Universitat de València | Facultat d'Economia

ade gib fic a+d tur eco

graus

# MATEMÁTICAS II

## APUNTES DE TEORÍA

Carlos Ivorra

# Índice

# Tema 1

# Introducción a la optimización

## 1.1 Conceptos básicos

A modo de primera aproximación, podemos decir que el objetivo de esta asignatura es resolver (ciertas clases de) problemas en los que se busca la mejor decisión posible entre un conjunto de alternativas. Antes de precisar debidamente esta idea, veamos un ejemplo muy simple que nos permita ilustrar los conceptos que vamos a introducir:

**Problema:** *Una empresa desea planificar su producción diaria de dos artículos $A$ y $B$. La empresa puede disponer de un máximo de* 12 *horas diarias de mano de obra. Cada unidad de $A$ requiere* 3 *horas, mientras que cada unidad de $B$ requiere* 2. *Por otro lado, la producción requiere un input $I$ del que la empresa puede disponer como máximo de* 10 *unidades diarias. Cada unidad de $A$ requiere una unidad de $I$, mientras que cada unidad de $B$ requiere* 2 *unidades de $I$. ¿Cuál es la máxima producción diaria que puede conseguir la empresa?, ¿qué cantidad debe producir para ello de cada artículo?*

El primer paso para abordar un problema como éste es *modelizarlo,* es decir, expresarlo en términos matemáticos precisos. Para ello, llamamos $x_1$ a la cantidad diaria producida de $A$ y $x_2$ a la cantidad diaria producida de $B$. El problema es encontrar los mejores valores posibles para $x_1$ y $x_2$.

Ahora observamos que una producción diaria $(x_1, x_2)$ requiere $3x_1 + 2x_2$ horas diarias de mano de obra, así como una cantidad $x_1 + 2x_2$ del input $I$. Por lo tanto sólo nos valdrán las soluciones $(x_1, x_2)$ que satisfagan $3x_1 + 2x_2 \leq 12$ y $x_1 + 2x_2 \leq 10$. Hay otra condición implícita en el enunciado que es fundamental explicitar: la producción no puede ser negativa, luego $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Hay infinitas producciones posibles $(x_1, x_2)$ que satisfacen todos estos requisitos. El problema es encontrar la mejor, es decir, la que hace que la producción total $x_1 + x_2$ sea máxima. La formulación matemática del problema es la siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x_1 + x_2 \\ \text{s.a} & 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & \;\; x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & \;\; x_1,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Se lee: *Maximizar* (la función) $x_1 + x_2$ *sujeta a* (las restricciones) $3x_1 + 2x_2 \leq 12$, etc. ■

**Modelos y sus elementos** Cualquier problema formulado en los términos anteriores recibe el nombre de *problema, programa o modelo de programación matemática.* Más precisamente, para determinar un modelo de programación matemática hemos de especificar:

- Las *variables principales* del modelo, que son las variables para las que queremos encontrar el mejor valor posible. En el problema anterior, las variables principales son $x_1$ y $x_2$.

  Se dice que una variable $x$ es *no negativa* si en el modelo se exige explícitamente que cumpla $x \geq 0$, se dice que es *no positiva* si se exige explícitamente que cumpla $x \leq 0$, y si no se exige nada sobre su signo se dice que es *libre.*

  Se dice que una variable $x$ es *entera* si en el modelo se exige que sólo pueda tomar valores enteros.

  Cuando sólo se admite que tome los valores 0 o 1 se dice que la variable es *binaria* (de modo que una variable binaria es un tipo particular de variable entera). Cuando a una variable no se le pone ninguna condición de este tipo, es decir, sobre la clase de números en la que puede variar, se dice que es una variable *continua.*

  Así, en el ejemplo anterior las dos variables son continuas y no negativas.

- La *función objetivo,* que es la función que queremos maximizar o minimizar. En el problema anterior la función objetivo es $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Notemos que para determinar un modelo no sólo hemos de especificar una función objetivo, sino también si hay que maximizarla o minimizarla. Cuando no queremos especificar si buscamos el máximo o el mínimo, hablamos de *optimizar* la función objetivo. En un problema de maximizar, los óptimos de la función objetivo son sus máximos, mientras que en un problema de minimizar son sus mínimos.

- Las *restricciones,* que son las condiciones que hemos de imponer a las variables para que una solución sea admisible como tal. El problema anterior tiene cuatro restricciones:

  $$3x_1 + 2x_2 \leq 12, \qquad x_1 + 2x_2 \leq 10, \qquad x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0.$$

  En general consideraremos tres tipos de restricciones: *restricciones de menor o igual* ($\leq$), *restricciones de mayor o igual* ($\geq$) y *restricciones de igualdad* ($=$). Por razones técnicas nunca consideraremos desigualdades estrictas ($<, >$).

  Las restricciones $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ se llaman *condiciones de no negatividad* y, más en general, a las restricciones de la forma $x \geq 0$ o $x \leq 0$ se las llama *condiciones de signo.* En ciertos contextos convendrá tratar las condiciones de signo como a las demás restricciones (y entonces decimos que el problema anterior tiene cuatro restricciones), pero en otros contextos convendrá tratarlas aparte (y entonces diremos que el problema anterior tiene dos restricciones más las condiciones de signo).

  A cada restricción de desigualdad se le puede asociar una *variable de holgura,* que representa la diferencia entre el valor que toma la restricción (su miembro izquierdo) y el valor máximo o mínimo que puede tomar (su término independiente). Así, las restricciones

  $$x + 5y \leq 10, \qquad 3x - 2y \geq 3$$

  son equivalentes a

  $$x + 5y + s = 10, \qquad 3x - 2y - t = 3, \qquad s,\, t \geq 0,$$

  donde $s$ y $t$ son las variables de holgura correspondientes.

  Notemos que las variables de holgura se introducen siempre de modo que sean no negativas. Esto significa que se introducen sumando en las restricciones de $\leq$ y restando en las restricciones de $\geq$.

En estos términos podemos decir que resolver un problema de programación matemática es buscar unos valores para las variables principales que cumplan las restricciones y donde la función objetivo alcance su valor óptimo.[1] Vamos a precisar esta idea con algunas definiciones:

[1] En realidad la programación matemática aborda problemas más generales que éstos, por ejemplo, problemas que consideran simultáneamente varias funciones objetivo, problemas en los que las funciones dependen del tiempo, etc., pero no vamos a entrar en ello.

**Soluciones** Una *solución* de un problema es cualquier valor posible para sus variables principales.

**Soluciones factibles/infactibles** Una *solución factible* de un problema es una solución que satisface todas sus restricciones. En caso contrario se dice que es una solución *infactible.*

El *conjunto de oportunidades* de un problema es el conjunto $S$ formado por todas sus soluciones factibles.

Notemos que si un problema no tiene restricciones entonces todas las soluciones son factibles, por lo que el conjunto de oportunidades es $S = \mathbb{R}^n$, donde $n$ es el número de variables.

**Soluciones interiores/de frontera** Una solución factible de un problema es una *solución de frontera* si cumple alguna de las restricciones con igualdad (y en tal caso se dice que *satura* la restricción, o que la restricción está *activa* en dicha solución). En caso contrario, es decir, si la solución cumple todas las restricciones con desigualdad estricta se dice que es una *solución interior.*

Así pues, las soluciones pueden ser:

$$\text{Soluciones} \left\{ \begin{array}{l} \text{infactibles} \\ \\ \text{factibles} \left\{ \begin{array}{l} \text{interiores} \\ \\ \text{de frontera} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Notemos que una solución factible siempre satura las restricciones de igualdad, mientras que una restricción de desigualdad está saturada si y sólo si su variable de holgura vale 0.

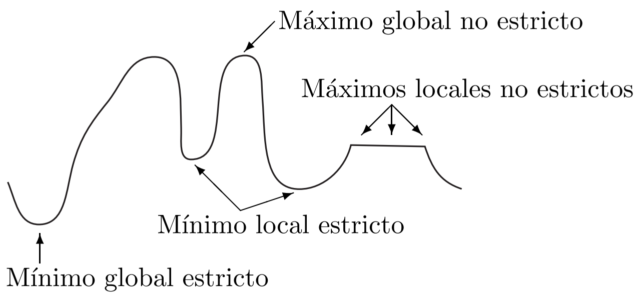
**Soluciones óptimas** Una solución factible es un *máximo global* de un problema si en ella la función objetivo toma un valor mayor o igual que en cualquier otra solución factible (pero puede haber otras igual de buenas). Será un *máximo global estricto* si en ella la función objetivo es mayor que en cualquier otra solución factible (de modo que no hay ninguna otra igual de buena).

Análogamente, una solución factible es un *mínimo global* de un problema si en ella la función objetivo toma un valor menor o igual que en cualquier otra solución factible (pero puede haber otras igual de buenas). Será un *mínimo global estricto* si en ella la función objetivo es menor que en cualquier otra solución factible (de modo que no hay ninguna otra igual de buena).

Así, los *óptimos globales* o *soluciones óptimas* de un problema de optimización son sus máximos globales si el problema es de maximizar o sus mínimos globales si el problema es de minimizar. En principio, un problema puede tener varias soluciones óptimas (máximos o mínimos no estrictos). Cuando sólo hay una solución máxima o mínima, de modo que cualquier otra solución factible es peor, tenemos un máximo o mínimo estricto.

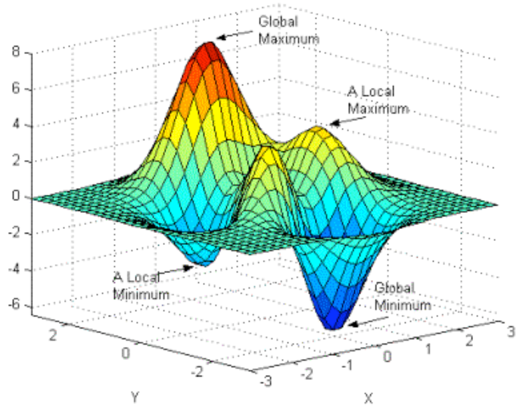
**Óptimos locales** Un *máximo local* de un problema de optimización es una solución factible $\bar{x}$ en la que la función objetivo es mayor o igual (o siempre mayor, en cuyo caso el máximo local se dice *estricto*) que sobre cualquier otra solución factible $\bar{y}$ que esté suficientemente próxima a $\bar{x}$, es decir, que cumpla $\|\bar{x} - \bar{y}\| < \epsilon$ para cierto $\epsilon > 0$. Análogamente se definen los *mínimos locales* estrictos o no estrictos.

Por ejemplo, si la figura siguiente representa una función objetivo sobre un conjunto de soluciones factibles, en ella vemos señalado un máximo global que es no estricto, porque, aunque la función objetivo no toma un valor mayor en ninguna otra solución, hay otra un poco más a la izquierda donde toma el mismo valor (y es, por lo tanto, otro máximo global no estricto). En cambio el mínimo global señalado es estricto, porque no hay otra solución factible donde la función objetivo tome un valor menor aún.




También vemos dos mínimos locales estrictos. En efecto, si nos fijamos en los puntos próximos a cualquiera de ellos, vemos que en ellos la función objetivo es mayor, pero ninguno de ellos es el mínimo global, que se encuentra mucho más a la izquierda. Por último la función forma una "meseta" en la que hay infinitos máximos locales no estrictos.

La figura siguiente muestra un ejemplo para una función objetivo de dos variables:




Notemos que, según hemos dicho, resolver un problema de optimización es encontrar los óptimos globales de la función objetivo sobre el conjunto de oportunidades, de modo que, en el ejemplo correspondiente a la gráfica anterior, tendríamos dos soluciones óptimas si el problema fuera de maximizar (los dos máximos globales no estrictos) y una única solución óptima si el problema fuera de minimizar (el mínimo global estricto). La única razón por la que hablamos de óptimos locales es porque, en ocasiones, las técnicas que vamos a estudiar para resolver problemas de optimización, no garantizan que los óptimos que proporcionan sean globales, y entonces tendremos que emplear técnicas adicionales para asegurarnos de que no estamos tomando erróneamente un óptimo local que no es el óptimo global como solución del problema considerado.

Es importante ser consciente de que no todos los problemas de optimización tienen solución óptima. En principio podríamos dividirlos en problemas con solución óptima y problemas sin solución óptima, pero dentro del segundo tipo hay en realidad dos casos muy diferentes entre sí, por lo que en total tenemos tres posibilidades para un problema según su solución:

**Problemas con solución óptima** Aquí hay que entender que nos referimos a problemas con solución óptima global.

**Problemas infactibles** Un *problema infactible* es un problema para el que todas las soluciones son infactibles, es decir, tal que no existe ninguna solución que satisfaga las restricciones o, también, un problema cuyo conjunto de oportunidades es vacío.

**Problemas no acotados** Un problema es *no acotado* si es factible pero no tiene solución óptima, es decir, si toda solución factible puede ser mejorada por otra.

En resumen, los problemas pueden ser:

$$\text{Problemas}\begin{cases}\text{infactibles}\\ \\ \text{factibles}\begin{cases}\text{con óptimo global}\\ \\ \text{sin óptimo global (no acotados)}\end{cases}\end{cases}$$

**Clases de problemas** Para resolver un problema de programación matemática hay que aplicar técnicas diferentes según sus características. Por ello es muy importante ser capaz de reconocer si un problema dado reúne las características necesarias para que le podamos aplicar unas técnicas determinadas.

**Programación entera** Un problema es de programación entera cuando exige que una o varias de sus variables sean enteras (o, en particular, binarias).

Por ejemplo, no es lo mismo que los artículos $A$ y $B$ del problema considerado al principio del tema sean chocolate y nata, de modo que tiene sentido producir, por ejemplo, 50.7 kg de cada uno de ellos, que si son pasteles y tartas, en cuyo caso no podemos fabricar 245.3 pasteles. Si fuera este caso (en el que no tiene sentido que las variables $x_1$ y $x_2$ tomaran valores fraccionarios), el modelo correcto sería:

$$\begin{array}{rl}\text{Max.} & x_1 + x_2\\ \text{s.a} & 3x_1 + 2x_2 \leq 12\\ & x_1 + 2x_2 \leq 10\\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \text{ enteras}\end{array}$$

y tendríamos un problema de programación entera.

Notemos que para que un problema sea de programación entera no es necesario que todas sus variables sean enteras, sino que basta que al menos una lo sea, de modo que puede tener unas variables enteras y otras continuas. En tal caso se dice que el problema es de *programación entera mixta.*

**Programación no lineal** Se engloban en esta categoría todos los problemas que vamos a estudiar cuyas variables sean todas continuas. Es el caso, por ejemplo, del problema formulado en la página 1.

Dentro de la programación no lineal se incluye una clase de problemas que son mucho más fáciles de tratar:

**Programación lineal** Un problema de programación no lineal (es decir, que no tiene variables enteras) es concretamente de *programación lineal* si además cumple que tanto su función objetivo como todas sus restricciones son funciones lineales.

