entonces* $f'(x) = 1$*. Ver, usando el teorema anterior, que si* $f(x) = x^2$ *entonces* $f'(x) = 2x$.

Ejemplo 2.9 *Probar que la derivada de* $\tan(x)$ *es* $1 + \tan^2(x)$ *(es decir* $\frac{1}{\cos^2(x)}$*).*

Regla de la Cadena

Sea $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ y sea $g :]c,d[\to \mathbb{R}$, con $f(]a,b[) \subset]c,d[$. Supongamos que f es derivable en $x \in]a,b[$ y que g es derivable en $f(x)$. Entonces $g \circ f$ es derivable en x y

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Es decir, si $h(x) = g(f(x))$, con f y g derivables, entonces

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Ejemplo 2.10

1. Sea $f(x) = \ln x$*, sabemos que* $f'(x) = 1/x$*. Su inversa es la función* $g(x) = e^x$*, esto es*

$$\ln(g(x)) = x.$$

Sabiendo que g *es derivable y derivando en dicha expresión, aplicando la regla de la cadena,*

$$\frac{1}{g(x)} g'(x) = 1,$$

con lo que

$$g'(x) = g(x) = e^x.$$

2. Sea ahora $f(x) = \arcsin x$ *definida sobre* $]-\pi/2, \pi/2[$*, que es la inversa de* $\sin(x)$*, entonces*

$$\sin(f(x)) = x.$$

Sabiendo que f *es derivable y derivando,*

$$\cos(f(x))f'(x) = 1,$$

es decir,

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Ahora, como $\sin(\arcsin(x)) = x$ *entonces* $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$*, y por tanto*

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Ejemplo 2.11 *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, y sea $f(x) = x^{\alpha}$ definida en $]0, +\infty[$. Sabiendo que f es derivable, ver que*

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

EJERCICIO 2.5 *Hallar la derivada de las funciones:*

1. $f(x) = \sin(x^2)$.
2. $f(x) = (x + \tan(x))^5$.
3. $f(x) = x^3 \cos^3(x^3)$.
4. $f(x) = e^{2x^2}$.
5. $f(x) = \ln(x + \ln(x))$.
6. $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.
7. $f(x) = x^x$.
8. $f(x) = 2^x$.
9. $f(x) = \arcsin(x^2)$.
10. $f(x) = \sqrt{\arctan(x)}$.

Ejemplo 2.12 *Si una función $f(x)$ es derivable, con derivada $f'(x)$, y esta a su vez es derivable, se denota su derivada como $f''(x)$ y se denomina derivada segunda de f (en general se podría definir así la derivada $n-$ésima de f, que denotaríamos $f^{n)}(x)$). Calcular las derivadas primera, segunda y tercera de*

1. $f(x) = \ln(kx)$, *donde k es una constante.*
2. $f(x) = \sin(kx)$.
3. $f(x) = (3x^2 - 4)e^x$. *(Seria útil utilizar la fórmula de Leibnitz $(f(x)g(x))^{n)} = \sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} f^{i)}(x) g^{n-i)}(x)$)*
4. $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x-1)}$. *(Descomponer en suma de fracciones)*
5. $f(x) = \sin(4x)\cos(2x)$. *(Expresar como suma)*

EJERCICIO 2.6 *Dadas las funciones hiperbólicas*

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \textit{seno hiperbólico},$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \textit{coseno hiperbólico}.$$

Probar que

1. $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

2. $(\sinh(x))' = \cosh(x),\ (\cosh(x))' = \sinh(x)$.

3. *Hallar las derivadas de sus funciones inversas,* $\operatorname{argsinh}(x)$ *y* $\operatorname{argcosh}(x)$ *(*$\cosh$ *definido en* $[0, +\infty[$*).*

2.3. Polinomio de Taylor

En el desarrollo del cálculo, la aproximación de funciones arbitrarias por polinomios ha sido siempre una tarea destacable, ya que éstos son fácilmente computables. Una de estas aproximaciones que se estudia en el cálculo básico es mediante los polinomios de Taylor. Más concretamente, para una función de una variable real f suficientemente suave cerca de x_0, por ejemplo $q+1$ veces derivable con derivadas continuas, se tiene que, para x cercano a x_0:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x - x_0)^3$$
$$+ ... + \frac{1}{q!}f^{(q)}(x_0)(x - x_0)^q + R_q(x_0, x)$$

siendo $R_q(x_0, x)$ el denominado *resto*, que determina el error, y que se puede establecer de diferentes maneras. Una de las más utilizadas es el *resto de Lagrange* en la que

$$R_q(x_0, x) = \frac{1}{(q+1)!}f^{(q+1)}(\xi)(x - x_0)^{q+1},$$

para cierto ξ entre x_0 y x.

El polinomio en x,

$$P_{q,x_0}(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x - x_0)^3$$
$$+ ... + \frac{1}{q!}f^{(q)}(x_0)(x - x_0)^q,$$

que resulta como aproximación de f se denomina *Polinomio de Taylor de orden* q de f alrededor de x_0. Se tiene que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_{q,x_0}(x)}{|x - x_0|^q} = 0,$$

situación que caracteriza a dicho polinomio entre todos los de grado q.

En particular, si f tiene derivadas parciales de segundo orden continuas,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x - x_0) + R_2$$

con

$$R_2 = \frac{1}{2!} f''(\xi)(x - x_0)^2$$

para cierto ξ entre x_0 y x. Esta expresión es especialmente útil en el estudio de máximos y mínimos relativos de f.

EJERCICIO 2.7 *Comprobar la siguiente igualdad:*

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + R_n(x), \text{ donde } R_n(x)\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}.$$

Observar que $\lim_{x\to 0} R_n(x) = 0$.

EJERCICIO 2.8 *Hallar el desarrollo de Maclaurin de orden n (es decir, el polinomio de Taylor alrededor de $x = 0$) de las siguientes funciones:*

1. $f(x) = e^x$.
2. $f(x) = \sin x$.
3. $f(x) = \cos x$.
4. $f(x) = \ln x$.

EJERCICIO 2.9 *Calcular los tres primeros términos no nulos del desarrollo de Maclaurin de $f(x) = \cos^2(x)$. Estimar el error cometido al usar sólo esos tres términos para evaluar $\cos^2\left(\frac{1}{10}\right)$.*

EJERCICIO 2.10 *Probar que si se aproxima e^x por $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$, el error cometido para $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ no será mayor que 10^{-2}.*

2.4. Diferenciabilidad

2.4.1. Derivadas parciales

Sea $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Se llaman derivadas parciales primeras en el punto[2] (a, b) a

$$D_1 f(a,b) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t,b) - f(a,b)}{t}, \qquad D_2 f(a,b) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a,b+t) - f(a,b)}{t}.$$

[2]Basta que este punto esté en el interior del dominio de f si este no es todo el espacio.

Recordando que la derivada de una función de una variable $f(x)$ en el punto a es

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+t)-f(a)}{t},$$

se tiene que **calcular $D_1 f(a,b)$, para una función de dos variables, es como derivar respecto de la variable x dejando la variable y fija**, y similarmente para $D_2 f(a,b)$. Se suele también denotar

$$D_1 f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \quad D_2 f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).$$

Ejemplo 2.13 *Si* $f(x,y) = x^3 y + xy^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 y + y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 + 2xy,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 0, \ \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 1, \ \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 3.$$

De forma similar se definirían tres derivadas parciales primeras si f fuese una función de tres variables y, en general, n derivadas parciales si lo fuese de n variables.

Derivadas direccionales

Sea $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, se llama derivada direccional de f en la dirección $(v_1, v_2) \neq (0,0)$, en el punto (a,b) a

$$\begin{aligned} D_{(v_1,v_2)} f(a,b) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv_1, b+tv_2) - f(a,b)}{t} = \frac{d}{dt}_{|t=0} f(a+tv_1, b+tv_2) \\ &= ||(v_1,v_2)|| D_{\frac{(v_1,v_2)}{||(v_1,v_2)||}} f(a,b). \end{aligned}$$

Notar que $D_1 f(a,b) = D_{(1,0)} f(a,b)$ y $D_2 f(a,b) = D_{(0,1)} f(a,b)$.

Geométricamente, la derivada direccional nos da la pendiente de la tangente en el punto $(a,b,f(a,b))$ a la curva que sobre la gráfica de f se obtiene al caminar en la dirección y sentido de (v_1, v_2).

Vector gradiente

Se llama gradiente de una función real $f(x,y)$ en un punto (a,b) al vector cuyas componentes son las derivadas parciales en ese punto, siempre que estas existan. Se denota por

$$\nabla f(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \right).$$

Ejemplo 2.14 *Calculemos las derivadas direccionales de* $f(x, y) = x^2 + y$*.*

Ejemplo 2.15 *Calculemos las derivadas parciales en* (a, b) *de las función* $f(x, y) = 5x^2 + 3xy - 4y^3$.

Ejemplo 2.16 *Calculemos el gradiente de* $f(x, y) = x^2 \sin(3x + y^3)$*.*

Ejemplo 2.17 *Calculemos las derivadas parciales de* $f(x, y, z) = x^2 + 2xy^2 + yz^3$*.*

EJERCICIO 2.12 *Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:*

i) $f(x, y) = e^{xy}$

ii) $f(x, y) = (x^2 + y^2)\log(x^2 + y^2)$

iii) $f(u, v, w) = \log(u^2 + vw - v^2)$

iv) $f(\rho, \theta) = \rho^3 cos\theta$

v) $f(r, s, t) = sen(s + tcos\, r)$*.*

EJERCICIO 2.13 *Calcular el vector gradiente de las siguientes funciones en el punto que se indica:*

i) $f(x, y, z) = 2x\log y - z^2y^2$ *en* $(1, 1, 0)$.

ii) $f(x, y, z) = \dfrac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ *en* $(1, -1, 1)$.

iii) $f(x, y) = x^2 + \log\sqrt{xy}$ *en* $(2, 1)$.

iv) $f(u, v) = \log\dfrac{1}{uv}$ *en* $(5, \sqrt{2})$.

v) $f(s, t) = \log(s^2 + 2t + 1) + \operatorname{sen}(s + t)$ *en* $(0, 0)$.

