Tema 2. teoría cinética de gases

Problemas (1-9)

Integrales que suelen aparecer en la TCG

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

$$\int x^{n}dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int e^{x}dx = e^{x} + C$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n}e^{-ax^{2}}dx = 2\int_{0}^{\infty} x^{2n}e^{-ax^{2}}dx$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-ax^{2}}dx = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int_{0}^{\infty} x^{2n}e^{-ax^{2}}dx = \frac{(2n)!\,\pi^{\frac{1}{2}}}{2^{2n+1}n!\,a^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$\int (u+v)dx = \int udx + \int vdx$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$$

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1}e^{-ax^{2}}dx = 0 \\ &\int_{0}^{\infty} xe^{-ax^{2}}dx = \frac{1}{2a} \\ &\int_{0}^{\infty} x^{2n+1}e^{-ax^{2}}dx = \frac{n!}{2a^{n+1}} \end{aligned}\right\} \quad \begin{gathered} a > 0 \\ n = 1,2,\ldots \end{gathered}$$

TCG1.- **Calcular la densidad de probabilidad para la componente x de la velocidad de una muestra de moléculas de O_2 a 300 K en el intervalo $0 < |v_x| < 1000\ ms^{-1}$ Representar la función de distribución resultante**

$$dp(x) = \boxed{f(x)dx}$$

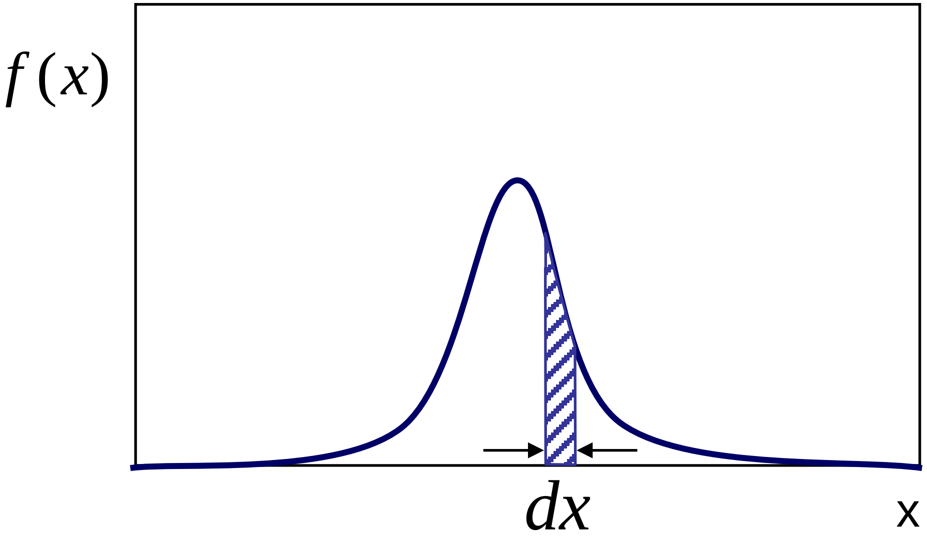
densidad de probabilidad

o

probabilidad por unidad de intervalo

fracción de moléculas con componente x de la velocidad entre v_x y v_x+dv_x

$$\frac{dN_{v_x}}{N} = dp(v_x) = g(v_x)dv_x$$



TCG1.- **Calcular la densidad de probabilidad para la componente x de la velocidad de una muestra de moléculas de O_2 a 300 K en el intervalo $0< |v_x| <1000\ ms^{-1}$ Representar la función de distribución resultante**

$$g(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right)$$

$$m = 5.3137 \cdot 10^{-26} Kg$$

$$T = 300 K$$

$$k = 1.38066 \cdot 10^{-23} JK^{-1}$$

$$m = 32.0 g\, mol^{-1} \cdot \frac{1}{6.022 \cdot 10^{23} mol^{-1}} 10^{-3} \frac{Kg}{g} = 5.3137 \cdot 10^{-26} Kg$$

$$g(v_x) = \left(1.4289 \cdot 10^{-3} m^{-1} s\right) \exp\left(-6.4145 \cdot 10^{-6} m^{-2} s^2\right) v_x^2$$

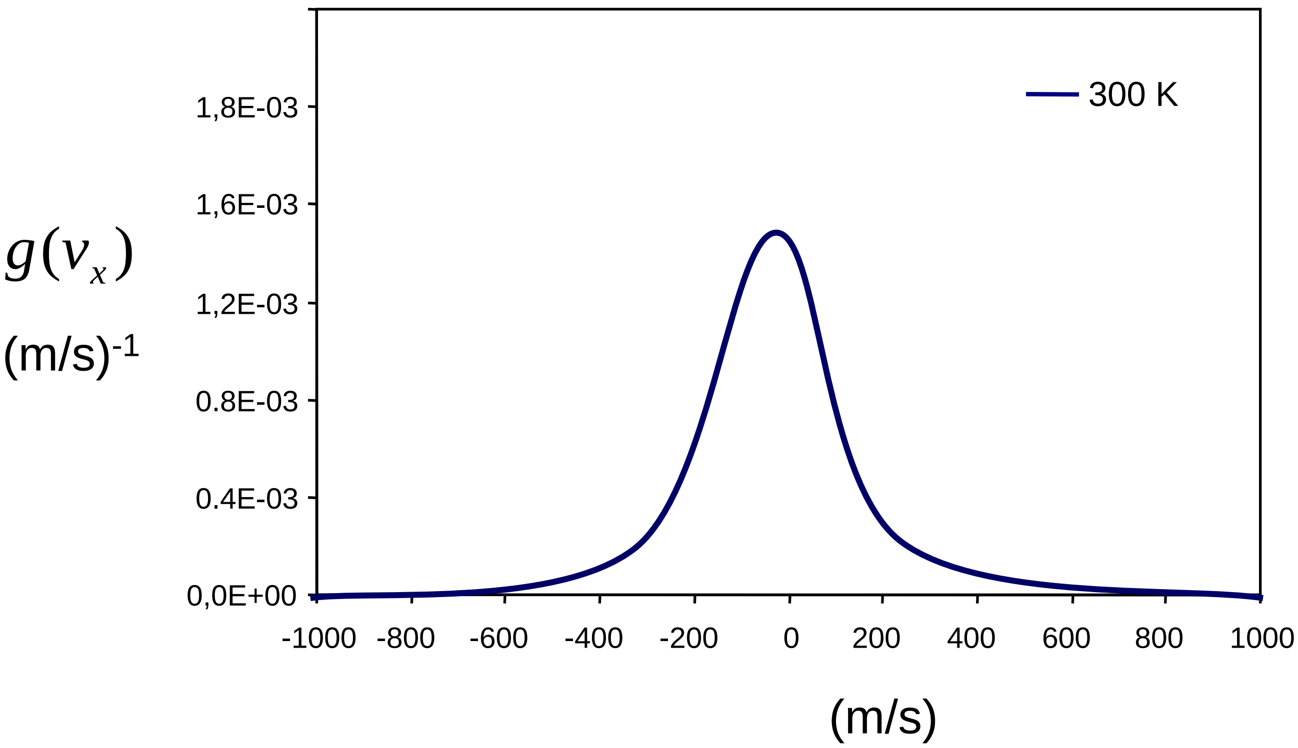
TCG1.- Calcular la densidad de probabilidad para la componente x de la velocidad de una muestra de moléculas de O_2 a 300 K en el intervalo $0< |v_x| <1000\ ms^{-1}$ Representar la función de distribución resultante

$$g(v_x) = \left(1.4289 \cdot 10^{-3} m^{-1} s\right) \exp\left(-6.4145 \cdot 10^{-6} m^{-2} s^{2}\right) v_x^2$$

