
MATEMÁTICAS ECONÓMICO- EMPRESARIALES

Índice

Prólogo	9
Introducción	11
Tema 1: Límites y continuidad de funciones	15
1.1 Funciones de varias variables	15
1.2 Nociones de topología en $\mathbb{R}^n$	17
1.3 Límites y continuidad	19
1.4 Problemas	24
1.5 Cuestiones	28
Tema 2: Derivación	31
2.1 Incrementos parciales	31
2.2 Derivadas parciales	32
2.3 Conceptos relacionados con las derivadas	38
2.4 Algunas demostraciones	41
2.5 Problemas	42
2.6 Cuestiones	49
Tema 3: Diferenciabilidad	53
3.1 Incrementos totales	53
3.2 Funciones diferenciables	54
3.3 El polinomio de Taylor	60
3.4 Problemas	62
3.5 Cuestiones	65
Tema 4: Funciones compuestas, implícitas y homogéneas	69
4.1 Composición de funciones	69
4.2 Funciones implícitas	71
4.3 Funciones homogéneas	73
4.4 Problemas	75
4.5 Cuestiones	81
Tema 5: La integral definida	83
5.1 La integral de Riemann	83
5.2 La integral impropia	90
5.3 Problemas	94

Tema 6: Convexidad	99
6.1 Formas cuadráticas	99
6.2 Conjuntos convexos	103
6.3 Funciones cóncavas y convexas	105
6.4 Problemas	107
6.5 Cuestiones	109
Tema 7: Ecuaciones diferenciales	111
Apéndice A: Álgebra lineal	117
A.1 Vectores y matrices	117
A.2 Determinantes	119
A.3 Sistemas de ecuaciones lineales	120
A.4 Matrices inversas	123
Apéndice B: Tablas	127
Apéndice C: Derivadas e integrales	129

Prólogo

Este libro contiene los materiales que sigo en mis clases de la asignatura *Matemáticas económico-empresariales*, correspondiente al primer curso tanto de la licenciatura en Economía como en la de Administración y dirección de empresas. Al usarlo, debes tener presente que está concebido como un complemento, y no un sustituto, de las clases. Aquí encontrarás, por una parte, el material teórico que es preferible que tengas por escrito de antemano, de modo que no tengas que copiarlo de la pizarra con el riesgo de introducir errores y omisiones, así como una colección de problemas para trabajar en clase o en casa.

El material está organizado de la forma más clara y lógica posible para facilitar, tanto la consulta a la hora de resolver problemas, como el estudio a la hora de prepararte para el examen, una vez tienes claros los contenidos de cada tema. Sin embargo, no debes olvidar que el momento y el lugar destinados a que asimiles dichos contenidos son las clases y, en su caso, las tutorías. Por ello, el libro no incluye más que unos pocos ejemplos y ejercicios resueltos, para evitar que trates de prescindir de una explicación en persona en la que tu profesor pueda destacarte todos los aspectos relevantes de la materia tratada y relacionarlos con otras situaciones similares o más generales y, en su lugar, te limites a leer una solución más o menos escueta de un ejemplo concreto. Por el mismo motivo, el libro tampoco incluye aquellas explicaciones teóricas que se comprenden muy bien en una explicación de un cuarto de hora pero que, para plasmarlas por escrito con todos los matices, haría falta llenar páginas y más páginas.

De este modo, una vez hayas asimilado la materia, este libro te proporcionará una panorámica clara de qué necesitas estudiar y a qué clases de problemas te has de enfrentar. Aunque las ideas fundamentales aparecen recuadradas en el texto, en cierto sentido, todo lo que hay en el texto son ideas fundamentales, ya que, tal y como decimos, en él se tiende a evitar todas las explicaciones que, siendo necesarias para entender, se vuelven “paja” cuando ya has entendido.

Quiero dar las gracias a todos mis compañeros de departamento que han contribuido a mejorar este libro a lo largo de los años en que ha circulado en formato de apuntes (la primera versión se remonta al curso 2000–2001), así como al Servicio de Publicaciones de la Universidad de Valencia por su ofrecimiento de publicar estos materiales en esta colección.

Valencia, septiembre de 2008
Carlos Ivorra

Introducción: las matemáticas en la economía y en la empresa

El objetivo principal de este curso es proporcionarte las herramientas matemáticas básicas que requiere la economía y, más concretamente, que necesitarás en otras asignaturas de la Licenciatura. Son muchos los alumnos con problemas para asimilar los contenidos de esta asignatura, lo cual se debe en gran parte a la dificultad que requiere trabajar con conceptos abstractos. Para atenuar este inconveniente trataremos de exponer los conceptos que requiere la asignatura en un entorno lo más “confortable” posible para un alumno familiarizado o que empieza a familiarizarse con la teoría económica básica.

Ahora no puedes formarte una idea general del papel y la función que desempeñan las matemáticas dentro de la economía, pero conviene que comprendas desde el primer momento que las matemáticas son imprescindibles en muchos contextos y convenientes en otros. La aplicación más directa de la matemática a la economía la tenemos en la matemática financiera. Es la que nos permite resolver problemas tales como cuánto dinero me ha de dar un banco después de haber tenido depositado un capital durante tantos años con tal tipo de interés, o qué pensión mensual me corresponderá cuando me jubile si durante los últimos 20 años he estado aportando tales cantidades a un plan de pensiones con tales condiciones de rentabilidad, etc. Un ejemplo más sofisticado es el problema de valorar inversiones. Por poner un caso especialmente delicado ¿cuánto vale un seguro de vida?, es decir, ¿cuánto ha de cobrar una empresa aseguradora a sus clientes de modo que sus tarifas sean lo suficientemente bajas para ser competitivas y lo suficientemente altas para obtener un cierto margen de beneficio? Este problema involucra un estudio estadístico sobre el riesgo de mortalidad de la población, que ya de por sí requiere un cierto aparato matemático, pero aun hecho esto, todavía hay que estudiar cómo usar esta información para llegar a una valoración fiable. Por otro lado la matemática puede aplicarse al estudio del comportamiento de realidades matemáticas complejas, de modo que nos permite hacer conjeturas razonables sobre el comportamiento de los precios en un mercado en función de la oferta y la demanda, etc. En el campo de la empresa, la matemática es útil a la hora de tomar decisiones. Por ejemplo, un estudio detallado de una empresa puede sugerir variaciones que permitan reducir costes o aumentar beneficios, pero a menudo las posibilidades son demasiadas para analizarlas todas hasta el punto de poder comparar unas con otras, y la matemática proporciona métodos para buscar la mejor solución viable que satisfaga los objetivos buscados. Se podrían poner muchos ejemplos más.

La modelización matemática Para entender el uso de las matemáticas en economía es fundamental el concepto de modelización. Las matemáticas no reflejan la

realidad tal cual es, sino que la modelizan, lo cual supone hacer abstracción de aquellos aspectos de la realidad que no son relevantes para el problema que se estudia. Sucede lo mismo en todas las aplicaciones de la matemática: para estudiar un eclipse de luna podemos considerar al Sol, la Tierra y la Luna como tres esferas de ciertos radios y a ciertas distancias. En realidad la Tierra no es una esfera, pues tiene valles y montañas, pero eso no importa para el estudio de los eclipses. Por ello una esfera es un modelo matemático aceptable de la Tierra. Similarmente, a la hora de estudiar las relaciones básicas entre la demanda de un artículo en un mercado y su precio, podemos suponer que la demanda sólo depende del precio, lo cual no es cierto, pero las conclusiones que obtengamos serán válidas en un contexto en el que otros factores que también influyen, como pueda ser la inflación, el comportamiento de la competencia, etc. permanezcan constantes y no afecten a la demanda. En realidad, determinar qué aspectos de la realidad son relevantes en un problema es algo muy complejo, por lo que las consecuencias de cualquier modelización matemática en economía deben ser contrastadas con la realidad para determinar su fiabilidad.

Matemática continua y matemática discreta Las técnicas matemáticas aplicadas a la economía pueden dividirse en dos tipos: técnicas continuas y técnicas discretas. Usamos matemática discreta cuando suponemos que las magnitudes que manejamos no pueden tomar valores menores que ciertas cantidades mínimas. Por ejemplo, si estudiamos el beneficio que obtiene una fábrica de coches, podemos considerar el caso en que venda 700 coches anuales, o 746, pero no 892.13. La mínima cantidad de coches que se puede vender es 1 coche, la mínima cantidad de dinero que se puede pagar (en euros) es 0.01 €, etc. Éstos son ejemplos de magnitudes discretas y usamos matemáticas discretas cuando nuestros modelos tienen en cuenta este hecho.

Ahora bien, también es posible modelizar una realidad que involucra magnitudes discretas y considerarlas como magnitudes continuas, es decir, admitir que tomen cualquier valor fraccionario por pequeño que sea. Con ello tenemos a nuestra disposición todas las técnicas de la matemática continua, que son mucho más potentes que las de la matemática discreta. Esto es razonable porque casi nunca supone una distorsión significativa de la realidad.

Ejemplo Supongamos que abrimos una cuenta corriente con 500€ en un banco que nos ofrece un 3% de interés efectivo anual. ¿Cuánto dinero tendremos al cabo de una hora?, ¿cuánto tiempo ha de pasar para obtener unos intereses de 0.01€?

SOLUCIÓN: El tanto por uno anual es $i = 0.03$ y el capital acumulado en un tiempo t (expresado en años) viene dado por

$$C = C_0(1 + i)^t = 500(1.03)^t.$$

En un año hay $365 \times 24 = 8760$ horas, luego una hora son $t = 1/8760$ años, y la fórmula anterior nos da $C = 500.0017$ €.

Para la segunda pregunta buscamos el tiempo t para el cual $C = 500.01$. Para despejarlo hemos de tomar logaritmos:

$$\begin{aligned} 500.01 &= 500(1.03)^t \Rightarrow (1.03)^t = \frac{500.01}{500} \Rightarrow \ln(1.03)^t = \ln \frac{500.01}{500} \\ \Rightarrow t \ln(1.03) &= \ln \frac{500.01}{500} \Rightarrow t = \frac{\ln \frac{500.01}{500}}{\ln(1.03)} \approx 0.00067 \text{ años} \approx 6 \text{ horas.} \end{aligned}$$

En la práctica, si vamos al banco una hora después a cancelar la cuenta, no nos darán 500.0017 €, sino simplemente 500 € (en realidad menos, por los gastos que genera la cuenta). No obstante, hemos de comprender que, aunque las preguntas del problema anterior son ridículas —pues nadie puede esperar que un banco le dé interés alguno por un depósito de seis horas— desde un punto de vista teórico es fundamental que la ley de capitalización $C = C_0(1+i)^t$ pueda calcularse para cualquier tiempo t , por pequeño que sea, pues sólo así tiene sentido aplicar las técnicas de la matemática continua que vamos a estudiar. Lo único que hemos de tener presente es que las conclusiones relevantes serán únicamente las que afecten a valores “razonables” de t .

Los números reales Llamaremos $\mathbb{R}$ al conjunto de los números reales, en el cual están incluidos los números enteros, 0, 1, -1, 2, -2, ..., los números racionales $3/4$, $27/5$, $-8/17$, etc. y todos los números que admiten una expresión decimal arbitraria, tales como

$$\sqrt{2} = 1.4142135\dots, \quad \pi = 3.1415926\dots \quad \ln 1.03 = 0.0295588\dots$$

Todas las técnicas que vamos a estudiar corresponden a la matemática continua, lo cual significa, según hemos explicado, que consideraremos que cualquier magnitud económica viene expresada por un número real, al que podremos imponer restricciones cualitativas (por ejemplo, el precio de un producto no puede ser un número negativo), pero nunca lo restringiremos a valores discretos. Así, admitiremos que un problema nos lleve a la conclusión de que el precio óptimo al que una empresa debe vender un producto sea $p = \sqrt{2}$ €. Puesto que es prácticamente imposible que un precio tenga infinitos decimales, esto deberá interpretarse en último extremo como que el precio óptimo será de $p = 1.41$ €. A lo largo del curso comprenderemos las repercusiones de este hecho.

Tema 1

Límites y continuidad de funciones

El concepto de función es fundamental a la hora de estudiar matemáticamente la relación entre distintas magnitudes. Se dice que una magnitud M es función de otras magnitudes $x_1, \dots, x_n$ si el valor que toman éstas determina completamente el valor de M . En tal caso escribimos que $M = M(x_1, \dots, x_n)$. Por ejemplo, si depositamos un capital en un banco, el capital C disponible en un tiempo dado t es función de t , del capital inicial depositado C_0 y del tipo de interés i . Concretamente

$$C = C(C_0, i, t) = C_0(1 + i)^t.$$

Esta fórmula nos dice cómo calcular C si conocemos las variables C_0 , i , t . En general, la relación entre una magnitud y otras no tiene por qué ser expresable mediante una única fórmula matemática. Por ejemplo, supongamos que un trabajador es contratado por tres años con un sueldo de 200.000 € anuales con una revisión anual del 4%. Entonces su salario S como función del tiempo $S = S(t)$ viene dado por

$$S(t) = \begin{cases} 200.000 & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ 208.000 & \text{si } 1 \leq t < 2, \\ 216.320 & \text{si } 2 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

Más en general, es frecuente que una magnitud pueda considerarse función de otras sin que conozcamos explícitamente la relación entre ellas. En tales casos entra en juego la modelización matemática, que nos lleva a proponer fórmulas aproximadas o razonables según para qué propósitos. Por ejemplo, se puede suponer que la demanda de un artículo es función de su precio, lo cual no es exacto, pues además del precio pueden influir otros muchos factores, si bien éstos pueden ser despreciados en la medida en la que puedan considerarse constantes. Aún así, una relación explícita entre demanda y precios siempre deberá considerarse como una aproximación teórica más o menos simplificada a una función que en realidad es muy compleja.

1.1 Funciones de varias variables

Definición Una *función escalar* de n variables reales es una función

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

es decir, cualquier criterio que a cada punto $\bar{x} \in D$ le asigna un número real, que se representa por $f(\bar{x})$. El conjunto D sobre el que está definida la función f (es decir, donde tiene sentido calcularla) se llama *dominio* de f .

Ejemplo La función $f(x, y, z) = \ln(x + y + z)$ es una función escalar definida sobre el conjunto

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z > 0\} \subset \mathbb{R}^3.$$

■

En general, para determinar el dominio de una función habrá que tener en cuenta las restricciones siguientes:

1. El denominador de una fracción ha de ser $\neq 0$.
2. El argumento de un logaritmo ha de ser > 0 .
3. El radicando de una raíz de índice par ha de ser ≥ 0 .
4. La base de una potencia de exponente variable ha de ser > 0 .

A la hora de aplicar estas reglas hay que tener presente que un exponente negativo “enmascara” una fracción, y un exponente fraccionario una raíz, debido a que

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}.$$

A menudo sucede que, si una función tiene una interpretación económica, conviene considerarla definida en un conjunto menor que su dominio matemático:

Ejemplo La función $C(C_0, i, t) = C_0(1 + i)^t$ es una función escalar cuyo dominio matemático es

$$D = \{(C_0, i, t) \in \mathbb{R}^3 \mid i > -1\},$$

pues la única restricción (propiedad 4) es que la base $1 + i$ de la potencia ha de ser mayor que 0. No obstante, cuando consideramos a C como la ley de capitalización correspondiente al interés compuesto hemos de considerar que su dominio es

$$D' = \{(C_0, i, t) \in \mathbb{R}^3 \mid C_0 > 0, i > 0\},$$

pues no tiene sentido considerar capitales iniciales negativos C_0 (incluso podemos deshechar por trivial el caso de un capital nulo) ni tampoco tipos de interés negativos (o nulos). En determinados contextos convendrá considerar únicamente tiempos no negativos ($t \geq 0$), aunque en otros puede tener sentido que t sea arbitrario. ■

Entre las funciones escalares más simples se encuentran los polinomios:

Un *polinomio* es una función escalar determinada por una expresión en la que las únicas operaciones entre las variables son sumas, productos, productos por números reales y potencias con exponentes naturales.

Por ejemplo, la función

$$P(x, y, z) = 3x^4yz + y^2z^3 - 12x + 3y - 8$$

es un polinomio, mientras que las funciones

$$x^2y^{-3}, \quad x^5 + \sqrt{y}, \quad \frac{x+y}{x-y}$$

no son polinomios.

Dentro de los polinomios, los más simples a su vez son las funciones lineales:

Una *función lineal* es una función de la forma $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$, es decir, de la forma

número $\times$ variable $+\cdots+$ número $\times$ variable.

Definición Una *función vectorial* de n variables y m coordenadas es una función

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

es decir, cualquier criterio que a cada n números reales del dominio D les asigna m números reales.

Las funciones escalares son el caso particular de las funciones vectoriales que se da cuando $m = 1$. Toda función vectorial se expresa en la forma

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)),$$

donde las funciones $f_i : D \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones escalares del mismo dominio de f y se llaman *funciones coordenadas* de f .

Ejemplo La función $f(x, y, z) = (x^2/y, x + y + z)$ es una función vectorial de tres variables y dos funciones coordenadas. Su dominio es

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq 0\}$$

y sus funciones coordenadas son $f_1(x, y, z) = x^2/y$, $f_2(x, y, z) = x + y + z$. ■

1.2 Nociones de topología en $\mathbb{R}^n$

Definición El *producto escalar* de dos vectores $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ es el número real

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.$$

Por ejemplo, $(3, 5, 4)(1, 2, 3) = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 25$.

NOTA: Un error relativamente frecuente es hacer

$$(3, 5, 4)(1, 2, 3) = (3, 10, 12) \quad \text{¡MAL!}$$

El producto de dos vectores es un número, no un vector.

Definición La *norma* de un vector $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ se define como el escalar

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Geométricamente se trata de la longitud del vector $\bar{x}$.

Teorema Si $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son vectores no nulos en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \|\bar{x}\| \|\bar{y}\| \cos \phi,$$

donde ϕ es el ángulo que forman.

Como el coseno toma valores entre -1 y 1 , en particular tenemos la *desigualdad de Schwarz* (válida incluso si algún vector es nulo):

$$|\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq \|\bar{x}\| \|\bar{y}\|.$$

Las propiedades básicas de la norma vienen dadas por el teorema siguiente:

Teorema Si $\bar{x}, \bar{y}$ son vectores de $\mathbb{R}^n$ y α es un número real, se cumple:

1. $\|\bar{x}\| \geq 0$,
2. $\|\bar{x}\| = 0$ si y sólo si $\bar{x} = \bar{0}$,
3. $\|\alpha \bar{x}\| = |\alpha| \|\bar{x}\|$,
4. $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$.

DEMOSTRACIÓN La propiedad 1) es obvia, pues $\|\bar{x}\| = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}} \geq 0$ (las raíces cuadradas siempre son mayores o iguales que 0).

2) Se cumple $\|\bar{x}\| = 0$ si y sólo si $\sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}} = 0$, si y sólo si $\bar{x} \cdot \bar{x} = 0$ (pues el único número real con raíz cuadrada nula es 0), si y sólo si $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0$. Como todos los sumandos son mayores o iguales que 0 (porque son cuadrados) esto sucede si y sólo si cada $x_i^2 = 0$, es decir, si y sólo si cada $x_i = 0$, lo que a su vez equivale a que $\bar{x} = \bar{0}$.

$$\begin{aligned} 3) \|\alpha \bar{x}\| &= \sqrt{(\alpha x_1)^2 + \cdots + (\alpha x_n)^2} = \sqrt{\alpha^2 x_1^2 + \cdots + \alpha^2 x_n^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2 (x_1^2 + \cdots + x_n^2)} = |\alpha| \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = |\alpha| \|\bar{x}\|. \end{aligned}$$

4) Para demostrar que $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$ basta ver —elevando al cuadrado— que

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 \leq (\|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|)^2 = \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2 + 2\|\bar{x}\| \|\bar{y}\|.$$

Por la definición de norma, esto equivale a

$$(\bar{x} + \bar{y}) \cdot (\bar{x} + \bar{y}) \leq \bar{x} \cdot \bar{x} + \bar{y} \cdot \bar{y} + 2\|\bar{x}\| \|\bar{y}\|.$$

Por las propiedades del producto escalar, esto equivale a su vez a que

$$\bar{x} \cdot \bar{x} + \bar{y} \cdot \bar{y} + 2\bar{x} \cdot \bar{y} \leq \bar{x} \cdot \bar{x} + \bar{y} \cdot \bar{y} + 2\|\bar{x}\| \|\bar{y}\|.$$

Simplificando los términos iguales, lo que hemos de probar es

$$2\bar{x} \cdot \bar{y} \leq 2\|\bar{x}\| \|\bar{y}\|.$$

Eliminamos los doses y queda $\bar{x} \cdot \bar{y} \leq \|\bar{x}\| \|\bar{y}\|$. Ahora bien, esto se cumple por la desigualdad de Schwarz:

$$\bar{x} \cdot \bar{y} \leq |\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|.$$

■

Definición La *distancia* entre dos puntos de $\mathbb{R}^n$ se define como

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Definición Dado $\epsilon > 0$ y $\bar{p} \in \mathbb{R}^n$, se define la *bola abierta* de centro $\bar{p}$ y radio ϵ como el conjunto

$$B_\epsilon(\bar{p}) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\bar{x} - \bar{p}\| < \epsilon\}.$$

Así, para ϵ suficientemente pequeño, la bola $B_\epsilon(\bar{p})$ contiene todos los puntos de alrededor de $\bar{p}$, es decir, todos los puntos a los que podemos llegar mediante modificaciones pequeñas de $\bar{p}$.

Un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ es *abierto* si para todo punto $\bar{p} \in A$ existe un $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(\bar{p}) \subset A$.

En otras palabras, A es abierto si cuando estamos en un punto $\bar{p}$ de A podemos movernos en cualquier dirección sin salirnos de A .

Un subconjunto C de $\mathbb{R}^n$ es *cerrado* si su complementario $\mathbb{R}^n \setminus C$ es abierto.

Un punto $\bar{p} \in \mathbb{R}^n$ es un *punto de acumulación* de un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un punto $\bar{x} \in A$, $\bar{x} \neq \bar{p}$, tal que $\|\bar{x} - \bar{p}\| < \epsilon$.

En otros términos, $\bar{p}$ es un punto de acumulación de A si hay puntos de A distintos del propio $\bar{p}$ tan cercanos a $\bar{p}$ como queramos o, también, si podemos acercarnos arbitrariamente a $\bar{p}$ desde puntos de A sin pasar por $\bar{p}$.

Si $\bar{p} \in A$ no es un punto de acumulación de A , se dice que $\bar{p}$ es un *punto aislado* de A .

Según esto, un punto de A es aislado si no tiene a su alrededor ningún otro punto de A .

1.3 Límites y continuidad

La definición de límite de una función en un punto es muy técnica:

Definición Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función vectorial y sea $\bar{p} \in \mathbb{R}^n$ un punto de acumulación de D . Se dice que un punto $\bar{l} \in \mathbb{R}^m$ es el *límite* de $f(\bar{x})$ cuando $\bar{x}$ tiende a $\bar{p}$ (y se representa por $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{p}} f(\bar{x}) = \bar{l}$) si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\bar{x} \in D$, $\bar{x} \neq \bar{p}$ y $\|\bar{x} - \bar{p}\| < \delta$, entonces $\|f(\bar{x}) - \bar{l}\| < \epsilon$.

Si ϵ es muy pequeño, la condición $\|f(\bar{x}) - \bar{l}\| < \epsilon$ significa que $f(\bar{x})$ es casi igual a $\bar{l}$, luego la definición de límite puede parafrasearse así: Si tomamos puntos $\bar{x}$ suficientemente cercanos a $\bar{p}$ (concretamente, tan cercanos como para que $\|\bar{x} - \bar{p}\| < \delta$), que estén en D (es decir, tales que exista $f(\bar{x})$) y que no sean el propio $\bar{p}$, entonces $f(\bar{x})$ es casi igual a $\bar{l}$.

En la práctica conviene recordar lo siguiente:

La igualdad $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{p}} f(\bar{x}) = \bar{l}$ significa que si tomamos puntos $\bar{x} \approx \bar{p}$, $\bar{x} \neq \bar{p}$ sobre los que esté definida la función f , entonces $f(\bar{x}) \approx \bar{l}$, entendiendo que la última aproximación será mejor cuanto mejor sea la primera.

El ejemplo siguiente muestra un caso práctico de “paso al límite”:

Ejemplo Supongamos que un banco nos ofrece una cuenta corriente con un interés simple de un 3% anual. (Aquí se verá por qué los bancos nunca ofrecen cuentas con interés simple). Esto significa que los intereses generados en un tiempo t (expresado en años) serán $I = C_0 i t$, donde C_0 es el capital depositado e i el tanto por uno anual. El capital total será entonces $C = C_0 + I = C_0(1 + i t)$. Supongamos, por concretar, que depositamos 10000 € durante 3 años.

Según esto, al cabo de tres años dispondremos de un capital

$$C(3) = 10000(1 + 0.03 \cdot 3) = 10900 \text{ €}.$$

Ahora bien, supongamos que al cabo de un año ($t = 1$) vamos al banco y cancelamos la cuenta, con lo que el banco nos da

$$C(1) = 10000(1 + 0.03 \cdot 1) = 10300 \text{ €},$$

con los cuales abrimos una nueva cuenta al mismo tipo de interés (simple). Al cabo de un año tendremos

$$10300(1 + 0.03 \cdot 1) = 10609 \text{ €},$$

y si los volvemos a ingresar, al tercer año acabaremos con un capital de

$$10609(1 + 0.03 \cdot 1) = 10927.27 \text{ €}.$$

Así pues, hemos ganado 27.27 € sin más que meter y sacar nuestro dinero cada año. La razón es clara: al forzar al banco a que nos pague los intereses del primer año e ingresarlos en la cuenta, estos intereses generan a su vez nuevos intereses, los cuales, a partir del segundo año generan nuevos intereses. Ahora bien, todavía podríamos obtener más dinero si cancelamos y reabrimos nuestra cuenta cada mes. En general, si forzamos al banco a capitalizar los intereses cada Δt años (por ejemplo, $\Delta t = 1/12$ sería cada mes), tenemos que al final de cada periodo nuestro capital se multiplica por $1 + i\Delta t$, y como en t años hay $t/\Delta t$ periodos, el capital final sería

$$C(\Delta t) = C_0(1 + i\Delta t)^{t/\Delta t}.$$

Con los datos anteriores, si capitalizamos cada mes obtendríamos

$$C = 10000 \left(1 + 0.03 \cdot \frac{1}{12}\right)^{12 \cdot 3} = 10940,51 \text{ €},$$

con lo que hemos “arañado” 13 € más (40 más que al principio). La tabla siguiente muestra más casos:

Δt	$C(\Delta t)$
3 años	10900
1 año	10927.27
1 mes	10940.51
1 día	10941.70
1 hora	10941.74

En la práctica no tiene sentido ir más allá, pues las diferencias para valores más pequeños para Δt no llegan a un céntimo. De todos modos, desde un punto de vista puramente matemático, el capital obtenido con capitalizaciones de 1 hora es $C = 10941,74115\dots$, mientras que si capitalizamos cada segundo resulta $C = 10941,74280\dots$, con lo que ganamos más de una milésima de euro. Puede probarse que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} C_0(1 + i\Delta t)^{t/\Delta t} = C_0 e^{it}.$$

La fórmula

$$\boxed{C = C_0 e^{it}}$$

nos da el capital generado por un capital inicial C_0 en un tiempo t a un tanto por uno de *interés continuo* i .

En nuestro ejemplo $C = 10000e^{0.03 \cdot 3} = 10941,74283 \dots$. El hecho de que

$$C = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} C(\Delta t)$$

se interpreta (en el caso de nuestro ejemplo), como que si $\Delta t \approx 0$, entonces el capital generado por un interés simple anual del 3% durante 3 años capitalizando intereses cada Δt años es $C(\Delta t) \approx 10941,74283 \dots$. Puesto que podemos descartar las milésimas de euro, podemos decir que si Δt es a lo sumo de una hora, entonces el capital generado es prácticamente de 10941,74€.

En resumen, los bancos no ofrecen interés simple —entre otras razones— porque ello sería invitar a sus clientes a meter y sacar su dinero cuantas más veces mejor. En la práctica se usa el interés compuesto (discreto), que consiste en pactar no sólo el tipo de interés, sino también los intervalos en que capitalizan los intereses. Como es sabido, un depósito de un capital C_0 a un tanto por uno efectivo anual i genera en un tiempo t un capital

$$C = C_0(1 + i)^t,$$

lo cual es equivalente a un interés (simple) i en el que los intereses capitalizan cada año¹ (sin necesidad de que vayamos al banco a cancelar y reabrir la cuenta). Podría pensarse que el interés continuo es una entelequia, en el sentido de que ningún banco nos va a capitalizar intereses cada segundo o cada hora, pero cualquiera familiarizado con el interés compuesto sabe que, en realidad, el “periodo de capitalización de intereses” carece de sentido con el interés continuo, pues un interés efectivo anual es equivalente a otro tipo de interés efectivo trimestral, o mensual, o diario, o lo que se quiera; y del mismo modo es equivalente a un interés continuo. Para comprobarlo basta igualar las leyes de capitalización compuesta (discreta) y continua con dos tipos de interés distintos i e i_∞ :

$$C_0(1 + i)^t = C_0e^{i_\infty t},$$

de donde, tomando logaritmos, obtenemos la relación

$$t \ln(1 + i) = ti_\infty \ln e = ti_\infty \Rightarrow i_\infty = \ln(1 + i).$$

En resumen:

Un interés efectivo anual (discreto) i es equivalente a un interés continuo $i_\infty = \ln(1 + i)$, en el sentido de que la ley de capitalización correspondiente al interés discreto i proporciona el mismo capital final que la ley de capitalización correspondiente al interés continuo i_∞ .

Así pues, hablar de una cuenta corriente con un tipo de interés continuo del 3% no es ciencia-ficción, sino únicamente una forma matemáticamente más cómoda y simple de expresar la ley de capitalización que emplean habitualmente los bancos. ■

¹Aquí hemos trabajado con intereses anuales por comodidad, si bien el periodo usual de capitalización de una cuenta corriente es un mes. Esto supone usar la fórmula anterior con el tiempo en meses o bien mantener el tiempo en años y usar la TAE correspondiente.

Propiedades de los límites

1. Para que tenga sentido calcular $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{p}} f(\bar{x})$ es necesario que $\bar{p}$ sea un punto de acumulación del dominio de f , es decir, que nos podamos acercar a $\bar{p}$ por puntos donde esté definida f .
2. En la definición sólo se considera el valor de $f(\bar{x})$ los puntos $\bar{x}$ cercanos a $\bar{p}$ distintos del propio $\bar{p}$, por lo que el límite de una función en un punto $\bar{p}$ sólo depende de la definición de f en los puntos de **alrededor** de $\bar{p}$ distintos del propio $\bar{p}$.
3. Si una función tiene límite en un punto, el límite es único, es decir, una función no puede tener dos límites distintos en el mismo punto.
4. Una función vectorial $f = (f_1, \dots, f_m)$ tiene límite en un punto $\bar{p}$ si y sólo si lo tienen todas las funciones coordenadas f_i , y entonces

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{p}} f(\bar{x}) = \left(\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{p}} f_1(\bar{x}), \dots, \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{p}} f_m(\bar{x}) \right).$$

Teorema Sean $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones escalares, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\bar{p}$ un punto de acumulación del dominio D . Entonces

1. Si f y g tienen límite en $\bar{p}$, también lo tienen $f \pm g$ y fg y se cumple que

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{p}} (f(\bar{x}) + g(\bar{x})) = \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{p}} f(\bar{x}) + \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{p}} g(\bar{x}),$$

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{p}} f(\bar{x})g(\bar{x}) = \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{p}} f(\bar{x}) \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{p}} g(\bar{x}).$$

2. Si f tienen límite en $\bar{p}$, también lo tiene αf y se cumple que

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{p}} (\alpha f(\bar{x})) = \alpha \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{p}} f(\bar{x}).$$

3. Si f y g tienen límite en $\bar{p}$ y $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{p}} g(\bar{x}) \neq 0$, entonces f/g tiene límite en $\bar{p}$ y

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{p}} \frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})} = \frac{\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{p}} f(\bar{x})}{\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{p}} g(\bar{x})}.$$

Definición Diremos que una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es *continua* en un punto de acumulación $\bar{p} \in D$ si existe $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{p}} f(\bar{x}) = f(\bar{p})$.

En la práctica, para comprobar que f es continua en $\bar{p}$ hemos de verificar las propiedades siguientes:

1. f está definida en $\bar{p}$ (es decir, existe $f(\bar{p})$).
2. Existe $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{p}} f(\bar{x})$.
3. Se da la igualdad $f(\bar{p}) = \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{p}} f(\bar{x})$.

De las propiedades de los límites se deducen las siguientes propiedades de la continuidad:

Propiedades de las funciones continuas

1. La continuidad de una función f en un punto $\bar{p}$ depende únicamente de los valores que toma f **alrededor** de $\bar{p}$ (pero, al contrario de lo que sucede con los límites, teniendo en cuenta el valor que toma en $\bar{p}$).
2. Una función vectorial $f = (f_1, \dots, f_m)$ es continua en un punto $\bar{p}$ si y sólo si lo son todas sus funciones coordenadas f_i .

Nota Hemos definido únicamente la continuidad de una función en un punto de acumulación de su dominio, lo cual deja sin considerar el caso de los puntos aislados. Se considera que una función es siempre continua en los puntos aislados de su dominio, pero este caso no nos va a interesar en ningún momento.

Teorema 1) Si $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas en un punto $\bar{p} \in D$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces también son continuas en $\bar{p}$ las funciones $f \pm g$, αf , fg y, si además $g(\bar{p}) \neq 0$, también es continua la función f/g .

2) Todo polinomio es una función continua (en todos los puntos de su dominio).

3) La composición de funciones continuas es una función continua.

4) Las funciones e^x , $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, $\sqrt[n]{x}$ son continuas en todos los puntos de su dominio.

En definitiva, hemos de recordar:

Toda función construida a partir de polinomios mediante sumas, productos, cocientes y composición con las funciones usuales (exponencial, logaritmo, seno, coseno, etc.) es continua en todos los puntos de su dominio.