2.4.2. Diferenciabilidad

Se dice que f es diferenciable en (a, b) si existen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b),$$

es decir, existe el $\nabla f(a, b)$, y

$$\frac{f(a + h, b + k) - f(a, b) - \nabla f(a, b) \cdot (h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \to 0, \quad \text{cuando } (h, k) \to (0, 0).$$

Cuando f es diferenciable en (a,b), el plano

$$z = f(a,b) + \nabla f(a,b) \cdot (x-a, y-b)$$

representa el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(a,b,f(a,b))$.

Es importante destacar las siguientes propiedades:

(i) Al igual que para funciones de una variable, si f es diferenciable en el punto (a,b), es continua en él, esto es, $f(x,y)$ se acerca a $f(a,b)$ cuando (x,y) se acerca a (a,b).

(ii) **Si f es diferenciable en (a,b), para todo $(v_1,v_2) \neq (0,0)$, se tiene que**

$$D_{(v_1,v_2)} f(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot (v_1, v_2).$$

Geométricamente, esto expresa que $\nabla f(a,b)$ ($-\nabla f(a,b)$), cuando no es nulo, es la dirección en que f crece (o decrece) más rápidamente. Observar que $D_v f(x) = -D_{-v} f(x)$.

(iii) Si las derivadas parciales de f son continuas en (a,b) entonces f es diferenciable en dicho punto. Cuando ocurre esto en todo punto se dice que la función f es de clase C^1.

Matriz Jacobiana

Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable, es decir, con cada una de sus componentes diferenciable, llamaremos matriz jacobiana de f en el punto x a

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x) \\ \nabla f_2(x) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x) \end{pmatrix}.$$

A la aplicación (lineal) $df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,

$$df(x) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} := f'(x) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix},$$

se le llama diferencial de f en x.

Plano tangente

Hemos dicho que si tenemos la superficie, gráfica de f, $f \in C^1$,

$$z = f(x,y),$$

el plano tangente en el punto (x_0, y_0, z_0), $z_0 = f(x_0, y_0)$ está dado por

$$z = z_0 + \nabla f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0).$$

Si una superficie viene descrita por la ecuación implícita[3]

$$F(x, y, z) = 0,$$

F de clase C^1, $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, el plano tangente a dicha superficie en el punto (x_0, y_0, z_0) viene dado por

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

La recta normal a la superficie en dicho punto viene dada paramétricamente por

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t\nabla F(x_0, y_0, z_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 2.18 *Hallar el plano tangente a las gráficas de las funciones siguientes,*

$f(x, y) = x + y$ *en el punto* $(1, 2, 3)$,

$g(x, y) = 2xy^2 + x^2y$ *en el punto* $(1, -1, 1)$,

$h(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2y + 3xy^2$ *en el punto* $(1, 1, 2)$.

EJERCICIO 2.14 *La temperatura de cada uno de los puntos de una placa cuadrada viene determinada por la función* $T(x, y) = (x - 1)^3(y - 2)^2$. *Calcular cuáles son, en el punto (0,0), las direcciones de mayor crecimiento y decrecimiento de la temperatura.*

EJERCICIO 2.15 *Denotemos por* $z = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ *la altura de una montaña en la posición* (x, y). *Veamos en qué dirección desde* $(1, 0)$ *deberíamos comenzar a caminar para escalar lo más rápido posible.*

EJERCICIO 2.16 *Supongamos que una montaña tiene forma de paraboloide elíptico* $z = 1 - x^2 - 2y^2$, *donde* x, y *son las coordenadas este-oeste y* z *es la altitud sobre el nivel del mar. Si se suelta una canica en el punto* $(1, 1, -2)$ *¿en qué direción comenzará a rodar?.*

EJERCICIO 2.17 *Un insecto se halla en un medio ambiente tóxico. El nivel de toxicidad está dado por* $T(x, y) = 2x^2 - 4y^2$. *Si el insecto está en la posición (1,2), veamos en qué dirección deberá moverse para disminuir lo más rápido posible la toxicidad.*

[3] Sea A un abierto de $\mathbf{R}^N$ y $F : A \to \mathbb{R}$ de clase C^1,

$$M := \{x \in A : F(x) = 0\}, \quad \nabla F(x) \neq 0 \ \forall x \in M,$$

se dice una $(n-1)$-variedad definida por F.

EJERCICIO 2.18 *Un insecto se halla en un medio ambiente tóxico. El nivel de toxicidad está dado por* $T(x,y,z) = 2x^2 - 4y^2 + \frac{1}{1+z^2}$. *Si el insecto está en la posición (1,1,-2), veamos en qué dirección deberá moverse para disminuir lo más rápido posible la toxicidad.*

Ejemplo 2.19 *Razonar si la derivada direccional de la función*

$$f(x,y,z) = e^{x+yz} + cosx\; sinz$$

en el punto $(1,-1,1)$ *en la dirección* $(-1,2,1)$ *es igual a* 1.

EJERCICIO 2.19 *Hallar el plano tangente y la recta normal a la superficies:*

(1) $z = 2xy^2 + x^2y$ *en el punto* $(1,-1,1)$.

(2) $z^2 - 2x^2 - 2y^2 = 12$ *en* $(1,-1,4)$.

(3) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *en* $(0,0,1)$.

(4) $y = x(2z-1)$ *en* $(4,4,1)$.

(5) $xyz = 12$ *en* $(2,-2,-3)$.

(6) $xy - z = 0$ *en* $(-2,-3,6)$.

EJERCICIO 2.20 *Hallar todos los puntos de la superficie* $z = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$ *en los que el plano tangente es horizontal.*

EJERCICIO 2.22 *Calcular la matriz jacobiana de la función definida por*

$$f(x,y) = (2x + 3y^2, 4xy)$$

en el punto $(1,1)$.

2.5. Fórmula de Taylor II

Al igual que para funciones de una variable, para funciones de dos variables suficientemente suaves, se tiene la siguiente aproximación por polinomios de Taylor:

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}[D_1f(x_0,y_0)h + D_2f(x_0,y_0)k] +$$

$$+\frac{1}{2!}[D_{11}f(x_0,y_0)h^2 + D_{12}f(x_0,y_0)hk + D_{21}f(x_0,y_0)hk + D_{22}f(x_0,y_0)k^2] +$$

$$+\frac{1}{3!}[D_{111}f(x_0,y_0)h^3 + D_{112}f(x_0,y_0)h^2k + D_{121}f(x_0,y_0)h^2k + D_{211}f(x_0,y_0)h^2k +$$

$$+D_{122}f(x_0,y_0)hk^2 + D_{212}f(x_0,y_0)hk^2 + D_{221}f(x_0,y_0)hk^2 + D_{222}f(x_0,y_0)k^3] +$$

$+\cdots+\ R_q,$

donde $D_{11}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $D_{12}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}$, $D_{112}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial^3}{\partial y\partial x^2}$,... , y además, dado que f es suave, se tiene que

$$D_{12}=D_{21},\ D_{112}=D_{121}=D_{211},\ ...$$

EJERCICIO 2.21 *(i) Si* $f(x,y)=e^x\cos y$*, calcular* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$*.*

(ii) Si $f(x,y)=3x^2+5xy-5y^2$*, calcular* $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,2)$*.*

(iii) Si $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)-\cos(x^2-y^2)$*, calcular* $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}(0,0)$*.*

En particular, si f tiene derivadas parciales de segundo orden continuas,

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{1!}[D_1f(x_0,y_0)h+D_2f(x_0,y_0)k]+R_2$$

con

$$R_2=\frac{1}{2!}[D_{11}f(x,y)h^2+2D_{12}f(x,y)hk+D_{22}f(x,y)k^2]$$

para cierto (x,y) entre (x_0,y_0) y (x_0+h,y_0+k). Es decir, para cierto (x,y) entre (x_0,y_0) y (x_0+h,y_0+k),

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+D_1f(x_0,y_0)h+D_2f(x_0,y_0)k+$$
$$+\frac{1}{2}(h,k)H_f(x,y)\begin{pmatrix} h\\ k\end{pmatrix},$$

donde $H_f(x,y)$ se conoce como matriz hessiana de f en (x,y),

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix} D_{11}f(x,y) & D_{12}f(x,y)\\ D_{21}f(x,y) & D_{22}f(x,y)\end{pmatrix}.$$

Esta expresión es especialmente útil en el estudio de máximos y mínimos relativos de f.

Ejemplo 2.20 *Hallemos el polinomio de Taylor de orden* 1 *en el origen de la función* $f(x,y)=e^x\sin(x+y)$*.*

Ejemplo 2.21 *Hallemos el polinomio de Taylor de orden* 2 *en el origen de la función* $f(x,y)=e^{x+y}$*.*

2.6. Regla de la cadena y derivación implícita

2.6.1. Regla de la cadena

Al igual que para el caso de funciones reales de variable real, es muy útil tener una fórmula para el cálculo de la diferencial de la composición de funciones. Es esta la conocida como *regla de la cadena* o *Teorema de la función compuesta*. Esta regla nos permitirá saber cuando reescribimos una función $f(x,y)$ en unas nuevas coordenadas, por ejemplo en coordenadas polares, $\hat{f}(\rho,\theta)$, qué relación hay entre las derivadas parciales de f respecto de x e y y las de $\hat{f}$ respecto de ρ y θ.

Sea $f(x,y)$ diferenciable y supongamos que $x = x(t)$ e $y = y(t)$ son funciones derivables en t. Entonces la aplicación $z(t) = f(x(t), y(t))$ es derivable en t y

$$z'(t) = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Ejemplo 2.22 *Supongamos que* $u(x,t)$ *satisface la ecuación* $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ *y que* x*, como función* $x = f(t)$*, satisface* $\frac{dx}{dt} = u(x,t)$*. Probar que* $u(f(t),t)$ *es constante en* t*.*

Si lo que tenemos es $x = x(u,v)$ (temperatura en el punto de coordenadas horizontal u y vertical v) $y = y(u,v)$ (humedad) diferenciables a su vez, entonces (la sensación de calor) $z(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$ es diferenciable en (u,v) y

$$(*) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \end{aligned}$$

En general tenemos que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ son diferenciables, entonces $g \circ f$ también lo es y su matriz jacobiana se puede calcular como sigue:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Cambio de coordenadas. Toda función $f(x,y)$ puede venir descrita en coordenadas polares. Recordando que para todo $(x,y) \in \mathbf{R^2} \setminus \{(x,0) : x \geq 0\}$, existen $\rho > 0$ y $\theta \in]0, 2\pi]$ únicos tales que

$$(x,y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta),$$

se tiene que

$$f(x,y) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \hat{f}(\rho,\theta).$$

Ejemplo 2.23 *Vamos a transformar la expresión* $x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x}$ *mediante el cambio a coordenadas polares* $x = \rho\cos\ \theta$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\ \theta$.