TCG1.- **Calcular la densidad de probabilidad para la componente x de la velocidad de una muestra de moléculas de O_2 a 300 K en el intervalo $0< |v_x| <1000\ ms^{-1}$ Representar la función de distribución resultante**

$$g(v_x) = \left(1.4289\cdot 10^{-3} m^{-1} s\right) \exp\left(-6.4145\cdot 10^{-6} m^{-2} s^{2}\right) v_x^2$$

v_x	$g(v_x)$
-1000	2.34002E-6
-900	7.91623E-6
-800	2.35560E-5
.	.
.	.
.	.
0	1.42890E-3
.	.
.	.
.	.
800	2.35560E-5
900	7.91623E-6
1000	2.34002E-6



TCG2.- **Calcular la probabilidad de que la componente x de la velocidad de un átomo de neon, en una muestra gaseosa de dicho átomo a 300K, tenga valores inferiores a 500 m·s^{-1}.**
Calcular dicha probabilidad para un átomo de argon a 300K

$$-500 < v_x < 500 \quad m\cdot s^{-1}$$

$$\frac{N_{v_x}\left(0 \le |v_x| \le 500\right)}{N} = \int_{-500}^{500} g\left(v_x\right)dv_x = 2\int_{0}^{500} g\left(v_x\right)dv_x = 2\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{0}^{500} e^{\frac{-mv_x^2}{2kT}}dv_x =$$

Utilizando las tablas de integrales: $\int_0^{x} e^{-at^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{\frac{1}{2}}}\mathrm{Erf}\left(\sqrt{a}x\right);$

función error

$$erf\left[z\right]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt$$

$$\begin{cases} erf\left[0\right]=0 \\ erf\left[\infty\right]=1 \end{cases}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.	0.0112834	0.0225646	0.0338412	0.0451111	0.056372	0.0676216	0.0788577	0.0900781	0.101281
0.1	0.112463	0.123623	0.134758	0.145867	0.156947	0.167996	0.179012	0.189992	0.200936	0.21184
0.2	0.222703	0.233522	0.244296	0.255023	0.2657	0.276326	0.2869	0.297418	0.30788	0.318283
0.3	0.328627	0.338908	0.349126	0.359279	0.369365	0.379382	0.38933	0.399206	0.409009	0.418739
0.4	0.428392	0.437969	0.447468	0.456887	0.466225	0.475482	0.484655	0.493745	0.50275	0.511668
0.5	0.5205	0.529244	0.537899	0.546464	0.554939	0.563323	0.571616	0.579816	0.587923	0.595936
0.6	0.603856	0.611681	0.619411	0.627046	0.634586	0.642029	0.649377	0.656628	0.663782	0.67084
0.7	0.677801	0.684666	0.691433	0.698104	0.704678	0.711156	0.717537	0.723822	0.73001	0.736103
0.8	0.742101	0.748003	0.753811	0.759524	0.765143	0.770668	0.7761	0.78144	0.786687	0.791843
0.9	0.796908	0.801883	0.806768	0.811564	0.816271	0.820891	0.825424	0.82987	0.834232	0.838508
1.0	0.842701	0.84681	0.850838	0.854784	0.85865	0.862436	0.866144	0.869773	0.873326	0.876803
1.1	0.880205	0.883533	0.886788	0.889971	0.893082	0.896124	0.899096	0.902	0.904837	0.907608
1.2	0.910314	0.912956	0.915534	0.91805	0.920505	0.9229	0.925236	0.927514	0.929734	0.931899
1.3	0.934008	0.936063	0.938065	0.940015	0.941914	0.943762	0.945561	0.947312	0.949016	0.950673
1.4	0.952285	0.953852	0.955376	0.956857	0.958297	0.959695	0.961054	0.962373	0.963654	0.964898
1.5	0.966105	0.967277	0.968413	0.969516	0.970586	0.971623	0.972628	0.973603	0.974547	0.975462
1.6	0.976348	0.977207	0.978038	0.978843	0.979622	0.980376	0.981105	0.98181	0.982493	0.983153
1.7	0.98379	0.984407	0.985003	0.985578	0.986135	0.986672	0.98719	0.987691	0.988174	0.988641
1.8	0.989091	0.989525	0.989943	0.990347	0.990736	0.991111	0.991472	0.991821	0.992156	0.992479
1.9	0.99279	0.99309	0.993378	0.993656	0.993923	0.994179	0.994426	0.994664	0.994892	0.995111
2.0	0.995322	0.995525	0.995719	0.995906	0.996086	0.996258	0.996423	0.996582	0.996734	0.99688
2.1	0.997021	0.997155	0.997284	0.997407	0.997525	0.997639	0.997747	0.997851	0.997951	0.998046
2.2	0.998137	0.998224	0.998308	0.998388	0.998464	0.998537	0.998607	0.998674	0.998738	0.998799
2.3	0.998857	0.998912	0.998966	0.999016	0.999065	0.999111	0.999155	0.999197	0.999237	0.999275
2.4	0.999311	0.999346	0.999379	0.999411	0.999441	0.999469	0.999497	0.999523	0.999547	0.999571
2.5	0.999593	0.999614	0.999635	0.999654	0.999672	0.999689	0.999706	0.999722	0.999736	0.999751
2.6	0.999764	0.999777	0.999789	0.9998	0.999811	0.999822	0.999831	0.999841	0.999849	0.999858
2.7	0.999866	0.999873	0.99988	0.999887	0.999893	0.999899	0.999905	0.99991	0.999916	0.99992
2.8	0.999925	0.999929	0.999933	0.999937	0.999941	0.999944	0.999948	0.999951	0.999954	0.999956
2.9	0.999959	0.999961	0.999964	0.999966	0.999968	0.99997	0.999972	0.999973	0.999975	0.999976