Ejemplo La función $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2+1}$ es continua en todos los puntos de $\mathbb{R}^2$, pues es un cociente de polinomios (que son funciones continuas) y el denominador no se anula en ningún punto.

En particular

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{x+y}{x^2+y^2+1} = f(1,0) = \frac{1}{2}.$$

■

En general:

Siempre que tengamos que calcular el límite de una función en un punto donde sepamos que ésta es continua, el límite se obtendrá sin más que evaluar la función en el punto, por la propia definición de continuidad.

Ejemplo Vamos a estudiar la continuidad de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } y = x^2, \\ y & \text{si } y \neq x^2. \end{cases}$$

Para ello hemos de tomar un punto arbitrario $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y estudiar si f es continua en (x_0, y_0) . Distinguiamos dos casos:

Si $y_0 \neq x_0^2$, entonces ALREDEDOR del punto (x_0, y_0) la función f está definida por y , que es un polinomio, luego una función continua.

Si $y_0 = x_0^2$ entonces alrededor del punto (x_0, y_0) hay puntos con definiciones diferentes, por lo que hemos de estudiar la continuidad mediante la definición.

1) En primer lugar observamos que está definido $f(x_0, y_0) = x_0$.

2) En segundo lugar estudiamos el límite $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$. Como podemos acercarnos a (x_0, y_0) por puntos de los dos subdominios donde f tiene definiciones distintas, hemos de calcular por separado

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0) \\ y=x^2}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0) \\ y=x^2}} x = x_0,$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0) \\ y \neq x^2}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0) \\ y \neq x^2}} y = y_0 = x_0^2.$$

El límite existirá solamente si $x_0 = x_0^2$, es decir, $x_0^2 - x_0 = 0 \Rightarrow x_0(x_0 - 1) = 0$, lo que sucede si y sólo si $x_0 = 0$ o $x_0 = 1$. En definitiva, el límite existe en los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$. Concretamente,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x, y) = 1.$$

3) Como $f(0, 0) = 0$ y $f(1, 1) = 1$, en estos puntos el valor del límite coincide con el de la función, la cual es, por tanto, continua.

En definitiva, f es continua en el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq x^2\} \cup \{(0, 0), (1, 1)\}$. ■

1.4 Problemas

1. Calcula el dominio de las funciones siguientes:

$$\begin{aligned} & \frac{x+y}{x-y}, \quad \sqrt{x^2+y^2}, \quad 2^{x/\sqrt{y}}, \quad y^{x^2}, \quad (y^2)^x, \quad \frac{x \ln(x+y+1)}{x^2+y^2}, \\ & \frac{\sqrt[4]{x-y^2}}{\sqrt[3]{x^3-2y}}, \quad \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{\sin x}{x^3+y^3}, \quad e^{\sin xy}, \quad \sin \frac{1}{x^2+y^2}, \quad f(x, y) = (x^2+2y^3)^{-3}, \\ & L(x, y) = x^{-2} \cos xy, \quad r(t) = \frac{t}{t+1}, \quad h(x, y, z) = (x \ln(y+z), e^{1/y}, x+y^2-3z), \\ & f(m, n) = 3m^2 - 2mn + 7, \quad p(u, v) = (\sqrt{u+v}, \ln u). \end{aligned}$$

2. Calcula el dominio de las funciones siguientes:

- (a) $p(u, v) = \sqrt{e^{u/v}}$.
- (b) $s(p, q, r) = (p+q)^{\ln r}$,
- (c) $f(x, y) = \sin(x^2 - e^y)$,
- (d) $g(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 3)$,
- (e) $h(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2) + 3$,

- (f) $r(x, y, z) = \ln(x + y + z) + 3$,
 (g) $s(x, y, z) = \ln(x + y + z + 3)$.

3. Calcula el dominio de las funciones siguientes:

$$\frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \frac{x + y}{x + y + 1}.$$

4. Calcula:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,4)} 5 \cdot 3^{\sin(x-2)\sqrt{y}}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} (x^2 + 3xy, y - 1, x + y^4 - 3).$$

5. Calcula el dominio de las funciones siguientes y estudia su continuidad en $(5, 1)$ y en $(4, 1)$:

$$f(u, v) = \frac{uv}{u^2 + v^2 + 1}, \quad g(u, v) = \begin{cases} ve^{u-5} & \text{si } u > 5, \\ u - 4v^2 & \text{si } u \leq 5. \end{cases}$$

6. Utiliza las funciones

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y + 4 & \text{si } (x, y) \neq (1, 2), \\ 7 & \text{si } (x, y) = (1, 2), \end{cases}$$

y

$$g(x, y) = \begin{cases} x + y + 4 & \text{si } (x, y) \neq (1, 2), \\ 3 & \text{si } (x, y) = (1, 2), \end{cases}$$

como ejemplo para explicar esta afirmación:

La existencia de límite de una función en un punto y —en su caso— el valor de éste no dependen del valor de la función en el punto, mientras que la continuidad sí que depende de dicho valor.

7. Estudia la continuidad de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} 3x^2 + y & \text{si } x \neq 1, \\ -2y^2 & \text{si } x = 1, \end{cases}$$

en los puntos $(1, 1)$ y $(3, 3)$.

8. Estudia la continuidad de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} x^3 - 2y^3 & \text{si } y > x^2, \\ y - 2 & \text{si } y \leq x^2, \end{cases}$$

en los puntos $(1, 3)$, $(1, 1)$ y en un punto (x_0, y_0) tal que $y_0 = -1$.

9. Estudia la continuidad de las funciones siguientes en los puntos $(1, 2)$ y $(2, 2)$:

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x - 1}, \quad g(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si } (x, y) \neq (1, 2), \\ 4 & \text{si } (x, y) = (1, 2). \end{cases}$$

10. Estudia la continuidad de las funciones siguientes en el punto $(3, 1)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 3y & \text{si } x \neq 3, \\ 5 & \text{si } x = 3, \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} x^2 + 3y & \text{si } (x, y) \neq (3, 1), \\ 5 & \text{si } (x, y) = (3, 1). \end{cases}$$

11. Estudia si las funciones siguientes son continuas en el punto $(2, 1)$:

(a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y}$,

(b) $g(x, y) = \ln(y - x)$,

(c) $h(x, y) = \begin{cases} e^{x^2-y} & \text{si } x > 1, \\ xy & \text{si } x \leq 1, \end{cases}$

(d) $q(x, y) = \begin{cases} \ln(x - y^2) & \text{si } x = y + 1, \\ x - 2 & \text{si } x \neq y + 1, \end{cases}$

(e) $r(x, y) = \begin{cases} xy & \text{si } (x, y) \neq (2, 1), \\ 5 & \text{si } (x, y) = (2, 1). \end{cases}$

12. Explica por qué $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \sqrt{2x+7y} = 3$.

13. Estudia la continuidad de la función

$$f(x, y, z) = \frac{e^{x+y}}{z}.$$

14. Sea $D(p) = 100 - p$ la demanda de un producto en función de su precio. Determina su dominio y el subdominio con sentido económico. ¿Qué sucede si $p = 500$?
15. Se estima que la demanda de un producto en un mercado está en función del precio p y de la renta media r de los consumidores:

$$D(r, p) = \frac{20rp^2}{r^3 + p^3} e^{r/p}.$$

Actualmente la renta es $r = 5$ u.m. y el precio es $p = 2$ u.m. Determina el dominio matemático de la función D y el subdominio con sentido económico. Estudia la continuidad en uno y otro. Calcula la demanda actual del producto, así como el incremento esperado si $\Delta p = 1$. Idem si $\Delta r = 1$. Interpreta el resultado. ¿Cuál sería el incremento si tanto la renta como el precio se duplicaran, es decir, si se pasara a $(r, p) = (10, 4)$? Interpretalo. Calcula $D(5, 0.05)$ e interpreta el resultado.

16. Se estima que la función de costes de una empresa es $C(x, y) = 150 \ln(2 + x + 3y)$, donde x e y son las cantidades producidas de los dos artículos que fabrica la empresa. La producción actual es $(x, y) = (100, 100)$. Determina el dominio matemático de la función C así como el subdominio con sentido económico. Estudia la continuidad de C en uno y otro. Determina los costes fijos de la empresa y la función de costes variables. Calcula el incremento ΔC que experimentan los costes si la producción se incrementa en $\Delta x = 4$. Idem si $\Delta y = 4$. Idem si, simultáneamente, $\Delta x = 3$ y $\Delta y = 2$. Escribe el vector de incremento de la producción en cada uno de los tres casos. Repite el problema suponiendo que el vector de producción actual es $(x, y) = (50, 30)$.
17. Una editorial distribuye una enciclopedia y una historia del arte a través de un equipo de 10 vendedores. Cada uno de ellos tiene un salario anual de 7000€ más una comisión de 30€ por cada enciclopedia vendida y 35€ por cada historia del arte. Además, si las ventas anuales conjuntas superan las 2000 unidades el equipo

recibe un suplemento de 5000€ repartido en proporción a las ventas de cada miembro.

Calcula la función de costes anuales $C(x, y)$ que le supone a la editorial su equipo de ventas, donde x e y son las unidades vendidas de la enciclopedia y la historia, respectivamente. Indica su dominio económico y estudia en él su continuidad. El beneficio de la editorial (sin contar el coste del equipo) es de 130€ por cada enciclopedia vendida y de 140€ por cada historia del arte. Calcula la función de beneficio neto $B(x, y)$ (es decir, descontando el coste del equipo), estudia su continuidad, calcula $B(15, 20)$ e interpreta el resultado.

18. La función de costes de una empresa en un instante t (expresado en años) es

$$C(x, y, t) = 100 + (20x + 10y)e^{0.01t},$$

donde x e y son las cantidades producidas de cada uno de los dos artículos que fabrica.

Calcula el dominio matemático de la función C y el subdominio con sentido económico. Se entiende que $t = 0$ es el año actual, pero la empresa ya existía en años anteriores.

Suponiendo que la producción no se altera de un año al siguiente, ¿en qué porcentaje aumentará el coste de la producción? (desde $t = 0$ hasta $t = 1$. El año actual la producción ha sido $(x, y) = (50, 30)$, mientras que para el año siguiente se prevé $(x, y) = (51, 32)$. Calcula ΔC para este periodo.

19. Depositamos un capital de 30000€ durante 5 años a un 8% de interés continuo anual. Calcula el capital final y el interés efectivo anual. Calcula el incremento medio anual del capital.
20. Un banco nos ofrece comprar unos bonos por 5.000€ por los que dentro de 3 años nos dará 7000€, mientras que otro nos ofrece bonos por valor de 4000€, por los que dentro de 5 años nos dará 7000€. Determina el tipo de interés continuo que nos ofrece cada banco. ¿Qué inversión es más rentable?
21. En la teoría del consumidor se considera una *función de utilidad* que expresa la satisfacción que obtiene un consumidor con cada consumición posible. Por ejemplo, si consideramos un mercado con cuatro productos A, B, C, D y representamos las consumiciones posibles como cuádruplas $\bar{c} = (x, y, z, w)$ (donde x es la cantidad adquirida de A , y la cantidad de B , etc.) entonces una función de utilidad podría ser

$$U(x, y, z, w) = x(y + z)(2 - e^{-w}).$$

Determina el dominio matemático de U y el subdominio con sentido económico. Estudia la continuidad de U en uno y otro. ¿Qué utilidad tiene para el consumidor una compra con $x = 0$? ¿cómo se interpreta esto? Dos de los bienes son sustitutivos, ¿cuáles? Justifica la respuesta. Supongamos que un consumidor considera satisfactoria la utilidad proporcionada por $x = 10$, $y = 5$, $z = 1$ y que las centésimas de utilidad le resultan inapreciables. ¿Cuál es la máxima cantidad de D que le interesaría adquirir? (Observa que desde un punto de vista estrictamente matemático la respuesta sería “infinito”.)

1.5 Cuestiones

1. Pon un ejemplo de función escalar y otro de función vectorial.
2. Pon un ejemplo de función escalar de varias variables que sea un polinomio y otro de función escalar que no lo sea.
3. Pon un ejemplo de función de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$ y otro de función definida en un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ (distinto de todo $\mathbb{R}^3$) a $\mathbb{R}^2$.
4. Pon un ejemplo de función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^4$ ¿Es escalar o vectorial?
5. Di cuáles de estas funciones son polinomios y cuáles no:

$$f(x, y) = 3, \quad f(x, y) = xy^{1/2}, \quad f(u, v, w) = u + v - w^5, \quad p(x, y) = y\sqrt{x^4},$$

$$f(t) = t^4, \quad f(t) = 1/t, \quad f(p, q, r) = \frac{p+q}{q^2+r^2+1}, \quad s(u, v, w) = v,$$

$$T(u, v) = (u^2, 2uv), \quad C(C_0, i, t) = C_0 e^{it}, \quad f(x, y) = y 2^x,$$

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y & \text{si } x > 1, \\ x - 2y & \text{si } x \leq 1. \end{cases}$$

6. Pon un ejemplo de función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuyas funciones coordenadas sean polinomios.
7. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ la función dada por

$$f(x, y, t) = (1/xy, t^2).$$

¿Cuánto vale n ?, ¿cuánto vale m ?, ¿quién es D ?, ¿es f una función escalar?

8. En teoría usamos tres tipos de notación que, para entendernos, podríamos llamar *abreviada* $\bar{x}$, *desarrollada* $(x_1, \dots, x_n)$ y *particular*: (x, y) . Determina en cuál de estas tres formas está cada una de las expresiones siguientes y reescríbela en las otras dos:

$$\Delta \bar{x}, \quad f(x, y), \quad \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (p_1, \dots, p_n)} f(x_1, \dots, x_n), \quad f(\bar{x} + \Delta \bar{x}) - f(\bar{x}),$$

$$\|(x, y)\|, \quad \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

9. En las preguntas siguientes, la respuesta a ¿Qué es? ha de ser: un número, un vector, un conjunto o una función.

- (a) ¿Qué es $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$?
- (b) ¿Qué es $\mathbb{R}^5$?
- (c) ¿Qué es $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$?
- (d) Si $f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, ¿qué es f ?, ¿y D ?, ¿y $f(1, 2, 1)$?
- (e) Si $\bar{x} \in \mathbb{R}^4$, ¿qué es $\bar{x}$?, ¿y $\|\bar{x}\|$?, ¿y $4\bar{x}$?
- (f) ¿Qué es $\|(2, 1, 2)\|$?, ¿y $(2, 1, 2) \cdot (-1, 4, 3)$?
- (g) Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, ¿qué es $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{p}} f(\bar{x})$?

10. Supongamos que $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 3\}$. Explica por qué las afirmaciones siguientes son imposibles:

- (a) $f(4, 3) = 2$,
- (b) $f(3, 4) = (1, 4)$,
- (c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,5)} f(x, y) = 4$,
- (d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = (1, 1)$.

11. Completa con **en** o **alrededor de** según proceda:

PROBLEMA: Estudia la continuidad de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2y - 1 & \text{si } y > x^2, \\ x - y & \text{si } y \leq x^2, \end{cases}$$

para $\bar{p} = (1, 1)$.

SOLUCIÓN: _____ el punto $(1, 1)$ la función tiene una única definición, a saber $x - y$, pero _____ dicho punto tiene dos definiciones, por lo que hemos de aplicar la definición de continuidad.

_____ primer lugar calculamos la imagen de f _____ el punto $(1, 1)$, que es $f(1, 1) = 0$. A continuación calculamos el límite de f _____ el punto $(1, 1)$, para lo cual hemos de considerar todas las expresiones que definen a f _____ $(1, 1)$, que son las dos. Vemos que

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,1) \\ y > x^2}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,1) \\ y > x^2}} x^2y - 1 = 0, \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,1) \\ y \leq x^2}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,1) \\ y \leq x^2}} x - y = 0.$$

Concluimos que existe el límite _____ $(1, 1)$ y vale 0. Además, éste coincide con el valor de f _____ $(1, 1)$, luego por definición de continuidad tenemos que f es continua _____ $(1, 1)$.

12. Supongamos que $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Indica cuáles de las expresiones siguientes tienen sentido y cuáles no. En caso negativo explica cuál es el problema.

- (a) $f(x + \Delta x, y)$,
- (b) $f(\bar{x} + \Delta y)$,
- (c) $\bar{x} + f(\bar{x})$,
- (d) $f(f(\bar{x}), y)$,
- (e) $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$,
- (f) $f(x + \Delta \bar{x})$,
- (g) $f(\bar{x} + \Delta x)$,
- (h) $f(\bar{x} + \Delta \bar{x}) - f(\bar{x})$,
- (i) $f(f(\bar{x}))$.

Responde de nuevo suponiendo que $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

13. Explica por qué la solución propuesta al problema siguiente no es aceptable:

PROBLEMA: *Estudia si $f(x, y) = x^2 + y$ es continua en el punto $(1, 3)$.*

RESPUESTA: Aplicamos la definición de continuidad: En primer lugar, $f(1, 3) = 4$. En segundo lugar,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} x^2 + y = 4.$$

Por último, como el límite coincide con el valor de la función, concluimos que f es continua en el punto $(1, 3)$.

Tema 2

Derivación

En economía, no sólo es importante determinar magnitudes que reflejen una situación dada, sino también estudiar cómo varían estas magnitudes y cómo influyen sobre unas las variaciones de otras. Así, por ejemplo, la inflación es una medida de la variación de los precios a lo largo del tiempo; si dos países tienen la misma tasa de paro, pero la de uno está creciendo y la de otro decreciendo, entonces sus economías son diferentes; un empresario puede estar interesado en estimar la variación de sus beneficios que ocasionaría un incremento en la producción, o un incremento en el gasto publicitario, etc. En los próximos temas introduciremos las herramientas matemáticas básicas para cuantificar la variación de una magnitud dada y estudiar la relación entre las variaciones de unas magnitudes y las de otras.

2.1 Incrementos parciales

Hasta ahora hemos estudiado los incrementos concretos que experimenta una función ante una variación concreta de sus variables. El primer paso para sistematizar este estudio es estudiar la función que nos da el incremento de una magnitud ante un *incremento arbitrario* de una de sus variables:

Definición Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar definida en un abierto D y $\bar{x} \in D$, llamaremos *función de incrementos parciales* de f respecto de la variable x_i a la función

$$\Delta_{x_i} f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n).$$

De este modo:

La función de incrementos parciales de una función f respecto a x_i es otra función cuyas variables son las de f más la nueva variable Δx_i , y nos permite calcular el incremento que experimenta f cuando la variable x_i se incrementa en la cantidad Δx_i . Si particularizamos a un punto $\bar{x}$, obtenemos una función cuya única variable es Δx_i .

Ejemplo Una empresa fabrica dos productos A y B , de modo que su función de beneficios es

$$B(x, y) = x^2 + 3y^2 - xy - 20,$$

donde x e y son, respectivamente, las cantidades producidas de A y B .

a) *Calcula las funciones de incrementos parciales $\Delta_x B$ y $\Delta_y B$.*

$$\begin{aligned}\Delta_x B(x, y) &= B(x + \Delta x, y) - B(x, y) = (x + \Delta x)^2 + 3y^2 - (x + \Delta x)y - 20 - (x^2 + 3y^2 - xy - 20) \\ &= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 3y^2 - xy - y\Delta x - 20 - x^2 - 3y^2 + xy + 20,\end{aligned}$$

luego en definitiva:

$$\Delta_x B(x, y) = (2x - y)\Delta x + \Delta x^2.$$

$$\begin{aligned}\Delta_y B(x, y) &= B(x, y + \Delta y) - B(x, y) = x^2 + 3(y + \Delta y)^2 - x(y + \Delta y) - 20 - (x^2 + 3y^2 - xy - 20) \\ &= x^2 + 3(y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2) - xy - x\Delta y - 20 - x^2 - 3y^2 + xy + 20 \\ &= x^2 + 3y^2 + 6y\Delta y + 3\Delta y^2 - xy - x\Delta y - 20 - x^2 - 3y^2 + xy + 20,\end{aligned}$$

luego

$$\Delta_y B(x, y) = (6y - x)\Delta y + 3\Delta y^2.$$

b) *La producción actual de la empresa es $(x, y) = (200, 150)$. Calcula las funciones de incrementos parciales para esta producción.*

$$\Delta_x B(200, 150) = 250\Delta x + \Delta x^2, \quad \Delta_y B(200, 150) = 700\Delta y + 3\Delta y^2.$$

c) *La empresa tiene la posibilidad de incrementar en 2 unidades la producción de A o de B. Determina cuál de las dos opciones es más conveniente.*

Al aumentar la producción de A (es decir, $\Delta x = 2$), el beneficio se incrementa en

$$\Delta_x B(200, 150)(2) = 504 \text{ u.m.},$$

mientras que si $\Delta y = 2$ entonces el beneficio se incrementa en

$$\Delta_y B(200, 150)(2) = 1412 \text{ u.m.}$$

Por consiguiente es preferible incrementar la producción de B. ■

2.2 Derivadas parciales

A poco que se complique una función, la función de incrementos asociada se vuelve mucho más complicada aún. Sin embargo, si estamos dispuestos a renunciar a calcular el valor exacto de los incrementos de una función y sustituirlo por una aproximación razonable, podemos obtener una fórmula relativamente sencilla.

Definición Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar definida en un abierto D . Para cada punto $\bar{x} \in D$, definimos la *derivada parcial* de f respecto de la variable x_i en el punto $\bar{x}$ como

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\bar{x}} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_i} f(\bar{x})}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{\Delta x_i}.$$

Observemos ante todo que una derivada parcial es un límite y, por lo tanto, no tiene por qué existir. En el supuesto de que exista, de acuerdo con la interpretación del límite vista en el tema anterior, tenemos que si Δx_i es suficientemente pequeño, entonces

$$\frac{\Delta_{x_i} f(\bar{x})}{\Delta x_i} \approx \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\bar{x}},$$

luego

$$\Delta_{x_i} f(\bar{x}) \approx \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\bar{x}} \Delta x_i.$$

La fórmula anterior contiene la idea fundamental de este tema:

El incremento que experimenta una función f cuando una de sus variables x_i experimenta un incremento marginal (pequeño) Δx_i , es aproximadamente igual a la derivada parcial de la función f respecto a la variable x_i *evaluada en el punto de partida* $\bar{x}$ multiplicada por el incremento Δx_i . El error de la aproximación será menor cuanto menor sea el incremento.

Otro planteamiento equivalente de esta misma idea es el siguiente:

La derivada de una función f respecto a una variable x_i en un punto $\bar{x}$ indica aproximadamente el incremento que experimenta f por cada unidad que aumente la variable x_i supuesto que las demás variables no se modifican y que el punto de partida del incremento es $\bar{x}$, entendiendo que dicha aproximación sólo es válida para incrementos marginales (suficientemente pequeños) de la variable x_i .

En los párrafos anteriores hemos introducido el adjetivo “marginal”, que forma parte del vocabulario usual en economía: un incremento marginal (en un contexto dado) es un incremento pequeño en proporción a las magnitudes que se están considerando. Por ejemplo, si estamos analizando la inversión de una empresa en producción y ésta es de varios miles de euros, un incremento de 100€ puede considerarse como un incremento marginal, en el sentido de que, si bien dicho incremento alterará un poco la situación de la empresa, no es tan importante como para que cambie su situación general. En cambio, si estamos estudiando los ingresos mensuales de una familia y resultan ser de 300€, no podemos considerar 100€ como un incremento marginal, ya que es probable que si la familia dispusiera de 100€ adicionales cada mes, es probable que modificara radicalmente su economía, de modo que cualquier estimación realizada a partir de la situación anterior carecerá de valor.

Si un incremento puede considerarse o no marginal no depende únicamente de su valor numérico, sino también de las unidades que estemos empleando (no es lo mismo 2 días que 2 años). Cuando la unidad de medida es suficientemente pequeña como para que $\Delta x = 1$ pueda considerarse un incremento marginal, hablamos de *unidades marginales*. En el ejemplo anterior, un centenar de euros puede ser una unidad marginal para estudiar la inversión de una empresa en producción, pero no para estudiar los

ingresos de una familia. En este último caso, una unidad marginal puede ser un euro. Esto hay que tenerlo en cuenta para interpretar las derivadas:

Si las unidades en que se mide la variable x_i son marginales, una derivada $\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\bar{x}}$ se interpreta como el incremento que experimenta f cuando la variable x_i aumenta en una unidad marginal. Ahora bien, si las unidades de x_i no son marginales no podemos suponer que un incremento de una unidad en x_i producirá un incremento de f del orden indicado por la derivada. Dicha derivada sólo puede entenderse como una proporción: *lo que se incrementa f por cada unidad que se incrementa x_i* , entendiendo que dicha proporción sólo se aplica a incrementos de x_i mucho menores que una unidad.

Si una función tiene derivada parcial respecto de una variable en todos los puntos de su dominio, entonces la derivada parcial es otra función con las mismas variables:

Ejemplo Vamos a calcular las derivadas parciales de la función de beneficios

$$B(x, y) = x^2 + 3y^2 - xy - 20$$

considerada en la sección anterior.

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x B}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2x - y)\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x - y + \Delta x = 2x - y, \\ \frac{\partial B}{\partial y} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y B}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(6y - x)\Delta y + 3\Delta y^2}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} 6y - x + 3\Delta y = 6y - x. \end{aligned}$$

En particular,

$$\left. \frac{\partial B}{\partial x} \right|_{(200, 150)} = 250, \quad \left. \frac{\partial B}{\partial y} \right|_{(200, 150)} = 700.$$

De acuerdo con la interpretación de la derivada, un incremento de 2 unidades en la producción de A produce un incremento de beneficios de

$$\Delta_x B(200, 150)(2) \approx \left. \frac{\partial B}{\partial x} \right|_{(200, 150)} \Delta x = 250 \cdot 2 = 500 \text{ u.m.},$$

mientras que el mismo incremento en la producción de B da lugar a un incremento de los beneficios de

$$\Delta_y B(200, 150)(2) \approx \left. \frac{\partial B}{\partial y} \right|_{(200, 150)} \Delta y = 700 \cdot 2 = 1400 \text{ u.m.}$$

Vemos que estas estimaciones no son exactas, pues los incrementos exactos los calculamos en la sección anterior y eran de 504 y 1712 u.m. respectivamente, pero también vemos que la aproximación con las derivadas parciales es buena y, como veremos enseguida, es mucho más fácil de calcular. ■

Al comparar la definición de derivada parcial con la definición de derivada de una función de una variable se llega fácilmente a la siguiente conclusión:

La derivada parcial de una función f respecto de una variable x puede calcularse con las mismas reglas de derivación válidas para funciones de una variable sin más que considerar como constantes a las demás variables de f .

Ejemplo Como es bien conocido, la derivada de $3x^2$ es $3 \cdot 2x = 6x$ y, por la misma regla, la derivada respecto de x de la función yx^2 es $y2x = 2yx$. Hemos tratado a y como si fuera la constante 3. Para derivarla respecto de y consideramos a x^2 como si fuera una constante, y así, al igual que la derivada de $y5$ es 5, la derivada de yx^2 es x^2 . ■

Ejemplo La función de beneficios de una empresa es $B(x, y) = 108\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$, donde x , y son las cantidades invertidas respectivamente en la producción de dos artículos A y B . La inversión actual es $(x, y) = (4, 27)$, pero la empresa dispone de 0.3 u.m. para aumentar la producción. ¿Le convendrá más destinarlas al artículo A o al artículo B ?

SOLUCIÓN: Calculamos las derivadas parciales

$$\frac{\partial B}{\partial x} = 54 \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt[3]{y}, \quad \frac{\partial B}{\partial y} = 36\sqrt{x} \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}.$$

Para la producción actual tenemos

$$\left. \frac{\partial B}{\partial x} \right|_{(4,27)} = 81, \quad \left. \frac{\partial B}{\partial y} \right|_{(4,27)} = 8.$$

Esto significa que por cada unidad que la empresa aumentara la inversión en el producto A los beneficios aumentarían aproximadamente en 81 u.m., mientras que la misma inversión en el producto B produciría un incremento aproximado de 8 u.m. Más concretamente, con un incremento de 0.3 u.m. los beneficios aumentarían aproximadamente en

$$\Delta_x B(4, 27)(0.3) \approx \left. \frac{\partial B}{\partial x} \right|_{(4,27)} \Delta x = 81 \cdot 0.3 = 24.3$$

y

$$\Delta_y B(4, 27)(0.3) \approx \left. \frac{\partial B}{\partial y} \right|_{(4,27)} \Delta y = 8 \cdot 0.3 = 2.4.$$

Así pues, es preferible incrementar la producción del artículo A . ■

Ejemplo Vamos a calcular los incrementos exactos de la función de beneficios correspondientes al ejemplo anterior, para compararlos con las aproximaciones que hemos obtenido con las derivadas parciales.

$$\Delta_x B(4, 27)(0.3) = B(4.3, 27) - B(4, 27) = 671.86 - 648 = 23.86,$$

$$\Delta_y B(4, 27)(0.3) = B(4, 27.3) - B(4, 27) = 650.39 - 648 = 2.39.$$

Vemos que, efectivamente, los incrementos exactos del beneficio son muy similares a los que hemos calculado aproximadamente. ■

Terminamos la sección con algunos hechos adicionales sobre el uso de derivadas en economía:

Magnitudes marginales En economía es frecuente referirse a la derivada de una magnitud añadiéndole a ésta el calificativo “marginal”. Por ejemplo, si $C(x, y)$ es una función de costes, donde x e y son las cantidades producidas de dos artículos, la derivada

$$\frac{\partial C}{\partial x}$$

es el *coste marginal* respecto de x , es decir, el (incremento del) coste que ocasionaría aumentar en una unidad la producción del primer artículo. Igualmente, si $B(t)$ son beneficios de una empresa en un tiempo t , entonces el *beneficio marginal* es

$$\frac{dB}{dt},$$

que se interpreta como el beneficio que se obtiene al pasar una unidad (marginal) de tiempo. Si $U(x, y)$ es la utilidad que obtiene un consumidor al adquirir cantidades x e y de dos productos A y B , entonces la *utilidad marginal* respecto de y es la derivada

$$\frac{\partial U}{\partial y},$$

es decir, (el incremento de) la utilidad que obtendría el consumidor al gastar una unidad monetaria más en el producto B , etc. Es importante señalar que éstas y todas las interpretaciones particulares del adjetivo “marginal” en su uso en economía son casos particulares de la interpretación general de las derivadas parciales.

A menudo se usa la palabra “acumulado” por oposición a “marginal”. Por ejemplo, si decimos que el beneficio acumulado por una empresa en un tiempo t (expresado en años) es

$$B(t) = 50000 \ln(1 + t) \text{ €}$$

esto significa que en su primer año obtuvo $B(1) = 34657 \text{ €}$, en los dos primeros años $B(2) = 54930 \text{ €}$ (con lo que el beneficio acumulado durante el segundo año únicamente fue de $B(2) - B(1) = 20273 \text{ €}$, etc. Por otra parte, el beneficio marginal será

$$B_m(t) = \frac{50000}{1 + t} \text{ €/año},$$

lo cual significa que la empresa comenzó acumulando beneficios a un ritmo¹ de $B_m(0) = 50000 \text{ €/año}$, pero al final de su primer año la tasa de incremento de los beneficios se había reducido a $B_m(1) = 25000 \text{ €/año}$, etc. Es frecuente que no se especifique si una función corresponde a cantidades acumuladas o marginales, pues esto puede deducirse de las unidades: si nos hablan de unos beneficios de $5000t \text{ €}$ hay que entender que son

¹Aquí tenemos un ejemplo de lo que sucede si las unidades de las variables no son marginales: a lo largo de un año la situación de una empresa puede variar drásticamente, luego no podemos hacer previsiones fiables de la situación de una empresa dentro de un año a partir de su situación actual: un año no es, en este contexto, una unidad marginal. Por consiguiente, la derivada $B_m(0) = 50000 \text{ €/año}$ no puede interpretarse como el incremento de beneficio que tendrá la empresa dentro de un año; es únicamente la tasa de incremento de su beneficio, que podremos aplicar para predecir aproximadamente los beneficios que obtendrá en un periodo marginal de tiempo. Por ejemplo, si la situación de la empresa no cambia en un mes, sus beneficios al cabo de dicho tiempo se habrán incrementado aproximadamente en

$$\Delta B \approx 50000 \cdot (1/12) = 4167 \text{ €}.$$

beneficios acumulados, pero si nos dicen $5000t \text{€}/\text{año}$ entonces han de ser beneficios marginales.

En general, las unidades de una derivada

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

son unidades de $f/\text{unidad de } x$. Por ejemplo, un coste marginal se expresa en unidades monetarias/unidad de producto, etc.

El signo de la derivada Recordemos que un incremento puede representar un aumento o una disminución según que su signo sea positivo o negativo. Como consecuencia:

La derivada de una función f respecto de una variable x será positiva si un aumento de x da lugar a un aumento de f , y será negativa si, por el contrario, un aumento de x da lugar a una disminución de f .

Por ejemplo, en condiciones normales, la derivada de la demanda de un producto respecto de su precio será negativa, pues un aumento del precio da lugar a una disminución de la demanda. Sin embargo, la derivada de la demanda respecto al gasto en publicidad será positiva, pues un aumento del gasto publicitario da lugar a un aumento en la demanda.

Incrementos porcentuales Si una función F depende (entre otras) de la variable x , la derivada

$$\frac{\partial F}{\partial x}$$

representa el incremento *absoluto* que produce en F un incremento de una unidad en x , aunque a menudo es más útil determinar el incremento relativo al valor de F , es decir, es más informativo saber que el paro ha descendido en un 2% que no saber cuántos parados menos hay. Para obtener un incremento porcentual basta observar que tomando el valor de F como 100% la derivada anterior supone un porcentaje de

$$\Delta_{\%} F \approx \frac{100}{F} \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Este incremento porcentual expresa el tanto por cien de incremento de la función F por cada unidad que se incrementa la variable x , partiendo del punto en que se calcula y suponiendo que no se modifican las demás variables.