Denotemos $\hat{z}(\rho, \theta) = z(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Despejando en $(*)$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \frac{\partial \hat{z}}{\partial \rho} & \mathrm{sen}\,\theta \\ \frac{\partial \hat{z}}{\partial \theta} & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho}(\rho\cos\ \theta\ \frac{\partial \hat{z}}{\partial \rho} - \mathrm{sen}\ \theta\ \frac{\partial \hat{z}}{\partial \theta}).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \cos\ \theta & \frac{\partial \hat{z}}{\partial \rho} \\ -\rho\,\mathrm{sen}\ \theta & \frac{\partial \hat{z}}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho}(\cos\ \theta\ \frac{\partial \hat{z}}{\partial \theta} + \rho\,\mathrm{sen}\ \theta\ \frac{\partial \hat{z}}{\partial \rho}).$$

Por tanto,

$$x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = \rho\cos\ \theta\frac{1}{\rho}(\cos\ \theta\ \frac{\partial \hat{z}}{\partial \theta} + \rho\,\mathrm{sen}\ \theta\ \frac{\partial \hat{z}}{\partial \rho}) - \rho\,\mathrm{sen}\ \theta\frac{1}{\rho}(\rho\cos\ \theta\ \frac{\partial \hat{z}}{\partial \rho} - \mathrm{sen}\ \theta\ \frac{\partial \hat{z}}{\partial \theta}) = \frac{\partial \hat{z}}{\partial \theta}.$$

Así, si buscamos $z(x, y)$ tal que $x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = 0$; estamos buscando $\hat{z}(\rho, \theta)$ tal que $\frac{\partial \hat{z}}{\partial \theta} = 0$, de donde $\hat{z}(\rho, \theta) = f(\rho)$, y por tanto $z(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2}) = g(x^2 + y^2)$.

Ejemplo 2.24 *Sean* $f(u, v) = (u + v, u, v^2)$ *y* $g(x, y) = (x^2 + 1, y^2)$. *Calcular la matriz jacobiana de* fog *en el punto* $(1, 1)$.

Ejemplo 2.25 *Sean* $f(x, y) = (e^{x+y}, x - y, x^2)$ *y* $g(u, v, w) = (uw, sen(v + w))$. *Calcular la matriz jacobiana de la función* $g \circ f$ *en el punto* $(0, 0)$.

EJERCICIO 2.26 *La temperatura en un punto* (x, y, z) *viene dada por una función diferenciable* $T(x, y, z)$. *Una partícula viaja por la hélice* $\sigma(t) = (cost, sent, t)$ *y denotamos por* $f(t)$ *la temperatura de la partícula en el instante* t. *Calcular* $f'(\frac{\pi}{2})$ *sabiendo que* $\nabla T(0, 1, \frac{\pi}{2}) = (2, 1, 3)$.

EJERCICIO 2.27 *Calcular las derivadas parciales de* $h(x, y) = f(x\,\mathrm{sen}\,y, x, e^y)$ *en el punto* $(1, 0)$ *sabiendo que* $\nabla f(x, y, z) = (2x + y, x + z, y)$.

EJERCICIO 2.28 *Sabemos que* $F(x, y, z)$ *y* $g(x, y)$ *son dos funciones de clase* C^1 *que cumplen que* $F(x, y, g(x, y)) = 0$ *en todos los puntos* (x, y) *del plano. Calcular el vector gradiente de* g *en el punto* $(1, 0)$ *suponiendo conocido que* $g(1, 0) = 0$ *y* $\nabla F(1, 0, 0) = (-1, 1, 2)$.

EJERCICIO 2.29 *Sean* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *y* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *funciones con derivadas parciales continuas de forma que*

$$f(x, y, g(x, y)) = x + \cos(y).$$

Si $g(0, 0) = 1$ *y* $\nabla f(0, 0, 1) = (1, 1, 2)$, *calcular* $\nabla g(0, 0)$.

Ejemplo 2.26 *Sea $f(u,v,w)$ una función diferenciable que toma valores en $\mathbb{R}$ y cuya primera variable toma valores de temperatura, la segunda de humedad y la tercera de cantidad de nutrientes.*

En los puntos (x,y) de una placa se tiene que la temperatura es

$$T(x,y) = 30e^{x^2+y^2},$$

la humedad es una función diferenciable $H(x,y)$ tal que

$$\nabla H(x,y) = (1+x, 1-y)$$

y la cantidad de nutrientes es una función diferenciable $C(x,y)$.

Sabiendo que

$$H(0,0) = 100, \ C(0,0) = 50,$$
$$\nabla C(0,0) = (1,-1)$$

y

$$D_2 f(30,100,50) = D_3 f(30,100,50) = 1,$$

calcular la dirección de mayor crecimiento en el punto $(0,0)$ de la función

$$f\big(T(x,y), H(x,y), C(x,y)\big).$$

Ejemplo 2.27 *Sean f y g diferenciables. Suponemos $f\left(\frac{y}{x}, \frac{g(x,y)}{x}\right) = 0$ para cualquier valor de x e y. Si $D_2 f(x,y) \neq 0$ en todos los puntos, se pide probar que $xD_1 g(x,y) + yD_2 g(x,y) = g(x,y)$.*

Ejemplo 2.28 *Calcular $\frac{\partial u}{\partial s}$ y $\frac{\partial u}{\partial t}$ siendo $u = x^2 - xy$, $x = s\cos t$, $y = t \operatorname{sen} s$.*

EJERCICIO 2.30 *Resolver $x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ mediante un cambio a coordenadas polares.*

2.6.2. Derivación implícita

En algunas ocasiones tendremos que nuestras funciones vendrán descritas por medio de ecuaciones en las que será difícil despejarlas en función de sus variables (es decir, las tendremos descritas de manera implícita).

Así por ejemplo, si $f(x)$ viene descrita por

$$\log f(x) + f(x) = x + 1$$

con $f(0) = 1$, es "difícil" expresar f en función de x explícitamente. No obstante si necesitamos conocer el valor de $f'(0)$ (suponemos/no probamos que f es derivable) podemos actuar de la siguiente manera. Derivando en la ecuación anterior tenemos que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + f'(x) = 1,$$

entonces, sustituyendo en $x = 0$ el valor conocido de $f(0) = 1$, se tiene que

$$f'(0) = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 2.29 *Si el sistema*

$$\begin{cases} \cos u + \sin v = 2xy + u \\ \\ xv + u \tan x = v \end{cases}$$

define a x e y como funciones de u y v diferenciables tales que $x(0,\pi) = 1$ e $y(0,\pi) = 1/2$, calcular $\frac{\partial x}{\partial u}$ y $\frac{\partial y}{\partial u}$ en $(0,\pi)$.

Ejemplo 2.30 *Dadas las expresiones que definen u y v como funciones de x e y diferenciables,*

$$\begin{cases} x \sin u + \ln v = y \\ \\ y \cos v - \ln u = x, \end{cases}$$

con $u(0,0) = 1$ y $v(0,0) = 1$, calcular $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$ en $(0,0)$.

EJERCICIO 2.31 *Si $x = x(t)$ es una función derivable calcular $x(0)$ y $x'(0)$ si*

$$\cos(xt) = xt + x.$$

EJERCICIO 2.32 *Si en la ecuación $xy = \log \dfrac{x}{y}$ se puede despejar $y = \varphi(x)$, siendo φ una función de de clase C^∞ definida en un entorno de $x_0 = \sqrt{e}$ tal que $\varphi(x_0) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$, comprobar que*

$$\varphi'(x_0) = 0 \quad \text{y que} \quad \varphi''(x_0) < 0$$

(es decir, que φ tiene un máximo local en x_0).

EJERCICIO 2.33 *Supongamos que el sistema:*

$$\begin{cases} x \cos y + y \cos z + z \cos x = \pi \\ x^2 + y^2 - xy = \pi^2 \end{cases}$$

define implícitamente a y y z como funciones de x, $z = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, ambas de clase C^∞ y definidas en un entorno de 0, tales que $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = \pi$. Calcular $f_1'(0)$ y $f_2'(0)$.

Matemáticas I para G. Químicas

Tema 3

Integración

3.1. Cálculo de primitivas

Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, hemos visto cómo calcular $f'(x)$. Vamos ahora a realizar lo contrario, es decir, dada f encontrar F tal que $F'(x) = f(x)$; si existe una tal F se dice que F es una primitiva de f.

Por ejemplo, toda función continua en $[a, b]$ tiene una primitiva.

Observar que si F es una primitiva de f, para toda constante C, $F + C$ también lo es.

Se tiene también (Teorema Fundamental del Cálculo) que si F y G son dos primitivas de una función f en $[a, b]$, entonces ambas se diferencian en una constante.

Obviamente, si F y G son primitivas de f y g respectivamente y α y β son constantes, entonces $\alpha F + \beta G$ es una primitiva de $\alpha f + \beta g$.

Normalmente se denota a una primitiva o a las primitivas de $f(x)$ por

$$\int f \quad \text{ó} \quad \int f(x)dx,$$

que también llamamos integral de f.

Vamos ahora a estudiar el cálculo de primitivas o integrales.