función error

$$erf[z] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \begin{cases} erf[0] = 0 \\ erf[\infty] = 1 \end{cases}$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{1.0056} e^{-t^2} dt = f_{error}(1.0056)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.	0.0112834	0.0225646	0.0338412	0.0451111	0.056372	0.0676216	0.0788577	0.0900781	0.101281
0.1	0.112463	0.123623	0.134758	0.145867	0.156947	0.167996	0.179012	0.189992	0.200936	0.21184
0.2	0.222703	0.233522	0.244296	0.255023	0.2657	0.276326	0.2869	0.297418	0.30788	0.318283
0.3	0.328627	0.338908	0.349126	0.359279	0.369365	0.379382	0.38933	0.399206	0.409009	0.418739
0.4	0.428392	0.437969	0.447468	0.456887	0.466225	0.475482	0.484655	0.493745	0.50275	0.511668
0.5	0.5205	0.529244	0.537899	0.546464	0.554939	0.563323	0.571616	0.579816	0.587923	0.595936
0.6	0.603856	0.611681	0.619411	0.627046	0.634586	0.642029	0.649377	0.656628	0.663782	0.67084
0.7	0.677801	0.684666	0.691433	0.698104	0.704678	0.711156	0.717537	0.723822	0.73001	0.736103
0.8	0.742101	0.748003	0.753811	0.759524	0.765143	0.770668	0.7761	0.78144	0.786687	0.791843
0.9	0.796908	0.801883	0.806768	0.811564	0.816271	0.820891	0.825424	0.82987	0.834232	0.838508
1.0	0.842701	0.84681	0.850838	0.854784	0.85865	0.862436	0.866144	0.869773	0.873326	0.876803
1.1	0.880205	0.883533	0.886788	0.889971	0.893082	0.896124	0.899096	0.902	0.904837	0.907608
1.2	0.910314	0.912956	0.915534	0.91805	0.920505	0.9229	0.925236	0.927514	0.929734	0.931899
1.3	0.934008	0.936063	0.938065	0.940015	0.941914	0.943762	0.945561	0.947312	0.949016	0.950673
1.4	0.952285	0.953852	0.955376	0.956857	0.958297	0.959695	0.961054	0.962373	0.963654	0.964898
1.5	0.966105	0.967277	0.968413	0.969516	0.970586	0.971623	0.972628	0.973603	0.974547	0.975462
1.6	0.976348	0.977207	0.978038	0.978843	0.979622	0.980376	0.981105	0.98181	0.982493	0.983153
1.7	0.98379	0.984407	0.985003	0.985578	0.986135	0.986672	0.98719	0.987691	0.988174	0.988641
1.8	0.989091	0.989525	0.989943	0.990347	0.990736	0.991111	0.991472	0.991821	0.992156	0.992479
1.9	0.99279	0.99309	0.993378	0.993656	0.993923	0.994179	0.994426	0.994664	0.994892	0.995111
2.0	0.995322	0.995525	0.995719	0.995906	0.996086	0.996258	0.996423	0.996582	0.996734	0.99688
2.1	0.997021	0.997155	0.997284	0.997407	0.997525	0.997639	0.997747	0.997851	0.997951	0.998046
2.2	0.998137	0.998224	0.998308	0.998388	0.998464	0.998537	0.998607	0.998674	0.998738	0.998799
2.3	0.998857	0.998912	0.998966	0.999016	0.999065	0.999111	0.999155	0.999197	0.999237	0.999275
2.4	0.999311	0.999346	0.999379	0.999411	0.999441	0.999469	0.999497	0.999523	0.999547	0.999571
2.5	0.999593	0.999614	0.999635	0.999654	0.999672	0.999689	0.999706	0.999722	0.999736	0.999751
2.6	0.999764	0.999777	0.999789	0.9998	0.999811	0.999822	0.999831	0.999841	0.999849	0.999858
2.7	0.999866	0.999873	0.99988	0.999887	0.999893	0.999899	0.999905	0.99991	0.999916	0.99992
2.8	0.999925	0.999929	0.999933	0.999937	0.999941	0.999944	0.999948	0.999951	0.999954	0.999956
2.9	0.999959	0.999961	0.999964	0.999966	0.999968	0.99997	0.999972	0.999973	0.999975	0.999976

TCG2.- **Calcular la probabilidad de que la componente x de la velocidad de un átomo de neon, en una muestra gaseosa de dicho átomo a 300K, tenga valores inferiores a 500 m·s^{-1}.**

Calcular dicha probabilidad para un átomo de argon a 300K

$$-500 < v_x < 500 \quad m\cdot s^{-1}$$

$$f_{error}(1.0056) = \quad 0.8450$$

tablas:
$$\left\{ \begin{array}{l} f_{error}(1.00) = 0.842701 \\ f_{error}(1.01) = 0.84681 \end{array} \right\}$$

$$\frac{N_{v_x}\left(0 \le |v_x| \le 500\right)}{N} = 0.8450 \equiv 84.5\%$$

Para una muestra de argon:

tablas:

$$\frac{N_{v_x}\left(0 \le |v_x| \le 500\right)}{N} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{1.4149} e^{-t^2} dt = \quad f_{error}(1.4149) = 0.9546 \equiv 95.46\%$$

TCG2.- **Calcular la probabilidad de que la componente x de la velocidad de un átomo de neon, en una muestra gaseosa de dicho átomo a 300K, tenga valores inferiores a 500 m·s^{-1}.**

Calcular dicha probabilidad para un átomo de argon a 300K

Para el argon:

$$\frac{N_{v_x}\left(0 \le |v_x| \le 500\right)}{N} = 2\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\pi^{1/2}}{2\left(\frac{m}{2kT}\right)} \mathrm{erf}\left(\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 500\right) =$$

$$= \mathrm{erf}\left(\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 500\right) = \mathrm{erf}(1.4149) = 0.9546$$

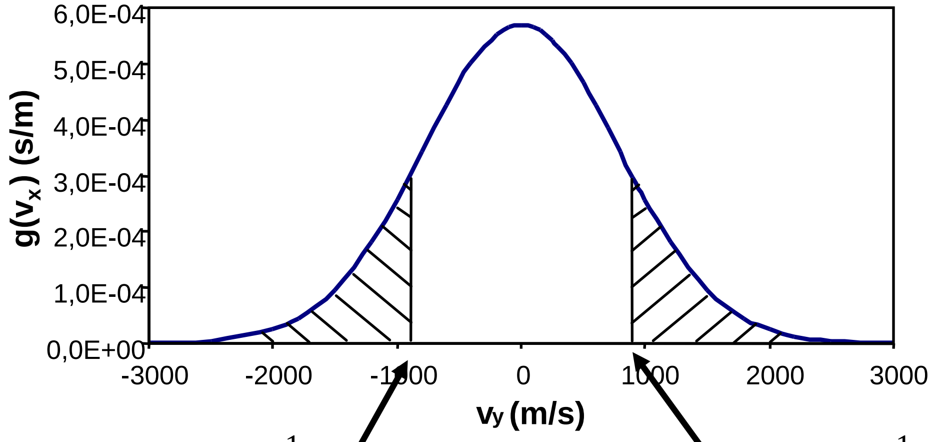
TCG3.- **Calcular la fracción de moléculas de un gas que tienen un valor de v_x^2 mayor que la velocidad cuadrática media $\langle v_x^2\rangle$. Demostrar que dicha fracción es la misma para todos los gases y a cualquier temperatura**

$$v_x^2 > \langle v_x^2\rangle \Rightarrow |v_x| > \langle v_x^2\rangle^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} v_x < -\langle v_x^2\rangle^{\frac{1}{2}} \\ v_x > \langle v_x^2\rangle^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\langle v^2\rangle = \left(\frac{3kT}{m}\right) \qquad \langle v_x^2\rangle = \frac{\left(\frac{3kT}{m}\right)}{3} = \frac{kT}{m} = \frac{RT}{M} \Rightarrow \langle v_x^2\rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{kT}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dN_{v_x}\left(|v_x| > \langle v_x^2\rangle^{\frac{1}{2}}\right)}{N} =$$

$$= \int_{-\infty}^{-\left(\frac{kT}{m}\right)^{\frac{1}{2}}} g(v_x)dv_x + \int_{\left(\frac{kT}{m}\right)^{\frac{1}{2}}}^{\infty} g(v_x)dv_x =$$



$$-\left(\frac{kT}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \left(\frac{kT}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