Para entender esto hemos de recordar lo que es una función lineal:

| |
|---|
| Una *función lineal* es una función de la forma $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$, donde $c_1, \ldots, c_n$ son números reales, es decir, una función de la forma "número × variable+número × variable + ⋯ " |

Por ejemplo, el problema de la página 1 es un problema de programación no lineal[2] (porque sus

[2]Para entender esto hay que entender que "programación no lineal" significa en realidad "programación no (necesariamente) lineal", es decir, que no importa si las funciones que definen el problema son lineales o no. Más precisamente, las técnicas que veremos para resolver problemas de programación no lineal no suponen que las funciones que definen el problema sean lineales, por lo que pueden ser aplicadas al problema tanto si lo son como si no, mientras que las técnicas que veremos para resolver problemas de programación lineal suponen que todas las funciones que aparecen son lineales, y no se pueden aplicar si alguna no lo es.

variables no son enteras) y también un problema de programación lineal (porque tanto su función objetivo como sus cuatro restricciones son funciones lineales).[3]

Un ejemplo de problema de programación no lineal que no es de programación lineal es

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & xy \\ \text{s.a} & x + 2y \leq 5 \\ & x,\ y \geq 0 \end{array}$$

No es de programación lineal porque, aunque las tres restricciones son lineales, la función objetivo no lo es.

**Programación clásica** Otro caso particular de la programación no lineal es la programación clásica, formada por los problemas que no tienen restricciones o bien tienen únicamente restricciones de igualdad. Veremos que las técnicas de programación no lineal se simplifican bastante en este caso.

**Ejemplo** Vamos a ilustrar algunos de los conceptos que acabamos de introducir con el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x_1 + x_2 \\ \text{s.a} & 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

1. Escribe su conjunto de oportunidades

   El conjunto de oportunidades es el conjunto de todas las soluciones que cumplen las restricciones:

   $$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1 + 2x_2 \leq 12, \quad x_1 + 2x_2 \leq 10, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0\}.$$

   Notemos que en el conjunto de oportunidades no hay que incluir la función objetivo y no hay que olvidar las condiciones de no negatividad (si las hay).

2. Pon un ejemplo de solución infactible, otro de solución interior y otro de solución de frontera.

   Una solución infactible es $(x_1, x_2) = (4, 1)$. Lo comprobamos:

   $$\begin{array}{rl} 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 14 \leq 12 & \text{no se cumple} \\ 4 + 2 \cdot 1 = \phantom{1}6 \leq 10 & \text{se cumple} \\ 4 \geq 0 \phantom{\leq 10} & \text{se cumple} \\ 1 \geq 0 \phantom{\leq 10} & \text{se cumple} \end{array}$$

   Vemos que el punto cumple tres de las cuatro restricciones, pero basta con que falle una para que sea infactible.

   Una solución interior es $(x_1, x_2) = (1, 1)$. Lo comprobamos:

   $$\begin{array}{rl} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5 < 12 & \text{no satura} \\ 1 + 2 \cdot 1 = 3 < 10 & \text{no satura} \\ 1 > 0 \phantom{< 10} & \text{no satura} \\ 1 > 0 \phantom{< 10} & \text{no satura} \end{array}$$

[3]El problema que hemos puesto más arriba como ejemplo de programación entera tiene todas sus funciones lineales, pero no es un problema de programación lineal, porque para ser de programación lineal tendría que ser antes de programación no lineal, y no lo es. Se trata de un problema de *programación lineal entera,* es decir, un problema de programación entera cuyas funciones son todas lineales, pero es muy importante entender que los programas de programación linear entera son un caso particular de la programación entera, pero no un caso particular de la programación lineal. Esto significa que se puede resolver con las técnicas de programación entera, pero no con las técnicas de programación lineal, ya que éstas exigen que las variables sean continuas.

Vemos que el punto cumple las cuatro restricciones y no satura ninguna de ellas, luego es una solución factible interior.

Una solución de frontera es $(x_1, x_2) = (0, 5)$. Lo comprobamos:

$$\begin{array}{rl} 3 \cdot 0 + 2 \cdot 5 = 10 < 12 & \text{no satura} \\ 0 + 2 \cdot 5 = 10 = 10 & \text{satura} \\ 0 = 0 & \text{satura} \\ 5 > 0 & \text{no satura} \end{array}$$

Vemos que el punto cumple las cuatro restricciones y satura a dos de ellas. Basta con que sature al menos una para ser una solución de frontera.

3. Escribe el problema con las variables de holgura y calcula su valor en las soluciones que has encontrado en el apartado anterior.

   El problema con variables de holgura es

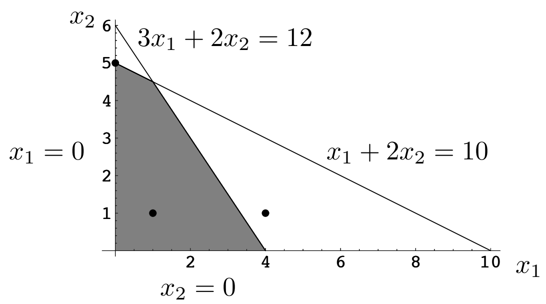
$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x_1 + x_2 \\ \text{s.a} & 3x_1 + 2x_2 + s_1 = 12 \\ & x_1 + 2x_2 + s_2 = 10 \\ & x_1,\ x_2, s_1\, s_2 \geq 0 \end{array}$$

   Notemos que las variables de holgura se suman porque las restricciones son de $\leq$ y que siempre hay que incluirlas en las condiciones de no negatividad. Las soluciones que hemos encontrado son

$$(x_1, x_2, s_1, s_2) = (4, 1, -2, 4), \quad (1, 1, 7, 7), \quad (0, 5, 2, 0).$$

   Se calculan sin más que sustituir $x_1$ y $x_2$ en las restricciones y despejar $s_1$ y $s_2$.

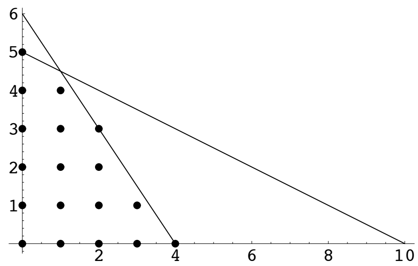
4. Representa gráficamente el conjunto de oportunidades y las tres soluciones que has encontrado.




   Vemos así la interpretación geométrica del concepto de solución interior y de frontera: una solución es interior si está "en el interior" del conjunto de oportunidades, sin tocar su borde, y es de frontera cuando está en el borde. La solución $(0, 5)$ está en una esquina porque satura dos restricciones. Otra solución de frontera, como $(2, 3)$, sólo satura una restricción y está en el borde, pero no en una esquina.

5. ¿Cuál sería el conjunto de oportunidades si las variables del problema fueran enteras?

   En tal caso sólo tendríamos que considerar los puntos dentro del conjunto de oportunidades anterior que tienen coordenadas enteras:




Vemos que ahora hay sólo 18 soluciones factibles.

## 1.2 Resolución gráfica

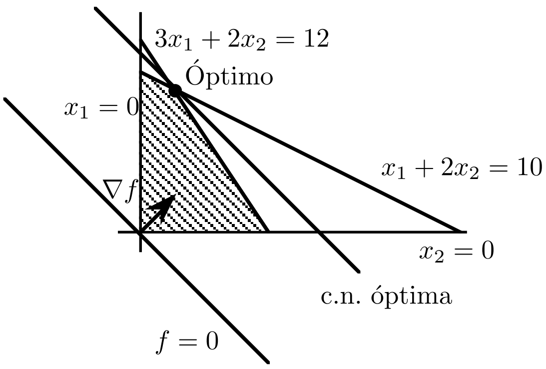
Los problemas de programación matemática con dos variables principales pueden resolverse gráficamente si son suficientemente simples. En esta sección consideraremos únicamente el caso en que *la función objetivo es lineal.* Como ejemplo consideramos una vez más el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x_1 + x_2 \\ \text{s.a} & 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

El proceso para resolverlo gráficamente es el siguiente:

1. Comprobamos que la función objetivo $f(x, y) = x_1 + x_2$ es lineal. En caso contrario no podemos aplicar el método que vamos a ver.
2. Representamos el conjunto de oportunidades.
3. Calculamos el gradiente de la función objetivo $\nabla f = (1, 1)$ y lo representamos gráficamente.
4. Representamos la curva de nivel $f = 0$ de la función objetivo. Si la función objetivo es lineal será siempre la recta perpendicular al vector gradiente.
5. Si la curva de nivel no pasara por el conjunto de oportunidades (en el ejemplo sí que pasa) la movemos paralelamente a sí misma hasta que pase por $S$. Así obtenemos otra curva de nivel válida para alguna solución factible.
6. Ahora recordamos que el gradiente de la función objetivo indica hacia dónde aumenta la función, mientras que la dirección contraria indica hacia dónde disminuye. Por lo tanto, si estamos maximizando desplazaremos la curva de nivel paralelamente a sí misma en la dirección del gradiente. El último punto de $S$ que toquemos será la solución óptima. Si el problema es de minimizar la única diferencia es que hemos de desplazar la curva de nivel en la dirección opuesta al gradiente para llegar al mínimo de $f$, en lugar de al máximo.
7. Si el óptimo encontrado satura al menos dos restricciones, podemos calcular sus coordenadas resolviendo el sistema de ecuaciones formado por ellas.

La figura muestra el conjunto $S$, el gradiente $\nabla f$, la curva de nivel $f = 0$, la curva de nivel óptima y la solución óptima.




Para determinar las coordenadas de la solución óptima que hemos encontrado basta observar en la figura que satura las restricciones $x_1 + 2x_2 = 10$ y $3x_1 + 2x_2 = 12$. Al resolver el sistema de ecuaciones obtenemos que $(x_1, x_2) = (1, 9/2)$. ∎

## 1.3 Transformaciones de problemas

A veces es conveniente transformar un problema en otro equivalente en el sentido de que a partir de la solución óptima de uno puede calcularse fácilmente la solución óptima del otro.

**Variables no negativas** Toda variable no positiva ($x \leq 0$) puede convertirse en no negativa mediante el cambio de variables $x = -x_0$, y toda variable libre $x$ puede expresarse en términos de variables no negativas mediante el cambio $x = x_1 - x_2$.

Por ejemplo, para convertir en no negativas las variables del problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x + 3y - z^2 \\ \text{s.a} & x + y - z \leq 4 \\ & x + z \geq 3 \\ & x \leq 0,\ y \geq 0 \end{array}$$

hacemos $x = -x_0$ (porque $x$ es no positiva) y $z = z_1 - z_2$ (porque $z$ es libre), y obtenemos:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & -x_0 + 3y - (z_1 - z_2)^2 \\ \text{s.a} & -x_0 + y - z_1 + z_2 \leq 4 \\ & -x_0 + z_1 - z_2 \geq 3 \\ & x_0,\ y,\ z_1,\ z_2 \geq 0 \end{array}$$

**Importante:** Este problema es equivalente al dado en el sentido de que si obtenemos una solución óptima $(x_0, y, z_1, z_2)$ del problema transformado, entonces $(x, y, z) = (-x_0, y, z_1 - z_2)$ será una solución óptima del problema original.[4] Nunca hemos de olvidarnos de calcular los valores de las variables principales del problema original deshaciendo los cambios que hayamos hecho para transformarlo en otro.

**Restricciones de igualdad** Las restricciones de desigualdad se pueden convertir en restricciones de igualdad añadiendo las variables de holgura. Por ejemplo, si en el problema anterior queremos además que las restricciones sean de igualdad lo convertimos en

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & -x_0 + 3y - (z_1 - z_2)^2 \\ \text{s.a} & -x_0 + y - z_1 + z_2 + s = 4 \\ & -x_0 + z_1 - z_2 - t = 3 \\ & x_0,\ y,\ z_1,\ z_2,\ s,\ t \geq 0 \end{array}$$

[4] Notemos, no obstante, que cada óptimo del problema original se corresponde con infinitos óptimos del problema transformado.

NOTA: Observemos que al introducir una variable de holgura $s$ no eliminamos completamente la desigualdad, pues ésta permanece en la condición de signo $s \geq 0$. Por este motivo nunca hemos de introducir variables de holgura en las condiciones de signo, ya que con ello lo único que hacemos es complicar el problema sin ganar nada.

**Cambio del objetivo** Un problema con objetivo Max. $f(\bar{x})$ es equivalente al problema que tiene las mismas restricciones pero su objetivo es Min. $-f(\bar{x})$. Del mismo modo podemos transformar un problema de minimizar en otro de maximizar.

Por ejemplo, el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x + y + 2 \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \leq 50 \end{array}$$

puede transformarse en

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & -x - y - 2 \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \leq 50. \end{array}$$

**Cambio de una desigualdad** Una restricción de $\leq$ se transforma en una de $\geq$ multiplicando sus dos miembros por $-1$, y viceversa.

Por ejemplo, la restricción $x^2 + y^2 \leq 50$ puede transformarse en $-x^2 - y^2 \geq -50$.

**Igualdad por desigualdades** Una restricción de igualdad puede sustituirse por las dos restricciones que resultan de cambiar el $=$ por un $\leq$ y un $\geq$.

Por ejemplo, el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x + y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 = 9 \end{array}$$

es equivalente a

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x + y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \leq 9 \\ & x^2 + y^2 \geq 9 \end{array}$$

## 1.4 Teoremas básicos de la programación matemática

Enunciamos aquí dos teoremas que —bajo ciertas condiciones— garantizan que un problema de programación matemática tiene solución óptima.

**Teorema de Weierstrass** *Una función objetivo continua sobre un conjunto de oportunidades compacto no vacío tiene al menos un máximo y un mínimo global.*

Para entender este teorema necesitamos conocer la noción de conjunto compacto. Para ello consideremos un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$:

- Se dice que $S$ es *cerrado* si su complementario $\mathbb{R}^n \setminus S$ es un conjunto abierto.
- Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ está acotado si y sólo si todas las variables están acotadas (tanto superior como inferiormente) sobre los puntos de $S$.
- Se dice que $S$ es *compacto* si es cerrado y acotado.

En la práctica nunca necesitaremos la definición de conjunto cerrado, puesto que todos los conjuntos de oportunidades que vamos a considerar serán cerrados en virtud del teorema siguiente:

**Teorema** *Todo conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ definido mediante restricciones de $\leq$, $\geq$, $=$ con funciones continuas es cerrado.*

**Ejemplo** Estudia si el conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y + 5z \leq 20,\ x,\ y,\ z \geq 0\}$$

es compacto.

Solución: Para probar que $S$ es compacto hemos de ver si es cerrado y acotado.

El conjunto $S$ es cerrado porque está definido por restricciones de $\leq$ y $\geq$ a partir de funciones continuas (polinomios).