3.1.1. Integrales inmediatas

Se llaman así a aquellas cuya solución sólo requiere recordar las fórmulas elementales de derivación. Así por ejemplo,

$\int 1 = x,$

$\int x = \frac{x^2}{2},$

$\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \forall n \in I\!R \setminus \{-1\}, \quad \int f(x)^n f'(x) = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} \quad \forall n \in I\!R \setminus \{-1\},$

$\int \frac{1}{x} = \ln|x|, \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)|,$

$\int \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x,$

$\int \sin x = -\cos x,$

$\int \cos x = \sin x,$

$\int \frac{1}{\cos^2 x} = \int (1 + \tan^2 x) = \tan x,$

$\int \frac{1}{\sin^2 x} = \int (1 + \text{cotan}^2 x) = -\text{cotan} x,$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x (= -\text{arccos} x + C),$

$\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan x (= -\text{arctan} x + C),$

y también,

$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \text{arcsinh}\, x \quad (\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}),$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \text{arccosh}\, x \quad (\cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}).$

Ejemplo 3.1 $\int \cos(3x) = \frac{1}{3} \int 3\cos(3x) = \frac{1}{3}\sin(3x).$

$\int x^2 \sin(x^3) = -\frac{1}{3} \int -3x^2 \sin(x^3) = \frac{1}{3}\cos(x^3).$

$\int x e^{x^2+1} = \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2+1} = \frac{1}{2} e^{x^2+1}.$

$\int \frac{1}{1-x^2} = \int (\frac{1/2}{1+x} - \frac{1/2}{1-x}) = \frac{1}{2}\log|1+x| - \frac{1}{2}\log|1-x| = \frac{1}{2}\log|\frac{1+x}{1-x}| (= \mathit{arctanh}\, x + C).$

$\int \frac{x}{1-x^2} = -\frac{1}{2} \int \frac{-2x}{1-x^2} = -\frac{1}{2}\ln|1-x^2|.$

$\int \frac{x}{(1-x^2)^{5/2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{-2x}{(1-x^2)^{5/2}} = -\frac{1/2}{-5/2+1}(1-x^2)^{-5/2+1} = \frac{1}{3}\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}.$

$\int \tan x = \int \frac{\sin x}{\cos x} = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} = -\ln|\cos x|.$

$\int \tan^2 x = \int (1 + \tan^2 x - 1) = \tan x - x.$

$\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} dx = \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x - \sqrt{1-x^2}.$

$\int \frac{dt}{\sqrt{1-2t-3t^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \int \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{1-(\frac{3}{2}t+\frac{1}{2})^2}} dt = \frac{\sqrt{3}}{3} \arcsin(\frac{3}{2}t + \frac{1}{2}).$

$\int \frac{1}{x^2+10x+30} = \int \frac{1}{(x+5)^2+5} = \frac{1}{5} \int \frac{1}{(\frac{x+5}{\sqrt{5}})^2+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{1/\sqrt{5}}{(\frac{x+5}{\sqrt{5}})^2+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{x+5}{\sqrt{5}}.$

$\int \frac{x^2-5x+6}{x^2+4} = \int (1 - \frac{5x-2}{x^2+4}) = \int 1 - \frac{5}{2} \int \frac{2x}{x^2+4} + \int \frac{1/2}{(\frac{x}{2})^2+1} = x - \frac{5}{2} \ln |x^2 + 4| + \arctan \frac{x}{2}.$

EJERCICIO 3.1 *Calcular*

$(i) \int (3x^2 - 5)^3 x \, dx \quad (ii) \int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}} \, dx \quad (iii) \int \frac{\sqrt[6]{x} - 3\sqrt[5]{2x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

$(iv) \int \frac{1}{(x-1)^5} dx \quad (v) \int \frac{1}{\sqrt{4-5x^2}} dx \quad (vi) \int \frac{e^x}{1+e^x} dx$

$(vii) \int \tan 3x \, dx \quad (viii) \int \tan^2 x \, dx \quad (ix) \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} dx$

$(ix) \int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \, dx.$

3.1.2. Cambio de variable

En algunos casos, mediante un cambio de variable, transformamos una integral en otra más sencilla. Este método se basa en el siguiente resultado: *Sea $x = g(t)$ una función que admite derivada continua no nula y función inversa. Entonces*[1]

$$\int \mathbf{f(x)\, dx} = \int \mathbf{f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt} \circ g^{-1}(x).$$

Dicha fórmula se deduce fácilmente de la regla de la cadena: si $F'(x) = f(x)$ entonces $(F(g(t)))' = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t)$.

Ejemplo 3.2

- $\int \sqrt{1-x^2} dx =_{[x=\cos t; dx=-\sin t dt]} \int \sqrt{1-\cos^2 t} \sin t dt = -\int \sin^2 t =$
$= \int (\cos^2 t - 1) dt = \int (\frac{1+\cos 2t}{2} + 1) dt = -\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} = -\frac{t}{2} + \frac{\sin t \cos t}{2} = -\frac{1}{2} \arccos x + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}.$

[1]Normalmente se suele escribir, $x = g(t)$, $dx = g'(t)dt$, al hacer el cambio.

- $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx =_{[x=t^4]} \int \frac{t}{1+t^2}4t^3dt = 4\int (t^2-1+\frac{1}{1+t^2})dt = \frac{4}{3}t^3-4t+4\arctan t =$

$= \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - 4\sqrt[4]{x} + 4\arctan\sqrt[4]{x}.$

- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2dx}} =_{[x=\cos t]} -\int \frac{\sin t}{\sin t}dt = -\int dt = -t = -\arccos x$ *(hacerla con el cambio $x=\sin t$).*

- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-3}} = -\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}}\frac{-dx}{x^2} =_{[t=1/x]} -\int \frac{dt}{\sqrt{1-2t-3t^2}}$ *(terminar después con un otro de variable).*

EJERCICIO 3.2 *Calcular, con un cambio de variable,*

$$(i)\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx \quad (ii)\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x-\cos x+1}\,dx \quad (iii)\int \frac{1}{x\log x}dx$$

$$(iv)\int x\sqrt{3+4x}\,dx \quad (v)\int x^3\sqrt{2+7x^2}\,dx \quad (vi)\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$(vii)\int \frac{1}{\sqrt{3+2x^2}}dx \quad (viii)\int \frac{1+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$$

Sugerencia: en (vi) usar el cambio $\frac{1}{x}=u$.

3.1.3. Integración por partes

Algunas integrales pueden resolverse haciendo uso de la fórmula de integración por partes, que asegura que si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables en un abierto en el que existe la primitiva de $f(x)g'(x)$ o de $f'(x)g(x)$, entonces

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx.$$

Observar que esta fórmula se deduce fácilmente del hecho siguiente:

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x).$$

Ejemplo 3.3 $\int xe^x = xe^x - \int 1\cdot e^x = xe^x - e^x$,

donde hemos tomado $f(x)=x$ y $g'(x)=e^x$ en la fórmula anterior.

$\int x^2\ln x = \frac{x^3\ln x}{2} - \frac{x^3}{6}$,

tomando $f(x)=\ln x$ y $g'(x)=x^2$.

EJERCICIO 3.3 *Calcular, integrando por partes,*

(*i*) $\displaystyle\int x\, e^x\, dx.$ (*ii*) $\displaystyle\int e^x \operatorname{sen} x\, dx.$ (*iii*) $\displaystyle\int e^x \cos x\, dx.$

(*iv*) $\displaystyle\int \arctan x\, dx.$ (*v*) $\displaystyle\int \operatorname{arg\,sinh} x\, dx.$ (*vi*) $\displaystyle\int \arcsin x\, dx.$

(*vi*) $\displaystyle\int (2x^3 + x - 3)\, e^x\, dx.$ (*vii*) $\displaystyle\int (2x^4 + x) \cos x\, dx.$ (*viii*) $\displaystyle\int \sin^2 x\, dx.$

(*x*) $\displaystyle\int \cos^2 x\, dx.$ (*ix*) $\displaystyle\int x^p \log x\, dx;\ p \neq -1.$

3.1.4. Integración de funciones racionales

Veremos un método que nos permite calcular cualquier integral de la forma

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios con coeficientes reales. Podemos suponer que el grado de P, $gr(P)$, es menor que el de Q, i.e., $gr(P) < gr(Q)$, ya que en caso contrario escribiríamos el cociente

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{S(x)}{Q(x)},$$

donde $gr(S) < gr(Q)$.

El método se basa en descomponer el cociente $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en cocientes de polinomios más sencillos llamados *fracciones simples* del tipo

$$\frac{n}{(x-a)^\alpha}, \quad \alpha \geq 1,$$

$$\frac{mx+n}{(x-a)^2 + b^2},$$

$$\frac{mx+n}{\left((x-a)^2 + b^2\right)^\beta}, \quad \beta \geq 2,$$

para los que el cálculo de una primitiva es inmediato salvo quizá los de la forma[2]

$$\int \frac{mx+n}{[(x-a)^2 + b^2]^\beta} dx,$$

con $\beta > 2$.

[2]Estos pueden resolverse por el método de Hermite. El lector interesado puede consultar la bibliografía.

Ejemplo 3.4 *Para calcular la integral*

$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}dx$$

podemos descomponer el integrando en

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-6x} = -\frac{1}{6}\frac{1}{x} + \frac{3}{10}\frac{1}{x-2} - \frac{2}{15}\frac{1}{x+3},$$

con lo que

$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}dx = -\frac{1}{6}\log|x| + \frac{3}{10}\log|x-2| - \frac{2}{15}\log|x-3| + C.$$

EJERCICIO 3.4 *Calcular*

$$(i) \int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx \qquad (ii) \int \frac{x+2}{x^2+x-2}\,dx \qquad (iii) \int \frac{dx}{x^3-5x^2+6x}$$

$$(iv) \int \frac{x^4}{x^3-2x^2-2x-3}\,dx. \qquad (v) \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} \qquad (vi) \int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)^3}.$$

3.1.5. Más cambios de variables

Si $R(x,y)$ es una función racional,

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

se reduce al cálculo de la primitiva de una función racional mediante el cambio de variable $t = \tan\frac{x}{2}$ (dicha integral es par en $\sin(x/2)$ y $\cos(x/2)$),

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt.$$

Ejemplo 3.5

$$\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3} = \int \frac{dt}{t^2+2t+1} = -\frac{1}{t+1} = -\frac{1}{\tan\frac{x}{2}+1}.$$

Pero algunas veces esta integral puede resolverse más rápidamente en los siguientes casos:

Impar en coseno

Si la función R cumple $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, entonces el cambio de variable $t = \sin x$ también reduce la integral a una integral de funciones racionales.