Si no ponemos el 100 tenemos el tanto por uno de incremento. Por ejemplo, la tasa de crecimiento porcentual de un capital sujeto a un interés continuo i respecto del tiempo, es decir, la tasa de crecimiento porcentual de la función $C = C_0 e^{it}$ respecto de t , es

$$\frac{100}{C} \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{100}{C_0 e^{it}} i C_0 e^{it} = 100i.$$

Si no ponemos el 100, concluimos que i es el tanto por uno de incremento que experimenta el capital en cada instante. Más concretamente:

El interés continuo es el interés generado por cada unidad de capital en una unidad marginal de tiempo.

Elasticidad Hay casos en que la disparidad entre las unidades de la función y de la variable hacen aconsejable considerar un índice de crecimiento aún más relativo. Por ejemplo, si D es la demanda de un producto y p es su precio, un valor grande (normalmente negativo) para

$$\frac{\partial D}{\partial p}$$

indicará que una pequeña variación en el precio provoca una gran variación en la demanda, mientras que un valor pequeño de la derivada indica que la demanda apenas se altera por la variación del precio. Ahora bien, hemos de tener presente que no podemos estimar si la derivada es grande o pequeña sin tener en cuenta las unidades que estamos considerando, principalmente porque la demanda vendrá dada en unidades de producto y el precio en unidades monetarias.

Para evitar este inconveniente lo usual es considerar incrementos relativos tanto de la variable como de la función. Supongamos, pues, que el precio del artículo se incrementa en un 1%. Esto significa que

$$\Delta p = \frac{p}{100}.$$

De acuerdo con la interpretación de la derivada, el incremento que esto ocasionará en la demanda será aproximadamente de

$$\Delta D \approx \frac{\partial D}{\partial p} \frac{p}{100}.$$

Ahora bien, ¿qué porcentaje de la demanda supone este incremento? Será

$$\frac{100 \Delta D}{D} \approx \frac{100}{D} \frac{\partial D}{\partial p} \frac{p}{100} = \frac{p}{D} \frac{\partial D}{\partial p}.$$

El valor

$$E_D(p) = \frac{p}{D} \frac{\partial D}{\partial p}$$

recibe el nombre de *elasticidad* de la función D respecto de la variable p (hay quien lo define con un signo negativo para que sea positiva en el caso de la demanda/precio) y, según acabamos de ver:

La elasticidad representa el tanto por cien de incremento de la función D por cada 1% que se incrementa la variable p , partiendo del punto donde se calcula y suponiendo que las demás variables no se modifican.

Este valor es independiente de las unidades en que se expresen D y p .

Por ejemplo, la elasticidad respecto del tiempo de un capital sujeto a un interés continuo i es

$$E_C(t) = \frac{t}{C} \frac{\partial C}{\partial t} = it.$$

Esto se interpreta como que, cuanto más tiempo pasa, el incremento del capital se vuelve más sensible al paso del tiempo. ■

2.3 Conceptos relacionados con las derivadas

En esta sección introduciremos varias nociones matemáticas que nos serán de utilidad más adelante, junto con algunos resultados relacionados con ellas. Empezamos por la posibilidad de derivar varias veces una misma función.

Derivadas sucesivas Si las derivadas parciales de una función derivable son también funciones derivables, entonces podemos calcular las llamadas *derivadas segundas*, para las cuales se usa la notación que ilustra el ejemplo siguiente:

Sea $f(x, y) = x^2 \operatorname{sen} y$. Las derivadas primeras de f son

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \operatorname{sen} y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos y.$$

Si volvemos a derivar $\frac{\partial f}{\partial x}$ otra vez respecto de x obtenemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \operatorname{sen} y.$$

Si, en cambio, tomamos $\frac{\partial f}{\partial x}$ y la derivamos respecto de y obtenemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x \cos y.$$

Así, vemos que el exponente superior indica el número de veces que hemos derivado en total, y en la parte inferior indicamos las variables respecto a las que hemos derivado en el orden en que lo hemos hecho. Similarmente se calculan

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x \cos y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^2 \operatorname{sen} y.$$

Más en general, si $f(x, y, z)$ es una función de tres variables, la notación

$$\frac{\partial^5 f}{\partial x \partial y^2 \partial z^2}$$

representa a la función que resulta de derivar f cinco veces: primero respecto de x , luego dos veces respecto de y y luego dos veces respecto de z . Las funciones obtenidas derivando varias veces una función se llaman *derivadas parciales sucesivas*.

Definición Una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en un abierto D es de clase C^k en D , donde $k \geq 1$ es un número natural, si existen las derivadas parciales de f hasta orden k y todas ellas son continuas en D .

Si f tiene derivadas parciales de todos los órdenes posibles y todas ellas son continuas, entonces se dice que f es de clase C^∞ en D .

Una función vectorial es de clase C^k si lo son todas sus funciones coordenadas.

La mayoría de las funciones definidas analíticamente son de clase C^∞ en su dominio, como consecuencia del teorema siguiente:

Teorema 1) Si $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones de clase C^∞ en el abierto D y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces también son C^∞ en D las funciones $f \pm g$, αf , fg y, si además g no se anula en D , también es C^∞ la función f/g .

2) Todo polinomio es una función C^∞ .

3) La composición de funciones C^∞ es una función C^∞ .

4) Las funciones e^x , $\ln x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ son C^∞ en todos los puntos de su dominio, mientras que $\sqrt[n]{x}$ es C^∞ en todos los puntos de su dominio distintos de 0.

NOTA En el teorema anterior hay que destacar que las raíces, como $\sqrt{x}$, aunque son continuas en $x = 0$, no son derivables en este punto (ni, por consiguiente C^1 o C^∞). La razón es esencialmente que la derivada es $1/2\sqrt{x}$, que no está definida en $x = 0$. Vemos así que una función (como $\sqrt{x^2 + y^2}$) puede ser continua en un punto (en este caso el $(0, 0)$) sin ser por ello derivable.

Vector gradiente Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar derivable en el abierto D , definimos su *vector gradiente* como el vector formado por sus derivadas parciales:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Ejemplo El gradiente de la función $f(x, y, z) = x^2 y z^3$ es

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (2xyz^3, x^2 z^3, 3x^2 y z^2).$$

■

Matriz jacobiana Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una función vectorial, se define la *matriz jacobiana* de f como la matriz formada por todas las derivadas parciales primeras de sus funciones coordenadas $f_1, \dots, f_m$:

$$Jf = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Ejemplo La matriz jacobiana de la función

$$f(x, y, z) = (x^2 y z, x + y, x y z)$$

es

$$Jf = \begin{pmatrix} 2xyz & x^2 z & x^2 y \\ 1 & 1 & 0 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

■

Matriz hessiana Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar de clase C^2 en el abierto D , definimos su *matriz hessiana* como la matriz formada por sus derivadas parciales de orden 2:

$$Hf = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Ejemplo La matriz hessiana de la función $f(x, y) = x^2 \sin y$ es

$$Hf = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \sin y & 2x \cos y \\ 2x \cos y & -x^2 \sin y \end{pmatrix}.$$

La matriz Hessiana de una función de clase C^2 es siempre una matriz simétrica, como se deduce del teorema siguiente:²

Teorema de Schwarz Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar de clase C^2 en el abierto D , entonces, para $i, j = 1, \dots, n$ se cumple que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i},$$

es decir, el orden de la derivación no afecta al resultado.

2.4 Algunas demostraciones

Los resultados como el teorema de Schwarz tienen pruebas complejas para el nivel del curso, pero las propiedades básicas de las derivadas requieren únicamente aplicar la definición y las propiedades de los límites. Veremos algunas demostraciones que nos puedan ayudar a familiarizarnos con la noción de derivada:

Teorema Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función constante $f(\bar{x}) = c$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0.$$

DEMOSTRACIÓN: Por simplificar la notación podemos suponer que $n = 2$ y que $x_i = x$. El caso general es formalmente análogo. En un punto arbitrario $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0. \quad \blacksquare$$

Teorema Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en un punto $\bar{p} \in D$ (D abierto) y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces αf es derivable en $\bar{p}$ y

$$\left. \frac{\partial \alpha f}{\partial x_i} \right|_{\bar{p}} = \alpha \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\bar{p}}.$$

DEMOSTRACIÓN: Como en el teorema anterior, podemos tomar $n = 2$, $x_i = x$ y $\bar{p} = (x, y)$.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \alpha f}{\partial x} \right|_{\bar{p}} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha f(x + \Delta x, y) - \alpha f(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ &= \alpha \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \alpha \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{p}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

²Algunos economistas lo llaman Teorema de Young.

Teorema Si $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones derivables en un punto $\bar{p} \in D$ (D abierto), entonces $f + g$ es derivable en $\bar{p}$ y

$$\left. \frac{\partial(f+g)}{\partial x_i} \right|_{\bar{p}} = \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\bar{p}} + \left. \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_{\bar{p}}.$$

DEMOSTRACIÓN: Como en los teoremas anteriores, podemos suponer $n = 2$, $\bar{p} = (x, y)$, $x_i = x$.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial(f+g)}{\partial x} \right|_{\bar{p}} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) + g(x + \Delta x, y) - f(x, y) - g(x, y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y) + g(x + \Delta x, y) - g(x, y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x, y) - g(x, y)}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x, y) - g(x, y)}{\Delta x} \\ &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{p}} + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\bar{p}}. \end{aligned}$$

■

2.5 Problemas

1. Calcula las derivadas parciales de las funciones siguientes:

- (a) $f_1(x, y, z) = 3x^5y + xy^4z + y^5 + 2z^2 + 5$,
- (b) $f_2(x, y) = x^5 \cos 3y^4$,
- (c) $f_3(x, y, z) = (x^2 + 2xy + yz^5)e^{x+2y-z+1}$,
- (d) $f_4(x, y) = \operatorname{sen}^8(x^2 + y^3)$,
- (e) $f_5(x, y) = \operatorname{sen}(x + 2y^2)^8$,
- (f) $f_6(x, y) = \sqrt[5]{e^{xy^2}}$,
- (g) $f_7(x, y) = \sqrt[3]{2^{x+y}}$,
- (h) $f_8(x, y) = \frac{y - y^3}{x^2 + 2y - 1}$,
- (i) $f_9(x, y, z) = \frac{x \cos y}{\sqrt{y + 2z}}$,
- (j) $f_{10}(x, y) = \ln^3(x/y)$.

2. Calcula el vector gradiente de las funciones siguientes:

- (a) $f(x, y, z) = x^5y - 3x^2z + xyz - 3y + 2$,
- (b) $g(x, y) = x/y^3$,
- (c) $h(x, y, z) = \sqrt{x} \operatorname{sen}(x^2 + y^2 + z^2)$,
- (d) $p(u, v) = \frac{u + v}{u^2 + v^2}$,

$$(e) \ t(p, q) = \frac{p}{1 + q^2}.$$

3. Calcula la matriz hessiana de las funciones siguientes:

$$(a) \ f(x, y) = x^2 - 2xy^3 + 3x,$$

$$(b) \ g(x, y, z) = e^{x^2} \sin(y + z),$$

$$(c) \ h(u, v, w) = u + 2v - w,$$

$$(d) \ r(a, b) = \frac{1}{a + b^5}.$$

4. Calcula la matriz jacobiana de las funciones siguientes:

$$(a) \ f(x, y, z) = (x + y^2, xyz),$$

$$(b) \ T(s) = (s^2 + 1, 1/s, \sqrt[3]{s}),$$

$$(c) \ g(x, y) = (x, y, \ln(x + y), x \sin y),$$

$$(d) \ r(x, y, z) = (xy^2 - z^5, 8, 2^{xy^3}).$$

5. Calcula la matriz hessiana en el punto $(3, 1)$ de las funciones cuyos gradientes son los indicados:

$$(a) \ \nabla f = (3x^3 + 3y^3 - 2, 9xy^2),$$

$$(b) \ \nabla g = (ye^x, e^x),$$

$$(c) \ \nabla h = (2x, 2y, 2z).$$

6. ¿Existe una función cuyo vector gradiente sea $\nabla f = (x^2 + 2y, y^2 + 3x)$? En caso afirmativo calcula su matriz hessiana.

7. Calcula el vector gradiente de $f(x, y) = \frac{\sqrt{e^{y^3}}}{x - y}$.

8. Calcula la matriz jacobiana de $r(u, v, w) = (e^u, u + v, we^{u+w})$. ¿Es la función r de clase C^∞ ?, ¿por qué?

9. Razona si la función $f(x, y) = \sqrt{x + 2y}$ es de clase C^∞ en los puntos $(2, 1)$ y $(2, -1)$.

10. Comprueba que la función $f(x, y) = e^y \cos x$ cumple la definición de función de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$.

11. Calcula las funciones de incrementos parciales de las funciones siguientes:

$$(a) \ f(x, y) = x^2y,$$

$$(b) \ g(x, y, z) = x(y + z),$$

$$(c) \ h(u, v, w) = u - 3v + w + 4.$$

Utiliza las expresiones obtenidas para calcular las derivadas parciales.

12. Indica el signo que tendrán en condiciones normales las derivadas siguientes:

(a) La derivada del salario de un trabajador respecto al tiempo.

(b) La derivada parcial de la demanda de un artículo respecto de su precio.

- (c) La derivada parcial del volumen de ventas de una empresa respecto de su inversión en publicidad.
 - (d) La derivada parcial del ahorro medio de los habitantes de un país respecto del índice de precios.
 - (e) La derivada respecto al tiempo de la población de un país en el que cada familia tiene una media de 1.8 hijos.
 - (f) La derivada del índice general de la bolsa de Madrid respecto del tiempo.
13. Si $P(t)$ es el producto interior bruto de un país en un tiempo t , ¿qué es la derivada $\frac{dP}{dt}$?
- (a) la inflación del país en un tiempo t ,
 - (b) el crecimiento económico del país en un tiempo t ,
 - (c) no tiene interpretación económica.
14. El precio del petróleo es una función P que depende —entre otras variables— de la oferta x de crudo en el mercado. ¿Cuál será —en condiciones normales— el signo de la derivada $\frac{\partial P}{\partial x}$?
15. Una editorial A es una de las principales suministradoras de libros a una pequeña ciudad, aunque tiene una única competidora B . La empresa estima que la demanda de sus libros en la ciudad depende del precio medio al que los vende p_1 , del precio medio a que vende los libros la editorial B y del precio medio de los artículos de primera necesidad. Si la función de demanda (de los libros de A) es $D(p_1, p_2, p_3)$ y la empresa estima que, para los precios actuales $\bar{p}_0$, se tiene

$$\left. \frac{\partial D}{\partial p_1} \right|_{\bar{p}_0} = -2, \quad \left. \frac{\partial D}{\partial p_2} \right|_{\bar{p}_0} = -1, \quad \left. \frac{\partial D}{\partial p_3} \right|_{\bar{p}_0} = 2,$$

¿Cuál de las variables p_2 , p_3 representa —presumiblemente— a los precios de la editorial B y cuál a los precios de los artículos de primera necesidad? ¿Qué efecto tendría para la editorial una rebaja media de sus precios de 0.8 unidades monetarias?

16. Los beneficios marginales (respecto al tiempo) de una empresa han sido de 10000 €/año durante el mes de enero, de 12000 €/año en febrero y de 14000 €/año en marzo. Calcula el beneficio acumulado (en euros) en el primer trimestre y el beneficio medio (en euros/año) en dicho periodo.
17. La función de beneficios de una empresa es $B(t)$, donde t está en años y $B(t)$ en euros. Se conocen los datos siguientes:

$$B(1) = 100.000 \text{ €}, \quad \left. \frac{\partial B}{\partial t} \right|_1 = 1.000 \text{ €/año}, \quad \left. \frac{\partial B}{\partial t} \right|_2 = 600 \text{ €/año}.$$

Interpreta estos datos. Haz una estimación de los beneficios acumulados por la empresa al final del segundo año ($t = 2$) y al final del primer trimestre del segundo año ($t = 1 + 3/12$). ¿Qué estimación será más fiable?

18. La función de demanda de un artículo es $D(p, r) = \ln\left(1 + \frac{2r}{p}\right)$, donde p es el precio y r la renta media de los consumidores. El precio actual es $p = 2$ u.m. y $r = 100$ u.m. Justifica que $D(p, r)$ es una función de clase C^∞ en su dominio. Determina sin usar calculadora (o, al menos, sin calcular ningún logaritmo) qué produciría un mayor incremento de la demanda:

- (a) Un incremento de la renta de $\Delta r = 10$ u.m.
- (b) Un incremento del precio de $\Delta p = -0,5$ u.m.

Calcula (con calculadora) los incrementos exactos de la demanda correspondientes a cada caso y compáralos con las estimaciones anteriores.

19. Un empresario realiza una inversión en maquinaria por valor de 500 €, la cual le produce un rendimiento dado por $R(t) = 400t - 50t^2$ € durante un periodo de 5 años. Calcula el rendimiento acumulado en dicho periodo, el rendimiento acumulado hasta el segundo año, el rendimiento acumulado sólo durante el segundo año, el rendimiento medio de los 5 años, el rendimiento medio de los dos primeros años, el rendimiento medio del segundo año, el rendimiento marginal en $t = 0$, en $t = 2$, en $t = 4$ y en $t = 5$. Interpreta estos rendimientos marginales.
20. Los beneficios de una empresa durante un periodo de cuatro años $[0, 4]$ vienen dados por la función

$$B(t) = -3t^4 + 28t^3 - 83t^2 + 78t,$$

donde t está en años y B en miles de euros.

- (a) Calcula el beneficio acumulado y el beneficio marginal en $t = 0$. Interpreta el resultado.
 - (b) Idem para $t = 1$. Interpreta los signos.
 - (c) Idem para $t = 2.5$, $t = 3$ y $t = 4$.
21. Sea $C(x, y)$ la función de costes de una empresa, donde x e y son las cantidades producidas de dos artículos A y B . Explica la diferencia de interpretación entre

$$\left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{(400, 200)} \quad \text{y} \quad \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{(40, 20)}.$$

22. El IPC de un cierto país en un instante t (expresado en años) viene dado por la fórmula

$$P = e^{\sqrt{(1+t/50)^3}}.$$

- (a) Justifica que P es de clase C^∞ en $t = 0$.
- (b) Calcula la inflación del país, es decir, el porcentaje de aumento de los precios:

$$I = \frac{100}{P} \frac{\partial P}{\partial t}.$$

¿Qué tanto por ciento de inflación se tiene en $t = 0$?

- (c) Estudia el comportamiento de la inflación en $t = 0$. ¿Está aumentando o disminuyendo?

- (d) Calcula la tasa de incremento de la inflación en el país, es decir,

$$T = \frac{100}{I} \frac{\partial I}{\partial t}.$$

¿Cuánto vale en $t = 0$?

- (e) ¿Cómo varía la tasa de incremento de la inflación del país?, ¿crece o decrece?

- (f) Explica la frase siguiente:

En la crisis de 1972 el presidente Nixon anunció que la tasa de incremento de la inflación estaba descendiendo. Ésta fue la primera vez que un presidente usó la tercera derivada como argumento para su reelección. Hugo Rossi, Notices of the AMS, v. 43, nº 10, octubre 1996.

23. La tasa de paro (porcentual) de dos países A y B viene dada por las funciones

$$P_A(t) = 8(1.1)^t \quad \text{y} \quad P_B(t) = 8(0.9)^t.$$

Determina la tasa de paro en la actualidad ($t = 0$). Estudia la evolución del paro en ambos países ¿cuál es más favorable?

24. Los beneficios marginales de una empresa en un instante $t = 0$ son

$$\left. \frac{\partial B}{\partial t} \right|_0 = 200.000 \text{ €/año}.$$

Interpreta esta derivada y di si es razonable esperar que se cumplan las afirmaciones siguientes:

- (a) Dentro de un año, los beneficios de la empresa se habrán incrementado aproximadamente en 200.000 €.
 - (b) Dentro de un mes, los beneficios de la empresa se habrán incrementado aproximadamente en 17.000 €.
 - (c) Dentro de una hora, los beneficios de la empresa se habrán incrementado aproximadamente en 23 €.
 - (d) Dentro de 20 años, los beneficios de la empresa se habrán incrementado aproximadamente en 4.000.000 €.
25. Una empresa desea estudiar su función de costes, cuya expresión estimada es

$$C(x, y) = 3x^2 - xy + 2y^2 - y + 30,$$

donde x e y son las cantidades producidas de dos artículos. ¿A cuánto ascienden los costes fijos? Determina la expresión más simple posible para las funciones de incrementos parciales $\Delta_x C$ y $\Delta_y C$. Utiliza estas expresiones para calcular, por la definición de derivada parcial, las derivadas

$$\frac{\partial C}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial C}{\partial y}.$$

Calcula estas derivadas para una producción $(x, y) = (5, 3)$ e interprétalas. Calcula el incremento de coste que provocaría un incremento de la producción $\Delta y = 0.6$. Compáralo con la aproximación que proporcionan las derivadas.

26. Calcula las derivadas de la función de costes $C(x, y) = 150 \ln(2 + x + 3y)$ del problema 16 del tema anterior para la producción $(x, y) = (100, 100)$ allí indicada. Interpretálas. Estudia mediante dichas derivadas el efecto que tiene sobre los costes de producción un incremento $\Delta x = 4$. Idem para $\Delta y = 4$. Compara los resultados con los incrementos exactos calculados en su momento ¿Cuál es el porcentaje de error?
27. Una empresa fabrica un artículo X a partir de dos factores de producción A y B. La función de producción es $P(x, y) = x + y + 0.005xy^2$ unidades de X, donde x e y son las cantidades de los factores de producción. Calcula la producción actual si se están empleando 100 unidades de A y 80 unidades de B. Calcula la producción marginal respecto de y para la producción actual. Indica su interpretación y las unidades en que viene expresada. Calcula el incremento de producción que puede obtenerse si la cantidad empleada del factor B pasa a ser de 82 unidades. Haz el cálculo exacto y el cálculo aproximado a partir de la producción marginal y compáralos. Idem si se utilizan 200 unidades de B. Compara los resultados en ambos casos.
28. Sea $C(x)$ la función de costes de una empresa, donde x es la cantidad producida de un artículo.
- (a) Explica la diferencia de interpretación entre
- $$\left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{10} \quad \text{y} \quad \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{1000}.$$
- (b) ¿Cuál es el signo que cabría esperar en estas derivadas?
- (c) ¿Cuál de las dos cabe esperar que sea mayor?
29. Sea $U(x)$ la función de utilidad de un consumidor, donde x es la cantidad adquirida de un artículo.
- (a) Explica la diferencia de interpretación entre
- $$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{10} \quad \text{y} \quad \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{1000}.$$
- (b) ¿Cuál es el signo que cabría esperar en estas derivadas?
- (c) ¿Cuál de las dos cabe esperar que sea mayor?
30. La función de beneficios de una empresa viene dada por $B(t) = 5t^2$ u.m., donde t es el tiempo en años. El año actual es $t = 1$. ¿A qué ritmo está aumentando el beneficio marginal de la empresa?
31. La función de costes de una empresa es $C(x, p) = 600\sqrt{p} \ln x$, donde x es la producción y p el precio medio de sus inputs. Calcula el dominio de C y el subdominio con sentido económico. Actualmente la producción es de 100 unidades de producto y el precio de 4 unidades monetarias. Calcula el efecto que tiene sobre el coste marginal (respecto a la producción) un incremento unitario del precio de los inputs. ¿Cuánto aumentaría aproximadamente el coste si el precio pasara a ser de $p = 4.1$ u.m., ¿y el coste marginal?

32. La función de utilidad de un consumidor respecto de dos productos A y B es

$$U(x, y) = \ln(1 + xy),$$

donde x e y son las cantidades de producto que adquiere. Supongamos que actualmente consume $(x, y) = (10, 10)$.

- Calcula la utilidad marginal respecto del producto A . Interpreta su signo.
 - Justifica matemáticamente esta afirmación: “Por cada unidad que aumenta el consumo de A , la utilidad marginal disminuye, es decir, el consumidor obtiene cada vez menos satisfacción adicional al incrementar su consumo de A ”.
 - Justifica matemáticamente esta afirmación: “Por cada unidad que aumenta el consumo de B la utilidad marginal de A aumenta, es decir, si el consumidor aumenta el consumo de B , entonces le es más útil aumentar el consumo de A .”
 - Pon un ejemplo de dos productos para los que estas propiedades sean razonables.
33. Una empresa cuenta actualmente con un capital C . En cada instante consigue de su capital una rentabilidad r (tanto por uno). Supongamos que esta rentabilidad es mayor o igual que la rentabilidad media del mercado k (o sea, $r \geq k$). En cada instante, la empresa reinvierte un tanto por uno b de sus beneficios y abona el resto como dividendos a sus accionistas. Bajo el supuesto de que $0 < b < k/r$, un modelo económico afirma que el valor actual de las acciones de la empresa (calculado como el valor actual de los dividendos que la empresa generará en el futuro) viene dado por

$$V = \frac{C(1 - b)}{k - rb}.$$

Determina el dominio matemático y el dominio económico de la función $V(C, k, r, b)$. Estudia el efecto que tiene sobre el valor V de las acciones una reducción del porcentaje de beneficios destinado a dividendos (es decir, un aumento del tanto por uno reinvertido b .)

34. Depositamos 500 € en un banco a un 3% de interés continuo anual. Utiliza la relación

$$\Delta C \approx \left. \frac{\partial C}{\partial t} \right|_0 \Delta t$$

para determinar aproximadamente sin usar calculadora nuestro saldo al cabo de 2 años. Usa la calculadora para determinar el error cometido. Repite el problema para 10 años y compara los errores. Explica la diferencia.

35. La función de demanda de un artículo es $D(p, r) = \ln\left(1 + \frac{2r}{p}\right)$, donde p es el precio y r la renta media de los consumidores. Determina el dominio matemático y el subdominio económico de la función D . Calcula la elasticidad (respecto al precio) para $(p, r) = (2, 100)$. Interpretala.
36. Calcula la elasticidad de la función de demanda $D(p) = 100/p$. ¿Es D una función de clase C^∞ en su dominio?

37. Calcula la elasticidad de la función de demanda $D(p) = 100 - p$ y estudia el efecto que tiene sobre la elasticidad un aumento del precio.
38. El capital de una empresa durante un periodo de diez años $[0, 10]$ viene dado por la función

$$C(t) = 500e^{3e^{0.01t} - 3}.$$

Determina el capital con que contaba la empresa al principio del periodo y el capital final. Determina el beneficio marginal $B_m(t)$ de la empresa en cada instante t . Determina la rentabilidad de la empresa en cada instante t , es decir, el beneficio generado por cada unidad de capital disponible en un instante t :

$$R(t) = \frac{B_m(t)}{C(t)}.$$

Calcula la rentabilidad inicial y final de la empresa. Determina el tanto por ciento de incremento anual de la rentabilidad de la empresa.

2.6 Cuestiones

1. Algunas de las derivadas siguientes están mal calculadas. Corrégelas y explica cuál es el error:

(a) $f(x, y) = \cos(x^2 + xy), \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(2x + y),$

(b) $f(x, y) = x^2 \sin y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin y^2,$

(c) $f(x, y) = x^2 \sin xy, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x(\sin xy)y,$

(d) $f(x, y) = \sin(xy)^4, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 4 \sin(xy)^3 (\cos xy)y,$

(e) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -(x^2 + y^2)^{-2} \cdot 2x,$

(f) $f(x, y) = \ln^x y, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = x \ln^{x-1} y \cdot \frac{1}{y},$

(g) $f(x, y) = \ln(x^2 y), \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{x},$

(h) $f(x, y) = \frac{y^4}{x^2 - y^3}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4y^3(x^2 - y^3) - y^4 2x}{(x^2 - y^3)^2}.$

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable. Explica qué está mal en la igualdad siguiente:

$$\Delta_x f(2, 3)(\Delta x) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(2, 3)} \Delta x.$$

¿Qué habría que suponer para que la igualdad fuera correcta?

3. Dada una función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, ¿cuántas variables tiene $\Delta_x f$?, ¿cuál es la diferencia entre $\Delta_x f(2, 3)(-1)$ y $\Delta_y f(2, 3)(-1)$?

4. Sea $f(x, y) = x^2y$. Explica qué está mal en el cálculo siguiente. Corrígelo.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(2,1)} = 2xy = 5.$$

5. Sea $f(x, y) = x \ln y$.

(a) Calcula $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ y comprueba que $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{(-1,-1)} = 1$,

- (b) Explica por qué la afirmación del apartado anterior es falsa.

6. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en un punto $\bar{x}$. La afirmación siguiente es falsa. Explica por qué y corrígela:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\bar{x}} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta x_i \cdot f(\bar{x})}{\Delta x_i}.$$

7. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Corrige esta afirmación:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + \Delta x_i) - f(\bar{x})}{\Delta x_i}.$$

8. Di cuáles de estas funciones corresponden a un coste total, a un coste variable o a un coste marginal:

- (a) $x + x^2 \text{€}$,
- (b) $3x \text{€} / \text{mes}$,
- (c) $5e^{0.1x} \text{€}$,
- (d) $\sqrt{x} \text{€}$.

9. Sea $B(t)$ el beneficio acumulado por una empresa al cabo de un tiempo t . Sea $B_m(t)$ el beneficio marginal. Explica la diferencia de interpretación entre B y B_m , así como la relación matemática entre ambas funciones. Indica unas unidades válidas para cada una de ellas.

10. Sea $C(x, y)$ la función de costes de una empresa, donde x e y son las cantidades producidas de dos artículos. Sea $\bar{p} = (x_0, y_0)$ la producción actual.

- (a) ¿Qué signo cabe esperar en las derivadas siguientes?

$$\left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{\bar{p}}, \quad \left. \frac{\partial C}{\partial y} \right|_{\bar{p}}.$$

- (b) Supongamos que

$$\left. \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right|_{\bar{p}} < 0, \quad \left. \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} \right|_{\bar{p}} > 0.$$

Interpreta estos signos. ¿Son razonables?

11. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 0\}$. Di si los objetos siguientes son números, vectores, funciones, matrices, etc. Precisa todo lo posible la respuesta.

- (a) $f(1, 2), \quad f(1, -1), \quad D$
- (b) $\nabla f(1, 2), \quad \nabla f(1, 2) \cdot (3, 4),$
- (c) $\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(3,3)}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(3,-4)},$
- (d) $\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_7.$
- (e) $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{(1,2)}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y^2} \Big|_{(1,2)}$

Calcula estos objetos, cuando sea posible, para $f(x, y) = \ln(x + y)$.

12. Escribe la definición de derivada parcial para una función de n variables $x_1, \dots, x_n$ (respecto de x_i) y particularizada para una función de tres variables x, y, z . Haz lo mismo con el gradiente.
13. Escribe la demostración del teorema sobre la derivada de una suma en el caso de una función $f(x, y, z)$ y derivando respecto a la variable y .
14. Escribe la demostración del teorema sobre la derivada del producto de un número por una función en el caso de una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ derivando respecto de x_i .
15. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ una función derivable en un punto (a, b) . Escribe la expresión de la matriz jacobiana $Jf(a, b)$ y la de la matriz hessiana $J^2 f(a, b)$ (asegúrate de que el punto (a, b) aparece donde corresponda en la expresión).
16. Sea $C(p)$ el coste de producción (en euros) de un bien en función del precio de p de la principal materia prima empleada (también en euros). Di si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas:
 - (a) Las unidades de $\frac{\partial C}{\partial p}$ son €..
 - (b) Las unidades de $\frac{\partial C}{\partial p}$ son €/€.
 - (c) El coste marginal $\frac{\partial C}{\partial p}$ no tiene unidades.

17. Modifica adecuadamente la fórmula

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

para que el miembro izquierdo sea $\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(a,b)}.$

18. Los conceptos siguientes no van a aparecer en ningún momento en esta asignatura. Este ejercicio pretende únicamente que compruebes si eres capaz de entender una definición matemática sin la ayuda de un ejemplo:

Se llama *divergencia* de una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en un punto $\bar{p} \in D$ a la expresión

$$\operatorname{div} f(\bar{p}) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\bar{p}} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\bar{p}}.$$

Particulariza esta fórmula a dos variables x, y , tomando $\bar{p} = (a, b)$. Fijándote en la versión particular, calcula la divergencia de $f(x, y) = x^5y$ en el punto $(1, 2)$. Haz lo mismo con el *laplaciano* de f , definido como

$$L(f)(\bar{p}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \Big|_{\bar{p}} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \Big|_{\bar{p}}.$$

19. Sea $D(p)$ la demanda de un artículo (en unidades de producto) en función de su precio (en unidades monetarias). Entonces, la elasticidad viene dada por

$$E = \frac{p}{D} \frac{dD}{dp}.$$

¿Cuáles son sus unidades?

20. Compara el siguiente enunciado del teorema de Schwarz con el que tienes en los apuntes. Indica qué cambios son irrelevantes y cuáles son inaceptables:

Teorema de Schwarz Si $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^2 , decimos que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}, \quad \text{para } i, j = 1, \dots, m,$$

es decir, al derivar no importa el orden de las variables.

Tema 3

Diferenciabilidad

En el tema anterior hemos estudiado cómo se comporta una función razonable (derivable) cuando modificamos *una* de sus variables. Ahora hemos de ocuparnos del problema de lo que sucede cuando modificamos varias variables simultáneamente.

3.1 Incrementos totales

Definición Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar definida en un abierto D y $\bar{x} \in D$, llamaremos *función de incrementos* de f a la función

$$\Delta f(\bar{x}) = f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \dots, x_n).$$

De este modo:

La función de incrementos de una función f es otra función cuyas variables son las de f más las variables Δx_i , y nos permite calcular el incremento que experimenta f cuando cada variable x_i se incrementa en la cantidad Δx_i . Si particularizamos a un punto $\bar{x}$ queda una función de las variables Δx_i .