Para comprobar que está acotado vemos que si $(x, y, z) \in S$ entonces

$$0 \leq x \leq 20, \quad 0 \leq y \leq 20, \quad 0 \leq z \leq 20.$$

Como las tres variables están acotadas superior e inferiormente, $S$ está acotado. ■

**Ejemplo** Justifica que el problema planteado en la página 1 tiene al menos una solución óptima.

Solución: Vamos a aplicar el teorema de Weierstrass. Para ello hemos de probar que la función objetivo es continua y que el conjunto de oportunidades es compacto no vacío. La función objetivo $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ es continua porque es un polinomio. El conjunto de oportunidades es

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1 + 2x_2 \leq 12, \quad x_1 + 2x_2 \leq 10, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0\}.$$

Para probar que es compacto hemos de ver que es cerrado y acotado. Ciertamente es cerrado, porque está definido mediante desigualdades de $\leq$ y $\geq$ a partir de las funciones continuas $3x_1 + 2x_2$, $x_1 + 2x_2$, $x_1$ y $x_2$. (Son continuas porque son polinomios.)

Por otra parte, $S$ está acotado, ya que si $(x_1, x_2) \in S$, entonces

$$0 \leq x_1 \leq 10, \qquad 0 \leq x_2 \leq 5.$$

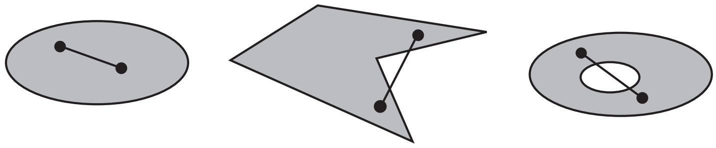
Por último, $S$ no es vacío, ya que, por ejemplo, una solución factible es $(1, 1)$. Así pues, el teorema de Weierstrass garantiza que la función objetivo $f$ alcanza un máximo global en cierta solución factible. ■

**Teorema local-global** *Consideremos un problema de programación matemática cuyo conjunto de oportunidades $S$ sea convexo.*

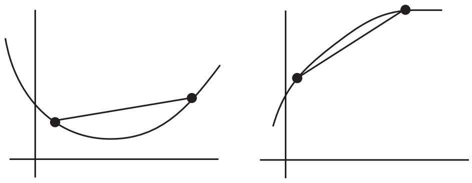
- *Si la función objetivo es (estrictamente) convexa, entonces todo mínimo local del problema es —de hecho— un mínimo global (estricto).*
- *Si la función objetivo es (estrictamente) cóncava, entonces todo máximo local del problema es —de hecho— un máximo global (estricto).*

## 1.5 Resultados básicos sobre convexidad

**Definiciones** Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es *convexo* si al unir dos cualesquiera de sus puntos con un segmento éste no se sale del conjunto. Una función definida sobre un conjunto convexo es (estrictamente) *convexa* si al unir dos puntos cualesquiera de su gráfica con un segmento éste queda (estrictamente) por encima de la gráfica. Una función es (estrictamente) *cóncava* si al unir dos puntos cualesquiera de su gráfica con un segmento éste queda (estrictamente) por debajo de la gráfica.



Convexo No convexo No convexo



Función convexa Función cóncava

**Estudio de la concavidad o convexidad de una función** Veamos cómo estudiar si una función dada es cóncava o convexa. En primer lugar observamos si es lineal, pues en tal caso basta tener en cuenta el hecho siguiente:

*Toda función lineal es a la vez cóncava y convexa.*

**Ejemplo** La función $f(x, y, z) = 3x + 2y - 5z$ es cóncava y convexa, porque es lineal. ■

Para estudiar la concavidad o convexidad de una función cualquiera, calculamos su matriz hessiana. Si se trata de una matriz diagonal, basta tener en cuenta lo siguiente:

**Teorema** *Sea $f$ una función (de clase $C^2$) cuya matriz hessiana $H$ sea diagonal. Entonces:*

- *Si los coeficientes de la diagonal de $H$ son todos $\leq 0$ la función $f$ es cóncava (y si son todos $< 0$ es estrictamente cóncava).*
- *Si los coeficientes de la diagonal de $H$ son todos $\geq 0$ la función $f$ es convexa (y si son todos $> 0$ es estrictamente convexa).*
- *En otro caso, la función $f$ no es ni cóncava ni convexa.*

**Ejemplo** Vamos a estudiar si la función $f(x, y, z) = x^4 + 3y^4 + z^2$ es cóncava o convexa. Como no es lineal, calculamos su matriz hessiana, que es

$$Hf = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 36y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Se trata de una matriz diagonal, y todos los coeficientes de la diagonal son $\geq 0$, porque las potencias pares no pueden ser negativas, luego la función $f$ es convexa. ■

Si la hessiana no es diagonal, hemos de calcular sus *menores principales,* es decir, los determinantes de todas las submatrices que se pueden formar con unas filas cualesquiera y las mismas columnas.

**Ejemplo** Vamos a estudiar la concavidad o convexidad de la función

$$f(x, y, z) = -2x^2 - y^2 - 14z^2 + 2xy + 2xz + 4yz.$$

Para ello calculamos su matriz hessiana:

$$Hf = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -28 \end{pmatrix}$$

Como no es diagonal, calculamos sus menores principales (enseguida veremos que en este caso no haría falta calcularlos todos):

| Orden 1 | Orden 2 | Orden 3 |
|---|---|---|
| $H_1 = \|-4\| = -4 < 0$ | $H_{12} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$ | |
| $H_2 = \|-2\| = -2 < 0$ | $H_{13} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -28 \end{vmatrix} = 108 > 0$ | $H_{123} = \|Hf\| = -8 < 0$ |
| $H_3 = \|-28\| = -28 < 0$ | $H_{23} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -28 \end{vmatrix} = 40 > 0$ | |

Los menores principales de orden 1 son los formados por una fila y la misma columna de la matriz: $H_1$ primera fila y primera columna, $H_2$ segunda fila y segunda columna, $H_3$ tercera fila y tercera columna.

Los menores principales de orden 2 son los formados por dos filas (en orden) y las mismas dos columnas: $H_{12}$ filas 1 y 2 y columnas 1 y 2, $H_{13}$ filas 1 y 3 y columnas 1 y 3, $H_{23}$ filas 2 y 3 y columnas 2 y 3.

El menor principal de orden 3 es el formado por las tres filas y las tres columnas de $H$, es decir, el determinante de $H$.

De acuerdo con la regla de Jacobi (ver más abajo), como el determinante es $|Hf| = -8 \neq 0$, en realidad hubiera bastado calcular los *menores principales conducentes,* que son $H_1$, $H_{12}$ y $H_{123}$ (es decir, los menores principales formados por las primeras filas y columnas de la matriz). Como son

$$H_1 < 0 \qquad H_{12} > 0 \qquad H_{123} < 0,$$

la regla de Jacobi implica que la hessiana es definida negativa y la función $f$ es estrictamente cóncava.

■

**Regla de Jacobi** Para estudiar la concavidad o convexidad de una función de clase $C^2$ calculamos su matriz hessiana $H$ y luego su determinante. Distinguimos dos casos:

- Si $|H| \neq 0$ basta calcular los menores principales conducentes de la matriz ($H_1$, $H_{12}$, $H_{123}$, ...)
  - Si todos los menores principales conducentes son $> 0$, entonces $H$ es definida positiva y la función es estrictamente convexa.
  - Si los menores principales conducentes alternan en signo empezando en negativo (es decir, $H_1 < 0$, $H_{12} > 0$, $H_{123} < 0, \dots$) entonces $H$ es definida negativa y la función es estrictamente cóncava.
  - En cualquier otro caso, $H$ es indefinida y la función no es ni cóncava ni convexa.
- Si $|H| = 0$ calculamos todos los menores principales de la matriz.
  - Si todos los menores principales son $\geq 0$, entonces $H$ es semidefinida positiva y la función es convexa.
  - Si los menores de orden 1 son $\leq 0$, los de orden 2 son $\geq 0$, los de orden 3 son $\leq 0$, etc. (empezando siempre con $\leq 0$), entonces $H$ es semidefinida negativa y la función es cóncava.
  - En cualquier otro caso la función no es ni cóncava ni convexa.

**Conjuntos convexos** Para comprobar que un conjunto es convexo tenemos los criterios siguientes:

1. Un conjunto definido por una restricción de igualdad a partir de una función lineal es un *hiperplano,* y los hiperplanos son siempre conjuntos convexos.
2. Un conjunto definido por una restricción de $\leq$ o $\geq$ a partir de una función lineal es un *semiespacio,* y los semiespacios son siempre conjuntos convexos.
3. Un conjunto definido por una restricción de $\leq$ a partir de una función convexa es convexo.
4. Un conjunto definido por una restricción de $\geq$ a partir de una función cóncava es convexo.
5. La intersección de conjuntos convexos es convexa.
6. En particular, todo conjunto definido por restricciones lineales es intersección de semiespacios e hiperplanos, luego es convexo.

Observemos que los criterios anteriores no nos permiten decidir si un conjunto definido por una restricción de igualdad a partir de una función no lineal es o no convexo. Dicho de otro modo, cuando tengamos una igualdad, la única posibilidad que tenemos para justificar que es convexo es que la función sea lineal.

# Problemas

1. Calcula el vector gradiente y la matriz hessiana de las funciones siguientes:

$$f(x,y) = x^2 - 3xy, \qquad g(x,y,z) = xy + 5 + z, \qquad h(x_1,x_2,x_3) = x_1 - 3x_2 + x_3,$$

$$s(x_1,x_2) = x_1x_2^2, \qquad t(x,y) = 3x^2, \qquad m(x,y,z) = 3x^2, \qquad p(x_1,x_2,x_3) = x_1^4x_2 + 2x_3^2 - 5.$$

2. Determina mentalmente si los problemas siguientes son infactibles, no acotados o si tienen solución óptima, y en tal caso calcúlala (siempre mentalmente):

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x^2+y^2+8 \\ \text{s.a} & x+y \leq 10 \\ & x \geq 6 \\ & y \geq 8 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Max.} & x^2+y^2+8 \\ \text{s.a} & x+y \leq 0 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Max.} & x+y+8 \\ \text{s.a} & x \leq 5 \\ & y \leq 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Max.} & x^2+y^2+8 \\ \text{s.a} & x \leq 5 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

3. Considera el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x+y+z \\ \text{s.a} & x^2+y^2+z^2 = 2 \end{array}$$

   (a) Clasifícalo.
   (b) Escribe el conjunto de oportunidades. Razona si es cerrado.
   (c) ¿Es acotado el conjunto de oportunidades?
   (d) Razona que el problema tiene solución óptima.
   (e) Encuentra una solución factible (no necesariamente óptima) y determina si es interior o de frontera.
   (f) Razona que el valor óptimo de la función objetivo es mayor o igual que 2.
   (g) Encuentra una solución en la que la función objetivo tome el valor 5.

4. Determina si los conjuntos siguientes son o no compactos:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y+3z \leq 10,\ x,\ y,\ z \geq 0\}, \quad T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 20,\ -5 \leq z \leq 2\}.$$

5. Transforma el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x+y^2 \\ \text{s.a} & x+2y \geq 3 \\ & y \leq 0 \end{array}$$

de modo que las restricciones sean de igualdad y todas las variables sean no negativas.

6. Considera los problemas

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x-y \\ \text{s.a} & x^2+y^2 \leq 4 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Min.} & x-y \\ \text{s.a} & y-x^2 \geq 0 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Min.} & 4xy-5x^2-y^2 \\ \text{s.a} & x^2+y^2 = 4 \end{array}$$

(a) Estudia la existencia de óptimo, ya sea encontrándolo gráficamente, ya mediante el teorema de Weierstrass.

(b) Estudia la concavidad o convexidad de las funciones objetivo.

(c) Transforma los problemas para que las restricciones sean de igualdad.

7. Razona si los conjuntos de oportunidades de los problemas siguientes son o no compactos:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x^2+y+z \\ \text{s.a} & x+y+5z = 1, \\ & x,\, y,\, z \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Max.} & x^2+y+z \\ \text{s.a} & -x+y+5z = 1, \\ & x,\, y,\, z \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Max.} & x^2+y+z \\ \text{s.a} & x^4+y^4+z \leq 10, \\ & z \geq 0 \end{array}$$

8. Dado el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 2x+3y+z \\ \text{s.a} & x+2y+z \leq 30 \\ & x+y \geq 20 \\ & x \geq 0,\, y \leq 0 \end{array}$$

(a) Escribe el conjunto de oportunidades. Encuentra (si es posible) una solución factible interior, una solución factible de frontera y una solución no factible.

(b) Reescribe el problema de forma que tenga objetivo de minimización, restricciones de igualdad y todas las variables no negativas.

9. Resuelve gráficamente los problemas siguientes:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x \\ \text{s.a} & y+x^2 \leq 2 \\ & x-y \leq 0 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Min.} & x-y \\ \text{s.a} & y+x^2 \leq 2 \\ & x-y \leq 0 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Max.} & x+3y \\ \text{s.a} & y-x^2 \geq 5 \\ & x^2+y^2 \leq 1 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Min.} & -x+5y \\ \text{s.a} & xy \leq 2 \\ & x-y \leq 1 \\ & x-y \geq -1 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & x-y \\ \text{s.a} & xy \leq 2 \\ & x-y \leq 1 \\ & x-y \geq -1 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Min.} & 3x-2y \\ \text{s.a} & xy \geq 10 \\ & x+y \leq 1 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Min.} & 5x-y \\ \text{s.a} & x^2+y^2 \leq 4 \\ & x+y \geq 1 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Max.} & 5x-y \\ \text{s.a} & x^2+y^2 \leq 4 \\ & x+y \geq 1 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x-y \\ \text{s.a} & xy = 6 \\ & x+y \leq 5 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Max.} & x+y \\ \text{s.a} & x^2+y^2 \leq 3 \\ & y-x^2 \geq 0 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Min.} & x+y \\ \text{s.a} & x^2+y^2 \leq 3 \\ & y-x^2 \geq 0 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Max.} & x+2y \\ \text{s.a} & xy \geq 12 \\ & y-x \geq 1 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Min.} & y-x \\ \text{s.a} & xy \geq 12 \\ & y-x \geq 1 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{Min.} & y \\ \text{s.a} & x^2+y^2 \leq 3 \\ & y-x^2 \geq 0 \\ & y \leq 4 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{Max.} & x+2y \\ \text{s.a} & x^2+y^2 \leq 3 \\ & y-x^2 \geq 0 \\ & y \leq 4 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{Max.} & x+2y \\ \text{s.a} & x \leq 5 \\ & y \leq 4 \end{array}$$

10. Determina si los conjuntos siguientes son o no compactos:

    (a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 16\}$,
    (b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 16\}$,
    (c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \geq 16\}$,
    (d) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 16\}$,
    (e) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + y^3 + z^3 \leq 16\}$,
    (f) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y \leq 5,\ z \leq 3\}$,
    (g) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y \leq 5,\ z^2 \leq 3, x \geq 0,\ y \geq 0\}$,
    (h) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z \leq 6,\ x + y \leq 10,\ y + z \leq 8,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$,
    (i) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + x^2 + 3z^4 \leq 10,\ y \geq 0\}$.