Impar en seno

Si la función R cumple $R(-sinx, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, entonces el cambio a realizar es $t = \cos x$.

Par en seno y en coseno

Si la función R cumple $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, entonces el cambio es $t = \tan x$.

Ejemplo 3.6

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx.$$

Haciendo $t = \tan x$

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int (t^4 + t^2) dt = \frac{\tan^5 x}{5} + \frac{\tan^3 x}{3} + C.$$

Ejemplo 3.7 *Calcular*

$(i) \int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x}$ $\quad (ii) \int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x+\cos x}$ $\quad (iii) \int \cos^3 x \ \operatorname{sen}^2 x \ dx$

$(iv) \int \cos^2 x \ \operatorname{sen}^3 x \ dx.$ $\quad (v) \int \frac{dx}{1+\operatorname{sen}^2 x}$ $\quad (vi) \int \frac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^3 x} \ dx$

$(vii) \int \operatorname{sen} 3x \ \cos 2x \ dx$ $\quad (viii) \int \operatorname{sen} 5x \ \operatorname{sen} 3x \ \cos 2x \ dx.$

Las integrales en las que aparecen funciones racionales en x y alguna de las funciones

$$\sqrt{a^2 - b^2x^2}, \quad \sqrt{a^2 + b^2x^2}, \quad \sqrt{b^2x^2 - a^2},$$

se transforman en integrales del tipo estudiado anteriormente mediante los cambios de variable $x = \frac{a}{b} \sin z$, $x = \frac{a}{b} \tan z$, $x = \frac{a}{b} \sec z$, respectivamente. Aunque sueles ser muy útiles los cambios con senos y cosenos hiperbólicos.

Ejemplo 3.8

$$\int \sqrt{3 - 2x - x^2} dx.$$

Haciendo el cambio $x + 1 = 2 \sin t$ *obtenemos*

$$\int \sqrt{3 - 2x - x^2} dx = \int \sqrt{4 - (x+1)^2} dx =$$

$$= 4 \int \cos^2 t dt = 2t + 2 \sin t \cos t + C =$$

$$= 2 \arcsin \frac{x+1}{2} + (x+1) \sqrt{1 - \left(\frac{x+1}{2} \right)^2} + C$$

Ejemplo 3.9 *Calcular, usando cambios trigonométricos o hiperbólicos,*

$$(i) \int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx \quad (ii) \int \sqrt{a^2 + x^2}\ dx \quad (iii) \int \sqrt{x^2 - a^2}\ dx$$

$$(iv) \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} \qquad (v) \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

3.2. Integración definida. Cálculo de áreas

Sea $f : [a, b] \to [0, +\infty]$ una función continua (o continua a trozos y acotada), el área que encierra la gráfica de f por encima del eje OX entre las rectas $x = a$ y $x = b$ *se puede calcular* y su valor se denota por

$$\int_a^b f.$$

Si F es una primitiva de f entonces[3]

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

En general, si F es una primitiva de una función continua f en $[a, b]$

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

representa el área que encierra la gráfica de f por encima del eje OX entre las rectas $x = a$ y $x = b$ menos la que encierra por debajo. Así, por ejemplo, $\int_a^b |f - g|$ representa el área que encierran las gráficas de f y g entre las rectas $x = a$ y $x = b$.

$$\int_a^b f \text{ se denomina integral (definida) de } f \text{ entre } a \text{ y } b,$$

(se puede definir para muchas más funciones que las continuas).

Teorema fundamental del Cálculo: Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es una primitiva de f (tal función no siempre se puede calcular de manera explícita, como por ejemplo $\int_0^x e^{-t^2} dt$).

[3] Esto se conoce como Regla de Barrow y escribiremos $\int_a^b f = F|_a^b = F(b) - F(a)$.

Ejemplo 3.10 *Derivar las funciones:*

$$(i)\ F(x) := \int_0^x \cos^3 t\ dt.$$

$$(ii)\ F(x) := \int_1^{x^2} \frac{e^t}{t}\ dt.$$

Propiedades

1. Sea $a < c < b$. f continua en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

2. Si f y g son continuas en $[a,b]$ y α y β son constantes, entonces $\alpha f + \beta g$ es integrable Riemann en $[a,b]$ y

$$\int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

3. Si f y g son continuas en $[a,b]$ y $f \geq g$, entonces

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g.$$

4. [**Cambio de variable**] Si $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ es C^1 y f es continua en $g([a,b])$,

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = \int_a^b f(g(t))g'(t)dt.$$

Si $c > d$ se entiende que

$$\int_c^d f = -\int_d^c f.$$

5. [**Integración por partes**]

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Ejemplo 3.11 *Calcular* $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Ejemplo 3.12 *Calcular el área comprendida entre la función* $f(x) = (x-1)(x+2)$, *los ejes coordenados y las rectas* $x = -3$ *y* $x = 2$.

Si se representa gráficamente la función $f(x)$, se puede apreciar que, en el intervalo $[-3,2]$, $f(x)$ toma valores positivos y negativos,

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \textit{si } -3 \leq x \leq -2 \\ -f(x) & \textit{si } -2 \leq x \leq 1 \\ f(x) & \textit{si } 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

$A = \int_{-3}^{2} |f(x)|\, dx = \int_{-3}^{-2} (x-1)\,(x+2)\, dx + \int_{-2}^{1} -(x-1)\,(x+2)\, dx + \int_{1}^{2} (x-1)\,(x+2)\, dx = 49/6.$

Ejemplo 3.13 *Calcular el área limitada por la recta $y = 2x+3$ y la parábola $y = x^2$.*

Dadas las funciones $f(x) = 2x+3$ y $g(x) = x^2$, los puntos de corte de ambas son, $x = -1$ y $x = 3$. En el intervalo $[-1,3]$ se verifica $|f(x)-g(x)| = f(x)-g(x)$, entonces $A = \int_{-1}^{3} |f(x)-g(x)|\, dx = \int_{-1}^{3} (2x+3-x^2)\, dx = 32/3$.

EJERCICIO 3.6 *Calcular el área encerrada por las curvas*

(i) $y = x^2$, $x = y^2$.

(ii) $y = x^2$, $x + y = 2$.

(iii) $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$ *entre* $x = 0$ *y* $x = \dfrac{\pi}{2}$.

(iv) $y = e^x$, $y = 2$, $x = 0$.

(v) $y = x$, $y = x + \operatorname{sen}^2 x$, $x = 0$ *y* $x = \pi$.

3.3. Integración en $\mathbb{R}^2$

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto compacto. Dada una función continua $f : D \to [0,+\infty[$ es posible definir el volumen que encierra la gráfica de f y el plano XY sobre el conjunto D [4], a dicho volumen se le representa como la integral doble de f sobre D,

$$\mathrm{Vol}(\{(x,y,z) : (x,y) \in D, 0 \leq z \leq f(x,y)\}) = \int\int_D f.$$

Aunque f no sea positiva, también es posible definir $\int\int_D f$ y representa el volumen que encierra la gráfica de f por encima del plano XY sobre el conjunto D menos el volumen que encierra la gráfica de f por debajo del plano XY sobre el conjunto D.

Vamos a ver cómo calcular dicha integral en algunos casos sencillos (todos estos resultados se conocen como Teorema de Fubini). Supongamos que f es función de variables (x,y), en este caso también se suele denotar $\int\int_D f = \int\int_D f(x,y)dxdy$.

[4] Dar una breve descripción gráfica.

3.3.1. Integral sobre un rectángulo

Supongamos primero que $D = [a, b] \times [c, d]$. En este caso,

$$\int\int_D f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy.$$

Observar que con la primera integral $\int_c^d f(x, y)dy$ (supongamos que f es positiva) estamos calculando el área de la sección con $X = x$ del cuerpo que encierra la gráfica de f por encima del plano XY entre $Y = c$ e $Y = d$.

Ejemplo 3.14 *Calcular* $\displaystyle\int\int_{[0,1]\times[0,2]} e^{x+y}$ *con las dos iteradas (observar que no hay simetria por culpa del dominio de integración).*

3.3.2. Integral “con cortes verticales”

Supongamos ahora que

$$D = \{(x, y) : x \in [a, b], g_1(x) \le y \le g_2(x)\},$$

g_i funciones continuas en $[a, b]$.

En este caso,

$$\int\int_D f = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dy \right) dx.$$

Observar que la primera de las igualdades en 3.3.1 es un caso particular de este, y aquí podemos hacer la misma interpretación que allí.

3.3.3. Integral “con cortes horizontales”

Supongamos ahora que

$$D = \{(x, y) : y \in [c, d], g_1(y) \le x \le g_2(y)\},$$

g_i funciones continuas en $[c, d]$.

En este caso,

$$\int\int_D f = \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y)dx \right) dy.$$

Observar que la segunda de las igualdades en 3.3.1 es un caso particular de este, y que podemos hacer una observación similar a las anteriores.

EJERCICIO 3.9 *Calcular, si es posible, las integrales iteradas de la funciónes siguientes:*

a) $f(x,y) := e^{x+y}$ *en el triángulo de vértices* $(0,0)$, $(2,2)$ *y* $(4,0)$.

b) $f(x,y) := \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ *en la región del primer cuadrante limitada por su bisectriz y la parábola* $y = x^2$.

c) $f(x,y) := x$ *en la región, con ordenadas positivas, limitada por las circunferencias centradas en el origen y radio* 2 *y* 3 *respectívamente.*

d) $f(x,y) := x^2 e^y$ *en la región limitada por las curvas* $y^2 = x$, $y^2 = -x$ *e* $y = 1$.

e) $f(x,y) := y$ *en la región del primer cuadrante que hay por debajo de la circunferencia* $x^2 + y^2 = 2$ *y por enciama de la parábola* $y = x^2$.