TCG3.- Calcular la fracción de moléculas de un gas que tienen un valor de v_x^2 mayor que la velocidad cuadrática media $<v_x^2>$. Demostrar que dicha fracción es la misma para todos los gases y a cualquier temperatura

$$v_x^2 > \langle v_x^2 \rangle \Rightarrow |v_x| > \langle v_x^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} v_x < -\langle v_x^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \\ v_x > \langle v_x^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\langle v^2 \rangle = \left(\frac{3kT}{m}\right) \qquad \langle v_x^2 \rangle = \frac{\left(\frac{3kT}{m}\right)}{3} = \frac{kT}{m} = \frac{RT}{M} \Rightarrow \langle v_x^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{kT}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dN_{v_x}\left(|v_x| > \langle v_x^2 \rangle^{\frac{1}{2}}\right)}{N} = \int_{-\infty}^{-\left(\frac{kT}{m}\right)^{\frac{1}{2}}} g(v_x)dv_x + \int_{\left(\frac{kT}{m}\right)^{\frac{1}{2}}}^{\infty} g(v_x)dv_x = 1-2\int_{0}^{\left(\frac{kT}{m}\right)^{\frac{1}{2}}} g(v_x)dv_x =$$

$$= 1-2\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{0}^{\left(\frac{kT}{m}\right)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{m}{2kT}v_x^2} dv_x =$$

cambio de variables: $\Rightarrow$

TCG3.- **Calcular la fracción de moléculas de un gas que tienen un valor de v_x^2 mayor que la velocidad cuadrática media $\langle v_x^2 \rangle$. Demostrar que dicha fracción es la misma para todos los gases y a cualquier temperatura**

$$\frac{dN_{v_x}\left(|v_x| > \langle v_x^2\rangle^{\frac{1}{2}}\right)}{N} = 1-2\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\left(\frac{kT}{m}\right)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{m}{2kT}v_x^2} dv_x$$

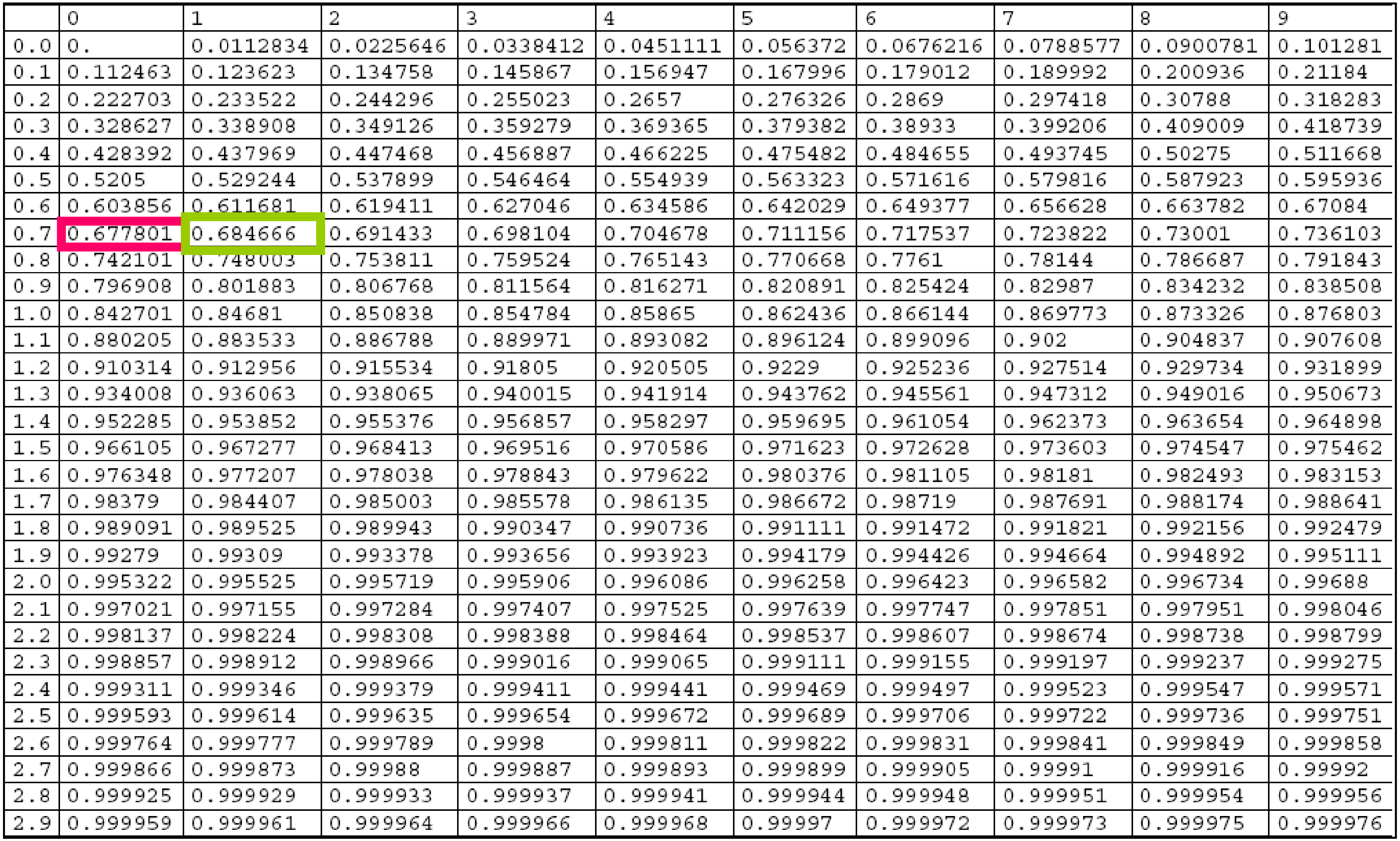
$$= 1-2\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\pi^{1/2}}{2\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{1}{2}}} \mathrm{erf}\left(\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{kT}{m}\right)^{1/2}\right)$$

$$= 1 - fer\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - fer(0.7071) \Rightarrow$$

independiente de T y m !