11. Estudia si los conjuntos siguientes son convexos:

    (a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 20\}$,
    (b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \geq 20\}$,
    (c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 20\}$,
    (d) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 3z\}$,
    (e) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x + 7y \leq 4,\ x \geq 0,\ y \leq 0\}$,
    (f) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 3y^2 + 2xy \leq 20,\ x - y + z \leq 15\}$,
    (g) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 3y^2 + 2xy \geq 20,\ x - y + z \leq 15\}$,
    (h) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \leq 0\}$.

# Cuestiones

1. Supón que montas un pequeño negocio y que te planteas un problema de programación matemática para maximizar tus beneficios sujeto a que has de servir a una serie de clientes en unas ciertas condiciones. Una vez formuladas adecuadamente la función de beneficios y las restricciones (y suponiendo que el problema te sale factible) ¿qué preferirías, que tuviera óptimo (global) o que no lo tuviera?

2. Supón que hemos resuelto un problema de programación con restricciones y hemos encontrado un óptimo global. Si eliminamos las restricciones, ¿el problema tendrá necesariamente óptimo? Y si lo tiene, ¿será mejor o peor que el problema con restricciones?, ¿puede ser el mismo?

3. Sea $P$ un problema de programación matemática y sea $P'$ otro problema que resulta de añadirle a $P$ una restricción más. Supongamos que su objetivo es maximizar.

    (a) ¿Cuál será mayor, el conjunto de oportunidades de $P$ o el de $P'$.
    (b) ¿Cuál será mayor, el óptimo de $P$ o el de $P'$?
    (c) Si $\bar{x}$ es una solución factible de $P'$, ¿lo será también de $P$?, ¿y al revés?
    (d) Si $\bar{x}^*$ es el óptimo de $P$, ¿lo será también de $P'$?

4. Un problema tiene entre sus restricciones a $x + 2y \leq 8$. ¿Es $(10, 10)$ una solución del problema?

5. Un problema de maximizar tiene solución óptima, y hemos encontrado una solución en la que la función objetivo vale 25. ¿Podemos afirmar que el valor óptimo de la función objetivo es mayor que 25?, ¿y mayor o igual?

6. Razona si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas y, en caso de ser falsas, corrígelas:

   (a) Si un problema de programación matemática tiene infinitas soluciones, entonces es no acotado.

   (b) Un problema infactible tiene infinitas soluciones.

   (c) Un problema infactible no tiene soluciones.

   (d) Un problema es no acotado cuando toda solución óptima puede ser mejorada por otra.

   (e) Un problema es infactible cuando alguna solución no cumple las restricciones.

# Tema 2

# Programación entera

En este tema veremos cómo la resolución de un problema de programación entera puede reducirse a la resolución de varios problemas de programación no lineal (o de programación lineal si el problema dado es de programación lineal entera). El método que vamos a explicar se llama *método de ramificación y acotación.* Lo explicaremos con un ejemplo. Para ello consideramos el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 4x+5y \\ \text{s.a} & 2x+3y \leq 12 \\ & 8x+3y \leq 24 \\ & x,\, y \geq 0 \text{ enteras.} \end{array}$$

El primer paso para estudiar un problema de programación entera es considerar el *problema relajado,* es decir, el problema que resulta de olvidar el requisito de que las variables sean enteras:

$$\begin{array}{rl} \text{(P0) Max.} & 4x+5y \\ \text{s.a} & 2x+3y \leq 12 \\ & 8x+3y \leq 24 \\ & x,\, y \geq 0. \end{array}$$

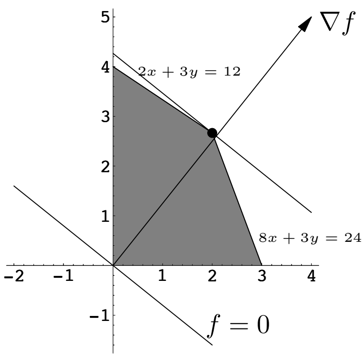
Hemos de resolver este problema por cualquier método disponible. De momento, el único método que conocemos es la resolución gráfica y ése vamos a emplear, aunque también podríamos aplicar cualquiera de los métodos que veremos en los temas siguientes para problemas de programación no lineal o de programación lineal, o también resolverlo con el ordenador. Si al resolverlo obtenemos una solución con variables enteras (en general, que tenga enteras las variables que el problema original pide que lo sean, que no tienen por qué ser todas), ya hemos terminado. En efecto:

> El primer paso para resolver un problema de programación entera es resolver el problema relajado (es decir, resolverlo sin exigir que las variables sean enteras). Si la solución obtenida ya cumple las condiciones de integridad, entonces se trata de la solución del problema dado, pues, si la mejor solución con variables continuas tiene variables enteras, es necesariamente también la mejor solución con variables enteras.

Vemos en la figura que la solución óptima se encuenta en el punto donde se cortan las dos rectas

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=12 \\ 8x+3y=24 \end{array}\right\}$$

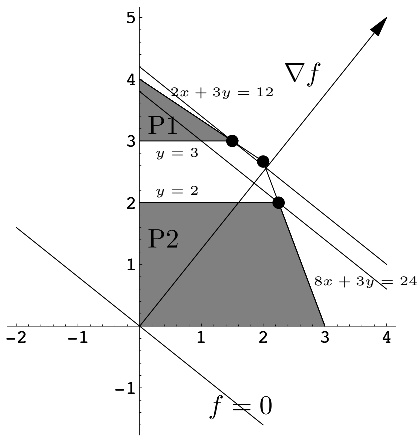
Al resolver el sistema de ecuaciones obtenemos la solución óptima $(x,y) = (2, 2.66)$, con $F = 21.33$. Vemos que la variable $y$ no es entera, luego no nos sirve como solución del problema original.



Cuando sucede esto, el paso siguiente es *ramificar* el problema. Para ello elegimos una variable que debería ser entera y no lo es en la solución obtenida (en este caso sólo tenemos la $y$) en esa situación, y planteamos los dos problemas siguientes:

$$\begin{array}{rl} \text{(P1) Max.} & 4x+5y \\ \text{s.a} & 2x+3y \leq 12 \\ & 8x+3y \leq 24 \\ & x,\, y \geq 0,\ y \geq 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{(P2) Max.} & 4x+5y \\ \text{s.a} & 2x+3y \leq 12 \\ & 8x+3y \leq 24 \\ & x,\, y \geq 0,\ y \leq 2 \end{array}$$

Es decir, como nos ha salido $y = 2.66$, un valor entre 2 y 3, añadimos las restricciones $y \leq 2$ e $y \geq 3$ de modo que excluimos todas las soluciones con $y$ comprendido entre 2 y 3 sin excluir con ello ninguna solución con la $y$ entera.




La figura muestra los conjuntos de oprtunidades de P1 y P2. Las soluciones óptimas se obtienen resolviendo los sistemas de ecuaciones

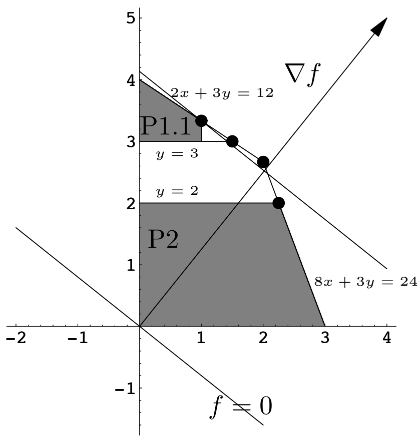
$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=12 \\ y=3 \end{array}\right\} (P1) \qquad \left.\begin{array}{r} 8x+3y=24 \\ y=2 \end{array}\right\} (P2)$$

y resultan ser

$$(P1) \Rightarrow (x,y) = (1.5, 3), \quad f = 21, \quad (P2) \Rightarrow (x,y) = (2.25, 2), \quad f = 19$$

Ahora hemos de repetir el proceso con ambos problemas pero, como estamos maximizando y la solución de P1 es mejor, nos fijamos primero en éste. Ahora es la variable $x$ la que no es entera y, como está entre 1 y 2, la ramificación correspondiente consiste en introducir las restricciones $x \leq 1$, $x \geq 2$, es decir, que hemos de resolver los problemas

$$\begin{array}{rl} \text{(P1.1) Max.} & 4x+5y \\ \text{s.a} & 2x+3y \leq 12 \\ & 8x+3y \leq 24 \\ & y \geq 3, x \leq 1 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{(P1.2) Max.} & 4x+5y \\ \text{s.a} & 2x+3y \leq 12 \\ & 8x+3y \leq 24 \\ & y \geq 3, x \geq 2 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$



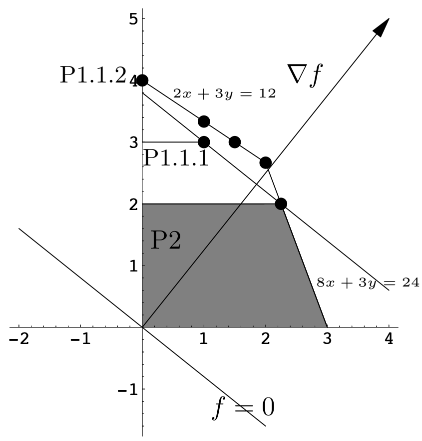

En la figura anterior se ve que P1.2 es infactible, porque el conjunto de oportunidades de P1 no tiene ningún punto que cumpla $x \geq 2$. La figura de la derecha muestra el conjunto de oportunidades de P1.1, y en ella vemos que la solución óptima cumple las ecuaciones $2x + 3y = 12$ y $x = 1$, luego resulta ser

$$(P1.1) \Rightarrow (x,y) = (1, 3.33) \qquad f = 20.66.$$

Como ahora vuelve a ser la $y$ la que no es entera y está entre 3 y 4, ramificamos P1.1 con las restricciones $y \leq 3$, $y \geq 4$. Esto significa plantear los problemas

$$\begin{array}{rl} \text{(P1.1.1) Max.} & 4x+5y \\ \text{s.a} & 2x+3y \leq 12 \\ & 8x+3y \leq 24 \\ & y \geq 3, x \leq 1,\ y \leq 3 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{(P1.1.2) Max.} & 4x+5y \\ \text{s.a} & 2x+3y \leq 12 \\ & 8x+3y \leq 24 \\ & y \geq 3, x \leq 1,\ y \geq 4 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

El conjunto de oportunidades de P1.1.1 se reduce a un segmento, y la mejor solución es $(x,y) = (1,3)$, con $f = 19$, mientras que el de P1.1.2 se reduce al punto $(0,4)$, que es, por lo tanto, su solución óptima, con $f = 20$. De este modo hemos encontrado dos soluciones enteras. Obviamente $(1,3)$ no puede ser la solución óptima, porque $(0,4)$ es mejor, pero, en principio, no podemos asegurar que $(0,4)$ sea el óptimo que estamos buscando porque el problema P2, que tenemos pendiente de estudio, podría darnos otra solución mejor.



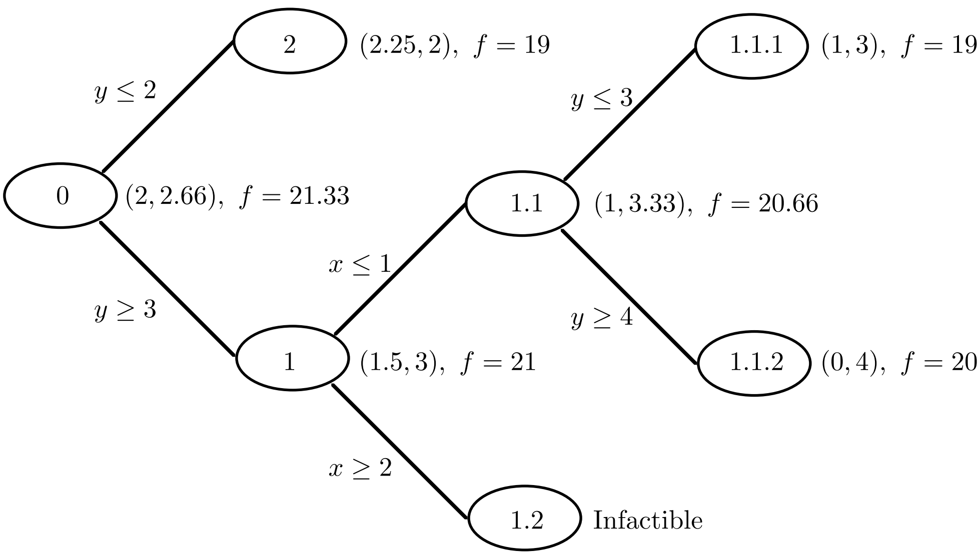

Ahora bien, vamos a ver que, en realidad, ya podemos terminar el proceso. Para ello conviene representar todos los pasos que hemos dado hasta aquí en un diagrama en forma de árbol, que conviene ir completando a medida que resolvemos cada problema. Vemos a la izquierda el nodo 0 que representa al problema P0, en el que hemos indicado su solución y el valor óptimo de la función objetivo. De él parten dos ramas que llevan a los problemas P1 y P2. En las ramas indicamos las restricciones que hemos añadido a cada problema. El problema 2 está pendiente de ramificación, mientras que del problema 1 hemos llegado al problema 1.1, que a su vez hemos ramificado, y al problema 1.2 infactible.

En general, cada nuevo nodo que aparece en el árbol ha de ser ramificado (en el momento o más adelante) salvo que se dé uno de estos tres casos:

1. El nodo corresponde a una solución entera (es decir, una solución para la que sean enteras todas las variables que el problema original pide que sean enteras). Es lo que les sucede a los nodos 1.1.1 y 1.1.2.

2. El nodo corresponde a un problema infactible. Es lo que le sucede al nodo 1.2.

3. El nodo corresponde a una solución cuya función objetivo sea peor que la de otro nodo correspondiente a una solución entera. Es lo que le sucede al nodo 2, que está acotado por el nodo 1.1.2 (y aquí es crucial que el nodo 1.1.2 corresponde a una solución entera, si no, no valdría la acotación).




En efecto, cuando se da el tercer caso, aunque la solución del nodo acotado no sea entera, podemos asegurar que no obtendremos la solución óptima ramificando dicho nodo. Esto se debe a que, como en cada paso de ramificación añadimos una nueva restricción, el valor de la función objetivo siempre empeora y, si en el nodo 2 ya es peor que en el nodo 1.1.2, las soluciones que obtendríamos ramificando el nodo 2 serían peores aún, luego nunca nos darán una solución mejor que la del nodo 1.1.2 y es inútil ramificar por ahí.