EJERCICIO 3.10 *Invertir el orden de integración en las siguientes integrales:*

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)\; dydx,$$

$$\int_0^1 \int_{x}^{2-x} f(x,y)\; dydx.$$

EJERCICIO 3.11 *Calcular las siguientes integrales*

(a) $\displaystyle\int\!\!\int_A (x+y)\; dxdy$ *con* $A := \{(x,y)\ :\ 0 \le x \le 1\ ,\ x^2 \le y \le 2x^2\}$,

(b) $\displaystyle\int\!\!\int_A \mid (x+y) \mid\; dxdy$ *con* $A := [-1,1] \times [-1,1]$,

(c) $\displaystyle\int\!\!\int_A \operatorname{sen}(x+y)\; dxdy$ *con* A *la región acotada limitada por las rectas* $x = 0$, $y = 3\pi$ *e* $y = x$,

(d) $\displaystyle\int\!\!\int_A \mid \cos(x+y) \mid\; dxdy$ *con* $A := [0,\pi] \times [0,\pi]$.

Ejemplo 3.15 *Calcular* $\displaystyle\int\!\!\int_D \frac{1}{1+y^2} dxdy$, *donde* D *es el triángulo*

$$D = \{(x,y) :\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}.$$

3.3.4. Volúmenes de sólidos de sección conocida. Volúmenes de cuerpos de revolución

Las observaciones hechas en las secciones anteriores se conocen como **Principio de Cavalieri** que dice:

> El volumen de un sólido S entre los planos $X = a$ y $X = b$ cuya sección S_x producida por el plano $X = x$, $a < x < b$, tiene área $A(x)$ viene dada por
>
> $$V = \mathrm{Vol}(S) = \int_a^b A(x)dx.$$

Ejemplo 3.16 *Sea D un conjunto compacto, entonces, $\int\int_D 1$ nos da el volumen del cilindro de base D y altura 1, y, por el Principio de Cavalieri,*

$$\text{Área}(D) = \int\int_D 1.$$

En particular, cuando el sólido es un cuerpo de revolución engendrado al hacer rotar sobre el eje OX la figura plana encerrada por la gráfica de la función $f(x)$ (o la curva $y = f(x)$), el eje OX, y las rectas $X = a$ y $X = b$, el volumen viene dado por[5]

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx.$$

Ejemplo 3.17 *Calcular el volumen del cuerpo engendrado por la figura plana encerrada por la curva $x^4 - ax^3 + b^2y^2 = 0$ $(a, b > 0)$ y el eje OX, al girar alrededor del eje OX.*

Los puntos de corte de la curva con el eje OX se obtienen de resolver

$$\frac{1}{b^2}(ax^3 - x^4) = 0,$$

y por tanto son $(0, 0)$, $(a, 0)$. Así pues,

$$V = \pi \int_0^a \frac{1}{b^2}(ax^3 - x^4)dx = \pi \frac{1}{b^2} \left(\frac{a}{4}x^4 - \frac{x^5}{5} \right)\Big|_0^a = \pi \frac{a^5}{20b^2}.$$

Ejemplo 3.18 *Calcular el volumen de un sólido de base circular de radio 4, sabiendo que toda sección plana perpendicular a un diámetro fijo es un cuadrado.*

Si consideramos la sección perpendicular al eje OX en el punto x, $-4 < x < 4$, se tiene que la base del cuadrado es $2\sqrt{16 - x^2}$, luego el área de dicha sección es $S(x) = 4(16 - x^2)$, con lo que

$$V = \int_{-4}^4 S(x) = \int_{-4}^4 4(16 - x^2) = 4(16x - \frac{x^3}{3})|_{-4}^4 = \frac{1024}{3}.$$

[5] El área de la superficie de revolución viene dada por $2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx$.

EJERCICIO 3.12 *Aplicando el principio de Cavalieri calcular el área de un círculo y el volumen de una esfera. Calcular, más en general, el área de una elipse y el volumen de un elipsoide de revolución.*

EJERCICIO 3.13 *Calcular el volumen de un cilindro y un cono, ambos de altura h y radio de la base r.*

EJERCICIO 3.14 *Aplicando el principio de Cavalieri calcular el volumen del sólido que genera la curva $y = 2 + \operatorname{sen} x$ al girar alrededor del eje de abscisas entre $x = 0$ y $x = 2\pi$.*

EJERCICIO 3.15 *Aplicando el principio de Cavalieri calcular el volumen limitado por $z = 4 - x^2$ y los planos $x = 0$, $y = 6$, $y = 0$, $z = 0$.*

EJERCICIO 3.16 *Aplicando el principio de Cavalieri calcular el volumen de los sólidos:*

$$A := \{(x, y, z) \ : \ 0 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\},$$

$$B := \{(x, y, z) \ : \ x + y + z \leq 1, \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0\}.$$

Ejemplo 3.19 *Calcular el volumen del conjunto $E := \{(x, y, z) : \ x, y, z \geq 0, \ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 1\}$.*

3.3.5. Cambio de variable. Cambio a polares

Si U es un abierto de $\mathbb{R}^2$ (para todo punto de U, x, existe una bola centrada en x dentro de U), una función $g : U \to \mathbb{R}^2$ inyectiva, de clase C^1 y con jacobiano $|g'(u)| \neq 0$ para todo $u \in U$, se denomina cambio de variable.

Ejemplo 3.20 *Describir geométricamente en $\mathbf{R}^2$: $\rho = 4$ y $\theta = \frac{\pi}{4}$.*

Ejemplo 3.21 *Describir geométricamente los conjuntos $A := \{(\rho, \theta) : \rho \leq 6 \cos \theta\}$ y $B := \{(\rho, \theta) : \rho > 4 \operatorname{sen} \theta\}$.*

Ejemplo 3.22 *Describir geométricamente los conjuntos:*

$$A := \{(\rho, \theta, z) : 0 \leq \rho \leq 1 \ , \ \pi \leq \theta < 2\pi \ , \ 1 \leq z \leq 2\},$$

$$B := \{(\rho, \theta, \varphi) : \rho \geq 1, \ \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \ , \ \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi\}.$$

Sean $S \subset U$ y f "buenos" (en clase se dan más detalles), escribiendo el cambio como

$$x = g_1(u, v), \quad y = g_2(u, v); \quad dxdy = |\det g'| \, dudv = \left| \det \left(\frac{dxdy}{dudv} \right) \right| dudv$$

obtenemos

$$\int\int_{g(S)} f(x,y)\,\overbrace{dxdy} = \int\int_S f(g_1(u,v), g_2(u,v))\,\overbrace{\left|\det\left(\frac{dxdy}{dudv}\right)\right| dudv}\,.$$

Uno de los ejmplos más importantes, y que estudiaremos aquí, es el cambio a coordenadas polares, que ya hemos trabajado en el tema anterior:

Ejemplo 3.23 *Sea $f(x,y) = xy$ y $D = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2+y^2 \leq 2\}$. Queremos calcular $\int\int_D f$. Para ello realizamos el cambio a coordenadas polares $(x,y) = g(\rho,\theta)$ dado por*

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta, \quad \det g'(\rho,\theta) = \rho$$

que como sabemos es un cambio de coordenadas de $]0,+\infty[\times]0,2\pi[$ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \geq 0\}$. Se tiene que $D \setminus \{(x,0) : x \geq 0\} = g([1,\sqrt{2}]\times]0,\pi/2])$, y como el volumen que aporta el corte con un plano es cero, se tiene que

$$\int\int_D xy\,\overbrace{dxdy} = \int\int_{[1,\sqrt{2}]\times[0,\pi/2]} \rho\cos\theta\rho\sin\theta\,\overbrace{\rho\,d\rho d\theta}\,.$$

EJERCICIO 3.18 *Aplicando la fórmula de cambio de variable calcular las siguientes integrales:*

(a) $\displaystyle\int\int_A \log(x^2+y^2)\ dxdy$ *, siendo A la región del primer cuadrante comprendida entre las circunferencias de centro el origen y radio 3 y 4,*

(b) $\displaystyle\int\int_A x\ dxdy$ *, siendo $A := \{(x,y)\ :\ x^2+y^2 \leq 2x\}$,*

(c) $\displaystyle\int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\ dxdy.$

(d) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\ dx$ *(usar el apartado anterior).*

EJERCICIO 3.19 *Calcular el volumen del sólido descrito por las desigualdades $x^2+y^2+z^2 \leq 9$, $x^2+y^2 \leq 3y$.*

Tema 4

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

4.1. Definición de ecuación diferencial. Modelos matemáticos

Por ecuación diferencial ordinaria, para abreviar EDO, se entiende una ecuación en la que intervienen una función de una variable $y = y(x)$, sus derivadas y la variable. Explícitamente:

$$f(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0.$$

Se llama *orden* de la ecuación diferencial al mayor orden de derivación que aparece en la ecuación.

Resolver la EDO (4.1) consiste en encontrar una función $y = y(x)$ que satisfaga la relación:

$$f(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0.$$

Muchas veces la solución la encontraremos de manera implícita.

Ejemplo 4.1 *La solución de* $y' - x \ln y - \frac{x}{y} y' = 0$ *es* $y - x \ln y = 0$.

Muchas de las leyes de la naturaleza encuentran su expresión más natural en el lenguaje de las ecuaciones diferenciales.

Modelos matemáticos

Ley de enfriamiento/calentamiento de Newton

Según la ley de Newton de enfriamiento, la velocidad a la que se enfría/calienta una sustancia al aire libre es proporcional a la diferencia entre la temperatura de la sustancia $T(t)$ y la del aire T_a, esto es,

$$\frac{dT}{dt} = k(T(t) - T_a),$$

donde k, la constante de proporcionalidad, es una constante negativa (si $T(t) > T_a$ entonces $\frac{dT}{dt} < 0$ y el cuerpo se enfriará, y si $T(t) < T_a$ entonces $\frac{dT}{dt} > 0$ y el cuerpo se calentará). Así pues, la EDO (4.1) rige este proceso físico, es decir, es el modelo matemático de la Ley de enfriamiento/calentamiento de Newton.

Si la temperatura del aire es de 30ºC y la sustancia, a 100ºC, se enfría hasta 70ºC en 15 minutos, veamos cuándo alcanzará la temperatura de 40ºC.