función error

$$f_{error}(0.7071)= \left.\begin{matrix} f_{error}(0.70)=0.677801 \\ f_{error}(0.71)=0.684666 \end{matrix}\right\} f_{error}(0.7071)=0.6827$$



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.	0.0112834	0.0225646	0.0338412	0.0451111	0.056372	0.0676216	0.0788577	0.0900781	0.101281
0.1	0.112463	0.123623	0.134758	0.145867	0.156947	0.167996	0.179012	0.189992	0.200936	0.21184
0.2	0.222703	0.233522	0.244296	0.255023	0.2657	0.276326	0.2869	0.297418	0.30788	0.318283
0.3	0.328627	0.338908	0.349126	0.359279	0.369365	0.379382	0.38933	0.399206	0.409009	0.418739
0.4	0.428392	0.437969	0.447468	0.456887	0.466225	0.475482	0.484655	0.493745	0.50275	0.511668
0.5	0.5205	0.529244	0.537899	0.546464	0.554939	0.563323	0.571616	0.579816	0.587923	0.595936
0.6	0.603856	0.611681	0.619411	0.627046	0.634586	0.642029	0.649377	0.656628	0.663782	0.67084
0.7	0.677801	0.684666	0.691433	0.698104	0.704678	0.711156	0.717537	0.723822	0.73001	0.736103
0.8	0.742101	0.748003	0.753811	0.759524	0.765143	0.770668	0.7761	0.78144	0.786687	0.791843
0.9	0.796908	0.801883	0.806768	0.811564	0.816271	0.820891	0.825424	0.82987	0.834232	0.838508
1.0	0.842701	0.84681	0.850838	0.854784	0.85865	0.862436	0.866144	0.869773	0.873326	0.876803
1.1	0.880205	0.883533	0.886788	0.889971	0.893082	0.896124	0.899096	0.902	0.904837	0.907608
1.2	0.910314	0.912956	0.915534	0.91805	0.920505	0.9229	0.925236	0.927514	0.929734	0.931899
1.3	0.934008	0.936063	0.938065	0.940015	0.941914	0.943762	0.945561	0.947312	0.949016	0.950673
1.4	0.952285	0.953852	0.955376	0.956857	0.958297	0.959695	0.961054	0.962373	0.963654	0.964898
1.5	0.966105	0.967277	0.968413	0.969516	0.970586	0.971623	0.972628	0.973603	0.974547	0.975462
1.6	0.976348	0.977207	0.978038	0.978843	0.979622	0.980376	0.981105	0.98181	0.982493	0.983153
1.7	0.98379	0.984407	0.985003	0.985578	0.986135	0.986672	0.98719	0.987691	0.988174	0.988641
1.8	0.989091	0.989525	0.989943	0.990347	0.990736	0.991111	0.991472	0.991821	0.992156	0.992479
1.9	0.99279	0.99309	0.993378	0.993656	0.993923	0.994179	0.994426	0.994664	0.994892	0.995111
2.0	0.995322	0.995525	0.995719	0.995906	0.996086	0.996258	0.996423	0.996582	0.996734	0.99688
2.1	0.997021	0.997155	0.997284	0.997407	0.997525	0.997639	0.997747	0.997851	0.997951	0.998046
2.2	0.998137	0.998224	0.998308	0.998388	0.998464	0.998537	0.998607	0.998674	0.998738	0.998799
2.3	0.998857	0.998912	0.998966	0.999016	0.999065	0.999111	0.999155	0.999197	0.999237	0.999275
2.4	0.999311	0.999346	0.999379	0.999411	0.999441	0.999469	0.999497	0.999523	0.999547	0.999571
2.5	0.999593	0.999614	0.999635	0.999654	0.999672	0.999689	0.999706	0.999722	0.999736	0.999751
2.6	0.999764	0.999777	0.999789	0.9998	0.999811	0.999822	0.999831	0.999841	0.999849	0.999858
2.7	0.999866	0.999873	0.99988	0.999887	0.999893	0.999899	0.999905	0.99991	0.999916	0.99992
2.8	0.999925	0.999929	0.999933	0.999937	0.999941	0.999944	0.999948	0.999951	0.999954	0.999956
2.9	0.999959	0.999961	0.999964	0.999966	0.999968	0.99997	0.999972	0.999973	0.999975	0.999976

TCG3.- Calcular la fracción de moléculas de un gas que tienen un valor de v_x^2 mayor que la velocidad cuadrática media $\langle v_x^2 \rangle$. Demostrar que dicha fracción es la misma para todos los gases y a cualquier temperatura

$$\frac{N_{v_x}\left(\left|v_x\right| > \left\langle v_x^2 \right\rangle^{\frac{1}{2}}\right)}{N} = 1-2\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\left(\frac{kT}{m}\right)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{m}{2kT}v_x^2}\, dv_x =$$

$$= 1 - fer\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - fer\left(0.7071\right)$$

⇒

$$\frac{N_{v_x}}{N} = 1 - 0.6827 = 31.73\%$$

TCG4.- Calcular el número de átomos de argón que, en una muestra gaseosa de 1 mol de átomos de argón a 273.15 K, tienen una componente *x* de la velocidad entre 450 y 460 m s^{-1}.

Repetir el cálculo para el intervalo 450 < v_x < 470 m s^{-1}

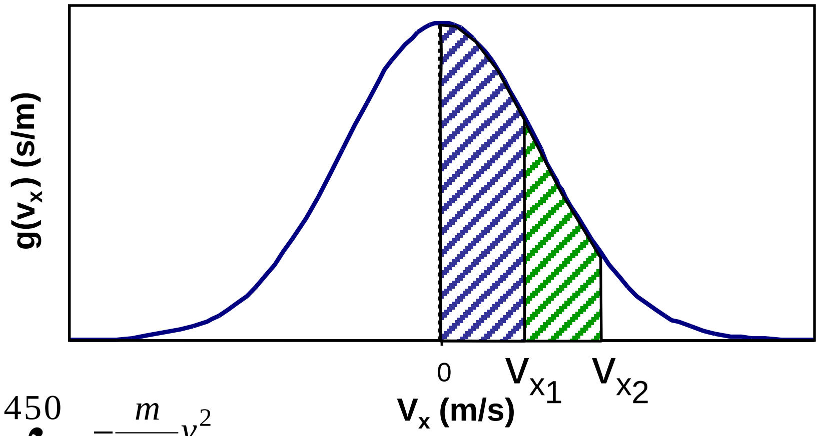
$$\frac{N_{v_x}\left(v_{x_1}\le v_x\le v_{x_2}\right)}{N}=\int_{v_{x_1}}^{v_{x_2}} g(v_x)\,dv_x=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{450}^{460} e^{-\frac{m}{2kT}v_x^2}\,dv_x=$$

Debemos transformar esta integral en una que se pueda resolver mediante la función error:

$$Erf\left[z\right]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}\,dt=$$

$$=\boxed{\int_0^{v_{x_2}} g(v_x)\,dv_x}-\boxed{\int_0^{v_{x_1}} g(v_x)\,dv_x}$$

$$=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^{460} e^{-\frac{m}{2kT}v_x^2}\,dv_x-\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^{450} e^{-\frac{m}{2kT}v_x^2}\,dv_x$$



TCG4.- Calcular el número de átomos de argón que, en una muestra gaseosa de 1 mol de átomos de argón a 273.15 K, tienen una componente *x* de la velocidad entre 450 y 460 m s^{-1}.