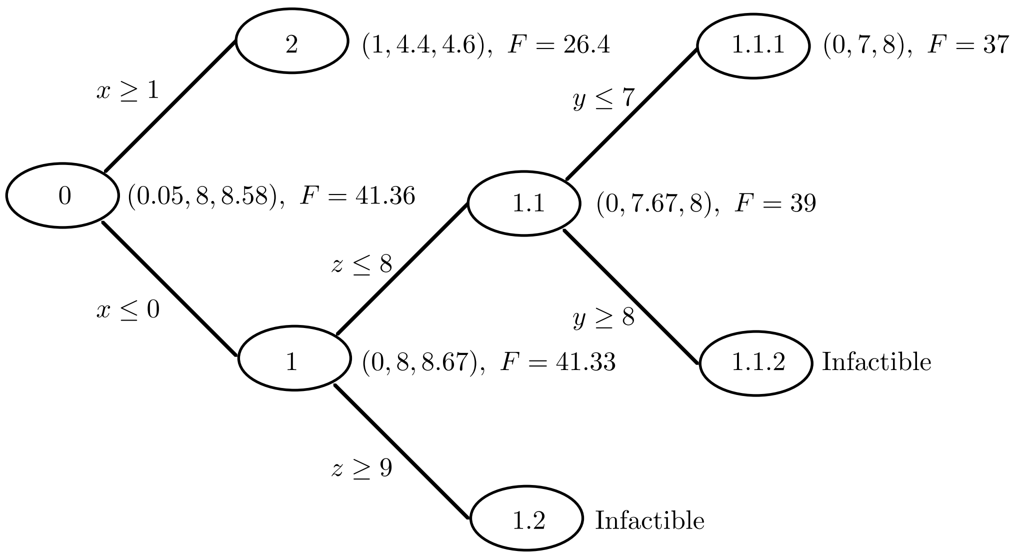
Cuando ya no queda ningún nodo por ramificar, como es nuestro caso, ya podemos decir que la solución óptima del problema original es la mejor solución entera que hemos encontrado, en nuestro caso la del nodo 1.1.2:

$$(x, y) = (0, 4) \qquad \text{con} \qquad f = 20.$$

Si comparamos esta solución con la que habíamos obtenido en el primer paso, es decir, al suponer sin más que las variables no eran enteras (que era $(x, y) = (2, 2.66)$), vemos que la solución óptima del problema entero no es la que resulta de redondear la solución del problema relajado, que sería $(2, 2)$ o $(2, 3)$. De hecho, $(2, 2)$ es peor que la solución óptima que hemos obtenido (pues $f(2, 2) = 18$) y $(2, 3)$ es infactible.

# Problemas

1. El esquema siguiente es el árbol de ramificación de un problema de programación entera de tres variables $(x, y, z)$.



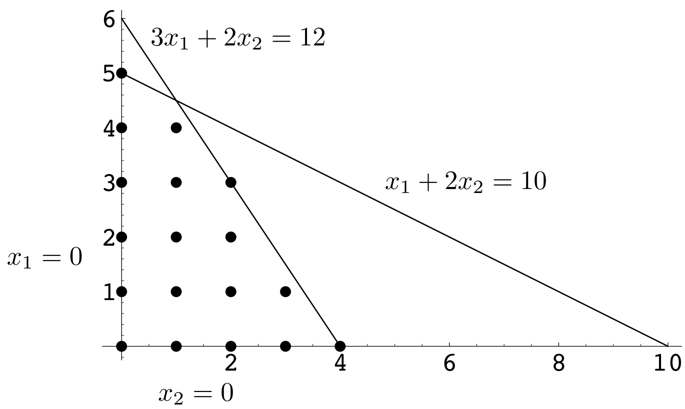

   (a) Razona si el objetivo del problema es de maximización o de minimización.

   (b) Razona si se ha llegado ya al óptimo. En caso contrario, indica qué nodo debe ramificarse y por medio de qué restricciones.

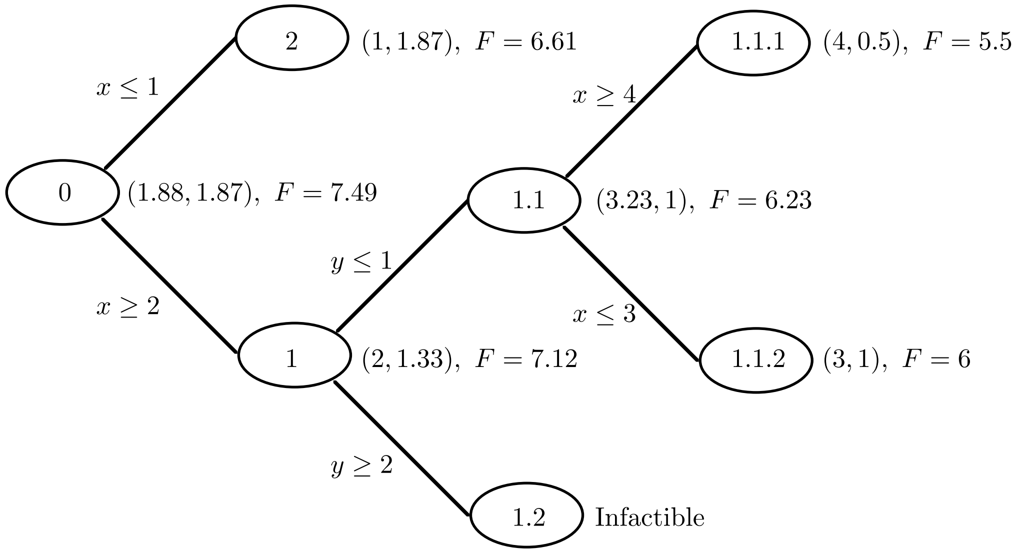
2. Resuelve el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x_1 + x_2 \\ \text{s.a} & 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \text{ enteras} \end{array}$$

   por el método de ramificación y acotación resolviendo gráficamente los problemas intermedios. Construye el árbol correspondiente y escribe el último problema que resuelvas.

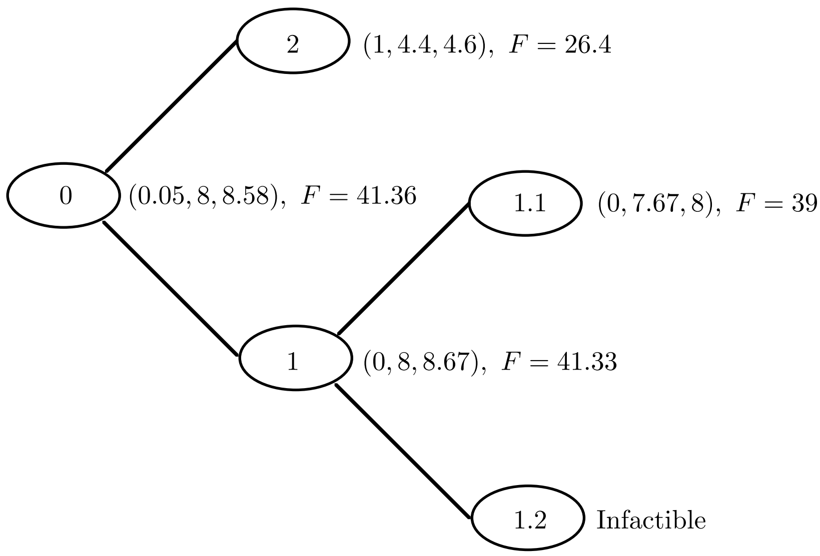


3. El esquema siguiente es el árbol de ramificación de un problema de programación entera de dos variables $(x, y)$.




   (a) Razona si el objetivo del problema es de maximización o de minimización.
   (b) Razona si se ha llegado ya al óptimo. En caso contrario, indica qué nodo debe ramificarse y por medio de qué restricciones.

4. El esquema siguiente es el árbol de ramificación de un problema de programación entera mixta, donde las variables $x$, $z$ son enteras.




   (a) Razona si el objetivo del problema de de maximización o de minimización.
   (b) Razona si se ha llegado ya al óptimo. En caso contrario, indica qué nodo debe ramificarse y por medio de qué restricciones.
   (c) Escribe el problema resuelto en el nodo 1.2.

5. Resuelve los problemas

$$
\begin{array}{rl}
\text{Min.} & x^4 + y^2 + 3z^2 \\
\text{s.a} & x + y + z \geq 5 \\
 & x,\, y,\, z \geq 0 \text{ enteras}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rl}
\text{Max.} & 2000 - 3x^2 - 2y^2 + xy - z^2 \\
\text{s.a} & 5x + 2y + z \geq 30 \\
 & x,\, y,\, z \geq 0 \text{ enteras}
\end{array}
$$

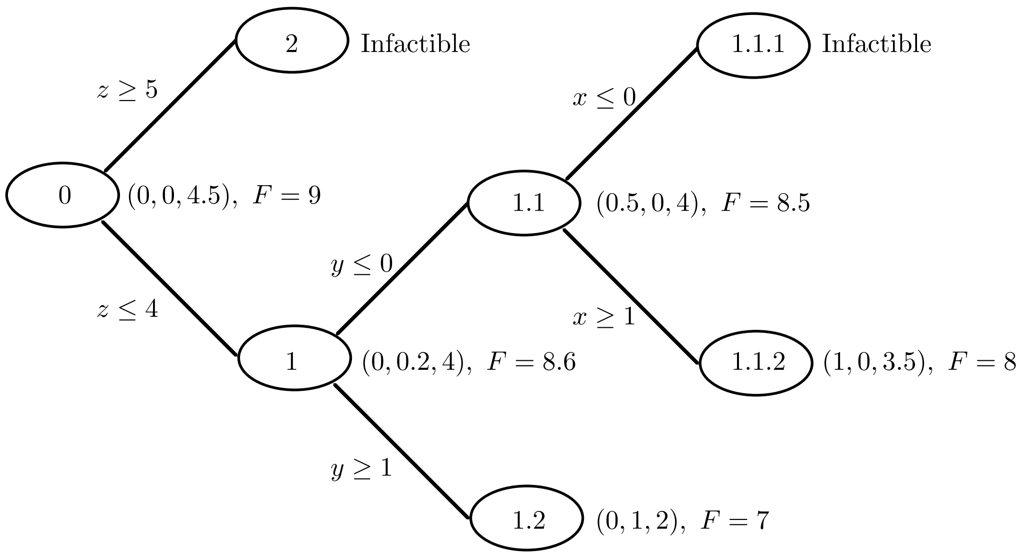
por el método de ramificación y acotación usando el ordenador para resolver los problemas intermedios. (Aplica el teorema local global para asegurarte de que los óptimos que te proporciona el ordenador son globales.) En caso de tener varias variables no enteras ramifica la menor en orden alfabético. Escribe el árbol que obtengas con las soluciones correspondientes y razona cuándo puedes dejar de ramificar cada nodo.

Resuelve los problemas directamente con el ordenador (como problemas de programación entera) y comprueba que llegas al mismo resultado.

6. Considera el problema

$$
\begin{array}{rl}
\text{Max.} & x + 3y + 2z \\
\text{s.a} & 2x + 5y + 2z = 9 \\
 & x + 2y + z > 1 \\
 & x,\, y,\, z \geq 0 \text{ enteras}
\end{array}
$$

Al aplicar el método de ramificación y acotación obtenemos el árbol siguiente.




Razona si conocemos ya la solución óptima o si hay que seguir ramificando. En este caso continúa la ramificación con ayuda del ordenador hasta que encuentres el óptimo. Escribe el último problema que resuelvas.

# Tema 3

# Introducción a la programación lineal

En este tema introducimos algunos conceptos y resultados específicos para problemas lineales que nos llevarán, en el tema siguiente, a un procedimiento práctico para resolver este tipo de problemas.

## 3.1 Hechos básicos de la programación lineal

Es fácil ver que las reglas para transformar problemas que vimos en el tema 1 convierten problemas lineales en problemas lineales. Dicho de otro modo, podemos transformar problemas sin perder por ello la linealidad. Hay dos formas especialmente importantes de presentar un problema lineal:

**Forma canónica de un problema lineal** Se llama así a la presentación de un problema en la que todas las variables son no negativas y las restricciones son de $\leq$ cuando el objetivo es maximizar o de $\geq$ cuando el objetivo es minimizar. Por lo tanto, un problema de maximizar en forma canónica tiene la estructura siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ \text{s.a} & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ & x_1, \ldots, x_n \geq 0. \end{array}$$

Es conveniente escribir el problema en forma matricial, para lo cual llamamos $A = (a_{ij})$, $\bar{b} = (b_i)$, $\bar{c} = (c_j)$, con lo que la expresión anterior se reduce a

$$\begin{array}{rr} \text{Max.} & \bar{c}^t\bar{x} \\ \text{s.a} & A\bar{x} \leq \bar{b} \\ & \bar{x} \geq \bar{0}. \end{array}$$

La matriz $A$ se llama *matriz técnica* del problema. El vector $\bar{c}$ es el *vector de coeficientes de la función objetivo* y $\bar{b}$ es el *vector de términos independientes.*

**Forma estándar de un problema lineal** Un problema lineal está en *forma estándar* si todas sus variables son no negativas y todas sus restricciones son de igualdad. Matricialmente, la expresión de un problema en forma estándar con objetivo de maximizar es

$$\begin{array}{rr} \text{Max.} & \bar{c}^t\bar{x} \\ \text{s.a} & A\bar{x} = \bar{b} \\ & \bar{x} \geq \bar{0}. \end{array}$$

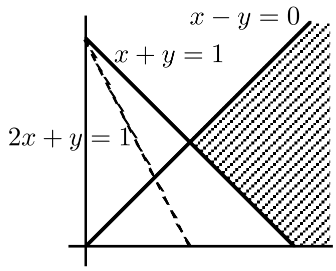
**Clases de problemas lineales** El esquema siguiente contiene todas las posibilidades con que nos podemos encontrar sobre existencia de óptimos en un problema lineal:

$$\text{Problema lineal}\begin{cases}\text{infactible}\\[2ex] \text{factible}\begin{cases}\text{acotado}\begin{cases}\text{solución única}\\ \text{infinitas soluciones}\end{cases}\\[2ex] \text{no acotado}\end{cases}\end{cases}$$

Veamos ejemplos sencillos de todos los casos:

$$\begin{array}{rl} \text{1) Min.} & x\\ \text{s.a} & x-y\geq 0\\ & x+y\geq 1\\ & x,\,y\geq 0 \end{array}\qquad \begin{array}{rl} \text{2) Min.} & x-y\\ \text{s.a} & x-y\geq 0\\ & x+y\geq 1\\ & x,\,y\geq 0 \end{array}\qquad \begin{array}{rl} \text{3) Max.} & x\\ \text{s.a} & x-y\geq 0\\ & x+y\geq 1\\ & x,\,y\geq 0 \end{array}\qquad \begin{array}{rl} \text{4) Max.} & x\\ \text{s.a} & x-y\geq 0\\ & x+y\geq 1\\ & 2x+y\leq 1\\ & x,\,y\geq 0 \end{array}$$

| Solución única | Infinitas soluciones | No acotado | Infactible |
|---|---|---|---|




El problema 1) tiene solución única en $(1/2, 1/2)$. Se dice que es una *solución de vértice* porque es un vértice del conjunto de oportunidades.