Reescribiendo (4.1) como

$$T' = k(T - 30)$$

tenemos que

$$\frac{T'}{T - T_a} = k,$$

integrando ahora respecto de t tenemos que

$$\int \frac{T'}{T - 30} dt = \int k dt.$$

luego, como $T(t) > 30$,

$$\ln(T(t) - 30) = kt + C,$$

es decir,

$$T(t) = 30 + e^C e^{kt},$$

es la solución (general) de la EDO (4.1)[1]. Utilizando ahora la condición inicial $T(0) = 100$ obtenemos que

$$100 = 30 + e^C,$$

de donde obtenemos la constante de integración $e^C = 70$, y por tanto la solución particular de nuestro problema,

$$T(t) = 30 + 70e^{kt}.$$

La otra condición que nos dan nos permite saber quién es la constante de proporcionalidad de la ley de enfriamiento para este proceso,

$$70 = T(15) = 30 + 70e^{15k},$$

[1] Notemos que ha aparecido una constante e^C al resolver la EDO ya que esta es de primer orden y hemos necesitado una integración para resolverla. En el ejemplo siguiente, en el que tenemos una EDO de segundo orden veremos que aparecen dos constantes pues necesitaremos de dos integraciones para resolverla.

es decir,

$$k = \frac{1}{15} \ln\left(\frac{4}{7}\right) \approx -0,03730771919.$$

De esta forma el tiempo t_{40} en el que la sustancia alcanzará los 40°C se obtiene de despejar en

$$40 = T(t_{40}) = 30 + 70\mathrm{e}^{kt_{40}},$$

esto es,

$$t_{40} = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{1}{7}\right) = 15\frac{\ln\left(\frac{1}{7}\right)}{\ln\left(\frac{4}{7}\right)} \approx 52,15837877.$$

Cuerpo en caída libre

Por ejemplo, según la segunda ley del movimiento de Newton, la aceleración a de un cuerpo de masa m es proporcional a la fuerza total F que actúa sobre él, con $\frac{1}{m}$ como constante de proporcionalidad:

$$ma = F.$$

Así por ejemplo, si un cuerpo cae libremente, sólo bajo la acción de la gravedad, la única fuerza que actúa es mg, donde g es la aceleración. Si y es la distancia hacia abajo del cuerpo, a partir de alguna altura dada fija, se tiene que la siguiente ecuación diferencial describe el comportamiento de y respecto del tiempo,

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg.$$

Si asumimos que el cuerpo cae a partir del reposo, integrando esta ecuación diferencial, hallamos (aquí aparece una constante que calculamos con la condición inicial)

$$\frac{dy}{dt} = gt,$$

es decir,

$$v = gt,$$

donde v es la velocidad. Integrando de nuevo,

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

es la solución de nuestra ecuación diferencial (en esta segunda integración aparece una segunda constante que calculamos con la condición inicial). Observemos que de ella se obtiene el *Principio de conservación de la energía*

$$v = \sqrt{2gy}, \quad \text{i.e.,} \quad \frac{1}{2}mv^2 = mgy.$$

Si modificamos esta situación y suponemos que el aire ejerce una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad, entonces la fuerza total que se ejerce sobre el cuerpo será $mg - k(dy/dt)$ $(k > 0)$ y la ecuación que representa dicho proceso físico es

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - k\frac{dy}{dt}.$$

Integrando ($\equiv$ resolviendo) como antes, y suponiendo asimismo que partimos del reposo, obtendremos que la velocidad de caída del cuerpo es igual a

$$v = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{kt}{m}}).$$

Descomposición radiactiva

Experimentalmente se comprueba que la velocidad con que se desintegra un material radiactivo es proporcional a la cantidad de materia presente. Si inicialmente se disponía de 5 Kg. y al cabo de 1 año quedan $4,5$ Kg, ¿cuánto quedará al cabo de 3 años?

EJERCICIO 4.1 *Clasificar cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales según su orden y comprobar que la función que se ofrece es una solución.*

(a)	$1 + y^2 + y^2y' = 0,$	$x + y = \arctan y$
(b)	$y' - y\tan x = 0,$	$y = 5\sec x$
(c)	$(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0,$	$y = \sqrt{x^2 - x}$
(d)	$y = xy' + y^2 \operatorname{sen} x^2,$	$x = y\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen} t^2\ dt$
(e)	$(\frac{y''}{y'})^2 + 1 = \frac{1}{(y''')^2},$	$y = \operatorname{sen} x$

EJERCICIO 4.2 *Comprobar que las ecuaciones diferenciales siguientes tienen como solución general la que se plantea y calcular la solución particular que cumple las condiciones iniciales dadas:*

(a)	$y'' + y = 0,$	$y = A\operatorname{sen} x + B\cos x$	$y(0) = 1; y'(0) = 0$
(b)	$y' + 2y = 0,$	$y = Ae^{-2x}$	$y(0) = 3$
(c)	$xy'' + y' = 0,$	$y = A + B\log x$	$y(2) = 0; y'(2) = \frac{1}{2}$
(d)	$x^2y'' - 3xy' + 3y = 0,$	$y = Ax + Bx^3$	$y(2) = 0; y'(2) = 4$
(e)	$4yy' - x = 0,$	$4y^2 - x^2 = A$	$y(0) = 0$

4.2. Resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden con variables separables

Son aquellas de la forma

$$y' = f(x)g(y), \quad \text{i.e.,} \quad \frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

Para resolverlas, separamos variables, es decir, reescribimos la ecuación en la forma

$$dy/g(y) = f(x)dx,$$

necesitamos[2] $g(y) \neq 0$, e integramos en ambos lados[3].

La ley de enfriamiento de Newton es una ecuación de este tipo.

Ejemplo 4.2 *Resolver $y' + xy = 0$.*

Si $y \neq 0$ entonces $\frac{dy}{y} = -xdx$, y por tanto si $y > 0$, $\ln y = -x^2 + A$, de donde $y = Ce^{-x^2}$, $C = e^A > 0$; y si $y < 0$, $\ln(-y) = -x^2 + A$, de donde $-y = De^{-x^2}$, $D = e^A > 0$, es decir $y = Ce^{-x^2}$, $C = -D < 0$. También $y = 0$ es solución, por tanto podemos escribir como solución general $y = Ce^{-x^2}$, $C \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 4.3 *Procediendo como antes $y' = 2x\sqrt{y-1}$ tiene como solución general, si $y \neq 1$, $y = 1 + \frac{1}{4}(x^2 + C)^2$. Pero $y = 1$ es solución que no se obtiene para ningún C.*

También $y^2 + x^2y' = 0$ tiene como solución general, si $y \neq 0$, $y = \frac{x}{Cx-1}$. Pero $y = 0$ es solución que no se obtiene para ningún C.

Lo mismo ocurre para la ecuación $y^2(1 + (y')^2) = 4$. La solución general es $(x+C)^2 + y^2 = 4$ pero también lo son $y = \pm 2$ que no se pueden deducir de tal solución general. Estas soluciones se llaman soluciones singulares. Observar que son de la envolvente de la solución general.

Se pueden ganar soluciones falsas al multiplicar una ecuación por un factor que puede hacerse nulo.

Ejemplo 4.4 *Resolver $y' = y + 3$, con la condición inicial $y(0) = 2$.*

Ejemplo 4.5 *Resolver $y'(1 + e^x)y = e^x$, con la condición inicial $y(0) = 1$.*

EJERCICIO 4.3 *Integrar las ecuaciones diferenciales con variables separables:*

(a) $x^2(y+1)dx + y^2(x-1)dy = 0$

(b) $4xy' - y = x^2y'$

(c) $x \cos x dx + y^3 \log y dy = 0$

(d) $3e^x \tan y dx + \sec^2 y\sqrt{1 - e^{2x}}dy = 0$

(e) $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$

---

[2] Si $g(y_0) = 0$ entonces $y(x) = y_0$ es también solución.

[3] En realidad estamos haciendo $\int f(x)dx = \int \frac{y'(x)}{g(y(x))}dx =_{\text{[cambio de variable]}} \int \frac{dy}{g(y)}$.

4.3. Resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden lineales

Las ecuaciones diferenciales de primer orden lineales son aquellas de la forma:

$$(*) \qquad y' + f(x)y = g(x).$$

La ecuación

$$y' + f(x)y = 0$$

se llama ecuación homogénea asociada a $(*)$, y es fácil hallar su integral general pues es una EDO con variables separables, si $y \neq 0$,

$$\frac{dy}{y} = -f(x)dx,$$

y por tanto se tiene que

$$Ce^{-\int f(x)dx}$$

es la solución general de dicha ecuación homogénea, incluso para $y = 0$.

Para hallar la solución general de la ecuación no homogénea se puede emplear el método de *variación de las constantes.* Consiste en exigir que la función

$$C(x)e^{-\int f(x)dx}$$

sea solución de $(*)$, y $C(x)$ se obtiene por integración en la ecuación resultante:

$$C'(x)e^{-\int f(x)dx} + C(x)e^{-\int f(x)dx}(-f(x)) + f(x)C(x)e^{-\int f(x)dx} = g(x),$$

de donde

$$C'(x) = g(x)e^{\int f(x)dx}.$$

Por otra parte, observar que, dada $(*)$, si y_0 e y_1 son dos soluciones entonces $y_1 - y_0$ es solución de la ecuación homogénea asociada. Por tanto, conociendo una solución particular y_0 de $(*)$ y la solución general y_h de la ecuación homogénea asociada, se tiene que la solución general de $(*)$ es

$$y_0 + y_h.$$

Ejemplo 4.6 *Resolver $y' + 2xy = 4x$.*

Como la solución de la ecuación homogénea

$$y' + 2xy = 0$$

es

$$Ce^{-\int 2xdx} = Ce^{-x^2},$$

la solución de la EDO la buscaremos como (método de variación de las constantes)

$$C(x)e^{-x^2}.$$

Por tanto, exigiendo que ésta solución cumpla la EDO:

$$C'(x)e^{-x^2} + \underbrace{C(x)e^{-x^2}(-2x) + 2xC(x)e^{-x^2}}_{=0} = 4x,$$

se tiene que

$$C'(x) = 4xe^{x^2},$$

de donde

$$C(x) = 2e^{x^2} + c.$$

Por tanto la solución de la EDO 1 es

$$y = 2 + ce^{-x^2}.$$

Ejemplo 4.7 *Resolver $y' - 2y = x^2 + x$.*

La solución de la ecuación homogénea

$$y' - 2y = 0$$

es

$$y_h = ce^{2x}.$$

Busquemos ahora por inspección una solución particular de $y' - 2y = x^2 + x$. Pensemos en una solución del tipo de un polinomio de grado dos $y_0(x) = ax^2 + bx + c$. Entonces

$$2ax + b - 2ax^2 - 2bx - 2c = x^2 + x$$

con lo que $a = -1/2$, $b = -1$ y $c = -1/2$, es decir

$$y_0 = -\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}$$

es una solución particular de la EDO 2, y por tanto

$$-\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} + ce^{2x}$$

es la solución general.