Ejemplo Una empresa fabrica dos productos A y B , de modo que su función de beneficios es

$$B(x, y) = x^2 + 3y^2 - xy - 20,$$

donde x e y son, respectivamente, las cantidades producidas de A y B .

a) Calcula la función de incrementos de B .

$$\begin{aligned}\Delta B(x, y) &= B(x + \Delta x, y + \Delta y) - B(x, y) \\ &= (x + \Delta x)^2 + 3(y + \Delta y)^2 - (x + \Delta x)(y + \Delta y) - 20 - (x^2 + 3y^2 - xy - 20) \\ &= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 3(y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2) - (xy + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y) - 20 - x^2 - 3y^2 + xy + 20 \\ &= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 3y^2 + 6y\Delta y + 3\Delta y^2 - xy - x\Delta y - y\Delta x - \Delta x\Delta y - 20 - x^2 - 3y^2 + xy + 20\end{aligned}$$

luego en definitiva:

$$\Delta B(x, y) = (2x - y)\Delta x + (6y - x)\Delta y + \Delta x^2 + 3\Delta y^2 - \Delta x\Delta y.$$

b) La producción actual de la empresa es $(x, y) = (200, 150)$. Calcula la función de incrementos para esta producción.

$$\Delta B(200, 150) = 250\Delta x + 700\Delta y + \Delta x^2 + 3\Delta y^2 - \Delta x\Delta y.$$

c) La empresa tiene la posibilidad de incrementar en 2 unidades la producción de A y en 1 unidad la de B . Determina el incremento de beneficio que obtendrá con ello.

Si el vector de incrementos es $(\Delta x, \Delta y) = (2, 1)$, el beneficio se incrementa en

$$\Delta B(200, 150)(2, 1) = 250 \cdot 2 + 700 \cdot 1 + 2^2 + 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 1205 \text{ u.m.}$$

Llegar a este resultado nos ha obligado a calcular explícitamente la función de incrementos de B , que es complicada. A través del concepto de diferenciabilidad que vamos a estudiar podremos obtener resultados aproximados mediante el uso de derivadas. Veamos lo que podemos decir únicamente con lo que sabemos del tema anterior. Ante todo,

$$\frac{\partial B}{\partial x} = 2x - y, \quad \frac{\partial B}{\partial y} = 6y - x.$$

En particular,

$$\left. \frac{\partial B}{\partial x} \right|_{(200, 150)} = 250, \quad \left. \frac{\partial B}{\partial y} \right|_{(200, 150)} = 700.$$

Por lo tanto, las funciones de incrementos parciales de B son aproximadamente

$$\Delta_x B(200, 150) \approx 250 \Delta x, \quad \Delta_y B(200, 150) \approx 700 \Delta y.$$

Esto nos permite interpretar la forma de la función de incrementos totales:

$$\Delta B(200, 150) = 250\Delta x + 700\Delta y + \Delta x^2 + 3\Delta y^2 - \Delta x\Delta y.$$

Vemos que consta de tres partes: la aproximación del incremento parcial respecto de x , la del incremento parcial respecto de y más un residuo $\Delta x^2 + 3\Delta y^2 - \Delta x\Delta y$ que es mucho menor que las otras partes. Más concretamente, un incremento $\Delta x = 2$ produce por sí solo un incremento de beneficios de $250 \cdot 2 = 500$ u.m., un incremento de $\Delta y = 1$ produce un incremento de beneficios de 700 u.m., mientras que los dos incrementos a la vez producen un incremento de beneficios de

$$\Delta B \approx 500 + 700 + (2^2 + 3 - 2) = 500 + 700 + 5 = 1205 \text{ u.m.},$$

como ya habíamos calculado, pero ahora vemos que el incremento de B es aproximadamente la suma de los incrementos que produce cada incremento parcial por separado. Como veremos a continuación, esto es consecuencia de que la función B es diferenciable.

3.2 Funciones diferenciables

Supongamos que una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tiene derivadas parciales en un punto $\bar{x} \in D$. Si incrementamos la variable x_i en una cantidad Δx_i , sabemos que el incremento que experimenta f es aproximadamente

$$\Delta_{x_i} f(\bar{x}) \approx \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\bar{x}} \Delta x_i.$$

Si consideramos incrementos para cada una de las variables, la suma de los incrementos parciales es

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}} \Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}} \Delta x_n = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}} \right) (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) = \nabla f(\bar{x}) \cdot \Delta \bar{x}.$$

Las funciones diferenciables son las funciones para las que esta suma de incrementos parciales es una buena aproximación del incremento total de la función. La definición precisa es la siguiente:

Definición Una función escalar $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en un abierto D es *diferenciable* en un punto $\bar{x} \in D$ si tiene derivadas parciales en $\bar{x}$ y existe

$$\lim_{\Delta \bar{x} \rightarrow \bar{0}} \frac{\Delta f(\bar{x})(\Delta \bar{x}) - \nabla f(\bar{x}) \cdot \Delta \bar{x}}{\|\Delta \bar{x}\|} = \lim_{\Delta \bar{x} \rightarrow \bar{0}} \frac{f(\bar{x} + \Delta \bar{x}) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x}) \cdot \Delta \bar{x}}{\|\Delta \bar{x}\|} = 0.$$

Diremos que f es diferenciable si lo es en todos los puntos de su dominio. De acuerdo con la interpretación de los límites, si f es diferenciable en $\bar{x}$ tenemos que, para un vector de incrementos marginales $\Delta \bar{x}$, se cumple

$$\frac{\Delta f(\bar{x})(\Delta \bar{x}) - \nabla f(\bar{x}) \cdot \Delta \bar{x}}{\|\Delta \bar{x}\|} \approx 0,$$

de modo que también $\Delta f(\bar{x})(\Delta \bar{x}) - \nabla f(\bar{x}) \cdot \Delta \bar{x} \approx 0$ y, por consiguiente,

$$\Delta f(\bar{x})(\Delta \bar{x}) \approx \nabla f(\bar{x}) \cdot \Delta \bar{x} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}} \Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}} \Delta x_n.$$

Al miembro derecho se le llama diferencial de f en $\bar{x}$. Más precisamente:

Definición Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable en un punto $\bar{x}$, se llama *diferencial* de f en $\bar{x}$ a la aplicación $df(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$df(\bar{x})(\Delta \bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) \cdot \Delta \bar{x} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}} \Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}} \Delta x_n.$$

Habitualmente, esto se expresa mediante la notación¹

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n,$$

que es la expresión usual para la diferencial de una función escalar.

La definición de función diferenciable no es útil para decidir si una función dada lo es. En la práctica nos bastará con esta condición suficiente:

¹Con rigor, hemos de observar que si f es simplemente la función $f(\bar{x}) = x_i$, entonces la expresión anterior se reduce a $dx_i(\Delta \bar{x}) = \Delta x_i$, por lo que, para una función arbitraria f , la expresión anterior equivale a

$$df(\bar{x})(\Delta \bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}} dx_1(\Delta \bar{x}) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}} dx_n(\Delta \bar{x}).$$

Si f es diferenciable en su dominio esto es cierto para todo punto $\bar{x}$ y todo vector de incrementos $\Delta \bar{x}$, por lo que podemos expresar esta igualdad como una igualdad de funciones, lo cual nos lleva a la fórmula del recuadro.

Teorema Toda función de clase C^1 en un abierto (es decir, con derivadas parciales continuas) es diferenciable en dicho abierto.

Ejemplo La función $f(x, y, z) = x^2y + 2yz$ es diferenciable en $\mathbb{R}^3$, pues es un polinomio y los polinomios son de clase C^1 . Su diferencial es

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 2xy dx + (x^2 + 2z)dy + 2y dz.$$

La diferencial en el punto $(x, y, z) = (2, 3, -1)$ es

$$df(2, 3, -1) = 12 dx + dy + 6 dz.$$

Esta diferencial actuando sobre el vector de incrementos $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (1, 0, 3)$ es

$$df(2, 3, -1)(1, 0, 3) = 12 \cdot 1 + 0 + 6 \cdot 3 = 30.$$

■

Aunque teóricamente no es exacto, en la práctica podemos pensar que df depende de las mismas variables que f (en el ejemplo anterior x, y, z) y de las diferenciales de las variables de f (en el ejemplo dx, dy, dz), es decir:

Si f es una función diferenciable en un abierto, entonces df es una función cuyas variables son las variables x_i de f y las variables dx_i . Cuando particularizamos la diferencial en un punto $\bar{x}$, entonces $df(\bar{x})$ es una función de las variables dx_i .

La interpretación de la diferencial está contenida en la relación

$$\Delta f \approx df(\bar{x})(\Delta \bar{x}),$$

Es decir:

El incremento que experimenta una función diferenciable cuando se incrementan marginalmente sus variables es aproximadamente la diferencial de la función en el punto de partida del incremento actuando sobre el vector de incrementos.

Ejemplo Calculemos la diferencial de la función $f(x, y) = \sqrt{xy}$.

Simplemente, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{2\sqrt{xy}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{xy}}$, luego

$$df = \frac{y}{2\sqrt{xy}} dx + \frac{x}{2\sqrt{xy}} dy.$$

Si la queremos, por ejemplo, en el punto $(3, 12)$ será

$$df(3, 12) = dx + \frac{1}{4} dy.$$

■

Ejercicio Calcula aproximadamente sin calculadora el valor de $f(3.1, 11.8)$, donde f es la función del ejemplo anterior.

Es fácil calcular $f(3, 12) = \sqrt{36} = 6$, con lo que podemos expresar

$$\begin{aligned} f(3.1, 11.8) &= f(3 + 0.1, 12 - 0.2) \approx f(3, 12) + df(3, 12)(0.1, -0.2) \\ &= 6 + 0.1 + \frac{1}{4}(-0.2) = 6.1 - 0.05 = 6.05. \end{aligned}$$

El valor real (que da la calculadora) es 6.048, luego nos hemos equivocado en 2 milésimas. ■

Interpretación marginal de la diferenciabilidad Ahora podemos precisar la idea con la que hemos introducido la noción de diferenciabilidad. Consideremos una función diferenciable f . Por simplicidad supongamos que tiene dos variables $f(x, y)$. El incremento que experimenta tras un incremento marginal de sus variables $(\Delta x, \Delta y)$ es aproximadamente

$$\Delta f = df(x, y)(\Delta x, \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y.$$

Ahora bien, el primer sumando es aproximadamente $\Delta_x f$, y el segundo $\Delta_y f$. Esto es cierto en general:

La diferenciabilidad de una función en un punto se traduce en que el incremento que experimenta al incrementar marginalmente sus variables es aproximadamente igual a la suma de los incrementos producidos por el incremento de cada variable por separado.

Ejemplo Una empresa fabrica dos productos A y B y se sabe que el coste marginal respecto a cada uno de ellos para la producción actual $(x, y) = (300, 500)$ es

$$\left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{(300, 500)} = 5 \text{ u.m./unidad de A}, \quad \left. \frac{\partial C}{\partial y} \right|_{(300, 500)} = 3 \text{ u.m./unidad de B}.$$

La empresa va a incrementar su producción en $(\Delta x, \Delta y) = (2, -1)$. Con estos datos podemos afirmar que si únicamente incrementara la producción de A en $\Delta x = 2$ el incremento de coste sería

$$\Delta_x C \approx \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{(300, 500)} \cdot \Delta x = 5 \cdot 2 = 10 \text{ u.m.},$$

mientras que si sólo incrementara la producción de B en $\Delta y = -1$ el incremento del coste sería

$$\Delta_y C \approx \left. \frac{\partial C}{\partial y} \right|_{(300, 500)} \cdot \Delta y = 3 \cdot (-1) = -3 \text{ u.m.}$$

No tenemos datos para estimar el incremento de coste que se produce con el incremento simultáneo $(\Delta x, \Delta y)$ a menos que sepamos que la función de costes $C(x, y)$ es diferenciable, en cuyo caso el incremento total será aproximadamente la suma de los incrementos parciales:

$$\Delta C \approx \Delta_x C + \Delta_y C \approx 10 - 3 = 7 \text{ u.m.}$$

■

Teorema *Toda función diferenciable es continua.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en un punto $\bar{p} \in D$. Entonces existe

$$\lim_{\Delta \bar{x} \rightarrow \bar{0}} \frac{f(\bar{p} + \Delta \bar{x}) - f(\bar{p}) - \nabla f(\bar{p}) \cdot \Delta \bar{x}}{\|\Delta \bar{x}\|} = 0.$$

Puesto que $\lim_{\Delta \bar{x} \rightarrow \bar{0}} \|\Delta \bar{x}\| = 0$ (la norma es continua) al multiplicar por $\|\Delta \bar{x}\|$ el límite será $0 \cdot 0 = 0$, es decir:

$$\lim_{\Delta \bar{x} \rightarrow \bar{0}} f(\bar{p} + \Delta \bar{x}) - f(\bar{p}) - \nabla f(\bar{p}) \cdot \Delta \bar{x} = 0.$$

Ahora bien,

$$\lim_{\Delta \bar{x} \rightarrow \bar{0}} \nabla f(\bar{p}) \cdot \Delta \bar{x} = \nabla f(\bar{p}) \cdot \bar{0} = 0,$$

luego

$$\lim_{\Delta \bar{x} \rightarrow \bar{0}} f(\bar{p} + \Delta \bar{x}) - f(\bar{p}) = 0$$

o, lo que es lo mismo, existe

$$\lim_{\Delta \bar{x} \rightarrow \bar{0}} f(\bar{p} + \Delta \bar{x}) = f(\bar{p}).$$

Si llamamos $\bar{x} = \bar{p} + \Delta \bar{x}$ es claro que cuando $\Delta \bar{x} \rightarrow \bar{0}$ entonces $\bar{x} \rightarrow \bar{p}$ y viceversa, luego

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{p}} f(\bar{x}) = f(\bar{p}).$$

Esto significa que f es continua en $\bar{p}$. ■

En resumen, tenemos las relaciones siguientes entre continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad:

Para que una función f sea diferenciable en un punto $\bar{p}$ ha de tener derivadas parciales en $\bar{p}$, pero esto no basta para que f sea diferenciable, ya que además ha de existir y ser nulo el límite que aparece en la definición de diferenciabilidad. Sin embargo, si además de tener derivadas parciales en $\bar{p}$, estas derivadas son continuas (es decir, si f es de clase C^1 en $\bar{p}$), entonces la condición del límite se cumple automáticamente, y podemos decir que f es diferenciable. Por otra parte, si f es diferenciable, entonces f será continua en $\bar{p}$, pero la mera continuidad no garantiza que f sea diferenciable.

Diferenciabilidad de funciones vectoriales La definición de función diferenciable se extiende a funciones vectoriales $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sin más que sustituir el vector gradiente $\nabla f(\bar{x})$ por la matriz jacobiana $Jf(\bar{x})$, es decir, la función f es diferenciable en un punto $\bar{x} \in D$ (D abierto) si

$$\lim_{\Delta \bar{x} \rightarrow \bar{0}} \frac{f(\bar{x} + \Delta \bar{x}) - f(\bar{x}) - (Jf(\bar{x})\Delta \bar{x}^t)^t}{\|\Delta \bar{x}\|} = 0.$$

Notemos que para multiplicar la matriz jacobiana por $\Delta \bar{x}$ hemos de trasponer éste último y el resultado es un vector columna, por lo que hemos de volver a trasponerlo para restarlo de $f(\bar{x} + \Delta \bar{x}) - f(\bar{x})$.

La diferencial de f en $\bar{x}$ se define como la aplicación $df(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $df(\bar{x})(\Delta \bar{x}) = (Jf(\bar{x})\Delta \bar{x}^t)^t$. En la práctica basta tener en cuenta el teorema siguiente:

Teorema Una función vectorial $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en un punto $\bar{x} \in D$ si y sólo si lo son todas las funciones coordenadas f_i , y en tal caso $df(\bar{x}) = (df_1(\bar{x}), \dots, df_m(\bar{x}))$.

Ejemplo La función $f(x, y) = (x^2y, x \operatorname{sen} y, e^{xy})$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, pues lo son sus funciones coordenadas (son todas de clase C^1). La diferencial de f es

$$df = (2xt \, dx + x^2 \, dy, \operatorname{sen} y \, dx + x \cos y \, dy, ye^{xy} \, dx + xe^{xy} \, dy).$$

■

3.2.1 Dirección de máximo crecimiento, etc.

Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable en un punto $\bar{x} \in D$, podemos plantearnos la siguiente cuestión: ¿Qué vector de incrementos $\Delta\bar{x}$ producirá el mayor incremento de la función f , es decir, hará que $f(\bar{x} + \Delta\bar{x}) - f(\bar{x})$ sea máximo? En general esta pregunta no está bien planteada, pues puede ocurrir —por ejemplo— que cuanto mayores sean los incrementos de las variables mayor sea el incremento que experimenta la función, por lo que no haya un incremento máximo. Para que la pregunta tenga sentido podemos considerar únicamente incrementos unitarios, es decir, tales que $\|\Delta\bar{x}\| = 1$. La pregunta es, pues, ¿Qué vector de incrementos unitario produce el mayor incremento de la función? Si f es diferenciable, sabemos que $\Delta f(\bar{x})(\Delta\bar{x}) \approx df(\bar{x})(\Delta\bar{x})$, por lo que el problema equivale a determinar el incremento unitario que maximiza la diferencial. Con esto determinamos más exactamente la dirección en la que la función crece más rápidamente. Tenemos que

$$df(\bar{x})(\Delta\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) \cdot \Delta\bar{x} = \|\nabla f(\bar{x})\| \|\Delta\bar{x}\| \cos \alpha = \|\nabla f(\bar{x})\| \cos \alpha,$$

donde α es el ángulo entre $\Delta\bar{x}$ y el gradiente de f .

Notemos que aquí hemos de suponer que $\nabla f(\bar{x}) \neq \bar{0}$. Si el gradiente se anula no podemos continuar nuestro análisis. Esto puede deberse a que la función tenga un máximo o un mínimo en $\bar{x}$ (con lo que no hay direcciones de máximo crecimiento o bien hay infinitas) o porque sea necesario considerar derivadas de órdenes superiores.

La diferencial será máxima cuando $\cos \alpha = 1$, lo cual sucede si $\alpha = 0$, es decir, si $\Delta\bar{x}$ tiene la dirección del gradiente y es, por consiguiente,

$$\text{DMC} = \Delta\bar{x} = \frac{\nabla f(\bar{x})}{\|\nabla f(\bar{x})\|}.$$

Esta dirección se llama *dirección de máximo crecimiento* de f en $\bar{x}$.

Así mismo, la dirección en que la diferencial es mínima (más negativa, máximo decrecimiento) es la que cumple $\cos \alpha = -1$, o sea, $\alpha = \pi$, lo que se traduce en que $\Delta\bar{x}$ tiene la dirección opuesta a la anterior, es decir,

$$\text{DMD} = \Delta\bar{x} = -\frac{\nabla f(\bar{x})}{\|\nabla f(\bar{x})\|}.$$

Esta dirección se llama *dirección de máximo decrecimiento* de f en $\bar{x}$.

Finalmente, las direcciones para las que $\cos \alpha = 0$, es decir, las direcciones perpendiculares al gradiente, son aquellas en las que la variación de f es menos apreciable, y se llaman *direcciones de crecimiento nulo* de f en $\bar{x}$. En general son infinitas, por lo que podemos hablar del *conjunto* de direcciones de crecimiento nulo:

$$\text{DCN} = \{\bar{v} \in \mathbb{R}^n \mid \bar{v} \cdot \nabla f(\bar{x}) = 0\}.$$

Derivadas direccionales Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar definida en un abierto D . Se define la derivada direccional de f en un punto $\bar{x} \in D$ en la dirección $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{v} \neq \bar{0}$ como

$$D_{\bar{v}}f(\bar{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h\bar{v}) - f(\bar{x})}{h}.$$

Si la función f es diferenciable en $\bar{x}$, se demuestra que

$$D_{\bar{v}}f(\bar{x}) = df(\bar{x})(\bar{v}),$$

por lo que la derivada direccional no aporta ninguna información que no esté contenida ya en la diferencial.

Ejemplo Calcula la derivada direccional de la función $f(x, y) = \sqrt{xy}$ en el punto $(1, 1)$ y en la dirección $(2, 1)$.

Puesto que f es diferenciable en $(1, 1)$, la derivada direccional puede calcularse mediante la diferencial, es decir, tenemos que

$$df = \frac{y}{2\sqrt{xy}} dx + \frac{x}{2\sqrt{xy}} dy$$

y, por consiguiente,

$$D_{(2,1)}f(1, 1) = df(1, 1)(2, 1) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1.5.$$

■

Relación entre continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad En general se cumplen los siguientes hechos:

1. Toda función con derivadas parciales continuas es diferenciable.
2. Toda función diferenciable tiene derivadas direccionales y es continua.
3. Toda función con derivadas direccionales tiene derivadas parciales.

Cualquier otra implicación entre estos conceptos es falsa en general: hay funciones continuas que no son diferenciables, funciones derivables que no son diferenciables, etc., pero no vamos a ver ningún caso.

3.3 El polinomio de Taylor

Hemos visto que si $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable en un punto $\bar{p}$ del abierto D entonces, para incrementos marginales $\Delta\bar{x}$ se cumple

$$\Delta f = f(\bar{p} + \Delta\bar{x}) - f(\bar{p}) \approx \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\bar{p}} \Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\bar{p}} \Delta x_n.$$

Equivalentemente, para todo punto $\bar{x} = \bar{p} + \Delta\bar{x}$ cercano a $\bar{p}$ se cumple

$$f(\bar{x}) \approx f(\bar{p}) + \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\bar{p}} (x_1 - p_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\bar{p}} (x_n - p_n).$$

El miembro derecho es un polinomio de grado 1. Si estamos dispuestos a considerar polinomios de grado mayor (y derivadas de orden superior) podemos obtener aproximaciones polinómicas mucho mejores de una función. Concretamente, la mejor aproximación polinómica de un grado dado n a una función f de clase C^n se conoce como polinomio de Taylor de grado n de f alrededor de un punto dado $\bar{p}$. Este polinomio está determinado por el teorema siguiente:

Teorema Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^n en un punto $\bar{p}$ del abierto D , existe un único polinomio $P_n f(\bar{p})(\bar{x})$ de grado $\leq n$ cuyas derivadas parciales de orden $\leq n$ en $\bar{p}$ coinciden con las de f . Dicho polinomio se llama polinomio de Taylor de f en $\bar{p}$ y para valores de $\bar{x}$ cercanos a $\bar{p}$ se tiene la aproximación

$$f(\bar{x}) \approx P_n f(\bar{p})(\bar{x}).$$

Esta aproximación es mejor cuanto mayor es n .

Existe una fórmula para calcular el polinomio de Taylor de grado n de una función de clase C^n , pero para funciones de varias variables el cálculo es laborioso, así que nos limitaremos a considerar polinomios de grado 1 y 2, que son los que después necesitaremos.

La fórmula para el polinomio de Taylor de grado 1 es la que hemos visto antes, que no es sino la aproximación por la diferencial:

$$P_1 f(\bar{p})(\bar{x}) = f(\bar{p}) + \nabla f(\bar{p})(\bar{x} - \bar{p}).$$

Para el polinomio de grado 2 hay que añadir otro término:

$$P_2 f(\bar{p})(\bar{x}) = f(\bar{p}) + \nabla f(\bar{p})(\bar{x} - \bar{p}) + \frac{1}{2}(\bar{x} - \bar{p}) H f(\bar{p})(\bar{x} - \bar{p})^t.$$

Ejemplo Vamos a calcular el polinomio de Taylor de grado 2 de la función $\sin(xy)$ en el punto $\bar{p} = (1, 1)$.

El término de grado 0 es $f(1, 1) = \sin 1$.

El término de grado 1 se construye con el gradiente:

$$\nabla f(x, y) = (y \cos(xy), x \cos(xy)), \quad \nabla f(1, 1) = (\cos 1, \cos 1),$$

con lo que el término de grado 1 es

$$(\cos 1, \cos 1)(x - 1, y - 1) = (\cos 1)(x - 1) + (\cos 1)(y - 1).$$

El término de grado 2 se construye con la hessiana:

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} -y^2 \sin(xy) & \cos(xy) - xy \sin(xy) \\ \cos(xy) - xy \sin(xy) & -x^2 \sin(xy) \end{pmatrix},$$

$$Hf(1, 1) = \begin{pmatrix} -\sin 1 & \cos 1 - \sin 1 \\ \cos 1 - \sin 1 & -\sin 1 \end{pmatrix},$$

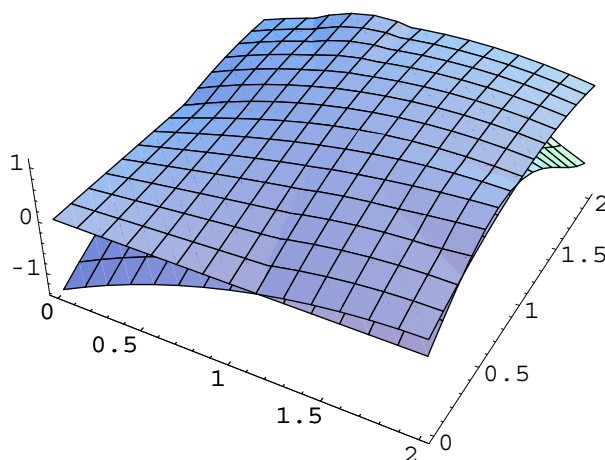
con lo que el término de grado 2 es

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(x - 1, y - 1) \begin{pmatrix} -\sin 1 & \cos 1 - \sin 1 \\ \cos 1 - \sin 1 & -\sin 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}(\sin 1)(x - 1)^2 + (\cos 1 - \sin 1)(x - 1)(y - 1) - \frac{1}{2}(\sin 1)(y - 1)^2. \end{aligned}$$

El polinomio de grado 2 es, por tanto:

$$P_2 f(1, 1)(x, y) = 0.84 + 0.54(x - 1) + 0.54(y - 1) - 0.42(x - 1)^2 - 0.30(x - 1)(y - 1) - 0.42(y - 1)^2.$$

La figura muestra la función $\sin xy$ y el polinomio que acabamos de calcular. La función $\sin xy$ es la que está debajo en el punto $(2, 2)$.



Vemos que alrededor de $(1, 1)$ son muy parecidas, aunque luego se separan. Esto hace que para estudiar diversas propiedades de una función f de clase C^2 (por ejemplo, si tiene un máximo o un mínimo en un punto) en muchos casos podemos sustituir f por el polinomio de Taylor, sin que ello modifique las conclusiones. ■

3.4 Problemas

- Calcula la diferencial de las funciones siguientes: (Estudia previamente si son diferenciables en su dominio):
 - $P = 2x^3y - 3x + 4y^2$,
 - $Q = 3x - 5y + 7$,
 - $z = \ln xy$,
 - $T = e^{3u^2+y-\sqrt{t}}$,
 - $V = \sqrt[3]{\sin(x^2y)}$,
 - $r = \frac{\sqrt[3]{x}}{p}$.
- Dada la función $V(p, q) = p^3 + pq + 2$, ¿es diferenciable en $(3, 1)$?, ¿y en $(2, 1)$? Calcula $dV(3, 1)$ y $dV(2, 1)(2, 3)$.
- Dada la función $S(x, y, z) = x \sin y + z^2$ justifica que es diferenciable en $(2, 0, 1)$ y calcula $dS(2, 0, 1)$.
- Sea $f(x, y) = \sqrt{x - y}$.
 - ¿La función f tiene derivadas parciales en el punto $(1, 1)$?
 - ¿Es f diferenciable en el punto $(1, 1)$?
 - ¿Es f de clase C^1 en el punto $(1, 1)$?
 - ¿Es f de clase C^∞ en el punto $(1, 1)$?
 - ¿Es f continua en el punto $(1, 1)$?

5. Di cuáles de las afirmaciones siguientes son verdaderas y cuáles falsas:
 - (a) Toda función diferenciable en un punto es continua en dicho punto.
 - (b) Toda función continua en un punto es diferenciable en dicho punto.
 - (c) Toda función diferenciable en un punto tiene derivadas parciales en dicho punto.
 - (d) Toda función con derivadas parciales en un punto es diferenciable en dicho punto.
6. Por un ejemplo de función continua en todos los puntos de $\mathbb{R}^2$ que no sea diferenciable en el punto $(1, 2)$.
7. Determina si la función $f(x, y) = x + y \cos x^2$ es diferenciable en el punto $(2, 1)$. ¿Es continua en dicho punto?
8. Determina si la función $f(x, y) = \sqrt[4]{x^2 + y}$ es diferenciable en los puntos $(1, 1)$, $(2, -4)$ y $(1, -4)$. ¿Es continua en dichos puntos?
9. Copia 100 veces en un papel: “Nunca diré que toda función continua es diferenciable”.
10. Calcula la dirección de máximo crecimiento, máximo decrecimiento y las direcciones de crecimiento nulo de las funciones siguientes en los puntos indicados. Justifica previamente que son diferenciables en los puntos correspondientes.
 - (a) $f(x, y) = x^2 + 2xy$ en $(3, 4)$,
 - (b) $g(u, v, w) = u^2 e^{v-w}$ en $(2, 3, 3)$,
 - (c) $h(p, q) = 3p + 4q$ en $(1, 1)$,
 - (d) $j(a, b) = ab$ en $(3, 1)$.
11. Calcula el polinomio de Taylor de grado 1 de las funciones siguientes en los puntos indicados. Justifica previamente que son de clase C^1 en dichos puntos.
 - (a) $f(x, y) = \cos(x - y)$ en $(a, b) = (\pi, 0)$.
 - (b) $f(u, v) = uv^3 - 3uv^2 + u$ en $(a, b) = (2, -1)$.
 - (c) $f(x, y, z) = 3x - 2y + z$ en $(a, b, c) = (3, 2, 1)$.
12. Calcula el polinomio de Taylor de grado 2 de las funciones siguientes en los puntos indicados. Justifica previamente que son de clase C^2 en dichos puntos.
 - (a) $Q(r, s, t) = rs^3 + 2rt + 3r$ en $(a, b, c) = (1, 0, 2)$.
 - (b) $S(x, z) = \sqrt[3]{x + 2z}$ en $(a, b) = (-1, 1)$.
 - (c) $f(x, y) = x \cos y$ en $(a, b) = (2, \pi)$.
13. Calcula aproximadamente (sin usar calculadora) $1.2e^{0.05}$ usando el polinomio de Taylor de grado 2 de la función $f(x, y) = xe^y$ en el punto adecuado ¿es la función de clase C^2 ? Compara el resultado con el que da la calculadora. ¿Cuál es el porcentaje de error?

14. Calcula los polinomios de Taylor de grado 1 y de grado 2 de la función $f(x, y) = x \ln y$ en el punto $(2, 1)$. Calcula con ellos las aproximaciones correspondientes de $1.9 \ln 1.3$ y el porcentaje de error de cada una de ellas. ¿Es la función de clase C^2 en el punto?
15. Razona por qué la función $P(u, v) = e^{u^2 - v^3 - 1}$ es diferenciable en el punto $(3, 2)$. Calcula su diferencial en dicho punto.
16. Dada $f(x, y) = x^2 + 2y$, calcula la función de incrementos $\Delta f(x, y)(\Delta x, \Delta y)$ y la diferencial $df(x, y)(dx, dy)$. Utiliza ambas para determinar el incremento que experimenta la función al pasar de $(x, y) = (3, 1)$ a $(x, y) = (2, 2)$. ¿Cuál de los dos resultados es exacto y cuál aproximado? Calcula el porcentaje de error (error relativo).
17. Calcula el polinomio de Taylor de grado 2 de la función $f(x, y, z) = x^3y - z^3$ alrededor del punto $(1, 2, 3)$. Úsalo para calcular aproximadamente $f(1.1, 1.9, 3.8)$. Determina el error (absoluto) cometido en dicha aproximación.
18. Una empresa fabrica dos productos A y B en cantidades x e y . Los beneficios que obtiene con su producción vienen dados por una cierta función $B(x, y)$. Actualmente los beneficios ascienden a 200 u.m., pero la empresa tiene más demanda de la que realmente está cubriendo, por lo que se plantea aumentar su producción. Sus recursos le permiten un aumento de 10 unidades de producto. La empresa estima que, para la producción actual $\bar{p} = (x, y)$ se cumple

$$\left. \frac{\partial B}{\partial x} \right|_{\bar{p}} = 3 \text{ u.m./unidad de A}, \quad \left. \frac{\partial B}{\partial y} \right|_{\bar{p}} = 2 \text{ u.m./unidad de B}.$$
 - (a) ¿Cuál es exactamente la interpretación de estas derivadas en este contexto concreto?
 - (b) ¿Qué beneficios pasaría a obtener la empresa si aumentara en 5 unidades la producción de A ? ¿Y si aumenta en 5 unidades la producción de B ?
 - (c) Para estimar con estos datos los beneficios de la empresa en el supuesto de que aumente simultáneamente 5 unidades la producción de A y 5 la de B necesitamos una hipótesis sobre la función B , ¿cuál?
 - (d) Con dicha hipótesis, ¿cuáles pasarían a ser los beneficios de la empresa?
19. Una empresa estima que sus beneficios $B(p, x)$ dependen del precio medio de sus materias primas p y de la cantidad de producto que fabrica x . Actualmente sus beneficios son de 100 u.m. y corresponden a una producción de $x = 5$ unidades y a unos precios de $p = 1$ u.m. Así mismo considera que

$$\left. \frac{\partial B}{\partial p} \right|_{(1,5)} = -3 \text{ u.m./u.m.}, \quad \left. \frac{\partial B}{\partial x} \right|_{(1,5)} = 2 \text{ u.m./u.prod.}$$
 - a) Interpreta las derivadas, especialmente su signo.
 - b) ¿Qué beneficios cabría esperar si los precios aumentan a 1.3 u.m.?
 - c) ¿Y si, además de dicho aumento de precios, la empresa aumenta su producción en 3 unidades?
 - d) ¿Hace falta alguna hipótesis matemática sobre la función B para justificar la respuesta a c)?

