MATEMÁTICAS I Grupos F, H 20-1-2011

APELLIDOS: ______________________________ NOMBRE: ____________________

**En cada pregunta no sólo se valorará la corrección del procedimiento y el resultado, sino también, en la misma medida, la corrección en la expresión de los cálculos e interpretaciones, así como la constancia explícita de todos los pasos intermedios necesarios.**

1. La función de producción de una empresa es $Q(K,L,M) = K\sqrt{L} + \sqrt{M^3}$, donde $K$, $L$, $M$ son las cantidades empleadas de tres factores de producción. Actualmente las cantidades empleadas son $(K,L,M) = (90,81,100)$.

   (a) **(0.25 ptos.)** Estudia si la función $Q$ es homogénea y, en caso afirmativo, indica su grado de homogeneidad.

   (b) **(0.25 ptos.)** Calcula e interpreta la derivada $\left.\dfrac{\partial Q}{\partial L}\right|_{(90,81,100)}$.

   (c) **(0.3 ptos.)** Calcula de forma aproximada mediante el cálculo diferencial el incremento de producción que se obtendría si se emplearan 86 unidades de los dos primeros factores y la cantidad del tercero se redujera en un 5%.

   (d) **(0.25 ptos.)** Calcula la derivada que indica cómo variará la producción marginal respecto del segundo factor de producción si, a partir de las condiciones actuales, aumenta la cantidad empleada del primero. Indica en particular si el resultado sería un aumento o una disminución.

   (e) **(0.25 ptos.)** Escribe la ecuación de la isocuanta (curva de nivel de producción) correspondiente a la producción actual e interprétala.

   (f) **(0.3 ptos.)** Calcula la función implícita $L(K,M)$ que define la curva de nivel anterior e indica su interpretación económica.

   (g) **(0.5 ptos.)** Calcula $\left.\dfrac{\partial L}{\partial K}\right|_{(90,100)}$ derivando implícitamente la isocuanta e interpreta el resultado.

2. Considera las funciones

$$f(x,y,z) = e^{x^2-4}\ln y + z^5, \qquad y(r,s) = \frac{2\,r^s - 1}{r}, \qquad z(r,s) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{s-3}{r^3}\right).$$

   (a) **(0.5 ptos.)** Calcula el vector gradiente y la matriz hessiana de $f(x,y,z)$ en el punto $(-2,1,-1)$.

   (b) **(0.4 ptos.)** Calcula la inversa de la matriz hessiana del apartado anterior.

   (c) **(0.2 ptos.)** Calcula $df(x,y,z)$ y $df(-2,1,-1)$.

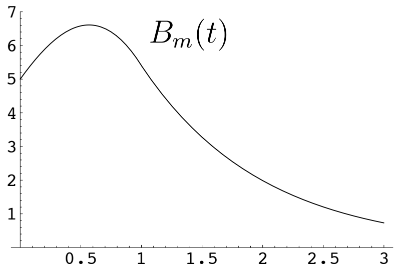
   (d) **(0.2 ptos.)** Calcula la dirección de máximo crecimiento de $f(x,y,z)$ en el punto $(-2,1,-1)$.

   (e) **(0.2 ptos.)** Calcula la función compuesta indicando su nombre.

   (f) **(0.25 ptos.)** Calcula el dominio de la función compuesta.

   (g) **(0.5 ptos.)** Calcula $\dfrac{\partial f}{\partial r}$ en el punto $(x,r,s) = (2,1,3)$ derivando mediante la regla de la cadena.

3. Una empresa planea sacar al mercado un producto en $t = 0$, del cual espera obtener un beneficio marginal dado por la función




$$B_m(t) = \begin{cases} 5(t+1)\cos t & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 5.4e^{1-t} & \text{si } t > 1, \end{cases}$$

donde $t$ es el tiempo en años.

(a) **(0.5 ptos.)** Calcula el beneficio medio que proporcionará el producto durante los dos primeros años.