El problema 2) tiene como soluciones todos los puntos de la recta $x - y = 0$ que pertenecen al conjunto de oportunidades. Se dice que son *soluciones de arista infinita,* porque forman una arista infinita (semirrecta) de la frontera del conjunto de oportunidades. Si el objetivo fuera minimizar $x + y$, el problema tendría como soluciones a todos los puntos de la arista finita situada en la recta $x + y = 1$, y entonces se habla de una *solución de arista.*

El problema 3) es no acotado, es decir, aunque es factible no tiene solución, porque hay soluciones factibles con $x$ tan grande como se quiera, luego ninguna es un máximo de la función objetivo. Este caso sólo puede darse si el conjunto de oportunidades no está acotado, aunque puede ocurrir que el conjunto de oportunidades sea no acotado y el problema sea acotado (es el caso de los problemas 1 y 2).

El problema 4) es claramente infactible.

Del apartado siguiente se desprende entre otras cosas que —para problemas lineales— no hay más posibilidades.

**Conjunto de oportunidades y existencia de óptimos** Las observaciones siguientes son consecuencias inmediatas de la teoría general que ya conocemos:

- *El conjunto de oportunidades de un problema lineal es convexo.*

  Ello se debe a que está definido por desigualdades de funciones lineales, luego es una intersección de semiespacios, los semiespacios son convexos y la intersección de conjuntos convexos es convexa.

- Aunque un problema lineal sea factible, no tiene por qué tener solución óptima. Lo máximo que podemos decir en general es lo que afirma el teorema de Weierstrass: si el conjunto de oportunidades es compacto entonces existirá solución óptima. No obstante, puede haber solución óptima aunque el conjunto de oportunidades no sea compacto (por ejemplo, es el caso del problema 1 anterior).
- *Los óptimos de un problema lineal (en caso de existir) son globales.*

  Esto es por el teorema local-global, ya que el conjunto de oportunidades es convexo y la función objetivo es a la vez cóncava y convexa, por ser lineal.
- *Las soluciones óptimas de un problema lineal (en caso de existir) son siempre soluciones de frontera, nunca interiores, y al menos una se alcanza siempre en un vértice del conjunto de oportunidades.*
- *Si dos soluciones factibles son óptimas, también lo son todas las soluciones del segmento comprendido entre ambas.*

## 3.2 Soluciones factibles básicas

En la sección anterior hemos hablado de vértices del conjunto de oportunidades, si bien no hemos dado ninguna definición precisa de este concepto. Podríamos dar una definición geométrica de vértice, pero no merece la pena, pues la forma operativa de trabajar con los vértices de un politopo es a través de una caracterización algebraica que vamos a ver ahora.

**Definición** Consideremos un problema lineal en forma estándar con $n$ variables y $m$ restricciones (sin contar las condiciones de no negatividad), es decir,

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & \bar{c}^t\bar{x} \\ \text{s.a} & A\bar{x} = \bar{b} \\ & \bar{x} \geq \bar{0} \end{array}$$

Una *solución básica* del problema es una solución $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ que cumpla las tres condiciones siguientes:

1. Satisface las restricciones $A\bar{x} = \bar{b}$.
2. Tiene $n - m$ componentes nulas, a las que llamaremos *variables no básicas* de la solución. A las variables restantes (nulas o no) las llamaremos *variables básicas.*
3. La submatriz de $A$ formada por las columnas asociadas a las variables básicas (a la que llamaremos *matriz básica* de la solución) tiene determinante no nulo.

Representaremos por $\bar{x}_B$ al vector de variables básicas de una solución básica dada, mientras que $\bar{x}_N$ denotará el vector de variables no básicas. La matriz básica la representaremos siempre por $B$, mientras que $N$ representará la *matriz no básica,* es decir, la submatriz de $A$ formada por las columnas asociadas a las variables no básicas. *Notemos que la matriz básica es necesariamente una matriz cuadrada.*

Para expresar estas descomposiciones escribiremos $\bar{x} = (\bar{x}_B, \bar{x}_N)$, $A = (B, N)$, $\bar{c} = (\bar{c}_B, \bar{c}_N)$, etc.

Es importante observar que, pese a la condición 1 de la definición, una solución básica $\bar{x}$ no es necesariamente factible, pues para que lo sea no sólo debe cumplir las restricciones $A\bar{x} = \bar{b}$, sino también las condiciones de no negatividad $\bar{x} \geq 0$, y esto no lo exige la definición de solución básica. Cuando una solución sea a la vez factible y básica diremos que es una *solución factible básica.*[1]

También hemos de tener presente que la definición de solución básica exige que las variables no básicas sean nulas, pero las variables básicas pueden ser nulas o no serlo.

Una solución básica es *degenerada* si alguna de sus variables básicas es nula.

[1]Notemos que para que un problema pueda tener soluciones básicas hace falta que la matriz técnica contenga un menor de orden $m$ no nulo (donde $m$ es el número de restricciones), lo cual equivale a que tenga rango $m$. Si no fuera así, podríamos eliminar restricciones linealmente dependientes hasta que el rango fuera $m$.

**Ejemplo** Consideremos el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 4x+5y \\ \text{s.a} & 2x+y \le 8 \\ & \qquad y \le 5 \\ & x,\, y \ge 0 \end{array}$$

Para poder hablar de soluciones básicas necesitamos ponerlo primero en forma estándar, introduciendo para ello dos variables de holgura:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 4x+5y \\ \text{s.a} & 2x+y+s = 8 \\ & \qquad y+t = 5 \\ & x,\, y,\, s,\, t \ge 0 \end{array}$$

Así tenemos $m = 2$ ecuaciones con $n = 4$ incógnitas, luego la definición de solución básica exige que al menos $n - m = 2$ componentes sean nulas. La matriz técnica es

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & s & t \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Vamos a comprobar que $\bar{x} = (0, 0, 8, 5)$ es una solución factible básica del problema. Obviamente, para ello hemos de considerar $(x, y)$ como variables no básicas y $(s, t)$ como variables básicas. Vemos que se cumple la segunda condición de la definición. La primera condición es $A\bar{x} = \bar{b}$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix},$$

lo cual es cierto. Por último, la tercera condición exige que la matriz formada por las columnas asociadas a las variables básicas, esto es,

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} s & t \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

tenga determinante no nulo, lo cual es claramente cierto.

Con esto hemos comprobado que $\bar{x}$ es una solución básica. Como además satisface $\bar{x} \ge 0$, concluimos que es una solución factible básica. ■

**Observación importante** Si $\bar{x} = (\bar{x}_B, \bar{x}_N) = (\bar{x}_B, \bar{0})$ es una solución básica de un problema lineal, la condición $A\bar{x} = \bar{b}$ se reduce a $B\bar{x}_B = \bar{b}$ (pues $A = (B, N)$, y los coeficientes de $N$ se multiplican por las variables no básicas, que valen todas 0). Como la matriz básica $B$ tiene determinante no nulo, existe la matriz inversa, y podemos despejar:

$$\bar{x}_B = B^{-1}\bar{b}.$$

Esto significa que si fijamos *cuáles* son las variables básicas, podemos calcular *cuánto* valen o, dicho de otro modo, que no puede haber más que una solución básica con unas variables básicas prefijadas. Notemos también que puede no haber ninguna. Esto sucede si la submatriz asociada a las (presuntas) variables básicas tiene determinante 0.

**Ejemplo** Continuemos con el problema anterior

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 4x+5y \\ \text{s.a} & 2x+y+s=8 \\ & y+t=5 \\ & x,\, y,\, s,\, t \geq 0 \end{array} \qquad A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & s & t \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

y vamos a ver si existe una solución básica con variables básicas $(y, t)$. Para ello comprobamos que la submatriz correspondiente

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene determinante $|B| = 1 \neq 0$, luego sí que existe solución básica. Para calcularla hacemos

$$\begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix} = \bar{x}_B = B^{-1}\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Las componentes no básicas han de ser nulas, luego la solución básica es

$$(x, y, s, t) = (0, 8, 0, -3).$$

Como la solución no es no negativa, vemos que no es factible, luego concluimos que no hay soluciones factibles básicas con variables básicas $(y, t)$. ■

**Ejemplo** El problema anterior no tiene soluciones básicas con variables básicas $(x, s)$, pues la submatriz correspondiente es

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y tiene determinante nulo. ■

**Ejemplo** Calcula todas las soluciones factibles básicas del problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 2x+y \\ \text{s.a} & x+y \geq 1 \\ & x-2y \geq 0 \\ & x-y \leq 1 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

Solución: En primer lugar ponemos el problema en forma estándar y calculamos la matriz técnica:

$$\begin{array}{rr} \text{Max.} & 2x+y \\ \text{s.a} & x+y-s=1 \\ & x-2y-t=0 \\ & x-y+u=1 \\ & x,\, y,\, s,\, t,\, u \geq 0 \end{array}, \qquad A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & s & t & u \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Cada solución básica ha de tener tres variables básicas y dos no básicas. Hay 10 posibilidades para las variables básicas:

$$(x, y, s),\ (x, y, t),\ (x, y, u),\ (x, s, t),\ (x, s, u),\ (x, t, u),\ (y, s, t),\ (y, s, u),\ (y, t, u),\ (s, t, u).$$

Para cada una de ellas, hemos de ver si determina una solución básica y, en tal caso, ver si es factible. Por ejemplo, para $(x, y, s)$ tenemos que la submatriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene determinante $|B| = -1$, luego existe solución básica, dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ s \end{pmatrix} = B^{-1}\bar{b} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La solución completa es $(x, y, s, t, u) = (2, 1, 2, 0, 0)$, que es factible, porque es no negativa.

Si tomamos $(x, y, t)$ como variables básicas, la matriz básica ha de ser

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $|B| = -2 \neq 0$, existe solución básica, dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = B^{-1}\bar{b} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La solución completa es $(x, y, s, t, u) = (1, 0, 0, 1, 0)$. Se trata de una solución factible básica.

Observemos que la solución que hemos encontrado tiene una variable básica nula, lo cual hace que ésta sea también la solución básica correspondiente a las variables básicas $(x, s, t)$ y $(x, t, u)$ (se comprueba que las matrices correspondientes tienen determinante no nulo). Nos quedan 6 casos por estudiar. Procediendo del mismo modo se llega únicamente a una solución factible básica más, a saber

$$(x, y, s, t, u) = (2/3, 1/3, 0, 0, 2/3).$$

Las soluciones básicas correspondientes a los 5 casos restantes resultan ser infactibles.

En definitiva, las soluciones factibles básicas $(x, y, s, t, u)$ son

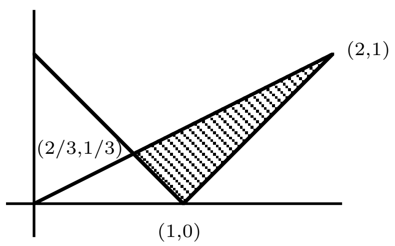
$$(2, 1, 2, 0, 0), \quad (1, 0, 0, 1, 0), \quad (2/3, 1/3, 0, 0, 2/3).$$

■

Si en el resultado del ejemplo anterior eliminamos las variables de holgura, obtenemos los puntos $(x, y)$ siguientes:

$$(2, 1), \quad (1, 0), \quad (2/3, 1/3).$$

Por otra parte, si representamos el conjunto de oportunidades vemos que es




Vemos así algo que, en realidad, es un hecho general que explica el interés de las soluciones factibles básicas:

*Las soluciones factibles básicas de un problema lineal son los vértices de su conjunto de oportunidades.*

Ahora podemos reformular en términos de soluciones factibles básicas un hecho que ya habíamos comentado en términos de vértices:

**Teorema fundamental de la programación lineal** *Consideremos un problema de programación lineal:*

1. *Si el problema tiene soluciones factibles, entonces (escrito en forma estándar) tiene al menos una solución factible básica.*
2. *Si el problema tiene solución óptima, entonces (escrito en forma estándar) tiene una solución óptima que es factible básica.*

Esto es crucial porque un problema factible tiene infinitas soluciones factibles, pero sólo un número finito de soluciones factibles básicas. Por lo tanto, si el problema es acotado, para encontrar el óptimo basta buscar la solución factible básica donde la función objetivo sea mayor (o menor).

Desgraciadamente, calcular todas las soluciones factibles básicas es, por lo general, una tarea ardua. En el tema siguiente veremos un método para rastrear el óptimo entre las soluciones factibles básicas sin necesidad de calcularlas todas.

# Problemas

1. Dado el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 2x + 3y + z \\ \text{s.a} & x + 2y + z \leq 30 \\ & x + y \leq 20 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \end{array}$$

   Determina cuáles de las soluciones siguientes son soluciones factibles básicas:

$$(10, 10, 0, 0, 0), \quad (0, 0, 0, 30, 20), \quad (20, 0, 5, 5, 0), \quad (0, 0, 30, 0, 20), \quad (20, 0, 5, 0, 0).$$

2. Considera el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 4x + 2y + 4z \\ \text{s.a} & x \leq 5 \\ & 2x + y + z = 4 \\ & y + 2z = 3 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \end{array}$$

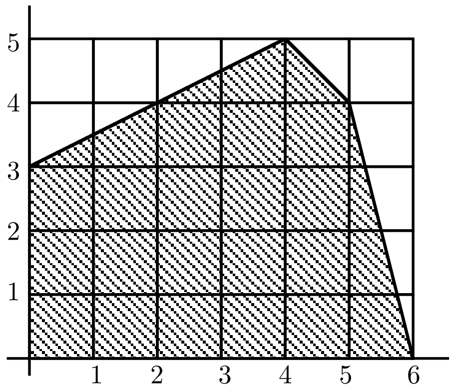
   (a) Determina si existe una solución factible básica con variables básicas $x$, $y$, $z$.

   (b) Comprueba si $(1/2, 3, 0, 9/2)$, $(1, 1, 1, 4)$, $(0, 5, -1, 5)$ son soluciones factibles básicas. En caso de no serlo, indica si no son factibles o no son básicas (o ambas cosas).

   (c) Calcula todas las soluciones factibles básicas y el valor de la función objetivo en cada una de ellas.

   (d) Justifica que el problema tiene solución óptima y calcúlala.

3. Un problema lineal tiene el conjunto de oportunidades indicado en la figura:




   (a) Calcula (las variables principales de) todas las soluciones factibles básicas.
   (b) Si el objetivo es maximizar $4x - y$, calcula la solución óptima.

4. Calcula todas las soluciones factibles básicas de los problemas

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 2x - 3y \\ \text{s.a} & x + y \leq 1 \\ & x - y \leq 0 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Max.} & x + 2y \\ \text{s.a} & x + y \leq \ \ 3 \\ & x - y \leq \ \ 1 \\ & x - y \geq -1 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Max.} & x + 2y \\ \text{s.a} & x + 2y \geq 2 \\ & -x + 2y \leq 4 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

   e indica la base correspondiente a cada una de ellas. Calcula también la solución óptima.