20. Sea $D(p, r, t)$ la función de demanda de un artículo en un mercado, donde p es el precio (en u.m.), r la renta media de los consumidores (en u.m.) y t el tiempo en años. Actualmente ($t = 0$) se tiene $(p, r) = (5, 14)$ y $D(5, 14, 0) = 200$. Además

$$\left. \frac{\partial D}{\partial t} \right|_{(5,14,0)} = 20, \quad \left. \frac{\partial D}{\partial p} \right|_{(5,14,0)} = -15, \quad \left. \frac{\partial D}{\partial r} \right|_{(5,14,0)} = 10.$$

- (a) Interpreta estas derivadas e indica las unidades en que vienen expresadas.
 - (b) ¿Qué demanda cabría esperar dentro de un año si la renta ha pasado a $r = 13$ u.m. y el precio a $p = 4.5$ u.m.? ¿qué hipótesis sobre D es necesaria para responder a esta pregunta con los datos disponibles?
21. La función de beneficios de una empresa es $B(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2$, donde x e y son las cantidades producidas de dos artículos. La producción actual es $(x, y) = (7, 15)$.
- (a) Calcula el beneficio actual.
 - (b) Comprueba que B es de clase C^1 en $(7, 15)$.
 - (c) Calcula la dirección de máximo crecimiento de B .
 - (d) La empresa tiene la posibilidad de aumentar su producción en 1.4 u.p. Calcula el incremento de beneficios que obtiene si lo hace con el vector de incrementos $(\Delta x, \Delta y)$ igual a la dirección de máximo crecimiento de B .
 - (e) Calcula el incremento de beneficios que obtiene si hace $(\Delta x, \Delta y) = (0, 1.4)$ u.p.
 - (f) Explica los resultados de los dos apartados anteriores.
22. Una empresa ha hecho una estimación de la repercusión en sus beneficios de su inversión en producción x y de su inversión en publicidad P a través de una función $B(x, P)$ (que suponemos diferenciable). Concretamente estima que, para los valores actuales

$$\left. \frac{\partial B}{\partial x} \right|_{(1000,100)} = 36, \quad \left. \frac{\partial B}{\partial P} \right|_{(1000,100)} = 27.$$

- (a) Interpreta estas derivadas. Indica las unidades en que se expresan.
- (b) Calcula $dB(1000, 100)$.
- (c) Calcula la dirección de máximo crecimiento de B en $(1000, 100)$.
- (d) Si la empresa dispone de 5 unidades monetarias marginales para invertir, ¿qué cantidad le convendrá invertir en producción y qué cantidad en publicidad para conseguir el mayor incremento de beneficios?

3.5 Cuestiones

1. Sea $f(x, y)$ una función diferenciable, de modo que

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Escribe las expresiones correspondientes para $df(1, 2)$ y $df(1, 2)(3, 5)$.

2. Sea $f(x, y)$ una función de dos variables. Di qué representan las expresiones Δf , $\Delta_x f$, $\Delta_y f$, ∇f , df , ∂f y explica la diferencia entre ellas.
3. Sea $f(x, y) = x^2 + y$. Asegúrate de que no confundes los dos problemas siguientes, cuyas respuestas son muy distintas:
 - (a) Calcula las derivadas parciales de f en el punto $(1, 2)$.
 - (b) Calcula la diferencial de f en el punto $(1, 2)$.

Responde asegurándote de que nombras cada cosa correctamente.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en el punto $(3, 5)$. Indica cuál de las dos fórmulas siguientes es correcta y cuál no tiene sentido. Explica por qué.

$$df(3, 5)(0.1, -0.3) = \nabla f(3, 5) \cdot (0.1, -0.3), \quad df(3, 5) \cdot (0.1, -0.3) = \nabla f(3, 5)(0.1, -0.3).$$

5. Explica por qué las respuestas siguientes a las preguntas indicadas tendrían una calificación de cero en un examen independientemente de los razonamientos que les precedieran.
 - (a) Sea $f(x, y)$ una función cualquiera. Calcula $df(1, 2)$.

RESPUESTAS:

$$a) \quad df(1, 2) = 5, \quad b) \quad df(1, 2) = 3x^2 + y, \quad c) \quad df(1, 2) = 3x \, dx - dy.$$

- (b) Sea $f(x, y, z)$ una función normal y corriente. Calcula $Hf(1, 0, -1)$.

RESPUESTAS:

$$a) \quad Hf(1, 0, -1) = \begin{pmatrix} 2yz & 2xz & 2xy \\ 2xz & 0 & x^2 \\ 2xy & x^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad b) \quad Hf(1, 0, -1) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (c) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ la función dada por $f(t) = (\text{una función}, \text{otra función})$. Calcula la matriz jacobiana de f en $t = 3$.

RESPUESTAS:

$$a) \quad Jf(3) = 0, \quad b) \quad Jf(3) = (2t, 3t^2), \quad c) \quad Jf(3) = (2, 3).$$

- (d) Calcula la dirección de máximo crecimiento de la función $f(x, y) = \text{"lo que sea"}$ en el punto $(3, 4)$.

RESPUESTAS:

$$a) \quad DMC = (2x, y), \quad b) \quad DMC = (2, 2).$$

6. Explica qué ha de ser cada uno de los objetos que aparecen en la fórmula siguiente para que tenga sentido:

$$\Delta f(\bar{x})(\Delta \bar{x}) \approx df(\bar{x})(\Delta \bar{x}),$$

es decir, indica qué es $\bar{x}$, qué es $\Delta \bar{x}$, qué es f , qué es $\Delta f(\bar{x})(\Delta \bar{x})$, etc.

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^∞ . Di qué son (vectores, funciones, matrices, números) los objetos siguientes. Precisa la respuesta:

$$\nabla f(2, 3), \quad df(2, 3), \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(2,3)}, \quad Hf(2, 3), \quad Jf(2, 3).$$

8. Si $f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es diferenciable en el punto $(3, 1, 2) \in D$. Di qué clase de objeto es $df(3, 1, 2)$ (un número, un vector, una matriz, una aplicación...). Precisa todo lo posible la respuesta. Igualmente, ¿qué es la matriz jacobiana $Jf(3, 1, 2)$?, ¿y la matriz hessiana $Hf(3, 1, 2)$?
9. Si $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar diferenciable en el punto $(3, 1)$, ¿qué clase de objeto es la dirección de máximo crecimiento de f en el punto $(3, 1)$?
10. Una función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $(2, 3)$. ¿Qué clase de objeto es $df(2, 3)$?, ¿y $\nabla f(2, 3)$?, ¿qué relación hay entre ellos?
11. Sea $f(x, y) = x^2y^2$. Queremos calcular el polinomio de Taylor de grado 1 de f en $(2, 3)$. Explica qué está mal en las respuestas siguientes:

$$(a) \quad f(2, 3) = 36, \quad \nabla f = (2xy^2, 2x^2y), \quad \nabla f(2, 3) = (36, 24),$$

$$P_1f(2, 3)(x, y) = 36 + (36, 24)(x - 2, y - 3) = 36 + (36(x - 2), 24(y - 3)).$$

$$(b) \quad f(2, 3) = 36, \quad \nabla f = (2xy^2, 2x^2y),$$

$$P_1f(2, 3)(x, y) = 36 + (2xy^2, 2x^2y)(x - 2, y - 3) = 36 + 2xy^2(x - 2) + 2x^2y(y - 3)$$

$$= 36 + 2x^2y^2 - 4xy^2 + 2x^2y^2 - 6x^2y = 36 + 2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 - 6 \cdot 2^2 \cdot 3 = 36.$$

12. Escribe en forma desarrollada (en términos de $x_1, \dots, x_n$) las expresiones

$$\|\bar{x}\|, \quad \nabla f(\bar{x}), \quad \|\nabla f(\bar{x})\|.$$

Tema 4

Funciones compuestas, implícitas y homogéneas

4.1 Composición de funciones

Definición Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : B \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ son funciones tales que $f[A] \subset B$, es decir, tales que las imágenes por f de los puntos de A están en B , podemos calcular la *función compuesta*, $g \circ f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ definida como la función dada por $(g \circ f)(\bar{x}) = g(f(\bar{x}))$.

En otras palabras, $g \circ f$ es la función que a cada punto $\bar{x}$ le asigna el resultado de aplicar f a $\bar{x}$ y después aplicar g al resultado $f(\bar{x})$. Veamos ejemplos.

Ejemplo La demanda de una empresa D está en función de los precios p_1 y p_2 a los que vende sus dos artículos. A su vez, la empresa fija estos precios en función de los precios q_1 y q_2 de las materias primas que emplea en su fabricación. Digamos que $D(p_1, p_2) = 50/(p_1 p_2)$, donde a su vez $p_1 = 3q_1 + q_2$, $p_2 = q_1 + 2q_2$.

La composición de estas funciones es la función $D(q_1, q_2)$ que nos da la demanda de la empresa en términos de los precios q_1 y q_2 de las materias primas. En este caso

$$D(q_1, q_2) = \frac{50}{(3q_1 + q_2)(q_1 + 2q_2)}.$$

En la práctica, calcular una composición de funciones se reduce a sustituir unas funciones en otras. Es muy importante no confundir la función $D(p_1, p_2)$ con la función compuesta $D(q_1, q_2)$. Es frecuente que se use el mismo nombre para ambas (en este caso D), y entonces se distinguen por las variables.

Es probable que no encuentres la relación entre el ejemplo anterior y la definición previa. Para encontrarla hemos de considerar las funciones q_1 y q_2 como las componentes de una función vectorial $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, de modo que

$$f(q_1, q_2) = (3q_1 + q_2, q_1 + 2q_2).$$

El dominio A sería, concretamente, $A = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 \mid q_1 > 0, q_2 > 0\}$, pues no tiene sentido considerar precios menores o iguales que 0. A su vez, la función de demanda $D(p_1, p_2)$ es una función $D : B \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, donde $B = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 \mid p_1 > 0, p_2 > 0\}$. La función $D(q_1, q_2)$ es, en los términos de la definición de función compuesta, la función $D \circ f$. En efecto, para calcular $D(q_1, q_2)$ aplicamos primero f a

(q_1, q_2) para obtener (p_1, p_2) y luego $D(p_1, p_2)$ para obtener la demanda correspondiente. ■

El resultado principal de esta sección es el siguiente:

Regla de la cadena Sean $f : A \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $g : B \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ dos funciones definidas en abiertos A y B tales que $f[A] \subset B$. Supongamos que f es diferenciable en un punto $\bar{p} \in A$ y que g es diferenciable en $f(\bar{p})$. Entonces $g \circ f$ es diferenciable en $\bar{p}$ y

$$d(g \circ f)(\bar{p}) = dg(f(\bar{p})) \circ df(\bar{p}).$$

Ejemplo Para la función de demanda anterior tenemos que

$$dD(p_1, p_2) = \frac{\partial D}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial D}{\partial p_2} dp_2 = -\frac{50}{p_1^2 p_2} dp_1 - \frac{50}{p_1 p_2^2} dp_2.$$

Por otra parte, $dp_1 = 3 dq_1 + dq_2$, $dp_2 = dq_1 + 2 dq_2$. Vemos así que dD es función de dp_1 y dp_2 , mientras que éstas son funciones de dq_1 y dq_2 . Por consiguiente, podemos componer las diferenciales y lo que afirma la regla de la cadena es que dicha composición es precisamente la diferencial de la función compuesta $D(q_1, q_2)$:

$$\begin{aligned} dD(q_1, q_2) &= -\frac{50}{p_1^2 p_2} (3 dq_1 + dq_2) - \frac{50}{p_1 p_2^2} (dq_1 + 2 dq_2) \\ &= -\left(\frac{150}{p_1^2 p_2} + \frac{50}{p_1 p_2^2}\right) dq_1 - \left(\frac{50}{p_1^2 p_2} + \frac{100}{p_1 p_2^2}\right) dq_2. \end{aligned}$$

■

Para funciones vectoriales suele ser más cómodo trabajar con las matrices jacobianas en lugar de con las diferenciales. Para ello usamos la siguiente consecuencia de la regla de la cadena:

Teorema Sean $f : A \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $g : B \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ dos funciones definidas en abiertos A y B tales que $f[A] \subset B$. Supongamos que f es diferenciable en un punto $\bar{p} \in A$ y que g es diferenciable en $f(\bar{p})$. Entonces

$$J(g \circ f)(\bar{p}) = Jg(f(\bar{p})) \cdot Jf(\bar{p}).$$

DEMOSTRACIÓN: Por la regla de la cadena sabemos que $d(g \circ f)(\bar{p}) = dg(f(\bar{p})) \circ df(\bar{p})$. Por lo tanto, si $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ tendremos que

$$d(g \circ f)(\bar{p})(\bar{v}) = dg(f(\bar{p}))(df(\bar{p})(\bar{v})).$$

Por otra parte, la diferencial se calcula multiplicando por la matriz jacobiana. Por lo tanto el miembro izquierdo es

$$J(g \circ f)(\bar{p}) \cdot \bar{v}^t,$$

mientras que el miembro derecho se obtiene aplicando primero $df(\bar{p})$ y luego $dg(f(\bar{p}))$, es decir:

$$\bar{v} \xrightarrow{df(\bar{p})} Jf(\bar{p}) \cdot \bar{v}^t \xrightarrow{dg(f(\bar{p}))} Jg(f(\bar{p})) \cdot Jf(\bar{p}) \cdot \bar{v}^t.$$

Así pues, tenemos que

$$J(g \circ f)(\bar{p}) \cdot \bar{v}^t = Jg(f(\bar{p})) \cdot Jf(\bar{p}) \cdot \bar{v}^t.$$

Como esto es cierto para todo vector $\bar{v}$, se ha de dar la igualdad:

$$J(g \circ f)(\bar{p}) = Jg(f(\bar{p})) \cdot Jf(\bar{p}).$$

■

De aquí se deduce una regla explícita para el cálculo de derivadas parciales de funciones compuestas que veremos en prácticas.

4.2 Funciones implícitas

Una función implícita es una función definida mediante una ecuación o un sistema de ecuaciones (aunque aquí consideraremos tan sólo el caso de una única ecuación). Veamos en primer lugar un ejemplo de situación en la que aparece una función implícita de forma natural:

Ejemplo Supongamos que la función de producción de una empresa es de tipo Cobb-Douglas, digamos: $q(K, L) = 3K^2L^3$, donde K es el capital y L el trabajo. Actualmente, la empresa utiliza los factores $(K, L) = (5, 4)$. Calcula la relación de sustitución técnica

$$\text{RST} = -\frac{dK}{dL}$$

para la producción actual. Interpretála.

SOLUCIÓN: El nivel de producción actual es $q(5, 4) = 4800$ u.p., por lo que la ecuación de la *curva de nivel de producción* actual es

$$3K^2L^3 = 4800.$$

En general:

Una *curva de nivel*¹ de una función f es el conjunto de los puntos $\bar{x}$ de su dominio que cumplen una ecuación de la forma $f(\bar{x}) = \alpha$, para un cierto número $\alpha \in \mathbb{R}$, es decir, la ecuación que determina los valores posibles de las variables para que f alcance exactamente un determinado nivel α .

En nuestro caso, la ecuación anterior determina todas las combinaciones posibles de los factores de producción K y L que permiten conseguir un nivel de producción de 4800 u.p. La producción actual $(5, 4)$ es una posibilidad, pero hay infinitas más.

Esta ecuación nos permite calcular una función $K(L)$ sin más que despejar:

$$K = \sqrt{\frac{1600}{L^3}} = 40L^{-3/2}.$$

¹Los economistas suelen dar nombres específicos a las curvas de nivel: p.ej., las curvas de nivel de utilidad se llaman *curvas de indiferencia*, las curvas de nivel de producción *isocuantas*, etc.

Esta es la expresión *explícita* de la función $K(L)$ definida *implícitamente* por la ecuación. Representa la cantidad necesaria de capital para obtener una producción de 4800 u.p. según la cantidad de trabajo empleada. El problema nos pide calcular la derivada

$$\frac{dK}{dL} = -40 \frac{3}{2} L^{-5/2} = -\frac{60}{\sqrt{L^5}}, \quad \left. \frac{dK}{dL} \right|_4 = -1.875 \text{ u.K} / \text{u.L.}$$

La interpretación es que:

Por cada unidad más de trabajo que empleemos, necesitaremos 1.875 unidades menos de K para mantener el nivel de producción actual, partiendo de unas cantidades $K = 5$ de capital y $L = 4$ de trabajo.

Como la derivada ha de ser obviamente negativa, la RST se define con un signo negativo para que hacerla positiva, y así

$$\text{RST}(4) = 1.875.$$

La interpretación es la misma que la de la derivada.

Esto significa que, por cada unidad que se incremente el trabajo, la empresa podrá reducir 1.875 u.m. de capital sin variar el nivel de producción.

Hay otra forma de hacer el cálculo, consistente en no molestarnos en despejar $K(L)$, sino considerar que, en la ecuación de la isocuanta, K y L no son ambas variables, sino que K depende de L (de la forma que hemos calculado antes, pero que ahora no necesitamos obtener). Entonces derivamos la ecuación usando la regla de la cadena según el esquema indicado. Teniendo en cuenta que la derivada del miembro derecho es 0 (porque es constante), el resultado es:

$$\frac{\partial q}{\partial K} \frac{dK}{dL} + \frac{\partial q}{\partial L} = 0.$$

Al calcular las derivadas de q queda:

$$6KL^3 \frac{dK}{dL} + 9K^2L^2 = 0.$$

Ahora sólo tenemos que despejar la derivada que buscábamos:

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{9K^2L^2}{6KL^3} = -\frac{3K}{2L}.$$

Así pues,

$$\text{RST} = \frac{3K}{2L}$$

y, para $(K, L) = (5, 4)$, obtenemos

$$\text{RST}(4) = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} = 1.875.$$

Como tenía que ser, el resultado es el mismo. ■

Observemos que, no sólo el cálculo mediante derivación implícita es técnicamente más simple que derivando explícitamente la función $K(L)$, sino que la expresión para la relación de sustitución técnica obtenida mediante derivación implícita ($3K/2L$) es

también más simple que la obtenida al derivar explícitamente (que tiene una raíz cuadrada). Más aún, sucede que en la teoría económica es interesante estudiar cómo depende la RST del cociente $\alpha = K/L$, y vemos que esta dependencia es obvia si hacemos el cálculo implícitamente (queda $RST = (3/2)\alpha$) y no es evidente en absoluto con la expresión calculada explícitamente.

Para derivar implícitamente una ecuación hemos de garantizar que ésta define realmente una función implícita, lo cual no siempre sucede. El teorema de la función implícita nos proporciona un criterio sencillo para comprobarlo:

Teorema de la función implícita Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^k ($k = 1, 2, \dots, \infty$) en el abierto D y $\bar{p} \in D$ un punto tal que $f(\bar{p}) = 0$. Si se cumple que

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_{\bar{p}} \neq 0,$$

entonces existe una función $x_n : U \subset \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^k en el abierto U tal que $(p_1, \dots, p_{n-1}) \in U$ y, para cada $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in U$, el número $x_n = x_n(x_1, \dots, x_{n-1})$ hace que $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ sea el único punto cercano² a $\bar{p}$ que cumple la ecuación $f(\bar{x}) = 0$.

Más claramente:

Para que una ecuación $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ determine una variable x_n como función implícita de las demás, $x_n = x_n(x_1, \dots, x_{n-1})$ (es decir, para que se pueda despejar en ella x_n) es suficiente con que la derivada de f respecto de x_n no valga 0. Más precisamente: si dicha derivada no vale 0 en un punto $\bar{p}$, se cumple que para valores $(x_1, \dots, x_{n-1})$ cercanos a $(p_1, \dots, p_{n-1})$ existe un único x_n cercano a p_n que cumple la ecuación. Además, la función implícita se puede derivar tantas veces como f .

Ejemplo En el problema anterior, para comprobar que la ecuación

$$q(K, L) = 3K^2L^3 = 4\,800$$

define a K como función implícita de L para valores cercanos a $(5, 4)$ basta observar que

$$\frac{\partial q}{\partial K} = 6KL^3, \quad \left. \frac{\partial q}{\partial K} \right|_{(5,4)} = 1\,920 \neq 0.$$

Esto garantiza que, para cada cantidad de trabajo L cercana a $L = 4$ existe una cantidad posible de capital K cercana a $K = 5$ que da lugar a una producción de 4 800 u.p. ■

4.3 Funciones homogéneas

La homogeneidad es una propiedad de ciertas funciones que tiene interés teórico en algunos modelos económicos. la definición es la siguiente:

²“Cercano” ha de entenderse como perteneciente a un cierto abierto $V \subset \mathbb{R}^n$ que contiene a $\bar{p}$.

Definición Una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en un abierto D es *homogénea* de grado $m \in \mathbb{R}$ si para todo $\bar{x} \in D$ y todo $\lambda > 0$ tal que $\lambda\bar{x} \in D$ se cumple que $f(\lambda\bar{x}) = \lambda^m f(\bar{x})$.

Ejemplo La función $f(x, y) = x/y^2$ es homogénea, pues si $\lambda > 0$ se cumple

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x}{\lambda^2 y^2} = \frac{x}{\lambda y^2} = \lambda^{-1} \frac{x}{y^2} = \lambda^{-1} f(x, y).$$

Concretamente, vemos que f es homogénea de grado $m = -1$. ■

Veamos algunas propiedades elementales de las funciones homogéneas:

Teorema Sean $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones definidas en un abierto D . Entonces

1. Si f y g son homogéneas de grado m entonces $f + g$ es homogénea de grado m .
2. Si f es homogénea de grado m y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces αf es homogénea de grado m .
3. Si f es homogénea de grado m y g es homogénea de grado r , entonces fg es homogénea de grado $m + r$.
4. Si f es homogénea de grado m , g es homogénea de grado r y g no se anula en D , entonces f/g es homogénea de grado $m - r$.
5. Si f es de clase C^1 en D y es homogénea de grado m , entonces sus derivadas parciales son homogéneas de grado $m - 1$.

DEMOSTRACIÓN: 1) Si f y g son homogéneas de grado m , $\bar{x} \in D$ y $\lambda > 0$ cumple que $\lambda\bar{x} \in D$, entonces

$$f(\lambda\bar{x}) + g(\lambda\bar{x}) = \lambda^m f(\bar{x}) + \lambda^m g(\bar{x}) = \lambda^m (f(\bar{x}) + g(\bar{x})),$$

luego $f + g$ es homogénea de grado m .

2) Si f es homogénea de grado m , $\bar{x} \in D$ y $\lambda > 0$ cumple que $\lambda\bar{x} \in D$, entonces

$$\alpha f(\lambda\bar{x}) = \alpha \lambda^m f(\bar{x}) = \lambda^m (\alpha f(\bar{x})),$$

luego αf es homogénea de grado m .

3) Si f es homogénea de grado m y g es homogénea de grado r , tomamos $\bar{x} \in D$ y $\lambda > 0$ tal que $\lambda\bar{x} \in D$. Entonces

$$f(\lambda\bar{x})g(\lambda\bar{x}) = \lambda^m f(\bar{x})\lambda^r g(\bar{x}) = \lambda^{m+r} f(\bar{x})g(\bar{x}),$$

luego fg es homogénea de grado $m + r$.

4) Si f es homogénea de grado m , g es homogénea de grado r y no se anula en D , tomamos $\bar{x} \in D$ y $\lambda > 0$ tal que $\lambda\bar{x} \in D$. Entonces

$$\frac{f(\lambda\bar{x})}{g(\lambda\bar{x})} = \frac{\lambda^m f(\bar{x})}{\lambda^r g(\bar{x})} = \lambda^{m-r} \frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})},$$

luego f/g es homogénea de grado $m - r$.

5) Si f es homogénea de grado m y es de clase C^1 , tomamos $\bar{x} \in D$ y $\lambda > 0$ tal que $\lambda\bar{x} \in D$. Consideramos la función $g(\bar{x}) = f(\lambda\bar{x}) = \lambda^m f(\bar{x})$. Derivando ambas expresiones para g vemos que

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda\bar{x}) = \lambda^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}),$$

de donde, despejando,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda\bar{x}) = \lambda^{m-1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}),$$

luego la derivada es homogénea de grado $m - 1$. ■

El resultado principal sobre funciones homogéneas es el siguiente:

Teorema de Euler Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^1 en un abierto D , entonces f es homogénea de grado m si y sólo si

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = mf$$

4.4 Problemas

1. Calcula la composición de la función $q(r, s, t) = t - 2s + r^3$ con las funciones $s = r^2$, $t = -r^3$.
2. Dadas las funciones $f(x, y) = x^2 + y$, $x = y^2$ calcula la función compuesta. Calcula

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f(y)}{\partial y}.$$

En el caso de la derivada de la derecha, haz el cálculo derivando directamente la función y por la regla de la cadena.

3. Sea $f(x, y) = x^2 + 3y - y^3$, donde $y = x^2 + 3$. Calcula

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{df}{dx},$$

usando la regla de la cadena cuando sea posible.

4. Sea $z = xy$, $x = u^2 + v$, $y = u - v$. Calcula

$$\left. \frac{\partial z}{\partial u} \right|_{(1,2)}$$

por la regla de la cadena.

5. Sea $w = x^2 + y^2 + z^2$, donde $z = x + 2y$. Entonces

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Explica la diferencia entre las dos primeras derivadas que aparecen en la fórmula. Calcula la del miembro izquierdo en el punto $(x, y) = (2, 1)$.

6. Sea $f(x, y, z) = x^2 - y^3 - z$, donde $z = x^2 + y^3 + y$. Calcula la derivada respecto de y de la función compuesta mediante la regla de la cadena. Comprueba que da lo mismo que si la calculas directamente.
7. Sea $h = t^4$, donde $t = uv - w^2$. Calcula la diferencial de la función compuesta por la regla de la cadena en el punto $(u, v, w) = (2, 1, 1)$. Calcula la función compuesta y luego calcula directamente su diferencial en dicho punto (sin usar la regla de la cadena). Comprueba que da lo mismo.
8. Si $P = x\sqrt{xyz}$, $y = x + z - 1$, calcula $dP(1, 2)(3, 4)$.
9. Sea $M = t^2 + s^2$, donde $t = x + y - z$ y $s = z + 2y$,
 - (a) Calcula las derivadas parciales de $M(x, y, z)$ por la regla de la cadena.
 - (b) Usa las derivadas anteriores para calcular $dM(x, y, z)$.
 - (c) Calcula directamente $dM(x, y, z)$ por la regla de la cadena y comprueba que da lo mismo que en el apartado anterior.
 - (d) Calcula $dM(x, y, z)$ sin usar de ningún modo la regla de la cadena y comprueba que da lo mismo que en los apartados anteriores.
10. Considera la función $f(x, y, t) = x \cos(y + 2t)$, donde a su vez $y = x^2 + t^3$. Calcula df en términos de dx, dy, dt y luego, por la regla de la cadena, df en términos de dx, dt .
11. Considera la función $f(x, y) = x^2 + y^2$, donde a su vez x e y dependen de t por la relación $x = \sin t$, $y = \cos t$. Comprueba mediante la regla de la cadena que

$$\frac{df}{dt} = 0.$$

¿Cómo se interpreta este hecho? (para entenderlo, calcula la función compuesta $f(t)$).

12. Dadas las funciones $f(u, v) = u^2 + uv^3$, $u = xv$,
 - (a) Calcula la diferencial de las funciones $f(u, v)$ y $f(v, x)$, la segunda por la regla de la cadena.
 - (b) Calcula la función compuesta $f(v, x)$ y calcula directamente su diferencial. Comprueba que el resultado es el mismo que el del apartado anterior.
13. El coste de producción de una empresa está en función del precio de cada uno de los dos inputs que utiliza, $C(x, y) = 2 + 3x + 5y$ u.m. Por otra parte, el precio de los inputs varía con el tiempo. Concretamente $x(t) = 1 + 2t$ u.m., $y(t) = 1 + t$ u.m., donde t es el tiempo expresado en años.
 - (a) Calcula los precios de los inputs en el primer año estudiado ($t = 0$). Calcula el coste correspondiente.
 - (b) Calcula la función $C(t)$.
 - (c) Calcula el incremento de costes correspondiente al primer año (periodo $[0, 1]$).

- (d) Calcula las derivadas

$$\left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{(1,1)}, \quad \left. \frac{\partial C}{\partial y} \right|_{(1,1)}, \quad \left. \frac{dC}{dt} \right|_0$$

derivando directamente cada función (indica las unidades correspondientes).

- (e) Calcula la última derivada del apartado anterior mediante la regla de la cadena.

- (f) Interpreta todas las derivadas que has calculado.

14. Sea $B(p, p')$ la función de beneficios de una empresa E , donde p es el precio de su producto y p' el precio medio de la competencia. Para los precios actuales $p = 21$, $p' = 20$ se estima que

$$\left. \frac{\partial B(p, p')}{\partial p} \right|_{(21,20)} = -3, \quad \left. \frac{\partial B(p, p')}{\partial p'} \right|_{(21,20)} = 2.$$

Supongamos que la competencia ajusta sus precios según los de la empresa E , de modo que $p' = p - 1$. Calcula

$$\left. \frac{\partial B(p)}{\partial p} \right|_{21}$$

y explica la diferencia entre esta derivada y la anterior (desde un punto de vista matemático y en cuanto a su interpretación económica). ¿Cuál de ellas nos indica el efecto que tendría sobre los beneficios una disminución del precio p de 2 u.m.?

15. Una empresa estima que sus beneficios vienen dados por la función

$$B(t, p) = \frac{4 + 0.2t}{\sqrt{p^2 - 5}},$$

donde el numerador es una estimación de la demanda futura en función del tiempo t y el denominador es una corrección en función del IPC p . El tiempo actual es $t = 1$ y el IPC es $p = 3$ u.m. No hay ninguna previsión fiable de la evolución del IPC, pero la empresa estima que en la actualidad

$$\left. \frac{dp}{dt} \right|_1 = 0.2.$$

Según estas estimaciones, ¿los beneficios de la empresa van a aumentar o a disminuir a corto plazo?

16. Una empresa fabrica un producto que vende a un precio de 6 u.m. por unidad. La producción tiene unos costes fijos de 50 u.m., y unos costes variables de 2 u.m. Además la empresa destina una cantidad P a publicidad. Con estos datos, la función de beneficios de la empresa es

$$B(x, D, P) = 6D - 2x - P - 50,$$

donde x es la cantidad de producto que fabrica y D la demanda del producto en el mercado (la cantidad que vende). Justifica esta afirmación.

- (a) Calcula las derivadas parciales de
- B
- e interprétalas.

- (b) Supongamos que la empresa ajusta su producción a su demanda, es decir, considera a x como función de D en la forma más simple posible: $x = D$. Calcula la función compuesta $B(D, P)$ así como sus derivadas. Explica las diferencias respecto de las derivadas anteriores (por ejemplo, la derivada respecto a D es 6 en el caso anterior y 4 ahora, ¿cómo hay que entender esto?)
- (c) El signo de $\partial B / \partial P$ es negativo, ¿cómo se interpreta esto?, ¿es razonable?
- (d) La demanda de la empresa depende de su inversión en publicidad, es decir, tenemos una función $D(P)$. La empresa no conoce esta función, pero estima que, para la inversión actual P_0 , se cumple

$$\left. \frac{\partial D}{\partial P} \right|_{P_0} = 1.$$

¿Es esto razonable?

- (e) No podemos calcular la función compuesta $B(P)$, pero sí que podemos calcular

$$\left. \frac{dB}{dP} \right|_{P_0}.$$

Calcula esta derivada e interprétala. ¿Le conviene a la empresa aumentar su inversión en publicidad?

17. Sea $D(p, r, t)$ la función de demanda de un artículo en un mercado, donde p es el precio, r la renta media de los consumidores y t el tiempo en años. Actualmente ($t = 0$) se tiene $(p, r) = (5, 14)$ y $D(5, 14, 0) = 200$. Además

$$\left. \frac{\partial D}{\partial t} \right|_{(5,14,0)} = 20, \quad \left. \frac{\partial D}{\partial p} \right|_{(5,14,0)} = -15, \quad \left. \frac{\partial D}{\partial r} \right|_{(5,14,0)} = 10.$$

- (a) Interpreta estas derivadas.
- (b) ¿Qué demanda cabría esperar dentro de un año si la renta ha pasado a $r = 15$ u.m. y el precio a $p = 4.5$ u.m., ¿qué hipótesis sobre D es necesaria para responder a esta pregunta con los datos disponibles?
- (c) Supongamos que $r = r(t)$ y $p = p(t)$, de modo que

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_0 = 0.2, \quad \left. \frac{dp}{dt} \right|_0 = 0.1.$$

Interpreta estas derivadas.

- (d) Calcula

$$\left. \frac{dD(t)}{dt} \right|_0,$$

- (e) Interpreta esta derivada explicando especialmente la diferencia con la interpretación de

$$\left. \frac{\partial D(p, r, t)}{\partial t} \right|_{(5,14,0)}.$$

18. Sean $S(p)$ y $D(p)$ la oferta y la demanda de un artículo en función de su precio y consideremos a su vez este precio como función del tiempo $p = p(t)$.

- (a) ¿Qué signo cabe esperar que tenga la derivada

$$\frac{dp}{dt}$$

en los puntos t tales que $S(t) > D(t)$?, ¿y si $S(t) < D(t)$?

- (b) ¿Es razonable suponer la relación siguiente?:

$$\frac{dp}{dt} = 0.5(D(t) - S(t)).$$

- (c) Supón que $S(p) = 2p$, $D(t) = 100 - 8p$, $p(t) = 10 + 8e^{-5t}$. Calcula las funciones $D(t)$ y $S(t)$ y comprueba que cumplen la relación del apartado anterior.

19. Razona que la ecuación $xe^y + ye^x = 1$ define a y como función implícita de x alrededor de cualquier punto (x, y) que cumpla $x \geq 0$, $y \geq 0$. ¿Sabrías calcular explícitamente la función $y(x)$?
20. Estudia si la ecuación $x^2 + 4y^2 = 4$ define a x como función implícita de y o a y como función implícita de x cerca del punto $(x, y) = (2, 0)$.
21. Una fábrica elabora dos productos en cantidades x e y , y su frontera de posibilidades de producción viene dada por la ecuación $2x^2 + y^3 = 80$. La producción actual es $(x, y) = (6, 2)$.

- (a) Comprueba que la ecuación anterior permite definir a y como función implícita de $y = y(x)$ para producciones similares a la actual.
- (b) Calcula la Relación de Sustitución del Producto

$$\text{RSP} = - \left. \frac{dy}{dx} \right|_6$$

derivando implícitamente.

- (c) Calcula explícitamente la función $y(x)$ y calcula la RSP derivando directamente.
- (d) Interpreta el valor obtenido para la RSP.
22. Un consumidor compra 10 libros al año, va 40 veces al cine y 5 veces al teatro. La utilidad que consigue con estas aficiones viene dada por la función

$$U(L, C, T) = L^2CT^3.$$

- (a) Escribe la ecuación de la curva de indiferencia correspondiente al consumo actual.
- (b) Razona que dicha ecuación define a C como función implícita $C = C(L, T)$.
- (c) Calcula las derivadas

$$\left. \frac{\partial C}{\partial L} \right|_{(10,5)}, \quad \left. \frac{\partial C}{\partial T} \right|_{(10,5)}$$

sin calcular la función $C(L, T)$.