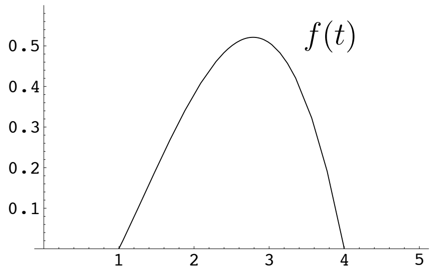
(b) **(0.25 ptos.)** Calcula el beneficio acumulado por la empresa al cabo de dos años teniendo en cuenta que, para lanzar el producto, realizó una inversión inicial, de modo que $B(0) = -2$ u.m.

(c) **(0.2 ptos.)** Razona a partir de la gráfica si en $t = 2$ el beneficio acumulado estaba aumentando o disminuyendo.

4. **(0.5 ptos.)** Calcula:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-\sqrt{x}} \operatorname{sen} e^{-\sqrt{x}} dx$$

5. Una empresa compra para sus oficinas ordenadores que tienen un año de garantía. La variable aleatoria $T$ representa el tiempo (en años) que tarda en renovarlos (bien por avería o por antigüedad transcurridos 4 años), y su función de densidad es




$$f(t) = \begin{cases} \frac{4}{63}(-t^3 + 4t^2 + t - 4) & \text{si } 1 \leq t \leq 4, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) **(0.4 ptos.)** Calcula $\mathrm{P}(0 \leq T \leq 2)$ e interpreta gráficamente el resultado.

(b) **(0.3 ptos.)** Calcula la moda de $T$, es decir, el punto en el que la densidad de probabilidad es máxima.

6. **(0.5 ptos.)** El precio de un producto es actualmente $p = 8.7$ y su demanda es de 10 000 u.p. Sabiendo que la elasticidad de la demanda es $E(p) = -3\ln^{-2} p$, calcula la demanda que cabría esperar si el precio pasara a ser de 15 u.m.

7. **(0.5 ptos.)** Define el concepto de derivada parcial y deduce de la definición su relación con la aproximación de incrementos.

1. (a) $Q(K,L,M) = K\sqrt{L} + \sqrt{M^3}$

$$Q(\lambda K, \lambda L, \lambda M) = \lambda K(\lambda L)^{1/2} + (\lambda M)^{3/2} = \lambda K \lambda^{1/2} L^{1/2} + \lambda^{3/2} M^{3/2}$$

$$= \lambda^{3/2} K L^{1/2} + \lambda^{3/2} M^{3/2} = \lambda^{3/2}(K L^{1/2} + M^{3/2}) = \lambda^{3/2} Q(K,L,M)$$

luego $Q$ es homogénea de grado 3/2.

(b)

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{K}{2\sqrt{L}} \Rightarrow \left.\frac{\partial Q}{\partial L}\right|_{(90,81,100)} = \frac{90}{18} = 5.$$

Por cada unidad adicional que la empresa emplee del segundo factor de producción la producción aumentará en 5 unidades, partiendo de que actualmente se emplean 90 unidades del primer factor, 81 del segundo y 100 del tercero, y suponiendo que no se modifican las cantidades empleadas del primer y tercer factor.

(c) $\Delta Q(90,81,100)(-4,5,-5) \approx dQ(90,81,100)(-4,5,-5)$

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial K}\, dK + \frac{\partial Q}{\partial L}\, dL + \frac{\partial Q}{\partial M}\, dM$$

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \sqrt{L} \Rightarrow \left.\frac{\partial Q}{\partial K}\right|_{(90,81,100)} = 9,$$

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial L}\right|_{(90,81,100)} = 5 \text{ (calculada antes)},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial M} = \frac{3}{2} M^{1/2} \Rightarrow \left.\frac{\partial Q}{\partial M}\right|_{(90,81,100)} = 15,$$

luego

$$\Delta Q(90,81,100)(-4,5,-5) \approx 9 \cdot (-4) + 5 \cdot 5 + 15 \cdot (-5) = -86.$$

(d) La producción marginal respecto del segundo factor es

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{K}{2\sqrt{L}}$$

y la derivada pedida es

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L \partial K} = \frac{1}{2\sqrt{L}} \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 Q}{\partial L \partial K}\right|_{(90,81,100)} = \frac{1}{18} > 0$$

Como es positiva, al aumentar la cantidad empleada del primer factor de producción, la producción marginal respecto del segundo aumentará.

