

APELLIDOS: _____ NOMBRE: _____

1. Considera las funciones

$$f(x, y, z) = e^{x^2-4} \ln y + z^5, \quad y(r, s) = \frac{2r^s - 1}{r}, \quad z(r, s) = \sin\left(\frac{s-3}{r^3}\right).$$

- (a) **(1 pto.)** Calcula el vector gradiente y la matriz hessiana de $f(x, y, z)$.
- (b) **(0.25 ptos.)** Calcula $df(x, y, z)$ y $df(2, 1, 1)$.
- (c) **(0.25 ptos.)** Calcula la dirección de máximo crecimiento de $f(x, y, z)$ en el punto $(2, 1, 1)$.
- (d) **(0.25 ptos.)** Calcula la función compuesta $f(x, r, s)$.
- (e) **(0.5 ptos.)** Calcula el dominio de la función compuesta.
- (f) **(0.75 ptos.)** Calcula $\left. \frac{\partial f}{\partial r} \right|_{(2,1,3)}$ derivando mediante la regla de la cadena.

2. La función de producción de una empresa es $Q(K, L, M) = K\sqrt{L} + \sqrt{M^3}$, donde K, L, M son las cantidades empleadas de tres factores de producción. Actualmente las cantidades empleadas son $(K, L, M) = (90, 81, 100)$.

- (a) **(0.5 ptos.)** Estudia si la función Q es homogénea y, en caso afirmativo, indica su grado de homogeneidad.
- (b) **(0.25 ptos.)** Calcula e interpreta la derivada $\left. \frac{\partial Q}{\partial L} \right|_{(90,81,100)}$.
- (c) **(0.25 ptos.)** Calcula de forma aproximada el incremento de producción que se obtendría si se emplearan 78 unidades del segundo factor de producción.
- (d) **(0.25 ptos.)** Escribe la ecuación de la curva de nivel de producción correspondiente a la producción actual e interprétala.
- (e) **(0.5 ptos.)** Calcula explícitamente, a partir de la ecuación del apartado anterior, la función $L(K, M)$ e indica su interpretación económica.
- (f) **(0.75 ptos.)** Calcula $\left. \frac{\partial L}{\partial K} \right|_{(90,100)}$ derivando implícitamente. Interpreta el resultado.

3. **(0.75 ptos.)** La función $D(r, p)$ representa la demanda de un artículo, donde r es la renta media de los consumidores y p es el precio. Actualmente la renta es de 15 u.m. y el precio es de 2 u.m., con lo que se consigue una demanda de 1000 u.p. La empresa estima que

$$\left. \frac{\partial D}{\partial p} \right|_{(15,2)} = 100.$$

Calcula la elasticidad de la demanda respecto del precio para los valores actuales. Interpreta el resultado explicando la diferencia con la interpretación de la derivada anterior.

4. **(0.5 ptos.)** Calcula la matriz inversa de la matriz siguiente:

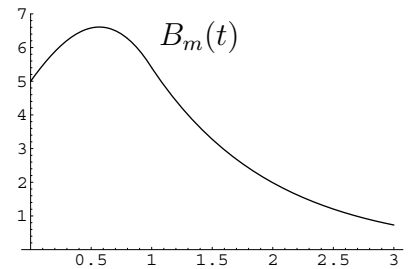
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. **(1 pto.)** Calcula:

$$\int_2^{+\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{x-2}} dx$$

6. Una empresa planea sacar al mercado un producto en $t = 0$, del cual espera obtener un beneficio marginal dado por la función

$$B_m(t) = \begin{cases} 5(t+1) \cos t & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 5.4e^{1-t} & \text{si } t > 1, \end{cases}$$



donde t es el tiempo en años.

- (a) **(1 pto.)** Calcula $\int_0^2 B_m(t) dt$. Interpreta el resultado geométrica y económicamente.
- (b) **(0.25 ptos.)** Calcula el beneficio medio que proporcionará el producto durante los dos primeros años.

7. **(1 pto.)** Resuelve la siguiente ecuación diferencial:

$$y \frac{dy}{dx} = (y^2 - 1) x \quad y(0) = 2$$