- (d) Interpreta las derivadas del apartado anterior.

- (e) Calcula la función $C(L, T)$ y, a partir de ella, vuelve a calcular las derivadas anteriores.

23. Considera la función de producción $Q(K, L) = K^2 + KL$.

- (a) Razona que (para $K, L > 0$) sus isocuantas $Q(K, L) = b$ definen a K como función implícita $K = K(L)$.
- (b) Calcula la Relación de Sustitución Técnica

$$\text{RST} = -\frac{dK}{dL}.$$

- (c) Calcula explícitamente la función $K(L)$ y calcula su derivada directamente. ¿A que es más complicado?

24. La demanda de un artículo viene dada por la función

$$D = \frac{r^2}{p^2} + \frac{p'^3}{p^3},$$

donde p es su precio, p' el precio de un bien sustitutivo y r la renta de los consumidores.

- (a) Si, actualmente, el artículo se vende a 3€, el bien sustitutivo a 6€ y la renta de los consumidores es de 90€, calcula la demanda del producto.
- (b) Estudia la homogeneidad de la función de demanda. ¿Es razonable el resultado?
- (c) Expresa la relación dada en la forma $Q(D, p, p', r) = 0$, donde Q es un polinomio. (Multiplica ambos miembros por p^3 y pasa todo a la izquierda.)
- (d) Razona que la ecuación del apartado anterior permite definir a p como función implícita $p = p(D, p', r)$ para valores de cada variable próximos a los actuales.
- (e) Calcula

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{(908, 6, 90)}, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial p'} \right|_{(908, 6, 90)}, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial D} \right|_{(908, 6, 90)}.$$

- (f) Interpreta las derivadas del apartado anterior.
- (g) ¿Sabrías calcular explícitamente la función $p(D, p', r)$?

25. Estudia la homogeneidad de las funciones siguientes:

- (a) $f(x, y) = \sqrt[4]{xy^2 - x^3}$,
- (b) $P(r, s) = r + 2s$,
- (c) $Q(K, L) = K^3 L^5$,

26. Comprueba que las funciones del ejercicio anterior cumplen el teorema de Euler.

27. Estudia la homogeneidad de las funciones siguientes:

- (a) $g(a, b, c) = \frac{ac^2 + 2b^3}{a - b - c}$,

- (b) $h(u, v) = u^2 + v^4$,
 (c) $t(x, y, z) = x \operatorname{sen}(yz)$.

28. Dada la función $f(x, y) = x^3 \operatorname{sen} \sqrt{x/y}$, calcula

$$\frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y.$$

29. Comprueba que la función $f(x, y) = x\sqrt{y}$ satisface el teorema de Euler.

30. Calcula

$$\frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y + \frac{\partial f}{\partial z}z,$$

donde

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{yz} \sqrt{\cos \frac{x}{y} e^{y/z}}.$$

31. Comprueba que la función $f(x, y, z) = x^2 \operatorname{sen}(y/z)$ cumple el teorema de Euler.

32. Sea $f(x, y) = x2^{y/x} \operatorname{sen} \sqrt{x/y}$. Calcula el valor de

$$\frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y.$$

¿Es homogénea la función $\frac{\partial f}{\partial x}$?

33. Dada la función

$$f(x, y, z) = \sqrt[3]{\frac{x \operatorname{sen}(y/z)}{y^6 z}}$$

Determina si las derivadas parciales de f son homogéneas, y en caso afirmativo calcula su grado.

4.5 Cuestiones

1. Explica por qué el razonamiento siguiente es incorrecto:

PROBLEMA: Estudia la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x < 5, \\ x + 7 & \text{si } x \geq 5. \end{cases}$$

SOLUCIÓN: La función f es continua porque es la composición de dos polinomios, y los polinomios son funciones continuas.

2. Considera las funciones $z(x, y)$, $y(x)$.

- (a) ¿Cómo se llama la función compuesta?
 (b) ¿Qué función es la que aparece en cada una de las derivadas siguientes?:

$$\frac{dz}{dx}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Tema 5

La integral definida

5.1 La integral de Riemann

El concepto de integral definida Supongamos que una empresa ha tenido a lo largo de un año unos beneficios marginales constantes de 200 u.m./año. Esto significa que en cada instante estaba ingresando dinero a razón de 200 u.m./año. Así, durante cada mes ($1/12$ de año) ganó $200/12 = 16.6$ u.m., lo cual tiene sentido. Desde un punto de vista matemático podemos decir que cada segundo estuvo ganando 0.00000038 u.m., lo cual es absurdo, pero esto no importa, las hipótesis serán aceptables si, efectivamente, cada mes la empresa incrementó sus beneficios en 16.6 u.m.

En resumen, si una empresa tiene unos beneficios marginales constantes de 200 u.m./año, podemos decir que al cabo de un año sus beneficios acumulados pasan a ser de 200 u.m.

Supongamos ahora que los beneficios marginales no han sido constantes, sino que fueron de 100 u.m./año el primer semestre y de 200 u.m./año el segundo semestre. Más concretamente:

$$B_m = \begin{cases} 100 & \text{si } 0 \leq t < 1/2, \\ 200 & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

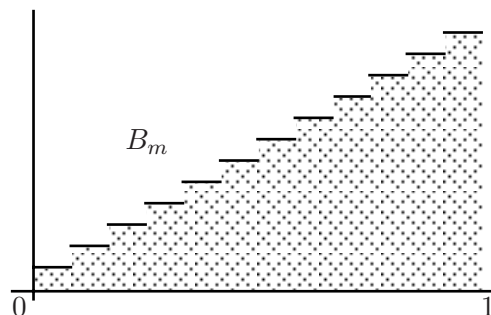
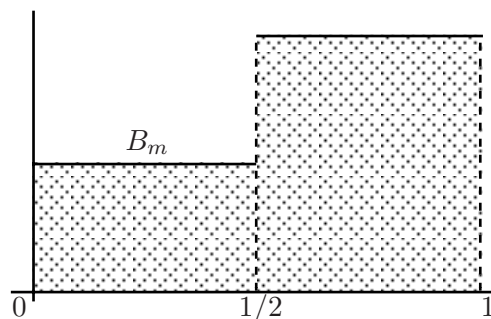
¿Cuáles han sido ahora los beneficios acumulados? Claramente

$$B = 100 \cdot \frac{1}{2} + 200 \cdot \frac{1}{2} = 150 \text{ u.m.}$$

Conviene observar que los beneficios coinciden con el área que queda por debajo de la gráfica de la función de beneficios marginales. Veremos que esto es un hecho general.

Supongamos ahora que los beneficios marginales no han sido constantes durante cada semestre, sino que han variado cada mes. Digamos que han sido de 20 u.m./año en enero, de 40 u.m./año en febrero, etc. Matemáticamente la expresión de B_m ahora es complicada. O bien distinguimos doce casos en la definición o bien usamos la función parte entera $E(x)$:

$$B_m(t) = 20(E(12t) + 1).$$



De todos modos, el cálculo del beneficio acumulado es fácil: hemos de descomponer el año en los doce periodos en los que el beneficio marginal es constante (los doce meses). En enero el beneficio acumulado es de $20/12$ u.m., en febrero acumulamos $40/12$ u.m. que hay que sumar a las de enero, etc., con lo que el beneficio acumulado al terminar diciembre resulta ser

$$B = \frac{20}{12} + \frac{40}{12} + \cdots + \frac{240}{12} = 130 \text{ u.m.}$$

El resultado es también el área que deja bajo su gráfica la función de beneficio marginal.

La expresión del beneficio marginal era complicada porque matemáticamente es complicado tratar con saltos bruscos, y aquí estábamos suponiendo que el beneficio marginal aumentaba a saltos: era de 20 u.m./año hasta la última milésima de segundo de enero y pasaba a ser de 40 u.m./año desde la primera milésima de segundo de febrero. Matemáticamente es más fácil trabajar si suponemos que el beneficio marginal varía de forma continua con el tiempo, lo cual es tan artificial como toda variación continua, pero a menudo un modelo matemático con este tipo de hipótesis se ajusta bien a la realidad en sus predicciones y es mucho más fácil de tratar.

Supongamos, pues, ahora que el beneficio marginal de la empresa viene dado por la función

$$B_m(t) = 240t.$$

Esto significa que, por ejemplo, a finales de febrero la empresa tenía una tasa de beneficios de $B_m(2/12) = 40$ u.m./año, igual que en el caso anterior, pero la diferencia es que esto no fue constante durante todo el mes de febrero, sino que a principio de mes sus beneficios eran de 20 u.m./año y fueron ascendiendo gradualmente hasta llegar a las 40 u.m./año a fin de mes. ¿Cuál es ahora el beneficio acumulado en un año?

En este punto conviene empezar a conectar el ejemplo con la teoría general:

Definición Diremos que una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ está *acotada* en el intervalo $[a, b]$ si existen números reales $m \leq M$ tales que para todo $x \in [a, b]$ se cumple $m \leq f(x) \leq M$.

Una *partición* de un intervalo $[a, b]$ es un conjunto finito P de puntos del intervalo ordenados de forma creciente:

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}.$$

Para una partición dada P , llamaremos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Llamaremos *norma* de la partición P al máximo de estas longitudes Δx_i . Se representa por $\|P\|$.

Definimos

$$m_i(f) = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad M_i(f) = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Aunque la definición del ínfimo y el supremo de una función en un conjunto presenta ciertas sutilezas, es bastante aproximado decir que $m_i(f)$ es el menor valor que toma f en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y $M_i(f)$ es el máximo valor que toma en dicho intervalo.

En nuestro ejemplo estamos estudiando la función $f = B_m$, definida en el intervalo $[0, 1]$ en el que, ciertamente, está acotada. Una cota inferior es $m = 0$ y una cota

superior es $M = 240$. Para calcular el beneficio acumulado consideramos una partición del intervalo, por ejemplo la partición en meses:

$$P = \{0 < \frac{1}{12} < \frac{2}{12} < \frac{3}{12} < \frac{4}{12} < \frac{5}{12} < \frac{6}{12} < \frac{7}{12} < \frac{8}{12} < \frac{9}{12} < \frac{10}{12} < \frac{11}{12} < 1\}$$

Es decir, $t_0 = 0$, $t_1 = 1/12$, $t_2 = 2/12$, etc. Los incrementos son todos iguales $\Delta t_i = 1/12$ y la norma de P es, por lo tanto, $\|P\| = 1/12$.

En el intervalo $[t_0, t_1]$, la función B_m pasa de 0 a 20, luego tenemos que $m_1(B_m) = 0$ y $M_2(B_m) = 20$. Similarmente $m_2(B_m) = 20$ y $M_2(B_m) = 40$, etc.

No sabemos calcular el beneficio acumulado cuando el beneficio marginal es B_m , pero sí que podemos resolver un problema más simple: ¿Cuál sería el beneficio acumulado si en cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ (o sea, en cada mes) el beneficio marginal se mantuviera constante igual a $m_i(B_m)$? Entonces el beneficio en enero sería nulo (pues $m_1(B_m) = 0$), el de febrero sería $20/12$, pues $m_2(B_m) = 20$, etc. En total tendríamos

$$s(B_m, P) = \sum_{i=1}^{12} m_i(B_m) \frac{1}{12} = 110 \text{ u.m.}$$

Esto no es el beneficio acumulado realmente, pues hemos redondeado hacia abajo el beneficio marginal en cada intervalo. Por ejemplo, en enero hemos considerado que no se acumula beneficio porque el primer segundo de enero era así, pero a lo largo del mes el beneficio marginal crece y eso no lo hemos tenido en cuenta. Similarmente, hemos considerado que el beneficio marginal de febrero era de 20 u.m./año, cuando eso sólo es así el primer segundo y no hemos tenido en cuenta este crecimiento.

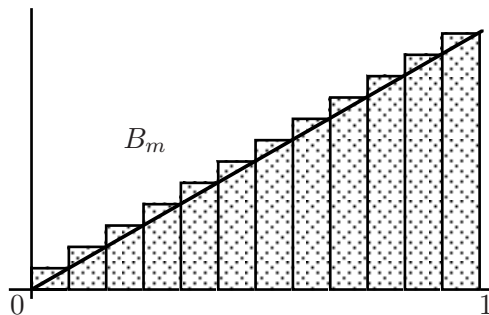
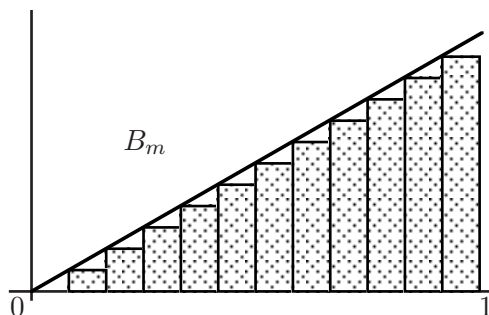
La figura muestra la diferencia entre lo que hemos calculado y lo que queremos calcular. Hemos calculado la región sombreada y lo que queremos calcular es el área que deja la función B_m bajo su gráfica. Encima de cada columna de área que hemos contado hay un triángulo que corresponde a los beneficios acumulados como consecuencia del aumento de B_m que no hemos considerado. Tenemos, pues, que la suma que hemos calculado queda por debajo del beneficio acumulado B que queremos calcular:

$$110 = s(B_m, P) \leq B.$$

Por otra parte, también sabemos calcular el beneficio acumulado si suponemos que el beneficio marginal en cada mes $[t_{i-1}, t_i]$ permanece constantemente igual a $M_i(B_m)$. En tal caso sería

$$S(B_m, P) = \sum_{i=1}^{12} M_i(B_m) \frac{1}{12} = 130 \text{ u.m.}$$

Ahora nuestro cálculo supera el valor B que queremos calcular, pues, por ejemplo, hemos supuesto que durante el mes de enero hemos tenido unos beneficios marginales de 20



u.m./año cuando esto sólo ha sido así a final de mes. La figura muestra unos triángulos de exceso de la suma respecto al valor que buscamos. En resumen tenemos que

$$110 = s(B_m, P) \leq B \leq S(B_m, P) = 130.$$

No hemos calculado el beneficio acumulado pero ahora sabemos que está entre 110 y 130 u.m. Generalicemos:

Definición Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada y P es una partición de $[a, b]$, se define la *suma superior de Riemann* y la *suma inferior de Riemann* de f respecto a P como

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(f) \Delta x_i, \quad S(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i(f) \Delta x_i.$$

De acuerdo con el ejemplo que estamos estudiando, la interpretación siguiente debería estar clara:

Si la función $f(x)$ representa el incremento marginal de una cierta magnitud M (es decir, lo que aumenta M por cada unidad marginal que aumenta x en un punto dado), entonces las sumas $s(f, P)$ y $S(f, P)$ son aproximaciones por defecto y por exceso al incremento acumulado de M en el intervalo $[a, b]$. Más concretamente, la suma inferior es la aproximación que resulta de suponer que en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ el incremento marginal f permanece constantemente igual al menor valor que realmente toma en él. La suma superior es la aproximación que resulta de tomar como valor constante para f el mayor valor que realmente toma.

La clave para llegar al valor exacto del beneficio acumulado es que cuando tomamos particiones de norma cada vez más pequeña el error que cometemos se hace cada vez menor. Por ejemplo, vamos a ver qué ocurre si dividimos el intervalo $[0, 1]$ en n partes iguales de longitud $1/n$ (hasta ahora hemos trabajado con $n = 12$. Entonces $t_0 = 0$, $t_1 = 1/n$, $t_2 = 2/n$, etc. Claramente

$$m_i(B_m) = B_m(t_{i-1}) = \frac{240(i-1)}{n}, \quad M_i(B_m) = B_m(t_i) = \frac{240i}{n}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} s(B_m, P) &= \sum_{i=1}^n m_i(B_m) \Delta t_i = \sum_{i=1}^n \frac{240(i-1)}{n} \frac{1}{n} = \frac{240}{n^2} (0 + 1 + \cdots + n-1) \\ &= \frac{240}{n^2} \frac{(n-1)n}{2} = 120 \frac{n-1}{n} = 120 \left(1 - \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Similarmente

$$\begin{aligned} S(B_m, P) &= \sum_{i=1}^n M_i(B_m) \Delta t_i = \sum_{i=1}^n \frac{240i}{n} \frac{1}{n} = \frac{240}{n^2} (1 + 2 + \cdots + n) \\ &= \frac{240}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = 120 \frac{n+1}{n} = 120 \left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Así pues, el beneficio acumulado B tiene que cumplir

$$120 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq B \leq 120 \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

para todo número natural n . Como el límite cuando n tiende a infinito de los dos extremos es 120, ha de ser $B = 120$. ¡Ya lo hemos calculado!

En general:

Definición Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Se definen la *integral inferior de Darboux* y la *integral superior de Darboux* de f en $[a, b]$ como

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_P s(f, P), \quad \int_a^b f(x) dx = \inf_P S(f, P),$$

donde P recorre todas las particiones posibles de $[a, b]$. En otras palabras, la integral inferior es el mayor valor al que podemos acercarnos mediante sumas inferiores y la integral superior es el menor valor al que podemos acercarnos mediante sumas superiores.

Se dice que la función f es *integrable Riemann* en $[a, b]$ si ambas integrales coinciden, y entonces al valor común se le representa por

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

En estos términos, hemos comprobado que la función $B_m(t) = 240t$ es integrable Riemann en $[0, 1]$ y

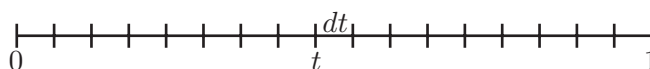
$$\int_0^1 240t dt = 120.$$

Ahora debería estar clara la interpretación marginal de la integral de Riemann:

Si la función $f(x)$ representa el incremento marginal de una función F para cada valor de x , entonces $\int_a^b f(x) dx$ representa el incremento acumulado de F en el intervalo $[a, b]$, es decir, es igual a $F(b) - F(a)$.

En la práctica, para determinar cuándo y de qué manera debemos calcular integrales para plantear y resolver un problema podemos emplear razonamientos infinitesimales como éste:

Volviendo a nuestro ejemplo, si los beneficios marginales de una empresa son de $240t$ u.m./año, esto significa que en un incremento de tiempo marginal de dt años nuestro beneficio se incrementará en $dB = 240t dt$ u.m. Si dt es un incremento de tiempo muy pequeño, entonces dB representa un incremento de beneficios muy pequeño.



Toda la discusión precedente se resume en que la suma de los infinitos incrementos infinitamente pequeños dB es matemáticamente la integral de esta función sobre el intervalo de tiempo en que se acumulan los beneficios. En este caso, $\int_0^1 240t dt$. Conviene tener siempre en cuenta lo siguiente:

NOTA: Para que una integral $\int_a^b f(x) dx$ tenga una interpretación económica el integrando $f(x)$ ha de ser siempre una magnitud marginal respecto de la variable dx , es decir, si x es tiempo, entonces el integrando tendrá que ser un beneficio marginal respecto del tiempo, o un ahorro marginal respecto del tiempo, etc. En particular tendrá que estar expresado en “unidades de lo que sea” / unidades de tiempo. Si x es la cantidad producida de un bien, el integrando tendrá que ser el coste marginal respecto a la producción, o el beneficio marginal respecto de la producción, etc.

Propiedades de la integral El hecho de que la función $240t$ sea integrable Riemann es un caso particular del teorema siguiente, que es el único criterio que veremos para reconocer funciones integrables:

Teorema Si una función acotada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en todo $[a, b]$ salvo a lo sumo en un número finito de puntos entonces es integrable Riemann en $[a, b]$. En particular toda función continua en un intervalo $[a, b]$ es integrable Riemann.

Respecto al cálculo de integrales en la práctica, observemos lo siguiente: En las condiciones del ejemplo que hemos estado estudiando, llamemos $B(t)$ a la función que nos da el beneficio acumulado en el instante t . Supongamos que es derivable en todo punto. Entonces $B'(t)$ es el aumento que experimenta el beneficio acumulado en t por cada unidad marginal de tiempo que pasa, es decir, es el beneficio marginal en t . Con la notación que empleábamos: $B_m(t) = B'(t)$. Según hemos visto, $\int_a^b B_m(t)$ es el beneficio acumulado desde el instante a hasta el instante b , es decir,

$$\int_a^b B'(t) dt = B(b) - B(a).$$

Esto es cierto en general:

Regla de Barrow Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$ entonces existe una función $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$ tal que $F' = f$ y si F es cualquier función que cumpla esto entonces

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Por ejemplo, para calcular $\int_0^1 240t dt$ basta observar que $F(t) = 120t^2$ es una primitiva de $240t$, luego

$$\int_0^1 240t dt = F(1) - F(0) = 120 - 0 = 120.$$

Un poco más en general, se cumple lo siguiente:

Teorema Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable Riemann en $[a, b]$. Entonces la función $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx$$

es continua en $[a, b]$ y si f es continua entonces F es derivable y $F' = f$.

La interpretación de este teorema es que si f es el incremento marginal de una magnitud, entonces F es el incremento acumulado de la misma. Por ejemplo, si $f(t) = 240t$ es el beneficio marginal de una empresa, su beneficio acumulado (desde $t = 0$) en un instante t será

$$B(t) = \int_0^t 240x dx = [120x^2]_0^t = 120t^2.$$

A veces tiene interés determinar el valor medio de una función en el sentido del teorema siguiente:

Teorema de la media Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable Riemann que toma valores comprendidos entre m y M , entonces se cumple

$$m \leq \mu = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq M.$$

Este valor μ se llama valor medio de f en $[a, b]$. Si f es continua entonces existe un punto $x \in [a, b]$ tal que $\mu = f(x)$.

Ejemplo Si los beneficios marginales de una empresa vienen dados por $B_m(t) = 240t$ u.m./año, entonces el beneficio medio del periodo $[1, 3]$ es

$$\mu = \frac{\int_1^3 240t dt}{3-1} = \frac{1}{2}[120t^2]_1^3 = 480 \text{ u.m./año.}$$

Como el integrando es continuo, tiene sentido buscar en qué instante se alcanza la media. Concretamente, $240t = 480$ nos da $t = 2$. ■

Terminamos con algunas propiedades adicionales de la integral de Riemann.

Teorema Se cumplen las propiedades siguientes:

1. Si f y g son funciones integrables Riemann en $[a, b]$ entonces $f + g$ también lo es y

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx,$$

2. Si f es una función integrable Riemann en $[a, b]$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces αf también lo es y

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx,$$

3. Si f es una función integrable Riemann en $[a, b]$ entonces $|f|$ también lo es y

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

4. Si f y g son funciones integrables Riemann en $[a, b]$ entonces fg también lo es, aunque no hay ninguna relación sencilla entre la integral del producto y las integrales de los factores.

5. Si f y g son funciones integrables Riemann en $[a, b]$ y para todo $x \in [a, b]$ se cumple $f(x) \leq g(x)$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

En particular la integral de una función no negativa es no negativa y la integral de una función no positiva es no positiva.

6. Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada en $[a, b]$ y $a < c < b$, entonces f es integrable Riemann en $[a, b]$ si y sólo si lo es en $[a, c]$ y en $[c, b]$, y en tal caso

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

La última propiedad permite calcular integrales de funciones discontinuas, descomponiéndolas en intervalos donde sean continuas y se pueda aplicar la regla de Barrow.

Ejemplo: Rentas continuas Aunque, como ya hemos visto, calcular integrales definidas se reduce en la práctica a buscar primitivas, para comprender la presencia de integrales en las fórmulas en las que aparecen hemos de tener presente la interpretación marginal de la integral de Riemann. Vamos a ver un ejemplo.

Un problema sencillo de la matemática financiera es valorar una renta discreta. Por concretar, queremos hacer un depósito en un banco para que éste, al cabo de T_0 años nos pague una renta anual de C u.m. hasta el año T . El problema es determinar la cantidad que hemos de depositar sabiendo el tipo de interés i_∞ .

La solución es simple: si hemos de disponer de un capital C dentro de j años tendremos que depositar hoy un capital $Ce^{-i_\infty j}$. Por consiguiente, el valor actual de la renta será

$$V = \sum_{j=T_0}^T Ce^{-i_\infty j}.$$

Una renta continua es una renta que no se cobra año a año, o mes a mes, o día a día, sino de forma continua, es decir, cada instante que pasa, por pequeño que éste sea, el capital reembolsado aumenta ligeramente, con un aumento menor cuanto menor sea el tiempo considerado. Naturalmente esto es ficción, pero nos lleva a considerar integrales en lugar de sumas enormes, y en muchos casos los resultados son lo suficientemente aproximados como para que, al menos, en estudios teóricos, convenga usar modelos continuos.

Una renta continua está determinada por la función de reembolso marginal $R(t)$ (medida, por ejemplo, en u.m./año) que nos indica lo que aumenta el capital reembolsado por cada unidad marginal de tiempo transcurrida. Más concretamente, si en un instante t dejamos pasar un tiempo marginal dt , nuestro capital habrá aumentado en $R(t) dt$. El valor actual (en $t_0 = 0$) de este capital que recibimos en t , será $R(t)e^{-i_\infty t} dt$. El valor actual de la renta será la suma de los infinitos valores actuales de los incrementos infinitesimales de capital que recibimos en el periodo $[T_0, T]$, lo que matemáticamente se expresa mediante la integral

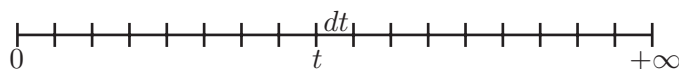
$$V = \int_{T_0}^T R(t)e^{-i_\infty t} dt.$$

■

5.2 La integral impropia

Continuando con el último ejemplo, consideremos ahora el problema de valorar una renta continua perpetua. Concretamente, un consumidor abre un sobrecito de Nescafé y resulta premiado con un sueldo de 600€ al mes durante toda la vida. La pregunta es ¿cuánto dinero ha tenido que depositar Nescafé en un banco para que éste asuma el pago de dicha renta, supuesto un interés continuo del 5%?

En la práctica podríamos hacer los cálculos bajo la hipótesis de que el consumidor no va a vivir más de 100 años, pero teóricamente resulta mucho más simple asegurar que el banco pagará la renta a perpetuidad (no resulta mucho más caro).



Concretamente, fijado un tiempo t el reembolso en un intervalo dt será $dR = 7.200 dt$, el valor actual de este reembolso será $dV = 7.200e^{-0.05t} dt$, luego para asegurar la renta hasta un tiempo T tendremos que depositar:

$$\int_0^T 7.200e^{-0.05t} dt = -\frac{7.200}{0.05} \left[e^{-0.05t} \right]_0^T = -\frac{7.200}{0.05} (e^{-0.05T} - 1).$$

Si hacemos tender T a infinito queda

$$\int_0^{+\infty} 7.200e^{-0.05t} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} -\frac{7.200}{0.05} (e^{-0.05T} - 1) = \frac{7.200}{0.05} = 144.000 \text{€}.$$

(La diferencia con el cálculo a 100 años son 970.26 €.)

Acabamos de calcular lo que se conoce como una integral impropia. La definición general es la siguiente:

Definición Sea $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable Riemann en cada intervalo $[a, b]$ con $b > a$. Se define la *integral impropia de primera especie*

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx.$$

Si el límite no existe se dice que la integral es *divergente*. En caso contrario es *convergente*.

Similarmente, si $f :]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable en cada intervalo $[a, b]$, con $a < b$, se define

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx.$$

Por último, si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable en todo intervalo $[a, b]$, se define

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx,$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es cualquier número prefijado, entendiendo que la integral es convergente si y sólo si lo son las dos integrales impropias de la derecha. Es fácil ver que el valor de la integral completa no depende de la elección de a .

Ejemplo Vamos a calcular

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

Tenemos que

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{dx}{x^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{t} + 1 \right) = 1.$$

■

Ejemplo Calculemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Para ello partimos la integral por $x = 0$ y calculamos

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t \rightarrow -\infty} [\arctan x]_t^0 = \lim_{t \rightarrow -\infty} -\arctan t = \frac{\pi}{2}.$$

Similarmente

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan t = \frac{\pi}{2},$$

luego

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

■

Nota En este último ejemplo habríamos llegado al mismo resultado si en lugar de partir la integral en dos hubiéramos calculado directamente

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} [\arctan x]_{-t}^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\arctan t - \arctan -t) \\ &= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi. \end{aligned}$$

Ahora bien, esto **no es correcto** salvo que sepamos a priori que la integral es convergente. En efecto, si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable en todo intervalo finito, el límite

$$VP \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t f(x) dx$$

se llama *valor principal* de la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$, y coincide con la integral impropia cuando ésta existe, pero también puede existir aunque la integral sea divergente.

Ejemplo Consideremos la función $f(x) = x^3$. Entonces

$$\begin{aligned} VP \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t x^3 dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-t}^t \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^4}{4} - \frac{(-t)^4}{4} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 0 = 0. \end{aligned}$$

Sin embargo, aunque vemos que existe el valor principal de la integral, no podemos decir que la integral valga 0. Al contrario, no existe, como se ve al partirla:

$$\int_0^{+\infty} x^3 dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t x^3 dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^4}{4} \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^4}{4} = \infty.$$

■

Definición Si $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable Riemann en cada intervalo $[a, t]$, con $a < t < b$, entonces se define la *integral impropia de segunda especie*

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx.$$

Como en el caso de las integrales de primera especie, se dice que la integral es convergente si existe el límite y divergente si no existe.

Similarmente, si $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable en los intervalos $[t, b]$, con $a < t < b$ se define

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx.$$

Si la función $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable en cada intervalo $[t_1, t_2]$, con $a < t_1 < t_2 < b$, definimos

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

donde c es cualquier punto tal que $a < c < b$, entendiendo que la integral es convergente si y sólo si lo son las dos integrales impropias de la derecha.

Más en general, siempre que el dominio de una función f pueda descomponerse en intervalos donde f sea integrable impropia de primera o segunda especie, se define la integral impropia de f como la suma de las integrales de f en cada uno de estos dominios.

Ejemplo Vamos a estudiar la integral

$$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

Para ello observamos que el integrando es continuo en $[0, 9]$ excepto en $x = 1$, por lo que tiene sentido estudiar las integrales de segunda especie

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}, \quad \text{y} \quad \int_1^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

Concretamente,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t (x-1)^{-2/3} dx = \lim_{t \rightarrow 1^-} 3[(x-1)^{1/3}]_0^t \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} 3((t-1)^{1/3} - (-1)) = 3. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \int_1^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} &= \lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^9 (x-1)^{-2/3} dx = \lim_{t \rightarrow 1^+} 3[(x-1)^{1/3}]_t^9 \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^+} 3(2 - (t-1)^{1/3}) = 6, \end{aligned}$$

luego la integral es convergente y

$$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = 9.$$

■

Algunos límites de utilidad Para calcular las integrales impropias más frecuentes conviene tener en cuenta los hechos siguientes:

$$\begin{array}{l|l} \text{Si } a > 1 & \text{Si } 0 < a < 1, \\ \hline \lim_{t \rightarrow +\infty} a^t = +\infty & \lim_{t \rightarrow +\infty} a^t = 0 \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} a^t = 0 & \lim_{t \rightarrow -\infty} a^t = +\infty \end{array}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t = -\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \arctan t = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}.$$

5.3 Problemas

1. Calcula

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \operatorname{sen} x^2 dx, \quad \int_{10}^{17} \sqrt{x-1} dx, \quad \int_0^5 x e^x dx, \quad \int_0^5 x^3 e^{x^2} dx$$

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos x dx, \quad \int_0^5 \frac{dx}{3x+2}, \quad \int_0^1 x e^{x^2} dx, \quad \int_0^{\pi} (x^3 + x \operatorname{sen} x^2) dx.$$

2. Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 7 & \text{si } x \leq 2, \\ 5 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

¿Es integrable en $[0, 8]$?, ¿por qué? Calcula analítica y geoméricamente

$$\int_0^8 f(x) dx$$

3. Repite el problema anterior (excepto el cálculo geométrico de la integral), también en el intervalo $[0, 8]$, con la función $g: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} (2-x)e^x & \text{si } x \leq 2, \\ \frac{1}{x+3} & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

4. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 7 & \text{si } x \leq 2, \\ x-2 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Razona que f es integrable Riemann en $[1, 4]$. Calcula el valor medio de f en dicho intervalo. ¿En qué punto del intervalo se alcanza el valor medio?

5. Repite el problema anterior con la función

$$g(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 2, \\ x-1 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

6. La función de costes marginales de una empresa es

$$C_m(x) = \frac{1}{(x+5)^2}.$$

Calcula el coste variable medio de fabricar 10 unidades de producto. Si los costes fijos son de 10 u.m., calcula la función de coste total.

7. Los costes fijos de una empresa son de 20 u.m., y la función de costes marginales es

$$C_m(x) = \frac{10}{(x+1)^2}.$$

Calcula la función de coste total $C(x)$. ¿Cuál es la función de coste variable?

8. La función de costes marginales de una empresa es

$$C_m(x) = \begin{cases} 10 & \text{si } 0 \leq x < 100, \\ 8 & \text{si } 100 \leq x < 500, \\ 5 & \text{si } 500 \leq x, \end{cases}$$

donde x es la cantidad producida de un cierto artículo. Justifica que esta función es integrable Riemann en cualquier intervalo $[0, a]$. Calcula el coste variable medio de producir 300 unidades del artículo. Idem con 1000 unidades.

9. La función de costes marginales de una empresa es

$$C_m(x) = 2 + \frac{1}{x+10} \text{ u.m./u.p.,}$$

donde x es el número de unidades producidas. (Esto significa que cada unidad producida tiene un coste fijo de 2 u.m. y un coste variable que es menor cuanto más unidades se fabrican.) Además la producción tiene un coste fijo de 20 u.m. Calcula la función de costes de la empresa. Determina concretamente el coste de una producción de 90 unidades de producto.