(e) La producción actual es $Q(90, 81, 100) = 1\,810$ y la isocuanta es

$$K\sqrt{L} + \sqrt{M^3} = 1\,810$$

Esta ecuación determina todas las combinaciones posibles de los tres factores de producción que dan lugar a una producción igual a la actual (es decir, de 1 810 unidades de producto).

(f)

$$K\sqrt{L} = 1\,810 - \sqrt{M^3} \Rightarrow \sqrt{L} = \frac{1\,810 - \sqrt{M^3}}{K} \Rightarrow L(K, M) = \left(\frac{1\,810 - \sqrt{M^3}}{K}\right)^2.$$

Esta función determina la cantidad que hay que emplear del segundo factor, si se emplean cantidades $K$ y $M$ de los otros dos factores, para que la producción sea de 1 810 unidades de producto.

(g)

$$\frac{\partial Q(K, M)}{\partial K} = \frac{\partial Q}{\partial K} + \frac{\partial Q}{\partial L}\frac{\partial L}{\partial K} = 0$$

Sabemos que $L(90, 100) = 81$, porque 81 es el valor de $L$ que hace que se cumpla la ecuación cuando $(K, L) = (90, 100)$. Por lo tanto,

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial K}\right|_{(90,81,100)} + \left.\frac{\partial Q}{\partial L}\right|_{(90,81,100)} \left.\frac{\partial L}{\partial K}\right|_{(90,100)} = 0$$

Las derivadas de $Q$ las hemos calculado antes:

$$9 + 5 \left.\frac{\partial L}{\partial K}\right|_{(90,100)} = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial L}{\partial K}\right|_{(90,100)} = -\frac{9}{5} = -1.8.$$

Esto significa que por cada unidad adicional que se emplee del primer factor de producción, serán necesarias 1.8 unidades menos del segundo factor para mantener la producción actual de 1 810 unidades de producto, partiendo de que las cantidades empleadas actualmente del primer y tercer factor son $(K, M) = (90, 100)$ y suponiendo que no se modifica la cantidad empleada del tercero.

2. (a) $f(x, y, z) = e^{x^2-4} \ln y + z^5$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (e^{x^2-4} 2x \ln y, \frac{e^{x^2-4}}{y}, 5z^4) \Rightarrow \nabla f(-2, 1, -1) = (0, 1, 5).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{x^2-4} 2x 2x \ln y + e^{x^2-4} 2 \ln y \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(-2,1,-1)} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{e^{x^2-4}\, 2x}{y} \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(-2,1,-1)} = -4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^{x^2-4}y^{-2} \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(-2,1,-1)} = -1, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 20z^3 \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right|_{(-2,1,-1)} = -20.$$

$$Hf(-2,1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix}$$

(b) $|H| = 320 \neq 0$

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -20 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -20 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -20 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -20 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -80 & 0 \\ -80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{H}^t = \begin{pmatrix} 20 & -80 & 0 \\ -80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix}, \qquad H^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{20}{320} & -\frac{80}{320} & 0 \\ -\frac{80}{320} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{320} \end{pmatrix}$$

(c)

$$df(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz = e^{x^2-4}2x\ln y\,dx + \frac{e^{x^2-4}}{y}\,dy + 5z^4\,dz$$

$$df(-2,1,-1) = dy + 5dz \text{ (los cálculos están hechos antes).}$$

(d) Ya hemos calculado $\nabla f(-2,1,-1) = (0,1,5)$

$$\|\nabla f(-2,1,-1)\| = \sqrt{0^2+1^2+5^2} = \sqrt{26} \Rightarrow \text{DMC} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{5}{\sqrt{26}}\right).$$

(e)

$$f(x,y,z) = e^{x^2-4}\ln y + z^5, \qquad y(r,s) = \frac{2\,r^s - 1}{r}, \qquad z(r,s) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{s-3}{r^3}\right).$$

La función compuesta es

$$f(x,r,s) = e^{x^2-4}\ln\frac{2\,r^s-1}{r} + \operatorname{sen}^{10}\left(\frac{s-3}{r^3}\right)$$

(f)
- El denominador de una fracción ha de ser $\neq 0$: $r \neq 0$.
- El argumento de un logaritmo ha de ser $> 0$: $\frac{2r^s-1}{r} > 0$.
- La base de una potencia de exponente variable ha de ser $> 0$: $r > 0$.