Repetir el cálculo para el intervalo 450 < v_x < 470 m s^{-1}

$$\frac{N_{v_x}\left(v_{x_1} \le v_x \le v_{x_2}\right)}{N} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{460} e^{-\frac{m}{2kT}v_x^2}\,dv_x - \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{450} e^{-\frac{m}{2kT}v_x^2}\,dv_x$$

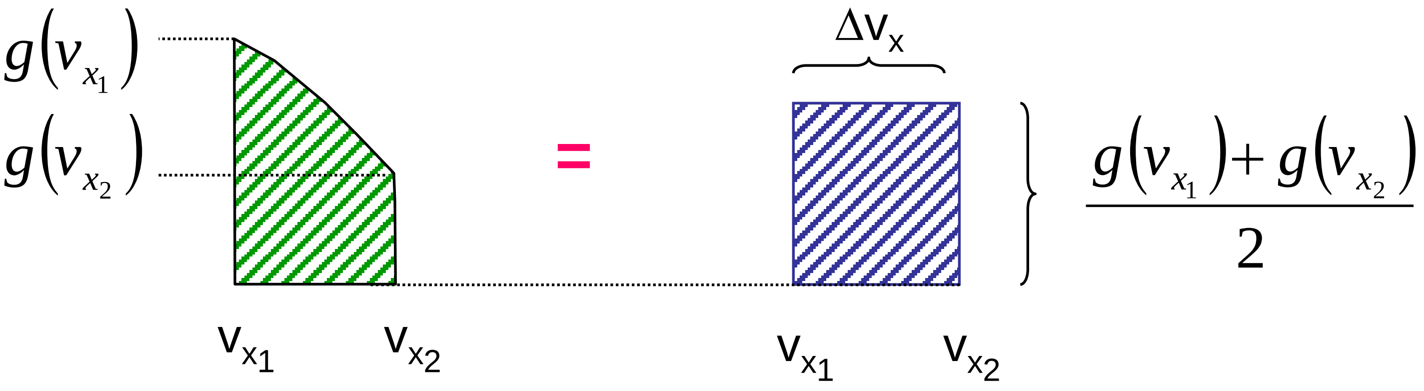
$$= \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\pi^{1/2}}{2\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{erf}\left(\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 460\right) - \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\pi^{1/2}}{2\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{erf}\left(\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 450\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\mathrm{erf}(1.3642) - \mathrm{erf}(1.3346)\right] = 0.0027$$

$$N_{v_x} = N_{Av}\,0.0027 = 1.626 \cdot 10^{21} \text{ átomos}$$

TCG4.- Calcular el número de átomos de argón que, en una muestra gaseosa de 1 mol de átomos de argón a 273.15 K, tienen una componente *x* de la velocidad entre 450 y 460 m s^{-1}.
Repetir el cálculo para el intervalo 450 < v_x < 470 m s^{-1}

para intervalos pequeños se puede hacer una aproximación:



$$\frac{g(v_{x_1})+g(v_{x_2})}{2}$$

$$\int_{v_{x1}}^{v_{x2}} g(v_x)dv_x = \overline{g(v_x)}\Delta v_x$$

$$\left.\begin{aligned} g(v_{x_1} = 450\ ms^{-1}) &= 2.6019 \cdot 10^{-4}\ m^{-1}s \\ g(v_{x_2} = 460\ ms^{-1}) &= 2.8187 \cdot 10^{-4}\ m^{-1}s \end{aligned}\right\} \overline{g(v_x)} = 2.7103 \cdot 10^{-4}\, m^{-1}s$$

$$\frac{N_{v_x}(v_{x_1} \le v_x \le v_{x_2})}{N} = 2.7103 \cdot 10^{-4}\, m^{-1}s \cdot 10 = 2.7 \cdot 10^{-3}$$

TCG5.- Calcular la fracción de moléculas que, en una muestra gaseosa de O_2 a 300 K, tiene una velocidad tal que sus componentes se encuentran en los siguientes intervalos:

- **a) $500.0 < v_x < 502.0$; $370.0 < v_y < 375.0$; $420.0 < v_z < 423.0$**
- **b) $473.0 < v_x < 478.0$; $498.0 < v_y < 500.0$; $302.6 < v_z < 305.6$**
- **c) $500.0 < v_x < 503.0$; $-370.0 < v_y < -372.0$; $-420.0 < v_z < -425.0$**

$$\frac{dN_{\vec{v}}}{N} = dp(\vec{v}) = \phi(\vec{v})d\vec{v} = \phi(\vec{v})dv_x dv_y dv_z$$

$$\phi(\vec{v}) = g(v_x)g(v_y)g(v_z)$$

$$\frac{N_{v_x v_y v_z}}{N} = \int \frac{dN_{v_x v_y v_z}}{N} = \int \phi(\vec{v})dv_x dv_y dv_z = \int g(v_x)dv_x \int g(v_y)dv_y \int g(v_z)dv_z$$

$$= \frac{N_{v_x}}{N}\frac{N_{v_y}}{N}\frac{N_{v_z}}{N}$$

TCG5.- Calcular la fracción de moléculas que, en una muestra gaseosa de O_2 a 300 K, tiene una velocidad tal que sus componentes se encuentran en los siguientes intervalos:

a) $500.0 < v_x < 502.0$; $370.0 < v_y < 375.0$; $420.0 < v_z < 423.0$

$$\frac{N_{v_x v_y v_z}}{N} = \int g(v_x)dv_x \int g(v_y)dv_y \int g(v_z)dv_z =$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \int_{500}^{502} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x \int_{370}^{375} e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}} dv_y \int_{420}^{423} e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}} dv_z =$$

intervalos pequeños:

$$\approx \left[\overline{g(v_x)}\Delta v_x\right]\left[\overline{g(v_y)}\Delta v_y\right]\left[\overline{g(v_z)}\Delta v_z\right]$$

$$g(v_x) = \left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{Mv_x^2}{2RT}\right) = 1.4289 \cdot 10^{-3} e^{-6.4145 \cdot 10^{-6} (v_x)^2}$$

$$\left.\begin{aligned} M &= 32 \cdot 10^{-3} Kg \cdot mol^{-1} \\ T &= 300 K \\ R &= 8.3145 JK^{-1} mol^{-1} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} g(500) &= 2.8745 \cdot 10^{-4} m^{-1}s \\ g(502) &= 2.8378 \cdot 10^{-4} m^{-1}s \end{aligned}\right\} \overline{g(v_x)} = 2.8562 \cdot 10^{-4} m^{-1}s$$