10. Si el coste marginal de una empresa es $C_m(x) = e^{-x}$, ¿cuál es la función de coste variable?
11. El ahorro de una persona viene dado por $A(t) = 1200 + 6t$ €/año. Si el banco le da un interés $i_\infty = 0.05$, calcula el ahorro acumulado en los primeros 5 años.
12. La función de reembolso de una renta percibida en un periodo de 15 años (a partir de $t = 0$) es $R(t) = 3000t^2$ € (donde el tiempo t está en años). Calcula la cantidad total percibida y el valor final de la renta, considerando un interés continuo del 7%.
13. Determina si las integrales siguientes son convergentes y en caso afirmativo calcula la integral:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4}, \quad \int_{-2}^6 (x-2)^{5/3} dx, \quad \int_{-\infty}^{-1} e^x dx, \quad \int_1^{+\infty} e^x dx, \quad \int_0^1 \frac{dx}{1-x}.$$

14. Calcula las integrales siguientes (supuesto que converjan):

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} dx, \quad \int_0^2 \frac{x}{x^2-1} dx, \quad \int_2^3 \frac{x}{x^2-1} dx, \quad \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} dx,$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x-\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^{-1/2}}{1+x} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

15. Estudia la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}} dx.$$

16. Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x < 1, \\ 1/x^2 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Calcula $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

17. Un trabajador está estudiando dos ofertas de planes de pensiones. El banco *A* le ofrece un sistema de pagos mensuales de modo que el día previsto para su jubilación habrá generado un capital de 6.700.000 €, por el cual el banco le ofrece una pensión de 350.000 €/año. El banco *B* le propone un plan de depósitos al mismo tipo de interés con el que generará un capital de 5.800.000 € y a cambio le ofrece una pensión de 300.000 €/año. Suponiendo, por simplicidad, que las pensiones son perpetuas, ¿qué plan ofrece mayor rentabilidad? (En otros términos, la pregunta es qué tipo de interés i aplica cada banco para valorar su propuesta de pensión. Este valor recibe el nombre de Tasa de Rendimiento Interno (TIR) de la inversión.)
18. La función de beneficios marginales de una empresa viene dada por $B_m(t) = \sin(2\pi t)$ u.m./año. Calcula el beneficio acumulado durante el primer año e interpreta el resultado. Calcula el beneficio medio del primer semestre.
19. Se estima que los dividendos marginales de una empresa van a ser $D_m(t) = e^{0.01t}$ u.m./año. Calcula el valor de las acciones de la empresa en $t = 0$, es decir, el valor actual de los dividendos que la empresa producirá en el periodo $[0, +\infty[$, actualizados con un interés continuo del 7%.
20. Calcula el valor inicial de una renta continua con función de reembolso $C(t) = 216.000 + 720t$ €/año a percibir dentro de 1 año y durante un periodo de 3 años valorándola con un factor de descuento continuo de $i_\infty = 8\%$. Calcula también el reembolso acumulado en dicho periodo.
21. Una empresa estudia una inversión de 200 u.m. en maquinaria, de la que espera obtener un rendimiento de $100e^{-0.04t}$ u.m./año durante 5 años. Determina si la inversión es rentable calculando su VAN, es decir, calcula la diferencia entre el valor inicial de los rendimientos menos la inversión. Para el descuento considera un interés continuo de $i_\infty = 0.06$. Calcula también el rendimiento medio anual de la inversión.

22. Consideremos una renta continua con reembolso $R(t) = 1000t$ u.m./año durante un periodo de dos años (desde $t = 0$).
- (a) Comprueba que el reembolso medio es de 1000 u.m./año.
 - (b) ¿Es preferible esta renta u otra con reembolso 1000 u.m./año, durante el mismo periodo? (Considera, por ejemplo, un factor de capitalización del 10%).
23. Un matrimonio tuvo un hijo en $t = 0$ y lo mantuvo hasta que éste cumplió 30 años, lo que les supuso un gasto en dicho periodo de 3000€/año. A partir de $t = 40$ y hasta el fallecimiento de sus padres, 20 años después, el hijo pasó a éstos una pensión de 4000€/año. Si consideramos un factor de descuento $i_\infty = 5\%$, ¿fue rentable para el matrimonio la decisión de tener un hijo? (Calcula el valor en $t = 0$ tanto de los gastos de manutención como el de la pensión y compáralos.)
24. ¿Qué preferirías, una renta perpetua de 2000€/año o una renta durante 10 años de 3000€/año? Aplica un factor de descuento del 5%.

Tema 6

Convexidad

En este tema estudiaremos unas clases especiales de conjuntos y funciones que aparecen en la programación matemática (la búsqueda de máximos y mínimos de funciones). Como en un momento dado vamos a necesitar la teoría algebraica de clasificación de formas cuadráticas, para no interrumpir el estudio de la convexidad la presentamos en la primera sección.

6.1 Formas cuadráticas

Definición Si A es una matriz simétrica $n \times n$ de números reales, se llama *forma cuadrática* determinada por A a la aplicación $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $q(\bar{x}) = \bar{x}A\bar{x}^t$.

Ejemplo Vamos a calcular la forma cuadrática determinada por la matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Se trata de la aplicación $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned} q(x, y, z) &= (x, y, z) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= (2x + 3y + z, 3x - y - 2z, x - 2y + 4z) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= 2x^2 + 3xy + xz + 3xy - y^2 - 2yz + xz - 2yz + 4z^2 \\ &= 2x^2 - y^2 + 4z^2 + 6xy + 2xz - 4yz. \end{aligned}$$

■

En la práctica hay una regla simple para obtener directamente el resultado sin hacer ningún cálculo: los coeficientes de x^2 , y^2 , z^2 son siempre los que aparecen en la diagonal de la matriz, y los coeficientes de xy , xz , yz son los que aparecen por encima de la diagonal multiplicados por 2. Por ejemplo, para calcular el coeficiente de xy (primera variable por segunda variable) miramos la primera fila segunda columna, donde hay un 3, y lo multiplicamos por 2, con lo que resulta un 6. Aplicando este criterio al revés podemos obtener la matriz que determina una forma cuadrática dada.

Ejemplo La matriz asociada a la forma cuadrática

$$q(x, y, z) = 3x^2 - 5y^2 + z^2 + 4xy - 3yz$$

es

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & -3/2 \\ 0 & -3/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

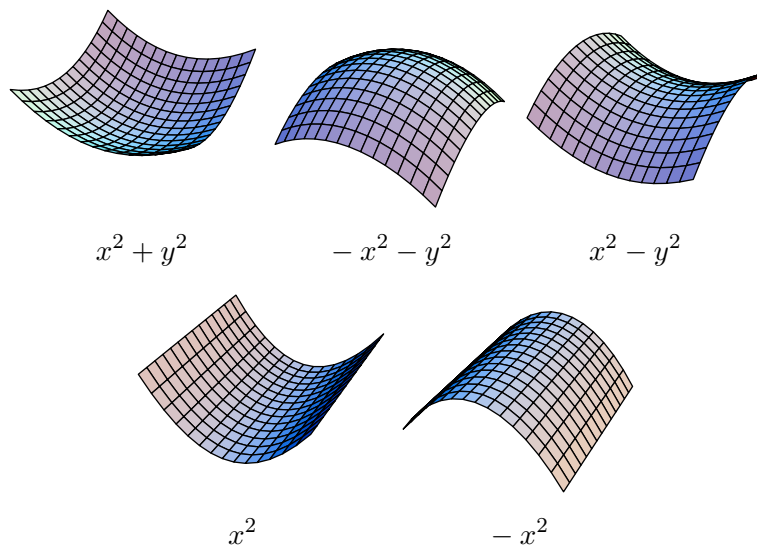
De este modo, una forma cuadrática viene determinada indistintamente por una matriz simétrica o por su expresión explícita $q(\bar{x})$. Nos referiremos a ellas como la *expresión matricial* y la *expresión analítica* de la forma cuadrática.

La razón por la que nos interesa este concepto es que el término de segundo grado del polinomio de Taylor en un punto $\bar{p}$ de una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 es (salvo un factor $1/2$) la forma cuadrática determinada por la matriz hessiana $Hf(\bar{p})$. Por ello los resultados que vamos a obtener sobre formas cuadráticas se aplicarán al estudio de funciones C^2 a través de la matriz hessiana.

Definición Una forma cuadrática $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es:

1. *Definida positiva* si $q(\bar{x}) > 0$ siempre que $\bar{x} \neq 0$.
2. *Definida negativa* si $q(\bar{x}) < 0$ siempre que $\bar{x} \neq 0$.
3. *Semidefinida positiva* si $q(\bar{x}) \geq 0$ para todo $\bar{x}$.
4. *Semidefinida negativa* si $q(\bar{x}) \leq 0$ para todo $\bar{x}$.
5. *Indefinida* si $q(\bar{x}) > 0$ en algunos puntos y $q(\bar{x}) < 0$ en otros puntos.
6. *Nula* si $q(\bar{x}) = 0$ en todo punto $\bar{x}$.

Ejemplos La forma cuadrática $q(x, y) = x^2 + y^2$ es claramente definida positiva, mientras que $q(x, y) = -x^2 - y^2$ es definida negativa. La forma $q(x, y) = x^2 - y^2$ es indefinida, porque $q(1, 0) = 1 > 0$ y $q(0, 1) = -1 < 0$. La forma $q(x, y) = x^2$ es semidefinida positiva y $q(x, y) = -x^2$ es semidefinida negativa. Las gráficas de estas funciones son las siguientes:



Sucede que toda forma cuadrática es “esencialmente” como una de estas funciones, es decir, una forma cuadrática definida positiva tiene forma de “copa” más o menos abierta, pero de “copa” al fin y al cabo; toda forma cuadrática semidefinida positiva tiene forma de “valle”, etc. Por lo tanto, si somos capaces de *clasificar* una forma cuadrática, tenemos una información cualitativa sobre cómo es su gráfica.

Hay un caso en el que es especialmente simple decidir de qué tipo es una forma cuadrática:

Teorema Si A es una matriz diagonal, entonces la forma cuadrática asociada a A es:

1. *definida positiva* si todos los coeficientes de la diagonal son > 0 ,
2. *definida negativa* si todos los coeficientes de la diagonal son < 0 ,
3. *semidefinida positiva* si todos los coeficientes de la diagonal son ≥ 0 ,
4. *semidefinida negativa* si todos los coeficientes de la diagonal son ≤ 0 ,
5. *indefinida* si tiene coeficientes > 0 y < 0 .

Para matrices no diagonales daremos un criterio que involucra los conceptos siguientes:

Definición Una matriz cuadrada es *regular* si su determinante es no nulo y es *singular* si su determinante es nulo.

Los *menores principales* de orden k de una matriz $n \times n$ (con $k \leq n$) son los determinantes de las matrices formadas por k filas de A (en orden) y las mismas k columnas.

El *menor principal conducente* de orden k es el menor principal formado con las k primeras filas y las k primeras columnas de la matriz.

Ejemplo Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sus menores principales de orden 1 son

$$A_1 = 2, \quad A_2 = -1, \quad A_3 = 4.$$

Sus menores principales de orden 2 son

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -11, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7,$$

$$A_{23} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -8.$$

El único menor principal de orden 3 es

$$A_{123} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -63.$$

Los menores principales conducentes son

$$A_1 = 2, \quad A_{12} = -11, \quad A_{123} = -63.$$

■

El interés de los menores principales consiste en que són fáciles de calcular y nos permiten clasificar cualquier forma cuadrática sin más que estudiar su signo:

Teorema (Criterio de Jacobi) *Sea $q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática de matriz A . Entonces*

1. *En el caso en que A es regular (determinante $\neq 0$):*

(a) *Si los menores principales conducentes son todos > 0 entonces q es definida positiva.*

(b) *Si los menores principales conducentes tienen signos alternados (empezando en negativo):*

$$A_1 < 0, \quad A_{12} > 0, \quad A_{123} < 0, \dots$$

entonces q es definida negativa.

(c) *En otro caso q es indefinida.*

2. *En el caso en que A es singular (determinante $= 0$):*

(a) *Si todos los menores principales son ≥ 0 entonces A es semidefinida positiva.*

(b) *Si los menores principales de orden impar son ≤ 0 y los de orden par son ≥ 0 entonces A es semidefinida negativa.*

(c) *En otro caso q es indefinida.*

Nota Para aplicar este criterio, en primer lugar hemos de calcular el determinante de A para saber si es regular o singular. Si es regular sólo necesitaremos calcular los menores principales conducentes, mientras que si es singular tendremos que estudiar el signo de todos los menores principales, conducentes o no.

Ejemplo Si una forma cuadrática tiene matriz A de orden 3×3 y su determinante es 0, para clasificarla hemos de calcular sus seis menores principales. Será semidefinida negativa si y sólo si se cumplen las desigualdades:

$$\begin{aligned} A_1 &\leq 0, & A_{12} &\geq 0, & A_{123} &\leq 0. \\ A_2 &\leq 0, & A_{13} &\geq 0, & & \\ A_3 &\leq 0, & A_{23} &\geq 0, & & \end{aligned}$$

6.2 Conjuntos convexos

Si $\bar{p} \neq \bar{q}$ son dos puntos de $\mathbb{R}^n$, la recta que pasa por ellos está formada por los puntos de la forma

$$\bar{x} = (1 - \lambda)\bar{p} + \lambda\bar{q}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Al variar λ obtenemos los distintos puntos de la recta. Concretamente, para $\lambda = 0$ pasamos por $\bar{x} = \bar{p}$ y para $\lambda = 1$ pasamos por $\bar{x} = \bar{q}$.

Si exigimos que λ tome sólo valores ≥ 0 o sólo valores ≤ 0 obtenemos los puntos de las dos semirectas de extremo $\bar{p}$ contenidas en la recta anterior. La primera es la que contiene a $\bar{q}$, y la segunda es la que no lo contiene.

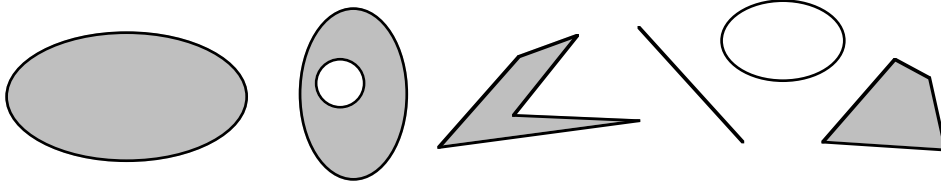
Si exigimos que $0 \leq \lambda \leq 1$ obtenemos los puntos del segmento de extremos $\bar{p}$ y $\bar{q}$.

Con esto podemos definir ya los conjuntos convexos:

Definición Se dice que un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es *convexo* si cuando $\bar{x}, \bar{y} \in C$ y $0 \leq \lambda \leq 1$, entonces $(1 - \lambda)\bar{x} + \lambda\bar{y} \in C$.

Es decir, C es convexo si cuando contiene dos puntos contiene también a todos los puntos del segmento que los une. Se considera que el conjunto vacío $\emptyset$ y los conjuntos con un solo punto $\{\bar{x}\}$ son convexos.

Ejercicio Determina (mediante argumentos geométricos intuitivos) cuáles de los conjuntos siguientes son convexos:



Definición Un *hiperplano* en $\mathbb{R}^n$ es un subconjunto de la forma

$$H = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid c_1x_1 + \cdots + c_nx_n = \alpha\},$$

donde $c_i, \alpha \in \mathbb{R}$. Si llamamos $\bar{c}$ al vector de componentes c_i , podemos escribir, más brevemente, $H = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \bar{c}\bar{x} = \alpha\}$.

Teorema Los hiperplanos son conjuntos convexos.

DEMOSTRACIÓN: Si $H = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \bar{c}\bar{x} = \alpha\}$ es un hiperplano, donde $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, tomamos dos puntos $\bar{x}, \bar{y} \in H$ y $0 \leq \lambda \leq 1$. Hemos de comprobar que $(1 - \lambda)\bar{x} + \lambda\bar{y} \in H$. En efecto,

$$\bar{c}((1 - \lambda)\bar{x} + \lambda\bar{y}) = (1 - \lambda)\bar{c}\bar{x} + \lambda\bar{c}\bar{y} = (1 - \lambda)\alpha + \lambda\alpha = \alpha,$$

donde hemos usado que $\bar{c}\bar{x} = \bar{c}\bar{y} = \alpha$ porque ambos puntos están en H . ■

Definición Un *semiespacio* (cerrado) en $\mathbb{R}^n$ es un subconjunto de la forma

$$S = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \leq \alpha\},$$

donde $c_i, \alpha \in \mathbb{R}$. Un *semiespacio abierto* se define igualmente cambiando la desigualdad $\leq$ por $<$.

Llamando $\bar{c}$ al vector de componentes c_i , podemos expresar S en la forma $S = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \bar{c}\bar{x} \leq \alpha\}$. Notemos que si cambiamos $\leq$ por $\geq$ seguimos teniendo un semiespacio, pues $\bar{c}\bar{x} \geq \alpha$ equivale a $-\bar{c}\bar{x} \leq -\alpha$. Lo mismo se aplica a los semiespacios abiertos.

Teorema *Todo semiespacio es convexo.*

DEMOSTRACIÓN: Tomemos un semiespacio S . Podemos suponer que es cerrado, pues si es abierto se razona igualmente. Entonces $S = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \bar{c}\bar{x} \leq \alpha\}$, donde $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Tomamos dos puntos $\bar{x}, \bar{y} \in S$ y $0 \leq \lambda \leq 1$. Hemos de comprobar que $(1 - \lambda)\bar{x} + \lambda\bar{y} \in S$. En efecto,

$$\bar{c}((1 - \lambda)\bar{x} + \lambda\bar{y}) = (1 - \lambda)\bar{c}\bar{x} + \lambda\bar{c}\bar{y} \leq (1 - \lambda)\alpha + \lambda\alpha = \alpha,$$

donde hemos usado que $\bar{c}\bar{x} \leq \alpha$, $\bar{c}\bar{y} \leq \alpha$ porque ambos puntos están en S , así como que $\lambda \geq 0$ y $1 - \lambda \geq 0$ para que se conserven las desigualdades al multiplicar. ■

Teorema *La intersección de conjuntos convexos es convexa.*

DEMOSTRACIÓN: Sean C_1 y C_2 dos conjuntos convexos. Para probar que la intersección $C_1 \cap C_2$ es convexa comprobamos que satisface la definición: tomamos dos puntos $\bar{x}, \bar{y} \in C_1 \cap C_2$ y un número $0 \leq \lambda \leq 1$. Hemos de probar que $(1 - \lambda)\bar{x} + \lambda\bar{y} \in C_1 \cap C_2$.

Del hecho de que $\bar{x}, \bar{y} \in C_1 \cap C_2$ se sigue que $\bar{x}, \bar{y} \in C_1$ y $\bar{x}, \bar{y} \in C_2$. Como C_1 es convexo se cumple que $(1 - \lambda)\bar{x} + \lambda\bar{y} \in C_1$ e igualmente $(1 - \lambda)\bar{x} + \lambda\bar{y} \in C_2$, pero esto significa que $(1 - \lambda)\bar{x} + \lambda\bar{y} \in C_1 \cap C_2$, como queríamos probar. ■

Definición Un *polítopo* es una intersección de un número finito de semiespacios. Si además está acotado se dice que es un *poliedro*.

Según los teoremas anteriores los polítopos (y en particular los poliedros) son convexos.

Ejercicio Una empresa tiene capacidad para producir hasta un máximo de 400 unidades de un producto A y hasta un máximo de 200 unidades de un producto B . El coste unitario de A es de 2 u.m., y el de B es de 1 u.m. Además hay unos costes fijos de 100 u.m. El presupuesto disponible de la empresa es de 700 u.m. Representa gráficamente el *conjunto de oportunidades* de la empresa, es decir, el conjunto de todos los pares (x, y) correspondientes a una producción posible de x unidades de producto A e y unidades de producto B . Estudia su convexidad gráfica y analíticamente.

6.3 Funciones cóncavas y convexas

Definición Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre un conjunto convexo D . Diremos que f es *convexa* si cuando $\bar{x}, \bar{y} \in D$ y $0 \leq \lambda \leq 1$, se cumple que

$$f((1 - \lambda)\bar{x} + \lambda\bar{y}) \leq (1 - \lambda)f(\bar{x}) + \lambda f(\bar{y}).$$

Si se da la relación

$$f((1 - \lambda)\bar{x} + \lambda\bar{y}) \geq (1 - \lambda)f(\bar{x}) + \lambda f(\bar{y}).$$

diremos que f es *cóncava*.

Definición Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre un conjunto convexo D . Diremos que f es *estrictamente convexa* si cuando $\bar{x}, \bar{y} \in D$ cumplen $\bar{x} \neq \bar{y}$ y $0 < \lambda < 1$, se cumple que

$$f((1 - \lambda)\bar{x} + \lambda\bar{y}) < (1 - \lambda)f(\bar{x}) + \lambda f(\bar{y}).$$

Si se da la relación

$$f((1 - \lambda)\bar{x} + \lambda\bar{y}) > (1 - \lambda)f(\bar{x}) + \lambda f(\bar{y}).$$

diremos que f es *estrictamente cóncava*.

Ejemplo Una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de la forma $f(\bar{x}) = \bar{c}\bar{x}$, donde $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$ es a la vez cóncava y convexa, porque si $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$f((1 - \lambda)\bar{x} + \lambda\bar{y}) = \bar{c}((1 - \lambda)\bar{x} + \lambda\bar{y}) = (1 - \lambda)\bar{c}\bar{x} + \lambda\bar{c}\bar{y} = (1 - \lambda)f(\bar{x}) + \lambda f(\bar{y}).$$

■

Un poco más en general:

Las funciones de la forma $f(\bar{x}) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n + \alpha$ son a la vez cóncavas y convexas.

Esto puede probarse como en el ejemplo anterior, o bien aplicando el teorema siguiente, pues las funciones de la forma indicada se caracterizan por que su matriz hessiana es nula, luego es a la vez semidefinida positiva y semidefinida negativa.

Teorema Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 sobre un abierto convexo D .

1. f es convexa en D si y sólo si $Hf(\bar{x})$ es semidefinida positiva en todo punto $\bar{x} \in D$.
2. f es cóncava en D si y sólo si $Hf(\bar{x})$ es semidefinida negativa en todo punto $\bar{x} \in D$.
3. Si $Hf(\bar{x})$ es definida positiva en todo $\bar{x} \in D$ entonces f es estrictamente convexa.
4. Si $Hf(\bar{x})$ es definida negativa en todo $\bar{x} \in D$ entonces f es estrictamente cóncava.

Nota La idea subyacente a este teorema es que el polinomio de Taylor de grado 2 de una función f es lo suficientemente parecido a ésta para que podamos decir que f es cóncava o convexa si y sólo si lo es su polinomio de Taylor en todos sus puntos (a la vez). A su vez, el polinomio de Taylor es cóncavo o convexo si y sólo si lo es su parte de grado 2, que no es sino la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana. Por último, es claro que una forma cuadrática es convexa si y sólo si es semidefinida positiva, mientras que es cóncava si y sólo si es semidefinida negativa. ■

Propiedades de las funciones cóncavas y convexas Consideremos una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, donde D es convexo. Se cumple:

1. f es estrictamente convexa si y sólo si $-f$ es estrictamente cóncava.
2. f es convexa si y sólo si $-f$ es cóncava.
3. Si f es estrictamente convexa (respectivamente, estrictamente cóncava) entonces f es convexa (respectivamente, cóncava), pero el recíproco no es cierto.
4. Si f es convexa y $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto de nivel inferior

$$D_\alpha = \{\bar{x} \in D \mid f(\bar{x}) \leq \alpha\}$$

es convexo (y lo mismo es cierto si $\leq$ se cambia por $<$).

5. Si f es cóncava y $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto de nivel superior

$$D^\alpha = \{\bar{x} \in D \mid f(\bar{x}) \geq \alpha\}$$

es convexo (y lo mismo es cierto si $\geq$ se cambia por $>$).

DEMOSTRACIÓN: 1) Supongamos que f es estrictamente convexa. Para probar que $-f$ es estrictamente cóncava tomamos dos puntos $\bar{x}, \bar{y} \in D$ y un número real $0 < \lambda < 1$. Como f es estrictamente convexa tenemos que

$$f((1-\lambda)\bar{x} + \lambda\bar{y}) < (1-\lambda)f(\bar{x}) + \lambda f(\bar{y}).$$

Multiplicando ambos miembros por -1 queda

$$(-f)((1-\lambda)\bar{x} + \lambda\bar{y}) > (1-\lambda)(-f)(\bar{x}) + \lambda(-f)(\bar{y}),$$

por lo que $-f$ cumple la definición de función estrictamente cóncava.

2) es análogo a 1).

3) Supongamos que f es estrictamente convexa y vamos a probar que es convexa. Para ello tomamos dos puntos $\bar{x}, \bar{y} \in D$ y $0 \leq \lambda \leq 1$. Hemos de probar que

$$f((1-\lambda)\bar{x} + \lambda\bar{y}) \leq (1-\lambda)f(\bar{x}) + \lambda f(\bar{y}).$$

Distinguimos cuatro casos:

A) si $\bar{x} = \bar{y}$ entonces

$$(1-\lambda)\bar{x} + \lambda\bar{y} = (1-\lambda)\bar{x} + \lambda\bar{x} = \bar{x} - \lambda\bar{x} + \lambda\bar{x} = \bar{x}$$

e igualmente $(1-\lambda)f(\bar{x}) + \lambda f(\bar{y}) = f(\bar{x})$, por lo que la desigualdad que hemos de probar se reduce a $f(\bar{x}) \leq f(\bar{x})$, que es obviamente cierta. Supongamos ahora que $\bar{x} \neq \bar{y}$.

B) Si $0 < \lambda < 1$ entonces tenemos

$$f((1-\lambda)\bar{x} + \lambda\bar{y}) < (1-\lambda)f(\bar{x}) + \lambda f(\bar{y}).$$

por la definición de función estrictamente convexa, luego también tenemos la desigualdad anterior.

C) Si $\lambda = 0$ la desigualdad que hemos de probar se reduce a $f(\bar{x}) \leq f(\bar{x})$, que obviamente es cierta.

D) Si $\lambda = 1$, la desigualdad que hemos de probar se reduce a $f(\bar{y}) \leq f(\bar{y})$, que también es cierta.

En cualquier caso tenemos la desigualdad buscada. El caso para funciones cóncavas es análogo.

4) Supongamos que f es convexa. Para probar que D_α es convexo tomamos dos puntos $\bar{x}, \bar{y} \in D_\alpha$ y un número real $0 \leq \lambda \leq 1$. Hemos de probar que $(1-\lambda)\bar{x} + \lambda\bar{y} \in D_\alpha$, para lo cual hemos de comprobar que $f((1-\lambda)\bar{x} + \lambda\bar{y}) \leq \alpha$. Ahora bien, como $f(\bar{x}) \leq \alpha$ y $f(\bar{y}) \leq \alpha$ y f es convexa, se cumple:

$$f((1-\lambda)\bar{x} + \lambda\bar{y}) \leq (1-\lambda)f(\bar{x}) + \lambda f(\bar{y}) \leq (1-\lambda)\alpha + \lambda\alpha = \alpha - \lambda\alpha + \lambda\alpha = \alpha.$$

5) es análogo a 4). ■

6.4 Problemas

1. Clasifica las formas cuadráticas siguientes:

- (a) $f_1(x, y, z) = 24x^2 + 5y^2 + 11z^2 + 20xy + 6yz$,
- (b) $f_2(x, y, z) = -2x^2 - y^2 - 14z^2 + 2xy + 2xz + 4yz$,
- (c) $f_3(x, y, z) = -2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy$,
- (d) $f_4(x, y, z) = 5x^2 + 5y^2 + 12z^2 + 2xy + 2xz - 14yz$,
- (e) $f_5(x, y, z) = 9x^2 + 3y^2 + 6z^2 - 6xy + 4xz - 8yz$,
- (f) $f_6(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - z^2 + 8xy + 2xz + 4yz$,
- (g) $f_7(x, y, z) = 13x^2 - 2xy - 10yz + 4y^2 + 7z^2$,
- (h) $f_8(x, y) = -x^2 + 20y^2 + xy$,
- (i) $f_9(x, y, z) = yz$,
- (j) $f_{10}(x, y) = 5x^2 + 3y^2$,
- (k) $f_{11}(x, y, z) = 5x^2 + 3y^2$,
- (l) $f_{12}(x, y, z) = 2x^2 + 4z^2$,
- (m) $f_{13}(x) = 4x^2$,
- (n) $f_{14}(x, y, z) = -x^2 - 3y^2 - 2z^2$.
- (o) $f_{15}(x, y, z) = x^2 - y^2 - 2xy + 3xz + z^2$.

2. Considera la forma cuadrática

$$f(x, y, z) = 3x^2 + 5y^2 - 3z^2 + 2xy - xz + 6yz.$$

Calcula:

- (a) Su matriz asociada,
 - (b) Su matriz Hessiana,
 - (c) Su polinomio de Taylor de grado 1 en $(0, 0, 0)$,
 - (d) Su polinomio de Taylor de grado 2 en $(0, 0, 0)$.
3. Estudia si las funciones siguientes son cóncavas o convexas en los dominios indicados:
- (a) $f(x) = e^x$ en $D = \mathbb{R}$.
 - (b) $R(a, b) = \frac{1}{ab}$, en $D = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a > 0, b > 0\}$.
 - (c) $M(u, v) = uv - u^3 - v^3$ en $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 1, v > 1\}$.
 - (d) $L(x, y, z) = x^2y - 3xz^2$ en $D = \mathbb{R}^3$.
 - (e) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2$ en $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$.
 - (f) $C(r, s, t) = 5r^4 + s + 2t^6$ en $D = \mathbb{R}^3$.
 - (g) $h(x, y, z, w) = 3x - 5y + 2z - w$ en $D = \mathbb{R}^4$.
 - (h) $s(x, y) = 6xy - x^2 - 9y^2$.
4. El dominio de una función convexa ha de ser un conjunto convexo, por definición. ¿Son convexos los dominios de las funciones del problema anterior?
5. Razona geoméricamente si el conjunto siguiente es convexo: $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \neq 1\}$.
6. Estudia si los conjuntos siguientes son convexos. Indica cuáles de ellos son hiperplanos, semiespacios o polítopos:
- (a) $C_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 5y + z \leq 5, x < 16\}$.
 - (b) $C_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 3y = x + 2w\}$.
 - (c) $C_3 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
 - (d) $C_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 16\}$.
 - (e) $C_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 16\}$.
 - (f) $C_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^4 \geq 4\}$.
 - (g) $C_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2xy - x^2 - y^2 \geq 4\}$.
 - (h) $C_8 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 3\}$.
 - (i) $C_9 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x < 0, y > 0\}$.
 - (j) $C_{10} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x < y + z\}$.
 - (k) $C_{11} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ln(x + y + z) \geq 0, x + y + z > 0\}$.
 - (l) $C_{12} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3y^2 + 2xy \geq -1, x - y < 15\}$.
 - (m) $C_{13} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 \leq 16\}$.

6.5 Cuestiones

1. Clasifica una forma cuadrática cuyos menores principales sean los que se indican en los casos siguientes. Indica si es necesario considerarlos todos o si basta estudiar los menores principales conducentes.
 - (a) $A_1 = 0, A_2 = 0, A_3 = -2, A_{12} = 0, A_{13} = 0, A_{23} = 0, A_{123} = 0.$
 - (b) $A_1 = 2, A_2 = 0, A_3 = 2, A_{12} = 0, A_{13} = 3, A_{23} = 0, A_{123} = 0.$
 - (c) $A_1 = 0, A_2 = 0, A_3 = -2, A_{12} = 0, A_{13} = 0, A_{23} = 0, A_{123} = 1.$
 - (d) $A_1 = 2, A_2 = 1, A_3 = 2, A_{12} = -1, A_{13} = -2, A_{23} = -3, A_{123} = 4.$
 - (e) $A_1 = 0, A_2 = 0, A_3 = 0, A_{12} = 0, A_{13} = 0, A_{23} = 0, A_{123} = 0.$
 - (f) $A_1 = -2, A_2 = -1, A_3 = -2, A_{12} = 0, A_{13} = 2, A_{23} = 3.$
 - (g) $A_1 = -2, A_2 = -1, A_3 = -2, A_{12} = 4, A_{13} = 2, A_{23} = 3, A_{123} = -4.$
2. Considera el conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 5y > 7\}$. ¿Es un semiespacio?, ¿es un conjunto de nivel superior?, ¿es convexo?, ¿es también cóncavo?
3. Sean A_1, A_2, A_{12} los menores principales de una forma cuadrática singular de dos variables. Indica las desigualdades que han de cumplirse para que sea semidefinida negativa.
4. En este tema tratamos con conjuntos, funciones y formas cuadráticas. Di cuáles de las propiedades siguientes corresponden a cada uno de estos tipos de objetos:
 - (a) Ser semidefinido/a positivo/a,
 - (b) Ser convexo/a,
 - (c) Ser cóncavo/a,
 - (d) Ser un hiperplano.

5. Completa con las palabras *conjunto*, *función*, *forma cuadrática*, *cóncavo/a* o *convexo/a*:

PROBLEMA: Estudia la convexidad de $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2x^2 - 4y^2 > -8\}$.

SOLUCIÓN: El/la _____ C es un/a _____ de nivel superior de el/la _____ $f(x, y) = -2x^2 - 4y^2$, luego el/la _____ C será convexo/a si el/la _____ f es _____. Para saber si el/la _____ f es _____ estudiamos el/la _____ asociado/a a la matriz hessiana de f , que es

$$H = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Como es una matriz diagonal y los coeficientes de la diagonal son negativos, el/la _____ asociado/a a H es definido/a negativo/a, luego $-2x^2 - 4y^2$ es un/a _____ y C es un/a _____.

Tema 7

Ecuaciones diferenciales

Una ecuación diferencial ordinaria de primer grado es una ecuación de la forma $y' = f(x, y)$, donde $y = y(x)$ es una función desconocida. Resolver la ecuación es encontrar todas las funciones y que la satisfacen. Por ejemplo, la ecuación diferencial

$$y' = xy$$

tiene entre sus soluciones a la función $y(x) = e^{x^2/2}$. En efecto, si y es esta función, entonces $y' = xe^{x^2/2} = xy$, tal y como exige la ecuación.