5. Consideremos el problema

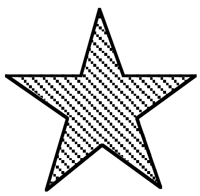
$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 14 \\ & x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0 \end{array}$$

   (a) Determina la solución factible básica correspondiente a las variables básicas $x_1$, $x_2$.
   (b) Calcula otras dos soluciones factibles básicas más.
   (c) Calcula una solución básica no factible.
   (d) Calcula una solución factible no básica.

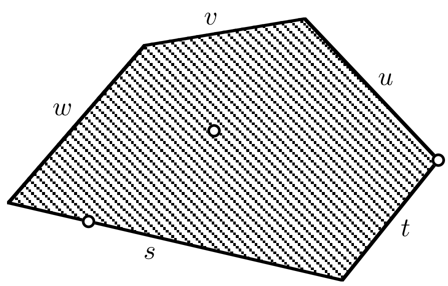
# Cuestiones

1. Un problema lineal de maximizar en forma estándar tiene cuatro soluciones factibles básicas $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$, $\bar{x}_4$, sobre las cuales la función objetivo toma los valores $z_1 = 3$, $z_2 = -4$, $z_3 = 8$, $z_4 = 6$. Explica por qué no podemos asegurar que $\bar{x}_3$ es la solución óptima del problema.

2. Razona si el conjunto indicado en la figura puede ser el conjunto de oportunidades de un problema lineal.



3. La figura representa el conjunto de oportunidades de un problema de programación lineal en forma canónica (contenido en el cuadrante $x > 0$, $y > 0$). Las letras sobre las aristas indican la variable de holgura correspondiente a la restricción.




   (a) ¿Cuántas variables básicas tiene una solución básica?
   (b) De los tres puntos señalados en la figura, di cuáles son soluciones factibles básicas y cuáles no. De los que lo sean, indica cuáles son las variables básicas.
   (c) Di cuáles de los tres puntos pueden ser óptimos del problema y cuáles no.
   (d) Para cada uno de los tres puntos indica si cada una de las variables es positiva, negativa o nula.
   (e) ¿Puede ser $x$ una variable no básica en alguna solución factible básica?
   (f) ¿El problema puede ser no acotado?, ¿puede ser infactible?, ¿puede tener soluciones de arista?, ¿y de arista infinita?

# Tema 4

# El método símplex

Lo visto en el tema anterior nos da un algoritmo muy poco operativo, pero conceptualmente muy simple para resolver un problema lineal: calculamos todas las soluciones factibles básicas, evaluamos en ellas la función objetivo y nos quedamos con la mejor. Este “método” presenta tres inconvenientes:

1. Sólo es válido si el problema es acotado (y no nos dice si lo es o no).

2. Hay demasiadas soluciones factibles básicas. Por ejemplo, en un problema pequeño, con tres restricciones y ocho variables, hemos de investigar 56 matrices $3 \times 3$, de las que hemos de calcular su determinante y, si es no nulo, la matriz inversa.

3. En cada paso, las operaciones a realizar son laboriosas (calcular determinantes e inversas).

En este tema veremos un algoritmo conocido como “método símplex” que simplifica enormemente el proceso, a la vez que nos permite determinar si un problema es o no acotado, y si tiene una o infinitas soluciones.

## 4.1 Descripción general del símplex

Dado un problema de programación lineal, el método símplex consiste en partir de un vértice de su conjunto de oportunidades —es decir, de una solución factible básica— e ir saltando sucesivamente de una a otra adyacente, de modo que la función objetivo mejore siempre (o, al menos, no empeore nunca). Cuando llegamos a una solución desde la cual no podemos saltar a otra contigua mejor, el proceso termina, ya sea porque hemos encontrado el óptimo, ya sea porque hemos llegado a un extremo de una arista infinita a través de la cual la función objetivo mejora indefinidamente (y el problema es no acotado). Con esto eliminamos los inconvenientes del método de “fuerza bruta” que habíamos planteado:

1. Cuando el método símplex termina, sabemos si lo hace porque ha encontrado el óptimo o porque el problema es no acotado.

2. No es necesario calcular todas las soluciones factibles básicas, sino sólo recorrer algunas de ellas por un camino que, en general, lleva con bastante rapidez a la solución óptima.

3. Una vez calculada una solución factible básica, el método símplex nos permite calcular otra adyacente mediante operaciones muy sencillas, sin necesidad de volver a calcular determinantes o matrices inversas.

Más concretamente, a cada solución factible básica le asociaremos una tabla que contendrá toda la información que el símplex necesita para pasar a otra adyacente. Esta información contendrá, naturalmente, las coordenadas de la solución y el valor de la función objetivo, pero también lo necesario para determinar a cuál de las aristas contiguas conviene saltar para que la función objetivo aumente más rápidamente (en particular, para que nunca disminuya).

Geométricamente, dos vértices de un politopo son adyacentes si están unidos por una arista, pero en la práctica usaremos la siguiente caracterización algebraica de la adyacencia. Recordemos que un vértice (o una solución factible básica) está completamente determinado cuando fijamos cuáles de las variables son básicas.

**Teorema** *Dos soluciones factibles básicas son adyacentes si y sólo si se diferencian únicamente en una variable básica, es decir, si hay una única variable que es básica para una y no para la otra (y, por consiguiente, hay una variable no básica para una que es básica para la otra).*

Dicho de otro modo, para pasar de una solución factible básica a otra adyacente, hemos de elegir una variable básica para que deje de serlo, y una no básica para que pase a serlo. El método símplex nos dirá cómo debemos elegir estas variables para que la función objetivo mejore con ello.

## 4.2 La tabla del símplex

Consideremos un problema lineal en forma estándar

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & \bar{c}^t\bar{x} \\ \text{s.a} & A\bar{x} = \bar{b} \\ & \bar{x} \geq 0 \end{array}$$

y consideremos una solución factible básica $\bar{x} = (\bar{x}_B, \bar{x}_N)$. Recordemos que $\bar{x}_B = B^{-1}\bar{b}$. Teniendo en cuenta que $\bar{x}_N = \bar{0}$, observamos que el valor de la función objetivo en $\bar{x}$ es

$$z = \bar{c}^t\bar{x} = \bar{c}_B^t\bar{x}_B = \bar{c}_B^t B^{-1}\bar{b}.$$

La *tabla del símplex* asociada a la solución es la siguiente:

$$\begin{array}{cc|c|c|} & & c_1 \ \cdots \ c_n & \\ & & x_1 \ \cdots \ x_n & \\ \cline{3-4} \bar{c}_B & \bar{x}_B & Y = B^{-1}A & \bar{x}_B = B^{-1}\bar{b} \\ \cline{3-4} & & \bar{z} = \bar{c}_B^t Y & \\ \cline{3-3} & & \bar{w} = \bar{c} - \bar{z} & \bar{c}_B^t B^{-1}\bar{b} \\ \cline{3-4} \end{array}$$

Hay que aclarar que el $\bar{x}_B$ que aparece a la izquierda, así como los $x_1, \ldots, x_n$, representan los *nombres* de las variables, mientras que el $\bar{x}_B$ que aparece a la derecha representa los *valores* de las variables básicas. También conviene observar que para calcular cada componente $w_i$ del vector $\bar{w}$ la expresión explícita es

$$w_i = c_i - \bar{c}_B B^{-1}A.$$

En la sección siguiente veremos la interpretación de los datos contenidos en la tabla, pero de momento veamos un ejemplo de cómo se construye.

**Ejemplo** Calcular la tabla del símplex correspondiente al problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 2x + y \\ \text{s.a} & x + \ \ y - s = 1 \\ & x - 2y - t = 0 \\ & x - \ \ y + u = 1 \\ & x,\ y,\ s,\ t,\ u \geq 0 \end{array}$$

y a las variables básicas $x$, $y$, $s$.

Solución: Ya hicimos parte de los cálculos de este ejemplo al final del tema anterior, pero por conveniencia los repetiremos aquí: Las matrices son

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & s & t & u \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad Y = B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\bar{x}_B = B^{-1}\bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Con estos cálculos ya podemos construir la tabla:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| | | $x$ | $y$ | $s$ | $t$ | $u$ | |
| 2 | $x$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 |
| 1 | $y$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | $s$ | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 2 |
| | | 2 | 1 | 0 | 3 | 5 | 5 |
| | | 0 | 0 | 0 | −3 | −5 | |

Notemos que la parte inferior de la tabla se calcula directamente a partir de los datos de la parte superior. ■

Observemos que la submatriz de $Y$ correspondiente a las variables básicas es la identidad. Esto siempre es así.

Existe un caso que se da con relativa frecuencia en el que el cálculo de la tabla es mucho más sencillo. Se trata del caso en que la matriz técnica $A$ tiene una submatriz igual a la identidad y, además, el vector de términos independientes cumple $\bar{b} \geq \bar{0}$. Por ejemplo, las variables de holgura proporcionan una matriz identidad en todos los problemas en los que las restricciones sean de $\leq$. En este caso, tomamos como variables básicas las correspondientes a las columnas que dan la matriz identidad, con lo que $B = I$ y por consiguiente $Y = A$, $\bar{x}_B = \bar{b}$. Observemos que si no se cumpliera $\bar{b} \geq \bar{0}$, entonces la solución básica no sería factible.

**Ejemplo** Calcular una tabla del símplex para el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 4x + 5y \\ \text{s.a} & 2x + y \leq 8 \\ & \phantom{2x+{}} y \leq 5 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

Solución: Introducimos variables de holgura:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 4x + 5y \\ \text{s.a} & 2x + y + s = 8 \\ & \phantom{2x+{}} y + t = 5 \\ & x,\, y,\, s,\, t \geq 0 \end{array}$$

De este modo,

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & s & t \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Como los términos independientes son no negativos, podemos tomar $s$ y $t$ como variables básicas, y entonces $B$ es la matriz identidad. La tabla correspondiente es

$$\begin{array}{cc|cccc|c} & & 4 & 5 & 0 & 0 & \\ & & x & y & s & t & \\ \hline 0 & s & 2 & 1 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & t & 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ \hline & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \cline{3-6} & & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

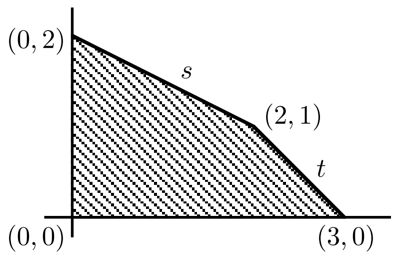
■

## 4.3 Interpretación de la tabla del símplex

Para entender el algoritmo del símplex es necesario saber interpretar sus tablas. Consideremos por ejemplo el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x - y \\ \text{s.a} & x + 2y \leq 4 \\ & x + \ \ y \leq 3 \\ & x,\, y \geq 0, \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{rl} \text{Max.} & x - y \\ \text{s.a} & x + 2y + s = 4 \\ & x + \ \ y + t = 3 \\ & x,\, y,\, s,\, t \geq 0, \end{array}$$

cuyo conjunto de oportunidades es




Aunque podríamos construir fácilmente una tabla tomando como variables básicas las de holgura —lo cual nos situaría en el vértice $(0, 0)$—, será más ilustrativo partir del vértice $(0, 2)$, cuya tabla asociada es

$$\begin{array}{cc|cccc|c} & & 1 & -1 & 0 & 0 & \\ & & x & y & s & t & \\ \hline -1 & y & 1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 2 \\ 0 & t & 1/2 & 0 & -1/2 & 1 & 1 \\ \hline & & -1/2 & -1 & -1/2 & 0 & \\ \cline{3-6} & & 3/2 & 0 & 1/2 & 0 & -2 \\ \hline \end{array}$$

La última columna de la tabla nos indica que estamos en el punto $(x, y, s, t) = (0, 2, 0, 1)$ y que la función objetivo vale $z = -2$. Desde este vértice tenemos la posibilidad de saltar al vértice $(2, 1)$, donde la función objetivo vale $z = 1$, o bien al vértice $(0, 0)$, donde la función objetivo vale $z = 0$. Vemos, pues, que es mejor saltar a $(2, 1)$. La cuestión es cómo deducir esto de la tabla y no del dibujo.

Ante todo, observemos que saltar a $(2, 1)$ significa permitir que la variable $x$ deje de valer 0 (pase a ser básica), mientras que la variable $t$ pasa a valer 0 (no básica). Igualmente, saltar a $(0, 0)$ significa que la variable $s$ entra en la base al tiempo que sale $y$.

El algoritmo del símplex será evidente en cuanto comprendamos el significado de todos los elementos de la tabla:

**Coeficientes de la función objetivo $c_j$** La función objetivo es $z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$, luego

$$c_j = \frac{\partial z}{\partial x_j}.$$

Por consiguiente, $c_j$ *es el incremento que experimenta la función objetivo* $z$ *por cada unidad que aumenta la variable* $x_j$ *(supuesto que las demás variables permanecen constantes).*

En el ejemplo, vemos que por cada unidad que aumenta la $x$ la función objetivo aumenta en 1 y por cada unidad que aumenta la $y$ la función objetivo disminuye en 1. Al aumentar las variables $s$ y $t$ la función objetivo no se altera (esto ocurre siempre con las variables de holgura, porque no aparecen en la función objetivo).

**Coeficientes de la matriz $Y$** Si nos movemos por una arista del conjunto de oportunidades, por ejemplo, la que va de $(0,2)$ a $(2,1)$ estamos aumentando la variable $x$, de modo que pasa de ser no básica (valer 0) a hacerse básica (con valor 2). Ahora bien, no podemos decir que la función objetivo aumenta

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x = 1 \cdot 2 = 2,$$

porque, al movernos por la arista, el incremento de $x$ obliga a modificar también la $y$ y, en general, a modificar las demás variables básicas. Se puede probar que

$$-y_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j},$$

es decir, $-y_{ij}$ *es el incremento que experimenta la variable básica* $x_i$ *por cada unidad que aumentamos la variable no básica* $x_j$*, supuesto que las demás variables no básicas permanecen constantes y que nos movemos sobre una arista del conjunto de oportunidades.*

En nuestro ejemplo, si nos movemos de $(0,2)$ a $(2,1)$, es decir, si aumentamos la $x$ pero dejamos fija la variable no básica $s$, por cada unidad que aumenta $x$ la variable $y$ disminuye $1/2$ y la variable $t$ también disminuye $1/2$.