Por lo tanto, el dominio de la función compuesta es

$$D = \{(x, r, s) \in \mathbb{R}^3 \mid r > 0, \frac{2r^s - 1}{r} > 0\}.$$

(g)

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

Como $y(1,3) = 1$, $z(1,3) = 0$, tenemos que

$$\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{(2,1,3)} = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(2,1,0)} \left.\frac{\partial y}{\partial r}\right|_{(1,3)} + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(2,1,0)} \left.\frac{\partial z}{\partial r}\right|_{(1,3)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{2sr^{s-1}r - (2r^s - 1)}{r^2} \Rightarrow \left.\frac{\partial y}{\partial r}\right|_{(1,3)} = 5$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = 2\,\text{sen}\left(\frac{s-3}{r^3}\right)\cos\left(\frac{s-3}{r^3}\right)(s-3)(-3)r^{-4} \Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial r}\right|_{(1,3)} = 0.$$

Por lo tanto:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{(2,1,3)} = 1 \cdot 5 + 0 = 5.$$

3. (a)

$$\int_0^2 B_m(t)\,dt = \int_0^1 5(t+1)\cos t\,dt + \int_1^2 5.4e^{1-t}\,dt$$

$$\int 5(t+1)\cos t\,dt = 5(t+1)\,\text{sen}\,t - \int \text{sen}\,t\,5\,dt = 5(t+1)\,\text{sen}\,t + 5\cos t + c$$

$u = 5(t+1) \quad du = 5\,dt$

$dv = \cos t\,dt \qquad v = \int \cos t\,dt = \text{sen}\,t$

luego

$$\int_0^1 5(t+1)\cos t\,dt = [5(t+1)\,\text{sen}\,t + 5\cos t]_0^1 = 10\,\text{sen}\,1 + 5\cos 1 - 5 = 6.12$$

$$\int_1^2 5.4e^{1-t}\,dt = -5.4\int_1^2 -e^{1-t}\,dt = -5.4[e^{1-t}]_1^2 = -5.4(e^{-1} - 1) = 3.41,$$

donde hemos usado la regla de la exponencial con $f(t) = 1 - t, f'(t) = -1$.

$$\int_0^2 B_m(t)\,dt = 6.12 + 3.41 = 9.53$$

El beneficio medio es

$$B_{Me} = \frac{\displaystyle\int_0^2 B_m(t)\,dt}{2-0} = \frac{9.53}{2} = 4.76$$

(b)

$$B(2) = -2 + \int_0^2 B_m(t)\,dt = -2 + 9.53 = 7.53$$

(c) En la gráfica vemos que $B_m(2) > 0$, y si el beneficio marginal es positivo, el beneficio es creciente, es decir, el beneficio está aumentando con el tiempo.

4.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-\sqrt{x}} \operatorname{sen} e^{-\sqrt{x}} dx$$

Se trata de una integral impropia en $+\infty$ y en $x = 0$, pues en este punto se anula el denominador y la función no está acotada. Por lo tanto la partimos:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-\sqrt{x}} \operatorname{sen} e^{-\sqrt{x}} dx = \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-\sqrt{x}} \operatorname{sen} e^{-\sqrt{x}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-\sqrt{x}} \operatorname{sen} e^{-\sqrt{x}} dx$$

Calculamos la integral indefinida mediante la regla del seno, con $f(x) = e^{-\sqrt{x}}$ y $f'(x) = e^{-\sqrt{x}} \frac{-1}{2\sqrt{x}}$ :