EJERCICIO 4.5 *Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden:*

(a) $(x^2 + 2x - 1)y' - (x + 1)y = x - 1$

(b) $y' + y\cot x = 5e^{\cos x}$

(c) $xdy + 2ydx = (x - 2)e^x dx$

(d) $ydx + (xy + x - 3y)dy = 0$

(e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x\cos y + \sin 2y}$

4.4. Resolución de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes

Una ecuación diferencial lineal de orden 2 con coeficientes constantes tiene la forma:

$$(*) \qquad y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x).$$

donde a_1, a_2 son constantes[4]. El conjunto de soluciones de la ecuación homogénea asociada,

$$(H) \quad y'' + a_1 y' + a_2 y = 0,$$

tiene estructura de espacio vectorial. Y el conjunto de soluciones de $(*)$ viene dado por

$$y_1 + S_0,$$

donde y_1 es una solución particular de $(*)$ y S_0 es el conjunto de soluciones de la ecuación homogénea.

Si buscamos soluciones de la ecuación homogénea de la forma $y = e^{\lambda x}$ (como la que obtenemos en el caso de orden uno), el valor λ debe satisfacer

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0,$$

dicha ecuación se conoce como ecuación característica de (H). Al polinomio

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2$$

se le llama polinomio característico de (H).

Si las soluciones de la ecuación característica son reales y distintas, sean λ_1, λ_2, toda solución de la ecuación homogénea tiene la forma

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Ejemplo 4.8 *Resolver $y'' - 3y' + 2y = e^{5x}$.*

Como la ecuación característica

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

tiene como soluciones $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$, se tiene que la solución general de la ecuación homogénea

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

es

$$c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}.$$

[4]En general una EDO lineal de orden n con coeficientes constantes tiene la forma $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_n y = f(x)$.

Buscamos ahora una solución particular de la forma ce^{5x}*, con lo que*

$$(25c - 3 \cdot 5c + 2c)e^{5x} = e^{5x}.$$

Así pues, dividiendo por e^{5x} *(que es distinto siempre de* 0*),*

$$25c - 3 \cdot 5c + 2c = 1,$$

y por tanto $c = 1/12$*. Luego la solución general de nuestra ecuación es*

$$y(x) = \frac{1}{12}e^{5x} + c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

Ejemplo 4.9 *Resolver las ecuaciones características de las siguientes EDOs:*

(a) $y'' - 2y' - 3y = 0,$

(b) $y'' - 4y' + 4y = 0,$

(c) $y'' - 3y' + 2y = 0,$

(d) $y'' + y = 0,$

(e) $y'' - 6y' + 9y = 0,$

(f) $y''' - 2y'' - 3y' = 0,$

(g) $y^{4)} - y = 0$*, donde* $y^{4)}$ *es la derivada cuarta de* y*.*

Si λ es una raíz real doble del polinomio característico, entonces la solución general de la ecuación homogénea tiene la forma:

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}.$$

En efecto, como $Ce^{\lambda x}$ es solución de la EDO, usando el método de variación de las constantes, es decir, haciendo que $C(x)e^{\lambda x}$ sea también solución, y usando que

$$a_1 = -2\lambda, \quad a_2 = \lambda^2,$$

pues λ es raíz doble, se llega a que

$$C''(x) = 0$$

y por tanto, integrando dos veces,

$$C(x) = C_1 + C_2 x.$$

Por tanto, se tiene que

$$C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$$

es la solución general de la EDO

Si el polinomio característico posee dos raíces complejas conjugadas $a+bi, a-bi$, entonces

$$y = e^{ax}(C_1\cos(bx) + C_2\sin(bx))$$

es la solución general de la ecuación homogénea. Pruébese que $e^{ax}\cos(bx)$ y $e^{ax}\sin(bx)$ son soluciones.

Para encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea (*), podemos hacerlo de manera sencilla en los casos siguientes.

1. $f(x) = p_n(x)$, un polinomio de grado n. Entonces la solución particular se puede buscar como un polinomio de grado $n+2$.

2. $f(x) = e^{rx}p_n(x)$, con $p_n(x)$ polinomio de grado n y r distinto de las raíces del polinomio característico . Entonces la solución particular se puede buscar como $e^{rx}q_n(x)$, con $q_n(x)$ un polinomio de grado n.

3. $f(x) = e^{rx}p_n(x)$, con $p_n(x)$ polinomio de grado n y r raíz del polinomio característico. Entonces la solución particular se puede buscar como $xe^{rx}q_n(x)$ si r es una raíz simple, o $x^2e^{rx}q_n(x)$ si r es una raíz doble, siendo $q_n(x)$ un polinomio de grado n en ambos casos.

4. $f(x) = e^{ax}(\cos(bx)p_n(x) + \sin(bx)q_m(x)$, con p_n y q_m polinomios de grado n y m respectivamente. Entonces la solución particular se puede buscar como:

4.1. si $a+bi$ no es raíz del polinomio característico: $e^{ax}(\cos(bx)\hat{p}_l(x) + \sin(bx)\hat{q}_l(x))$, donde $\hat{p}_l(x)$ y $\hat{q}_l(x)$ son polinomios de grado $l = \max\{n, m\}$;

4.2. si $a+bi$ es raíz del polinomio característico: $xe^{ax}(\cos(bx)\hat{p}_l(x) + \sin(bx)\hat{q}_l(x))$, donde $\hat{p}_l(x)$ y $\hat{q}_l(x)$ son polinomios de grado $l = \max\{n, m\}$.

5. Cuando $f(x)$ es una combinación lineal de funciones de los tipos anteriores, tener en cuenta que si y_1 es solución de

$$y'' + a_1y' + a_2y = f_1(x)$$

e y_2 es solución de

$$y'' + a_1y' + a_2y = f_2(x),$$

entonces $y_1 + y_2$ lo es de

$$y'' + a_1y' + a_2y = f_1(x) + f_2(x).$$

Otra forma de resolver la ecuación no homogénea $(*)$ es utilizando el método de variación de constantes de la solución general de la ecuación homogénea

$$C_1y_1 + C_2y_2.$$

Haciendo que $C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ cumpla $(*)$, y exigiendo

$$C_1{}'(x)y_1(x) + C_2{}'(x)y_2(x) = 0,$$

se tiene que $C_1(x)$ y $C_2(x)$ deben satisfacer además

$$C_1{}'(x)y_1{}'(x) + C_2{}'(x)y_2{}'(x) = f(x).$$

Es decir $C_1(x)$ y $C_2(x)$ deben satisfacer el sistema lineal (cuyo determinante es no nulo pues $W(y_1, y_2) \neq 0$)

$$\begin{cases} C_1{}'(x)y_1(x) + C_2{}'(x)y_2(x) = 0, \\ \\ C_1{}'(x)y_1{}'(x) + C_2{}'(x)y_2{}'(x) = f(x). \end{cases}$$

Ejemplo 4.10 *Resolver $y'' + 9y = \sin(3x)$.*

La ecuación característica $\lambda^2 + 9 = 0$ tiene como soluciones $\lambda_1 = 3i$ y $\lambda_2 = -3i$, luego la solución general de la ecuación homogénea es $C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x)$. Hagamos ahora variar las constantes para calcular la solución general de nuestra ecuación. Se tiene entonces que $C_1(x)$ y $C_2(x)$ deben satisfacer

$$\begin{cases} C_1{}'(x)\sin(3x) + C_2{}'(x)\cos(3x) = 0, \\ \\ 3C_1{}'(x)\cos(3x) - 3C_2{}'(x)\sin(3x) = \sin(3x), \end{cases}$$

de donde $C_1'(x) = \frac{1}{3}\sin(3x)\cos(3x)$ y $C_2'(x) = -\frac{1}{3}\sin^2(3x)$. Integrando obtenemos $C_1(x) = \frac{1}{18}\sin^2(3x) + c_1$ y $C_2(x) = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{18}\sin(3x)\cos(3x) + c_2$. De aquí tenemos que la solución de nuestra ecuación es, reagrupando constantes,

$$\frac{-x\cos(3x)}{6} + d_1\sin(3x) + d_2\cos(3x).$$

EJERCICIO 4.6 *Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales lineales :*

(a) $y'' - 2y' - 3y = 0$

(b) $y'' - 4y' + 4y = 0$

(c) $y'' - 3y' + 2y = 0$

EJERCICIO 4.7 *Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales lineales :*

(d) $y'' - 2y' - 3y = 2\sin x$

(e) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$

(f) $y'' - 3y' + 2y = 2x + e^x + \cos x$

(g) $y'' + y = x^3$

(h) $y'' - 6y' + 9y = 25e^x \sin x$

(i) $y''' - 2y'' - 3y' = -6x - 7$

(j) $y^{IV} - y = 15e^{2x}$

EJERCICIO 4.8 *Resolver los siguientes problemas de valores iniciales:*

(a) $y'' - 4y' + 3y = 1, \quad y(0) = 0;\ y'(0) = 1.$

(b) $y'' - 5y' + 4y = 4, \quad y(0) = 0;\ y'(0) = 2.$

(c) $y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2x}, \quad y(0) = 1;\ y'(0) = 1.$

(d) $y'' + 4y = 2\cos^2 x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

(e) $y'' - 3y' + 2y = e^x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

(f) $y''' - y'' = 0, \quad y(0) = 1;\ y'(0) = 3;\ y''(0) = 2.$

EJERCICIO 4.9 *Resolver el siguiente problema de valores frontera:*

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 1, \\ \\ y(0) = 0,\ y(1) = 0. \end{cases}$$