En este tema veremos algunos métodos para resolver ecuaciones diferenciales de este tipo. Hay que advertir que es posible plantear y resolver ecuaciones diferenciales mucho más generales: una ecuación ordinaria de grado n es una ecuación en la que aparecen las derivadas de la función incógnita hasta el orden n . El adjetivo “ordinaria” se opone a “ecuación en derivadas parciales”, que es una ecuación cuya función incógnita tiene varias variables y en la que aparecen las derivadas parciales de la misma. También es posible plantear sistemas de ecuaciones diferenciales con varias incógnitas. Pero aquí nos ocuparemos únicamente del caso que hemos descrito.

En general, una ecuación diferencial tiene infinitas soluciones, de modo que la familia de todas ellas depende de una constante de integración. Por ejemplo, la *solución general* de la ecuación anterior es $y = Ce^{x^2/2}$, donde C es un número real arbitrario. Para cada valor de C tenemos una solución distinta.

Una *solución particular* de una ecuación diferencial queda determinada si se especifica el valor en un punto de la función incógnita. Por ejemplo, la única solución de la ecuación anterior que cumple $y(0) = 3$ es la función $y = 3e^{x^2/2}$.

A menudo es frecuente usar la notación $\frac{dy}{dx}$ en lugar de y' en las ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, la ecuación anterior puede expresarse también como

$$\frac{dy}{dx} = xy,$$

o incluso

$$dy = xy \, dx$$

Ecuaciones con variables separables Las ecuaciones más fáciles de resolver son las de variables separables. Son aquellas que pueden escribirse como

$$u(y) \, dy = v(x) \, dx,$$

donde u y v son dos funciones. En tal caso, basta integrar los dos miembros

$$\int u(y) dy = \int v(x) dx$$

para encontrar la solución general.

Ejemplo La ecuación anterior es de variables separables, pues puede escribirse como

$$\frac{dy}{y} = x dx.$$

Para resolverla hacemos

$$\int \frac{dy}{y} = \int x dx,$$

lo que nos da

$$\ln y = \frac{x^2}{2} + k.$$

Para despejar la y calculamos la exponencial de ambos miembros:

$$y = e^{x^2/2+k} = e^k e^{x^2/2}.$$

Si llamamos $C = e^k$ queda la ecuación que habíamos indicado anteriormente: $y = C e^{x^2/2}$. ■

Ecuaciones lineales Son las ecuaciones de la forma

$$y' + a(x)y = b(x).$$

Se resuelven haciendo el cambio de variable $y(x) = u(x)v(x)$.

Ejemplo Consideremos la ecuación lineal $y' + 2xy = x$. Hacemos el cambio $y = uv$, con lo que $y' = u'v + uv'$. Resulta:

$$u'v + uv' + 2xuv = x.$$

Sacamos factor común u y queda

$$(*) \quad u(v' + 2xv) + u'v - x = 0.$$

Ahora elegimos v de modo que anule el paréntesis, es decir,

$$v' + 2xv = 0.$$

Esta ecuación es de variables separables

$$dv = -2xv dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -2x dx,$$

$$\int \frac{dv}{v} = - \int 2x dx,$$

$$\ln v = -x^2 \quad \Rightarrow \quad v = e^{-x^2}.$$

No ponemos ninguna constante de integración porque nos basta una solución. Sustituyendo v en (*) queda

$$u'e^{-x^2} - x = 0.$$

Esta ecuación también es de variables separables:

$$du = xe^{x^2} dx \Rightarrow u = \int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + c.$$

La solución es, por tanto,

$$y = uv = e^{-x^2} \left(\frac{1}{2}e^{x^2} + c \right).$$

■

Ejemplo Si invertimos un capital C_0 , éste variará con el tiempo, es decir, tendremos una función $C(t)$ con $C(0) = C_0$. El interés instantáneo de la inversión es el tanto por uno (o, equivalentemente) tanto por ciento de incremento del capital en un instante, es decir, (en tanto por uno)

$$i_\infty(t) = \frac{1}{C} \frac{dC}{dt}.$$

Si conocemos el interés tenemos una ecuación diferencial que nos permite calcular el capital en un instante dado. Si el interés es constante obtenemos la fórmula usual de capitalización continua:

$$\frac{dC}{C} = i_\infty dt \Rightarrow \ln C = i_\infty t + K, \Rightarrow C = e^K e^{i_\infty t} \Rightarrow C = C_0 e^{i_\infty t}.$$

No obstante, la ecuación diferencial puede resolverse igualmente para intereses variables. ■

Problemas

1. Comprueba que las funciones dadas son soluciones de las ecuaciones dadas:

$$(a) \quad y' + 2y = 0, \quad y(x) = e^{-2x}, \quad y(x) = 5e^{-2x}.$$

$$(b) \quad y' + xy = 0, \quad y(x) = e^{-x^2/2}.$$

$$(c) \quad y' + y = \sin x, \quad y(x) = e^{-x} - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x.$$

2. Comprueba que las familias de funciones dadas son soluciones de las ecuaciones dadas. Encontrar la única solución que cumple en cada caso la condición que se indica.

$$(a) \quad y' + 2y = 0, \quad y(x) = Ae^{-2x}, \quad y(0) = 2.$$

$$(b) \quad y' + y = \sin x, \quad y(x) = Ae^{-x} - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x, \quad y(0) = -1.$$

$$(c) \quad y' + 2y = x^2, \quad y = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + Ae^{-2x}, \quad u(0) = 1.$$

3. Resuelve:

- (a) $\frac{dy}{dx} = 2y$,
- (b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$,
- (c) $(1 + e^x)y \frac{dy}{dx} = e^x$, $y(0) = 1$,
- (d) $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$,
- (e) $(1 + y^2)dx + xy dy = 0$,
- (f) $\frac{dy}{dx} \operatorname{sen} x = y \cos x$,
- (g) $x\sqrt{1 - x^2}dx + y\sqrt{1 - y^2}dy = 0$, $y(0) = 1$,
- (h) $y \ln y dx + x dy = 0$, $y(1) = 1$.

4. Resuelve:

- (a) $\frac{dy}{dx} + 2xy = 2xe^{-x^2}$,
- (b) $\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-x}$,
- (c) $\frac{dy}{dx} + 2xy = 2x$, $y(0) = -1$,
- (d) $\frac{dy}{dx} + xy = x^3$,
- (e) $\frac{dy}{dx} + \frac{e^x}{e^x + 1}y = \frac{x}{e^x + 1}$, $y(0) = 1$,
- (f) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{\cos x}{x}$, $y(\pi/2) = 4/\pi$,
- (g) $\frac{d\theta}{dt} = e^{2t} + 2\theta$.

5. Hemos invertido 1000€ durante un año en unos fondos cuya rentabilidad ha resultado ser la dada por $i_\infty = 10 \cos 2\pi t$. Calcula el capital final que hemos obtenido.
6. Sea $D(p)$ la demanda de un artículo en función de su precio. Supongamos que cuando $p = 1$ la demanda es de 100 unidades de producto, así como que la elasticidad es constante:

$$\frac{p}{D} \frac{dD}{dp} = -1.$$

Calcula la demanda correspondiente a un precio $p = 5$ u.m.

7. Sea p el precio de un bien, y supongamos que la oferta y la demanda vienen dadas por

$$S(p) = 2p, \quad D(p) = 100 - 8p.$$

Calcula el precio de equilibrio. Supongamos que el precio p varía con el tiempo $p = p(t)$ y que $p' = 0.5(D(p) - S(p))$. Interpreta económicamente esta condición. Calcula $p(t)$ y comprueba que $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t)$ es el precio de equilibrio.

8. La población de cierto país aumenta proporcionalmente al número de habitantes. Si después de dos años la población se ha duplicado y después de tres años es de 20.000 habitantes, calcula la población inicial.

9. Depositamos un capital de 1000 u.m. durante 10 años a un interés continuo variable, que ha resultado ser $i_{\infty}(t) = 0.05 + 0.01t$. Calcula el capital final.
10. Se nos plantea la posibilidad de invertir un capital por un periodo de tres años. De entre las distintas expectativas sobre la rentabilidad de la inversión, la menos favorable pronostica que la evolución del interés será $i_{\infty}(t) = 5 + 16t - 3t^2$ %. Determina el mínimo capital que debemos invertir para asegurarnos un capital final de 1000 €.

Apéndice A

Álgebra lineal

A.1 Vectores y matrices

El espacio $\mathbb{R}^n$ Si $n \geq 1$ es un número natural, se llama $\mathbb{R}^n$ al conjunto formado por todas las n -tuplas¹ $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ de números reales. A los elementos de $\mathbb{R}^n$ se les llama también *vectores* de n componentes. A los números reales, para distinguirlos de los vectores, se les llama también *escalares*.

Al vector $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ se le representa simplemente por $\bar{0}$. No debes tener ninguna dificultad en realizar las operaciones siguientes con vectores:

Suma Si $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$, entonces $\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$. Ejemplo:

$$(4, -2, 1/2) + (-1, 0, 2) = (3, -2, 5/2).$$

Producto por un escalar Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, entonces $\alpha\bar{x} = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$. Ejemplo:

$$-3(1, 0, 1/3, -4) = (-3, 0, -1, 12).$$

Producto escalar de vectores Si $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$, entonces

$$\bar{x}\bar{y} = x_1y_1 + \dots + x_ny_n.$$

Ejemplo:

$$(2, -1, 5)(1, 0, 10) = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 5 \cdot 10 = 52.$$

A menudo es necesario estructurar unos datos de forma más elaborada que simplemente ponerlos en fila. Para ello está el concepto de matriz.

Matrices Si $m, n \geq 1$ son números naturales, una *matriz* $m \times n$ de números reales es un conjunto A de $m \cdot n$ números reales ordenados en m filas y n columnas. Al número que ocupa la fila i y la columna j se le representa por a_{ij} . Por lo que una matriz A se representa también por $A = (a_{ij})$. Así pues, una matriz $m \times n$ es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

¹Dos números reales forman un par (x, y) , tres una terna (x, y, z) , cuatro una cuádrupla (x, y, z, w) , cinco una quintupla, seis una séxtupla y, en general, n números reales forman una n -tupla.

Ejemplos La matriz A es 3×3 , mientras que B es 2×4 :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & \sqrt{2} & -8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1/2 & 9 \end{pmatrix}$$

Las matrices con el mismo número de filas que de columnas se llaman *cuadradas*, mientras que las que no son cuadradas se llaman *rectangulares*. Los vectores de $\mathbb{R}^n$ son un caso particular de matrices. Por ejemplo, podemos ver a $(2, 3, 5, 5)$ como un vector de $\mathbb{R}^4$ o como una matriz 1×4 . Estas matrices que tienen una sola fila se llaman *vectores fila*. Igualmente, las matrices con una sola columna se llaman *vectores columna*. Debes ser capaz de realizar las operaciones siguientes con matrices:

Suma Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son matrices $m \times n$, entonces $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$. Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 6 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Producto por un escalar Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $A = (a_{ij})$ es una matriz $m \times n$, entonces $\alpha A = (\alpha a_{ij})$. Ejemplo:

$$-3 \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -9 & 6 \\ -6 & -3 & -27 \end{pmatrix}.$$

Producto de matrices Si $A = (a_{ij})$ es $m \times n$ y $B = (b_{ij})$ es $n \times r$, entonces AB es la matriz que en la posición (i, j) tiene el número $a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$. Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3-2 & -1-3-2 & 0+9+0 \\ 4+1+9 & -2-1+9 & 0+3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 14 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Trasposición Si A es una matriz $m \times n$, se llama *matriz traspuesta* de A a la matriz $n \times m$ representada por A^t dada por $a_{ij}^t = a_{ji}$, es decir, A^t es la matriz que resulta de cambiar filas por columnas. Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 9 \end{pmatrix}, \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Una matriz cuadrada A es *simétrica* si coincide con su traspuesta, es decir, si $A = A^t$. Por ejemplo, la matriz S es simétrica, pero T no lo es:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para terminar, se define la *matriz nula* $m \times n$ como la matriz cuyos coeficientes son todos 0. La matriz identidad $m \times m$ es la matriz I_m que tiene unos en la diagonal y ceros fuera de la diagonal. Por ejemplo:

$$I_1 = (1), \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \dots$$

A.2 Determinantes

Cada matriz cuadrada A tiene asociado un número real llamado *determinante* de A , y que representaremos por $|A|$ o $\det A$. Los determinantes nos aparecerán más adelante a la hora de dar criterios que determinen si una función es cóncava o convexa, o si tiene un máximo o un mínimo en un punto dado. Como la definición teórica de determinante es complicada, será suficiente con que sepas cómo calcularlos en la práctica:

Matrices 1×1 Simplemente, $|a| = a$. Ejemplo, $|-5| = -5$.

Matrices 2×2 La fórmula es

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

Matrices 3×3 La fórmula es

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi.$$

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 3 + 6 + 3 - 2 - 0 = 10.$$

Para dimensiones superiores conviene manipular los determinantes para simplificarlos y reducirlos a otros de dimensión menor. Para ello conviene conocer las siguientes propiedades de los determinantes:

1. Si cambiamos filas por columnas el determinante no varía.
2. Si una fila o columna contiene sólo ceros, el determinante es nulo.
3. Si intercambiamos dos filas (o columnas) el determinante cambia de signo.
4. Un escalar que multiplique a toda una fila (o columna) puede extraerse del determinante.
5. Si a una fila (o columna) le sumamos otra multiplicada por un número, el determinante no varía.

Aplicando estas propiedades siempre podemos conseguir que una fila (o columna) de un determinante tenga nulos todos sus coeficientes salvo a lo sumo uno de ellos. Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8/3 & 0 & 7/3 & -1/3 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Aquí, a la primera fila le hemos sumado la tercera multiplicada por $2/3$ y a la cuarta le hemos sumado la primera. Una vez el determinante tiene una fila o columna de ceros salvo un coeficiente a_{ij} (en nuestro ejemplo $a_{32} = 3$) el determinante es igual a $(-1)^{i+j}a_{ij}$ multiplicado por el determinante que resulta de eliminar la fila i y la columna j . En nuestro caso

$$= (-1)^{3+2} 3 \begin{vmatrix} 8/3 & 7/3 & 1/3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 8 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(16 - 28 + 3 - 4 + 16 - 21) = 18.$$

A.3 Sistemas de ecuaciones lineales

La relación más simple que puede darse entre varias magnitudes es que satisfagan una o varias ecuaciones. En esta sección consideraremos las ecuaciones del tipo más simple posible: aquellas en las que las variables aparecen únicamente multiplicadas por escalares y sumadas. Por ejemplo, el sistema

$$\left. \begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ 2x - y + 3z &= 6 \\ -x + y + 4z &= 3 \end{aligned} \right\}$$

es un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. Observemos que admite la expresión matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

En general, un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas admite siempre la expresión matricial $A\bar{x}^t = \bar{b}^t$, donde A es una matriz $m \times n$ llamada *matriz de coeficientes* del sistema, $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$ es el *vector de términos independientes* y $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ es el *vector de incógnitas*.

Para resolver este tipo de sistemas de ecuaciones podemos emplear el método de reducción de Gauss, consistente transformar el sistema teniendo en cuenta que si a una ecuación le sumamos otra multiplicada por un escalar, el sistema que resulta sigue teniendo las mismas soluciones, al igual que si multiplicamos o dividimos una ecuación por un escalar no nulo. Por ejemplo,

$$\left. \begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ 2x - y + 3z &= 6 \\ -x + y + 4z &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ -5y + 5z &= 0 \\ 3y + 3z &= 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ -y + z &= 0 \\ y + z &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ -y + z &= 0 \\ 2z &= 2 \end{aligned} \right\}$$

Con esto hemos *triangulado* el sistema, es decir, hemos dejado la x sólo en la primera ecuación, la y sólo en las dos primeras ecuaciones y la z (sólo) en las tres primeras ecuaciones. Resolver un sistema triangulado es inmediato:

$$z = \frac{2}{2} = 1, \quad y = z = 1, \quad x = 3 - 2y + z = 3 - 2 + 1 = 2.$$

La solución es, pues, $(x, y, z) = (2, 1, 1)$. ■

Sistemas indeterminados En general un sistema de ecuaciones lineales no tiene por qué tener una única solución. El método de Gauss es aplicable también aunque haya más de una. Veámoslo en un ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 4 \\ 2x + y - z = 2 \\ 7x + 8y + z = 16 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 4 \\ -3y - 3z = -6 \\ -6y - 6z = -12 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 4 \\ y + z = 2 \\ y + z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 4 \\ y + z = 2 \end{array} \right\}$$

Ahora el sistema ha quedado triangulado, pero hay menos ecuaciones que incógnitas. En tal caso asignamos valores arbitrarios a todas las variables de la última ecuación excepto a una. Por ejemplo, hacemos $z = \lambda$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es un número real arbitrario. Al despejar queda:

$$z = \lambda, \quad y = 2 - \lambda, \quad x = 4 - 2y - z = 4 - 2(2 - \lambda) - \lambda = \lambda.$$

Las soluciones del sistema son, pues, $(x, y, z) = (\lambda, 2 - \lambda, \lambda)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. El hecho de que λ pueda tomar cualquier valor se expresa diciendo que λ es un *parámetro*. Como λ puede tomar infinitos valores, el sistema tiene infinitas soluciones. A veces podemos necesitar una solución particular del sistema. Para encontrarla basta elegir valores concretos para los parámetros de los que dependa la solución general. Por ejemplo, si hacemos $\lambda = 3$ obtenemos la solución particular $(x, y, z) = (3, -1, 3)$. ■

Sistemas incompatibles También puede suceder que un sistema de ecuaciones lineales no tenga solución. El método de Gauss nos permite reconocer si se da el caso:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \\ 4x + y + z = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - y + 3z = 2 \\ 3y - 5z = -3 \\ 3y - 5z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - y + 3z = 2 \\ 3y - 5z = -3 \\ 0 = 5 \end{array} \right\}$$

Como la última ecuación es imposible, concluimos que el sistema no tiene solución. (En realidad esto se ve ya al comparar las dos últimas ecuaciones del sistema del centro.) ■

Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales Los casos anteriores agotan todas las posibilidades para un sistema de ecuaciones lineales: o bien tiene una única solución, y entonces se dice que es *compatible determinado*, o bien tiene infinitas soluciones, que quedarán en función de uno o más parámetros, en cuyo caso se dice que es *compatible indeterminado*, o bien no tiene solución, en cuyo caso se dice que es *incompatible*.

La regla de Cramer La regla de Cramer es otro método para resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante determinantes. El caso principal es el de un sistema con el mismo número de ecuaciones que incógnitas cuya matriz de coeficientes tiene determinante no nulo. Por ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + 3z = 6 \\ -x + y + 4z = 3 \end{array} \right\}$$

Según la regla de Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-60}{-30} = 2.$$

El denominador es el determinante de la matriz de coeficientes del sistema, mientras que el numerador resulta de sustituir en esta matriz la columna de los coeficientes de x por la columna de los términos independientes. Si sustituimos los coeficientes de y obtenemos el valor de y :

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{-30} = \frac{-30}{-30} = 1.$$

Igualmente:

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 6 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-30} = \frac{-30}{-30} = 1.$$

La solución es, por tanto, $(x, y, z) = (2, 1, 1)$.

Si tenemos menos ecuaciones que incógnitas también podemos aplicar la regla de Cramer del modo siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} x + y - 2z + w = 4 \\ 2x + 2y + z + 2w = 3 \end{array} \right\}$$

Buscamos una submatriz 2×2 de la matriz de coeficientes con determinante no nulo. Vemos que el formado por las dos primeras columnas no sirve, pero el formado por la segunda y la tercera sí:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

Entonces dejamos la segunda y la tercera columna a la izquierda y pasamos las restantes a la derecha:

$$\left. \begin{array}{l} y - 2z = 4 - x - w \\ 2y + z = 3 - 2x - 2w \end{array} \right\}$$

Las variables de la derecha las convertimos en parámetros: $x = \lambda$, $w = \mu$, y las de la izquierda las calculamos por la regla de Cramer:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 - \lambda - \mu & -2 \\ 3 - 2\lambda - 2\mu & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{5}(4 - \lambda - \mu + 6 - 4\lambda - 4\mu) = 2 - \lambda - \mu,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 - \lambda - \mu \\ 2 & 3 - 2\lambda - 2\mu \end{vmatrix}}{5} = \frac{1}{5}(3 - 2\lambda - 2\mu - 8 + 2\lambda + 2\mu) = -1.$$

La solución es $(x, y, z, w) = (\lambda, 2 - \lambda - \mu, -1, \mu)$, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

A.4 Matrices inversas

El cálculo de matrices inversas es una herramienta muy útil para trabajar con sistemas de ecuaciones lineales:

Definición Si A es una matriz cuadrada $n \times n$, se llama *matriz inversa* de A a la matriz A^{-1} de orden $n \times n$ que cumple $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$, donde I_n es la matriz identidad $n \times n$.

Es importante tener presente que no todas las matrices cuadradas tienen inversa, pero cuando existe, la matriz inversa es única, es decir, una misma matriz no puede tener dos matrices inversas distintas. Es fácil saber cuándo existe la matriz inversa:

Teorema Una matriz cuadrada tiene inversa si y sólo si su determinante es diferente de 0.

Para calcular la inversas de una matriz calculamos primero la llamada *matriz adjunta*:

Definición La *matriz adjunta* de una matriz cuadrada A es la matriz que tiene en la posición (i, j) el valor $(-1)^{i+j}$ multiplicado por el determinante de la matriz que resulta de tachar la fila i y la columna j de A . La representaremos por $\tilde{A}$.

Teorema Si una matriz cuadrada A tiene determinante no nulo, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}^t.$$

Ejemplo Vamos a calcular la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

En primer lugar calculamos $|A| = 2$ (si hubiera dado 0, no habría inversa). La matriz adjunta es

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

Ahora calculamos la traspuesta:

$$\tilde{A}^t = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -7 \end{pmatrix},$$

y por último dividimos entre el determinante:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 2 & -1 & -7/2 \end{pmatrix}.$$

Podemos comprobar que el resultado es correcto multiplicando:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 2 & -1 & -7/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

■

La relación entre las matrices inversas y los sistemas de ecuaciones lineales se basa en el hecho de que todo sistema admite una expresión matricial de la forma

$$A\bar{x}^t = \bar{b}^t.$$

Si el sistema tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas (con lo que la matriz A es cuadrada) y $|A| \neq 0$, entonces el sistema es compatible determinado, ya que podemos calcular su solución de la forma siguiente:

$$A\bar{x}^t = \bar{b}^t \Rightarrow A^{-1}A\bar{x}^t = A^{-1}\bar{b}^t \Rightarrow \bar{x}^t = A^{-1}\bar{b}^t.$$

En definitiva:

Si la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales $A\bar{x}^t = \bar{b}^t$ es cuadrada y tiene determinante no nulo, entonces su solución viene dada por $\bar{x}^t = A^{-1}\bar{b}^t$.

Ejemplo Vamos a resolver matricialmente el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} x + 3y + z &= 5 \\ 2x - y + z &= 3 \\ 2y &= 8 \end{aligned} \right\}.$$

Matricialmente es

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

La matriz A tiene determinante no nulo. De hecho, hemos calculado su inversa en el ejemplo anterior. Por lo tanto, la solución es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\bar{b}^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 2 & -1 & -7/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ -21 \end{pmatrix}.$$

La solución es, pues, $(x, y, z) = (14, 4, -21)$. ■

Si un sistema tiene más incógnitas que ecuaciones, todavía podemos resolverlo matricialmente si la matriz de coeficientes A contiene una submatriz cuadrada B (del mismo número de filas) con determinante no nulo. Diremos que tal submatriz B es una *matriz básica* del sistema. Entonces podemos dividir la matriz $A = (B, N)$, donde B es la matriz básica y N el resto, la *matriz no básica*. Correspondientemente, podemos dividir el vector de incógnitas $\bar{x} = (\bar{x}_B, \bar{x}_N)$, donde el vector básico $\bar{x}_B$ contiene las incógnitas correspondientes a las columnas de la matriz básica y el vector no básico $\bar{x}_N$ contiene las restantes. Entonces:

$$\begin{aligned} (B, N) \begin{pmatrix} \bar{x}_B^t \\ \bar{x}_N^t \end{pmatrix} &= \bar{b}^t \Rightarrow B^{-1}(B, N) \begin{pmatrix} \bar{x}_B^t \\ \bar{x}_N^t \end{pmatrix} = B^{-1}\bar{b}^t \Rightarrow (I, B^{-1}N) \begin{pmatrix} \bar{x}_B^t \\ \bar{x}_N^t \end{pmatrix} = B^{-1}\bar{b}^t \\ &\Rightarrow \bar{x}_B^t + B^{-1}N\bar{x}_N^t = B^{-1}\bar{b}^t \Rightarrow \bar{x}_B^t = B^{-1}\bar{b}^t - B^{-1}N\bar{x}_N^t. \end{aligned}$$

La fórmula resultante no es cómoda de recordar, pero muestra que las soluciones del sistema pueden expresarse tomando como parámetros precisamente las variables no básicas. En resumen:

Si la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales $A\bar{x}^t = \bar{b}^t$ contiene una submatriz cuadrada B con el mismo número de filas y determinante no nulo (una matriz básica) el sistema puede resolverse multiplicando por B^{-1} y tomando como parámetros las variables no básicas.

Ejemplo Vamos a resolver matricialmente el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} x + 3y - z + 2w &= 3 \\ 2x + y + 5z + w &= 5 \end{aligned} \right\}.$$

Matricialmente es

$$\begin{pmatrix} x & y & z & w \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Hemos de elegir una matriz básica B de orden 2×2 con determinante no nulo. Por ejemplo, podemos tomar

$$B = \begin{pmatrix} y & w \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = 1 \neq 0.$$

Entonces, las variables básicas son (y, w) y las no básicas (x, z) . Sabemos que podemos tomar como parámetros $(x, z) = (\lambda, \mu)$. Para resolver multiplicamos por

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

En la práctica conviene trabajar con la matriz ampliada

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 5 \end{array} \right).$$

Así:

$$B^{-1}\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & \big| & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & \big| & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -11 & 0 & \big| & -7 \\ 5 & 0 & 16 & 1 & \big| & 12 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz corresponde al sistema

$$\left. \begin{aligned} 3x + y - 11z &= -7 \\ 5x + 16z + w &= 12 \end{aligned} \right\},$$

que ya está listo para despejar las variables básicas (y, w) en términos de los parámetros $(x, z) = (\lambda, \mu)$:

$$y = -7 - 3\lambda + 11\mu, \quad w = 12 - 5\lambda - \mu.$$

La solución es

$$(x, y, z, w) = (\lambda, -7 - 3\lambda + 11\mu, \mu, 12 - 5\lambda - \mu), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

■

Apéndice B

Tablas

Tabla de derivadas más usuales

FUNCIÓN	DERIVADA
$y = f(x)^m, \quad m \in \mathbb{R}$	$y' = m f(x)^{m-1} f'(x)$
$y = \ln f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
$y = a^{f(x)}$	$y' = f'(x) a^{f(x)} \ln(a)$
$y = \operatorname{sen} f(x)$	$y' = f'(x) \cos f(x)$
$y = \cos f(x)$	$y' = -f'(x) \operatorname{sen} f(x)$
$y = \tan f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} = f'(x)(1 + \tan^2 f(x))$
$y = \operatorname{cotan} f(x)$	$y' = \frac{-f'(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)} = -f'(x)(1 + \operatorname{cotan}^2 f(x))$
$y = \arcsen f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}$
$y = \arccos f(x)$	$y' = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}$
$y = \arctan f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{1 + f(x)^2}$
$y = \operatorname{arc cotan} f(x)$	$y' = \frac{-f'(x)}{1 + f(x)^2}$

Tabla de primitivas inmediatas

$$\int f(x)^n f'(x) dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C; \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$$

$$\int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{1}{\ln a} a^{f(x)} + C; \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

$$\int f'(x) \operatorname{sen} f(x) dx = -\cos f(x) + C$$

$$\int f'(x) \cos f(x) dx = \operatorname{sen} f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \tan f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)} dx = -\operatorname{cotan} f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} dx = \operatorname{arcsen} f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} dx = \operatorname{arctan} f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C$$

Un caso particular de la regla 1 que conviene separar es $n = 1$, con lo que tenemos:

$$\int f(x) f'(x) dx = \frac{f(x)^2}{2} + C.$$

Apéndice C

Derivadas e integrales

1. Calcula las derivadas de las funciones siguientes:

- (a) $f(x, y, z) = x^3y - 2yz + 3z^4 - z + 1$,
- (b) $f(x, y) = x^2e^{y^4x}$,
- (c) $f(x, y) = \sqrt{x^5y}$,
- (d) $f(x, y, z) = x^2 \cos^5(y/z)$,
- (e) $f(x, y) = 10 \ln^3(xy^5)$,
- (f) $f(x, y, z) = \frac{2x+3y}{2y-2z}$,
- (g) $f(x, y, z) = \ln(x + y + z)$,
- (h) $f(x, y) = x\sqrt{y}$,
- (i) $f(p, q, r) = p^{qr} + 2$,
- (j) $C(C_0, i, t) = C_0(1 + i)^t$,
- (k) $u(x, y) = 2^{xy} \cos x$,
- (l) $d(m, n) = \ln(m - 3n)$,
- (m) $K(x, y) = \frac{3x}{(x+y)^5}$,
- (n) $g(s, t, u) = \frac{st}{\sqrt{s^2+u}}$,
- (o) $h(x, u) = x^5 \operatorname{sen}^4 u^3$,
- (p) $M(x) = 6x \cos x^5$,
- (q) $S(k, l) = \sqrt[3]{k^2 - 2l + kl}$,
- (r) $r(x, y, z) = z^4 \ln\left(2 - \frac{x}{y}\right)$,
- (s) $T(c, d) = \sqrt{c-d} e^{c+d}$,
- (t) $m(a, b) = \sqrt[5]{ae^b}$,
- (u) $y(f, g) = (f^2 + 2g - 1)\sqrt{f}$,
- (v) $q(x, t, y) = x^2(t + 1) \cos(x^5/y)$,
- (w) $L(a, b) = \frac{1}{b \ln a}$,
- (x) $f(x, y) = x$,
- (y) $f(u, v, w) = u(v + 1)(w - 5)$,
- (z) $K(p, q, r) = \frac{p}{\sqrt[3]{q-r}}$.

2. Calcula las derivadas de las funciones siguientes:

- (a) $f(x, y) = \tan(xy^5)$,
- (b) $g(x, y, z) = x^2 \tan^4(y - 2z)$,
- (c) $f(x, y) = x \arctan y$,
- (d) $f(u, v) = \operatorname{arcsen}^4(uv^5)$,
- (e) $f(x, y, z) = \frac{\arctan(y-z)}{xy^5}$,
- (f) $g(u, v) = \operatorname{arcsen} u \arccos v$,
- (g) $r(s, t) = t^2 \ln \tan s + t - s$,
- (h) $u(p, q, r) = \frac{p \tan(pq)}{qr}$.

3. Calcula:

- (a) $\int (x^2 - 3x^5) dx$,
- (b) $\int \left(4x^2 - x + \frac{x^4}{2}\right) dx$
- (c) $\int 5 dx$,
- (d) $\int x^3 e^{x^4} dx$,
- (e) $\int x\sqrt{x} dx$,
- (f) $\int \operatorname{sen}(x - 2) dx$,
- (g) $\int x \cos(x^2 - 2) dx$,
- (h) $\int (x^2 + 1) \operatorname{sen}(x^3 + 3x) dx$,
- (i) $\int \sqrt{2-x} dx$,
- (j) $\int (3x + 8)^8 dx$,
- (k) $\int \frac{dx}{(x-2)^3}$,

- (l) $\int \frac{dx}{x-2},$
- (m) $\int (x-2)(x+3) dx,$
- (n) $\int e^{-x/2} dx,$
- (o) $\int xe^{-x^2} dx,$
- (p) $\int 2^{\cos x} \operatorname{sen} x dx,$
- (q) $\int \frac{5x^3 dx}{\sqrt{1-x^4}},$
- (r) $\int \frac{5x dx}{\sqrt{1-x^4}},$
- (s) $\int \sqrt[4]{x+2} dx,$
- (t) $\int x \sqrt[4]{x^2-2} dx.$

4. Calcule:

- (a) $\int \operatorname{sen} x \cos x dx,$
- (b) $\int \frac{x dx}{1+x^2},$
- (c) $\int \frac{dx}{1+x^2},$
- (d) $\int \frac{dx}{x \ln x},$
- (e) $\int \frac{e^x dx}{1+e^x},$
- (f) $\int \ln^5 x (1/x) dx,$
- (g) $\int \frac{\ln x}{x} dx,$
- (h) $\int \frac{e^x}{\operatorname{sen}^2 e^x} dx,$
- (i) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{3+2 \cos x} dx,$
- (j) $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}},$
- (k) $\int \frac{e^{2x} dx}{1+e^{2x}},$
- (l) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\cos x}} dx$
- (m) $\int 2^x \operatorname{sen} 2^x dx,$
- (n) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$

5. Calcule:

- (a) $\int xe^x dx,$
- (b) $\int (2x-3) \operatorname{sen}(x+1) dx,$
- (c) $\int xe^{x^2} dx,$
- (d) $\int (x+1)2^{x-1} dx,$
- (e) $\int 6x \sqrt[5]{2x^2+3} dx,$
- (f) $\int \frac{2x^3+1}{x^4+2x} dx,$
- (g) $\int \sqrt[5]{x+1} dx,$
- (h) $\int x 2^{x^2} dx,$
- (i) $\int x^3 3^{x^2} dx,$
- (j) $\int \ln x dx,$
- (k) $\int x \ln x dx,$
- (l) $\int x^5 \ln x dx,$
- (m) $\int \arctan x dx$
- (n) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx,$
- (o) $\int \tan x dx.$

6. Calcule:

- (a) $\int \frac{x^3-3x+2}{x} dx,$
- (b) $\int \frac{\operatorname{sen} x + \cos^2 x}{\cos x} dx,$
- (c) $\int \sqrt{x}(x^2+3) dx,$
- (d) $\int \frac{5x+6}{1+4x^2} dx,$
- (e) $\int e^x(1+e^{-x}) dx.$