TCG5.- Calcular la fracción de moléculas que, en una muestra gaseosa de O_2 a 300 K, tiene una velocidad tal que sus componentes se encuentran en los siguientes intervalos:

a) $500.0 < v_x < 502.0$; $370.0 < v_y < 375.0$; $420.0 < v_z < 423.0$

análogamente:

$$\overline{g(v_x)} = 2.8562\cdot 10^{-4}\, m^{-1}s$$

$$\overline{g(v_y)} = 5.8678\cdot 10^{-4}\, m^{-1}s$$

$$\overline{g(v_z)} = 4.57182\cdot 10^{-4}\, m^{-1}s$$

$$\frac{N_{v_x v_y v_z}}{N} =$$

$$= \left(2.8562\cdot 10^{-4}\, m^{-1}s \cdot 2\, ms^{-1}\right)\left(5.8678\cdot 10^{-4}\, m^{-1}s \cdot 5\, ms^{-1}\right)\left(4.5718\cdot 10^{-4}\, m^{-1}s \cdot 3\, ms^{-1}\right) =$$

$$= 2.2986\cdot 10^{-9}$$

análogamente:

b) $$\frac{N_{v_x v_y v_z}}{N} = 2.2963\cdot 10^{-9}$$

c) $$\frac{N_{v_x v_y v_z}}{N} = 2.2953\cdot 10^{-9}$$

TCG6.- **Calcular la densidad de probabilidad para la velocidad de una muestra de moléculas de O_2 a 300 K en el intervalo $0 < v < 1000$ m s^{-1}. Representar la función de distribución resultante**

$$G(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

$$\frac{dN_v}{N} = G(v)dv$$

= fracción de moléculas con módulo de velocidad entre v y v + dv

$$M = 32\cdot 10^{-3}\,Kg\ mol^{-1}$$

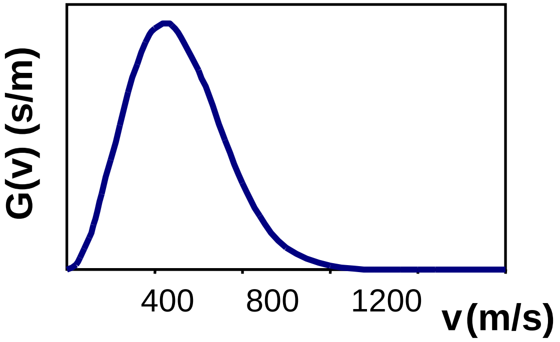
$$T = 300K$$

$$R = 8.3145\,JK^{-1}mol^{-1}$$

$$\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} = \left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2} = 2.9175\cdot 10^{-9}\,m^{-3}s^{3}$$

$$\left(\frac{m}{2kT}\right) = \left(\frac{M}{2RT}\right) = 6.4145\cdot 10^{-6}\,m^{-2}s^{2}$$

$$G(v) = 3.6663\cdot 10^{-8}\,v^2 \exp\left(-6.4145\cdot 10^{-6}\,v^2\right)$$



TCG7.- Calcular, para el O_2 a 15 °C y 1 atm, el cociente de la probabilidad de que una molécula tenga su velocidad en un intervalo infinitesimal *dv* localizado a 500 m s^{-1} y la probabilidad de que esté en un intervalo infinitesimal *dv* localizado a 1500 m s^{-1}.

¿A qué temperatura tendrá el O_2(g) la misma densidad de probabilidad de velocidad para *v* = 500 m s^{-1} y *v* = 1500 m s^{-1}?

$$\left.\begin{aligned}\frac{dN_{v_1}}{N} &= G(v_1)dv \\ \frac{dN_{v_2}}{N} &= G(v_2)dv\end{aligned}\right\} \quad \frac{\dfrac{dN_{v_1}}{N}}{\dfrac{dN_{v_2}}{N}} = \frac{G(v_1)}{G(v_2)}$$

$$G(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

$$\frac{G(v_1)}{G(v_2)} = \frac{v_1^2 e^{-\frac{mv_1^2}{2kT}}}{v_2^2 e^{-\frac{mv_2^2}{2kT}}} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 e^{-\frac{m}{2kT}\left(v_1^2 - v_2^2\right)}$$

$$\left.\begin{aligned} M &= 32\cdot 10^{-3}\, Kg\ mol^{-1} \\ T &= 300K \\ R &= 8.3145 JK^{-1} mol^{-1}\end{aligned}\right\} \quad \left(\frac{m}{2kT}\right) = \left(\frac{M}{2RT}\right) = 6.6783\cdot 10^{-6}\, m^{-2} s^{2}$$

TCG7.- Calcular, para el O_2 a 15 °C y 1 atm, el cociente de la probabilidad de que una molécula tenga su velocidad en un intervalo infinitesimal *dv* localizado a 500 m s^{-1} y la probabilidad de que esté en un intervalo infinitesimal *dv* localizado a 1500 m s^{-1}.
¿A qué temperatura tendrá el O_2(g) la misma densidad de probabilidad de velocidad para *v* = 500 m s^{-1} y *v* = 1500 m s^{-1}?

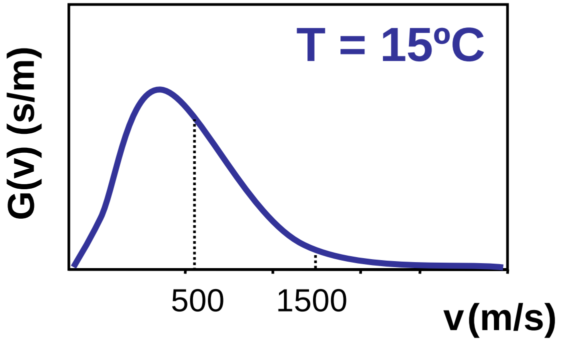
$$\frac{G(v_1)}{G(v_2)} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 e^{-\frac{m}{2kT}\left(v_1^2 - v_2^2\right)} \Rightarrow \frac{G(500)}{G(1500)} = \left(\frac{500}{1500}\right)^2 e^{-6.6783\cdot 10^{-6}\left(500^2 - 1500^2\right)} = 70219$$

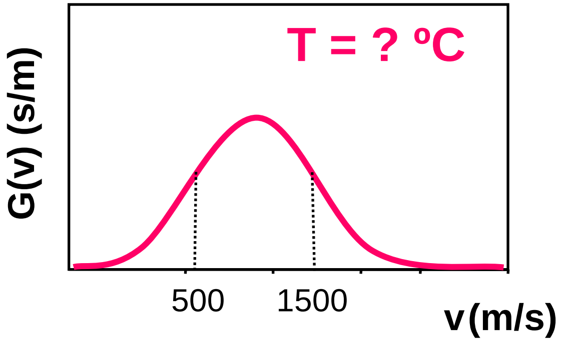
por una molécula con v entre 1500 m s^{-1} y 1500 + dv ms^{-1}

hay 70219 moléculas con v entre 500 m s^{-1} y 500 + dv ms^{-1}

TCG7.- Calcular, para el O_2 a 15 °C y 1 atm, el cociente de la probabilidad de que una molécula tenga su velocidad en un intervalo infinitesimal *dv* localizado a 500 m s^{-1} y la probabilidad de que esté en un intervalo infinitesimal *dv* localizado a 1500 m s^{-1}.