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-\sqrt{x}} \operatorname{sen} e^{-\sqrt{x}} dx = -2 \int \frac{-1}{2\sqrt{x}}\, e^{-\sqrt{x}} \operatorname{sen} e^{-\sqrt{x}} dx = 2\cos e^{-\sqrt{x}} + c$$

$$\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-\sqrt{x}} \operatorname{sen} e^{-\sqrt{x}} dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-\sqrt{x}} \operatorname{sen} e^{-\sqrt{x}} dx = \lim_{t\to 0^+} \left[2\cos e^{-\sqrt{x}}\right]_t^1$$

$$= \lim_{t\to 0^+} 2\cos e^{-1} - 2\cos e^{-\sqrt{t}} = 2\cos e^{-1} - 2\cos 1 = 0.786$$

porque $\sqrt{t} \to 0$, $-\sqrt{t} \to 0$, $e^{-\sqrt{t}} \to 1$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-\sqrt{x}} \operatorname{sen} e^{-\sqrt{x}} dx = \lim_{t\to +\infty} \int_1^{t} \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-\sqrt{x}} \operatorname{sen} e^{-\sqrt{x}} dx = \lim_{t\to +\infty} \left[2\cos e^{-\sqrt{x}}\right]_1^t$$

$$= \lim_{t\to +\infty} 2\cos e^{-\sqrt{t}} - 2\cos e^{-1} = 2 - 2\cos e^{-1} = 0.134$$

porque $\sqrt{t} \to +\infty$, $-\sqrt{t} \to -\infty$, $e^{-\sqrt{t}} \to 0$, $\cos e^{-\sqrt{t}} \to \cos 0 = 1$.

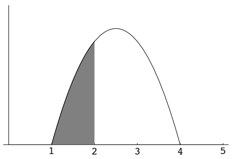
Por lo tanto:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-\sqrt{x}} \operatorname{sen} e^{-\sqrt{x}} dx = 0.786 + 0.134 = 0.92.$$

5. $$f(t) = \begin{cases} \frac{4}{63}(-t^3+4t^2+t-4) & \text{si } 1 \leq t \leq 4, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) $$P(0 \leq T \leq 2) = \int_0^2 f(t)\,dt = \int_1^2 \frac{4}{63}(-t^3+4t^2+t-4)\,dt$$
$$= \frac{4}{63}\left[-\frac{t^4}{4}+4\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}-4t\right]_1^2 = \frac{4}{63}\left(-4+\frac{32}{3}+2-8+\frac{1}{4}-\frac{4}{3}-\frac{1}{2}+4\right) \approx 0.2$$

Gráficamente es el área sombreada en la figura:




(b) El punto que buscamos cumple

$$f'(t) = \frac{4}{63}(-3t^2+8t+1) = 0 \Rightarrow -3t^2+8t+1 = 0 \Rightarrow t = \frac{-8 \pm \sqrt{64+12}}{-6} = \begin{cases} -0.12 \\ 2.79 \end{cases}$$

Descartamos el valor negativo y concluimos que la moda es $t = 2.79$, lo cual concuerda con lo que muestra la gráfica.

6. Tenemos que

$$E = \frac{p}{D}\frac{dD}{dp} = -3\ln^{-2} p \Rightarrow \frac{dD}{D} = -3\frac{1}{p}\ln^{-2} p \Rightarrow \int \frac{dD}{D} = -3\int \frac{1}{p}\ln^{-2} p$$

$$\ln D = -3\frac{\ln^{-1} p}{-1} + c = \frac{3}{\ln p} + c \Rightarrow D = e^{3/\ln p + c} = ce^{3/\ln p}.$$

Como $D(8.7) = 10\,000$, tenemos que $10\,000 = ce^{3/\ln 8.7} = 4c \Rightarrow c = \frac{10\,000}{4} = 2\,500$.
Así pues: $D(p) = 2\,500e^{3/\ln p}$. Si el precio pasa a ser de 15 u.m. la demanda será

$$D(15) = 2\,500e^{3/\ln 15} = 7\,569 \text{ u.p.}$$

7. Una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida en un dominio abierto $D$ es *derivable* respecto de la variable $x_i$ en un punto $\bar{p} \in D$ si existe y es finito el límite

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\bar{p}} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} f(\bar{p})(\Delta x_i)}{\Delta x_i}.$$

Esto significa que, si $\Delta x_i \approx 0$, entonces

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\bar{p}} \approx \frac{\Delta_{x_i} f(\bar{p})(\Delta x_i)}{\Delta x_i},$$

luego

$$\Delta_{x_i} f(\bar{p})(\Delta x_i) \approx \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\bar{p}} \cdot \Delta x_i.$$