¿A qué temperatura tendrá el $O_2(g)$ la misma densidad de probabilidad de velocidad para *v* = 500 m s^{-1} y *v* = 1500 m s^{-1}?





$$\frac{G(v_1)}{G(v_2)} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 e^{-\frac{m}{2kT}\left(v_1^2 - v_2^2\right)} = 1$$

$$1 = \left(\frac{500}{1500}\right)^2 e^{-\frac{32\cdot 10^{-3}}{2\cdot 8.31451\cdot T}\left(500^2 - 1500^2\right)} \Rightarrow T = 1751.6\ \mathrm{K}$$

TCG8.- **Calcular el porcentaje de moléculas que, en una muestra de O_2 a 300 K, tienen velocidades entre (a) 200 y 400 m s^{-1}, (b) 400 y 600 m s^{-1}. Calcular dicho porcentaje en el intervalo 200 < *v* < 600 m s^{-1} para una muestra de moléculas de H_2 a 300 y a 500K.**

$$\frac{N\left(v_1 < v < v_2\right)}{N} = \int_{v_1}^{v_2} \frac{dN_v}{N} = \int_{v_1}^{v_2} G\left(v\right)dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_{v_1}^{v_2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)dv$$

$$\frac{dN_v}{N} = G\left(v\right)dv \qquad G(v) = 4\pi v^2\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

TCG8.- Calcular el porcentaje de moléculas que, en una muestra de O_2 a 300 K, tienen velocidades entre (a) 200 y 400 m s^{-1}, (b) 400 y 600 m s^{-1}. Calcular dicho porcentaje en el intervalo 200 < *v* < 600 m s^{-1} para una muestra de moléculas de H_2 a 300 y a 500K.

$$\frac{N(v_1 < v < v_2)}{N} = \int_{v_1}^{v_2} \frac{dN_v}{N} = \int_{v_1}^{v_2} G(v)dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_{v_1}^{v_2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)dv$$

interesa que el límite inferior sea cero:

$$\frac{N(v_1 < v < v_2)}{N} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_{0}^{v_2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)dv - 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_{0}^{v_1} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)dv$$

De acuerdo con las tablas de integrales:

$$\int_0^x t^2 e^{-at^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^{\frac{3}{2}}}\mathrm{Erf}\left(\sqrt{a}x\right) - \frac{x}{2a}e^{-ax^2}$$

TCG8.- Calcular el porcentaje de moléculas que, en una muestra de O_2 a 300 K, tienen velocidades entre (a) 200 y 400 m s^{-1}, (b) 400 y 600 m s^{-1}. Calcular dicho porcentaje en el intervalo 200 < *v* < 600 m s^{-1} para una muestra de moléculas de H_2 a 300 y a 500K.

$$
\begin{aligned}
\frac{N(v_1 < v < v_2)}{N} &= 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\pi^{1/2}}{4\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{erf}\left(\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot v_2\right) - \frac{v_2}{2\left(\frac{m}{2kT}\right)}e^{-\frac{mv_2^2}{2kT}}\right] - \\
&\quad - 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\pi^{1/2}}{4\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{erf}\left(\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot v_1\right) - \frac{v_1}{2\left(\frac{m}{2kT}\right)}e^{-\frac{mv_1^2}{2kT}}\right] \\
&= \left[\operatorname{erf}\left(\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot v_2\right) - \frac{2}{\pi^{1/2}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{1}{2}} v_2 e^{-\frac{mv_2^2}{2kT}}\right] - \\
&\quad - \left[\operatorname{erf}\left(\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot v_1\right) - \frac{2}{\pi^{1/2}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{1}{2}} v_1 e^{-\frac{mv_1^2}{2kT}}\right]
\end{aligned}
$$

TCG8.- **Calcular el porcentaje de moléculas que, en una muestra de O_2 a 300 K, tienen velocidades entre (a) 200 y 400 m s^{-1}, (b) 400 y 600 m s^{-1}. Calcular dicho porcentaje en el intervalo 200 < *v* < 600 m s^{-1} para una muestra de moléculas de H_2 a 300 y a 500K.**

$$\frac{N(v_1 < v < v_2)}{N} = \operatorname{erf}[1.0131] - \frac{2}{\pi^{1/2}} 1.0131 \cdot e^{-(1.0131)^2}$$

$$- \operatorname{erf}[0.5065] + \frac{2}{\pi^{1/2}} 0.5065 \cdot e^{-(0.5065)^2}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{fer}[0.5065] &= 0.5262 \\ \operatorname{fer}[1.0131] &= 0.8480 \end{aligned}\right\} \qquad \frac{N(v_1 < v < v_2)}{N} = 0.3544$$

$$= 35.44\%$$

TCG9.- a) ¿Cuál es la proporción de moléculas gaseosas con velocidades menores que la raíz de la velocidad cuadrática media?

b) ¿Cuál es la proporción con velocidades menores que la velocidad media?

$$\langle v^2\rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3RT}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad\qquad \langle v\rangle = \left(\frac{8RT}{\pi M}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{N(v<v_1)}{N} = \int_0^{v_1} G(v)dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_0^{v_1} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)dv =$$

$$= \mathrm{fer}[x_1] - \frac{2}{\sqrt{\pi}}x_1 e^{-x_1^2}$$

donde $x = \left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{1}{2}} v$ (véase el problema anterior)

a) $$v_1 = \left(\frac{3RT}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow x_1 = \left(\frac{M}{2RT}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3RT}{M}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.2247$$

$$\left.\begin{array}{l} fer[1.22] = 0.9155 \\ fer[1.23] = 0.9181 \end{array}\right\} fer[1.2247] = 0.9167 \qquad \frac{N\left(v<\langle v^2\rangle^{\frac{1}{2}}\right)}{N} = 0.6084 = 60.84\%$$

TCG9.- **a) ¿Cuál es la proporción de moléculas gaseosas con velocidades menores que la raíz de la velocidad cuadrática media?**
b) ¿Cuál es la proporción con velocidades menores que la velocidad media?

$$\langle v^2\rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3RT}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \langle v\rangle = \left(\frac{8RT}{\pi M}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{N(v<v_1)}{N} = \int_0^{v_1} G(v)dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_0^{v_1} v^2\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)dv =$$

$$x = \left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{1}{2}} v \qquad = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x_1} x^2\exp\left(-x^2\right)dx = fer\left[x_1\right] - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, x_1 e^{-x_1^2} =$$

b) $$v_1 = \left(\frac{8RT}{\pi M}\right)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow x_1 = \left(\frac{M}{2RT}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{8RT}{\pi M}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.1284$$

$$fer\left[1.1284\right] = 0.8895 \qquad \frac{N\left(v<\langle v\rangle\right)}{N} = 0.5330 \quad = 53.30\%$$