**Rendimientos indirectos $z_j$** Según lo que acabamos de decir, si nos movemos de $(0,2)$ a $(2,1)$, por cada unidad que aumenta $x$ la $y$ se incrementa en $-1/2$, lo que hace que la función objetivo se incremente en $\Delta_y z = (-1)(-1/2)$, y la variable $t$ se incrementa en $-1/2$, lo que hace que la función objetivo se incremente en $\Delta_t z = 0 \cdot (-1/2)$, luego, en total, la variación de las variables básicas produce un incremento en la función objetivo de $-z_x = (-1)(-1/2) + 0 \cdot (-1/2) = 1/2$. En general:

$-z_j$ *es el incremento que experimenta la función objetivo por cada unidad que incrementamos la variable no básica* $x_j$ *siguiendo una arista y manteniendo constantes las demás variables no básicas debido a la variación correspondiente de las variables básicas.*

**Rendimientos marginales $w_j$** Puesto que $w_j = c_j - z_j$, vemos que $w_j$ es la suma de la variación de $z$ producida directamente por un aumento unitario de $x_j$ más la variación indirecta debida a la modificación de las variables básicas. En definitiva,

$$w_j = \frac{\partial z}{\partial x_j},$$

donde ahora consideramos a $z$ sólo como función de las variables no básicas. Es decir:

*El rendimiento marginal $w_j$ es el incremento que experimenta la función objetivo por cada unidad que aumenta la variable no básica $x_j$, suponiendo que las demás variables no básicas permanecen constantes pero teniendo en cuenta la variación necesaria de las variables básicas para mantenernos sobre una arista del conjunto de oportunidades.*

En nuestro ejemplo, la última fila de la tabla nos dice que si aumentamos la $x$ para ir a $(2,1)$ la función objetivo aumenta a un ritmo de $3/2$ unidades por cada unidad de $x$, mientras que si aumentamos la $s$ para ir a $(0,0)$, la función objetivo aumenta a un ritmo de $1/2$ unidades por cada unidad de $s$. En otras palabras, la función objetivo crece más rápidamente si hacemos básica a la $x$ que si hacemos básica la $s$. Esto se ve directamente en la tabla y es la razón por la que el símplex elige hacer básica a la $x$. Concretamente, el método símplex establece el siguiente

**Criterio de entrada (para maximizar)** *La variable no básica $x_j$ que ha de entrar en la base es aquella para la cual $w_j > 0$ es máximo. Si hay empate se elige una cualquiera, y si $w_j \leq 0$ para todo $j$, el proceso termina.*

Notemos que si introdujéramos en la base una variable con $\omega_j < 0$ entonces la función objetivo empeoraría, y si introdujéramos una con $\omega_j = 0$ entonces la función objetivo se quedaría igual. Si no es posible mejorar la función objetivo, el símplex termina.

Si el problema es de minimizar, cambiamos el criterio de entrada de forma obvia:

**Criterio de entrada (para minimizar)** *La variable no básica $x_j$ que ha de entrar en la base es aquella para la cual $w_j < 0$ es mínimo. Si hay empate se elige una cualquiera, y si $w_j \geq 0$ para todo $j$, el proceso termina.*

En cualquier caso, el criterio de entrada es introducir la variable que hace mejorar más rápidamente a la función objetivo. Si no es posible hacerla mejorar, el proceso termina.

Una vez fijada la variable que ha de entrar en la base, en nuestro ejemplo la $x$, falta determinar cuál ha de salir. Gráficamente hemos visto que ha de ser la $t$, pero nos falta saber cómo detectarlo en la tabla.

Para ello nos fijamos en la columna de la variable que entra, digamos $x_j$. Por cada unidad que aumentemos $x_j$, cada variable básica $x_i$ aumentará $-y_{ij}$ unidades. Si $y_{ij} \leq 0$, entonces el incremento de $x_i$ será positivo, con lo que $x_i$ siempre cumplirá la condición de no negatividad. En cambio, si $y_{ij} > 0$, entonces $x_i$ irá disminuyendo, y en un momento dado llegará a 0. La cuestión es ¿qué variable básica llega antes a 0? Si vamos aumentando la $x_j$, la primera variable básica que llegue a 0 se habrá convertido en no básica, y ello significará que ya hemos llegado al vértice adyacente.

Así pues, si $x_i$ disminuye $y_{ij}$ unidades por cada unidad que aumenta $x_j$ y parte de un valor $x_i$, vemos que llegará a 0 cuando $x_j$ haya aumentado $x_i/y_{ij}$ unidades. La primera variable básica que se hace no básica es aquella para la que $x_i/y_{ij}$ sea mínimo (de entre las que cumplen $y_{ij} > 0$). Esto nos da el

**Criterio de salida (para maximizar y minimizar)** *Si el criterio de entrada establece que ha de entrar la variable $x_j$, entonces consideramos todas las variables básicas $x_i$ para las que $y_{ij} > 0$ (las que disminuyen cuando aumenta $x_j$) y, de entre ellas, sale la que hace mínimo a $x_i/y_{ij}$ (la que llega antes a 0). Si hay empate se elige una cualquiera, y si $y_{ij} \leq 0$ para todo $i$, el proceso termina.*

Notemos que si todas las $y_{ij} \leq 0$ (y tenemos una variable de entrada $x_j$ con $w_j > 0$) esto significa que podemos aumentar cuanto queramos $x_j$ sin que ninguna variable se vuelva negativa, luego tenemos soluciones para las que la función objetivo es tan grande como se quiera. En definitiva, el problema es no acotado.

## 4.4 El algoritmo del símplex

En la sección anterior hemos expuesto ya la mayor parte del método símplex. Sólo falta determinar cómo se transforma la tabla de una solución factible básica en la tabla de otra adyacente. De todos modos, sistematizamos lo que hemos discutido:

ALGORITMO DEL SÍMPLEX:

**Paso inicial** *Calcular una tabla asociada a una solución factible básica.*

Esto puede hacerse calculando $Y = B^{-1}A$ y $\bar{x}_B = B^{-1}\bar{b}$, buscando una matriz $B = I$ (siempre y cuando $\bar{b} \geq \bar{0}$) o por el método de las penalizaciones, que explicaremos después.

Continuando con el ejemplo de la sección anterior, partimos de la tabla:

$$
\begin{array}{cc|cccc|c}
 & & 1 & -1 & 0 & 0 & \\
 & & x & y & s & t & \\
\hline
-1 & y & 1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 2 \\
0 & t & \mathbf{1/2} & 0 & -1/2 & 1 & 1 \\
\hline
 & & -1/2 & -1 & -1/2 & 0 & \\
\cline{3-6}
 & & 3/2 & 0 & 1/2 & 0 & \raisebox{1.5ex}{$-2$} \\
\hline
\end{array}
$$

**Paso 1** *Determinar la variable $x_j$ que entra en la base y la variable $x_i$ que sale de la base.*

Recordemos que el criterio de entrada es tomar la $x_j$ para la que $w_j > 0$ es máximo si el problema es de maximizar o $w_j < 0$ mínimo si es de minimizar. Si ninguna variable cumple el criterio de entrada estamos ya en la solución óptima.

Una vez fijada $x_j$, el criterio de salida es que sale la variable $x_i$ para la que $x_i/y_{ij} > 0$ es mínimo. Si $y_{ij} \leq 0$ para todo $i$, entonces el problema es no acotado y el algoritmo termina.

En el ejemplo entra la variable $x$, pues su rendimiento marginal $w_x = 3/2$ es el mayor de todos. Al aumentar $x$, las variables básicas $y$, $t$ disminuyen (pues $y_{yx} = 1/2 > 0$, $y_{tx} = 1/2 > 0$), luego ambas pueden llegar a 0. La primera que llega a 0 es $t$, pues $1/(1/2) = 2 < 2/(1/2) = 4$. Sale la variable $t$.

El elemento situado en la fila de la variable que sale y en la columna de la variable que entra (en nuestro ejemplo el 1/2 marcado en negrita) se llama *pivote.*

Conviene observar que si existe una variable cuyo marginal tiene el signo correcto para entrar (aunque no sea la que cumple el criterio de entrada por no ser la que mejora más rápidamente la función objetivo) y, respecto a ella, ninguna variable cumple el criterio de salida, entonces el problema es no acotado y no es necesario continuar. (Ver el apartado "tipos de soluciones", más abajo.)

**Paso 2** *Calcular la tabla de la solución adyacente establecida en el paso anterior.*

**Paso 2a** *Cambiamos la base en la tabla.*

En nuestro ejemplo, sustituimos la $t$ por la $x$ en la parte izquierda. La guía para construir la nueva tabla es que en la columna de la nueva variable básica (en nuestro ejemplo la $x$) ha de haber un 1 en su fila y ceros en las demás:

$$
\begin{array}{cc|cccc|c}
 & & 1 & -1 & 0 & 0 & \\
 & & x & y & s & t & \\
\hline
-1 & y & 0 & & & & \\
1 & x & 1 & & & & \\
\hline
 & & & & & & \\
\cline{3-6}
 & & & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

**Paso 2b** *Dividimos la fila del pivote entre el pivote para obtener el* 1.

En nuestro ejemplo dividimos entre $1/2$ (es decir, multiplicamos la fila por 2):

$$
\begin{array}{cc|cccc|c}
 & & 1 & -1 & 0 & 0 & \\
 & & x & y & s & t & \\
\hline
-1 & y & 0 & & & & \\
1 & x & 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\
\hline
 & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

**Paso 2c** *Hacemos ceros en el resto de la columna.*

Para ello, a cada fila donde queramos hacer un cero le hemos de sumar la fila del pivote multiplicada por el número adecuado. En nuestro ejemplo, a la primera fila le sumamos la segunda multiplicada por $-1$:

$$
\begin{array}{cc|cccc|c}
 & & 1 & -1 & 0 & 0 & \\
 & & x & y & s & t & \\
\hline
-1 & y & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & x & 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\
\hline
 & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

**Paso 2d** *Reconstruimos la parte inferior de la tabla.*

$$
\begin{array}{cc|cccc|c}
 & & 1 & -1 & 0 & 0 & \\
 & & x & y & s & t & \\
\hline
-1 & y & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & x & 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\
\hline
 & & 1 & -1 & -2 & 3 & \\
 & & 0 & 0 & 2 & -3 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

**Paso 3** *Volvemos al paso 1.*

En nuestro ejemplo vemos que introducir la variable $s$ en la base hace aumentar la función objetivo, mientras que introducir la $t$ la hace disminuir. Por lo tanto entra la variable $s$. Cuando la $s$ aumenta, la variable $y$ disminuye, mientras que $x$ aumenta, luego la única variable que llega a 0 es $y$, que es, pues, la variable que sale de la base. La nueva tabla resulta ser:

$$
\begin{array}{cc|cccc|c}
 & & 1 & -1 & 0 & 0 & \\
 & & x & y & s & t & \\
\hline
0 & s & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & x & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\
\hline
 & & 1 & 1 & 0 & 1 & \\
 & & 0 & -2 & 0 & -1 & 3 \\
\hline
\end{array}
$$

Cuando volvemos al paso 1, observamos que ninguna variable puede entrar en la base, pues todas hacen disminuir a la función objetivo, luego ya estamos en la tabla óptima, que corresponde a la solución $(x, y, s, t) = (3, 0, 1, 0)$, con valor de la función objetivo $z = 3$. ■

El algoritmo del símplex nos informa de si hemos llegado a la solución óptima o si el problema es no acotado. Más aún, viendo la tabla óptima podemos saber si el problema tiene solución única o si tiene infinitas soluciones:

**Tipos de soluciones** Resumimos aquí las situaciones que pueden darse cuando el algoritmo del símplex termina. Para recordarlas conviene tener clara la interpretación de los criterios de entrada y salida:

- La variable que entra $x_j$ es la que, al aumentar, hace que la función objetivo mejore más rápidamente.
- La variable que sale $x_i$ es la primera variable básica que llega a 0 al aumentar $x_j$.

Según esto, las posibilidades de que el símplex termine son:

1. *Una variable no básica $x_j$ puede entrar pero ninguna puede salir.*

   Entonces podemos incrementar la variable $x_j$ sin que por ello ninguna variable básica se anule nunca, luego el incremento se puede prolongar indefinidamente y la función objetivo mejorará cada vez más. *El problema es no acotado.* Notemos que esto es válido aunque la variable que puede entrar no sea la que satisface el criterio de entrada, por no tener el marginal mayor (para maximizar) o menor (para minimizar).

2. *Ninguna variable puede entrar.*

   Esto significa que la función objetivo empeora (o se mantiene constante) nos movamos hacia donde nos movamos, luego estamos en una solución óptima. A su vez, pueden darse los casos siguientes:

   (a) *Todas las variables no básicas cumplen $w_j \neq 0$.*
   Entonces cualquier movimiento haría empeorar a la función objetivo. La solución es única *(solución de vértice).*

   (b) *Hay alguna variable no básica $x_j$ con $w_j = 0$.*
   Esto significa que si hiciéramos entrar a esta variable pasaríamos a otras soluciones con el mismo valor de la función objetivo, es decir, otras soluciones óptimas. A su vez hay dos posibilidades:

      i. *Alguna variable básica $x_i$ puede salir.*
      Entonces, al meter $x_j$ y sacar $x_i$ pasamos a otra solución básica óptima. Estamos en una *solución de arista.* NOTA: Si la solución es degenerada, podría ser también de vértice.

      ii. *Ninguna variable básica puede salir.*
      Esto significa que podemos aumentar $x_j$ sin que ninguna variable básica se anule, luego el incremento puede prolongarse infinitamente sin llegar a otra solución básica. Estamos en una *solución de arista infinita.*

**Observaciones finales** Terminamos con algunas observaciones útiles para detectar posibles errores de cálculo con el símplex:

- En una tabla del símplex, las variables básicas (la última columna) han de ser siempre $\geq 0$.
- Los rendimientos marginales $w_j$ de las variables básicas han de ser nulos.
- Las columnas de la matriz $Y$ correspondientes a las variables básicas (en el orden adecuado) deben formar la matriz identidad.
- El valor $z$ de la función objetivo en una tabla ha de ser mejor o igual que el de las tablas calculadas anteriormente.

## 4.5 El método de las penalizaciones

El paso del algoritmo del símplex más complejo en cuanto a los cálculos que requiere es el inicial, es decir, el de encontrar una solución factible básica y calcular su tabla asociada. Ya sabemos que el problema es muy simple si la matriz técnica contiene una submatriz igual a la identidad y los términos independientes son no negativos, pero si no es así, el cálculo puede resultar muy complejo. (No se trata únicamente de calcular un determinante, una matriz inversa y unos productos de matrices $B^{-1}A$, y $B^{-1}\bar{b}$, sino que, después de hechos los cálculos, puede que no aprovechen si no se cumple $B^{-1}\bar{b} \geq 0$, y haya que volver a probar suerte.)

Vamos a ver una técnica para encontrar más fácilmente una solución factible básica. Este método, conocido como método de las penalizaciones, nos permite también determinar si el problema tiene o no solución.

Consideremos, por ejemplo, el problema

$$\begin{array}{rr} \text{Max.} & 2x+y \\ \text{s.a} & x+y-s=1 \\ & x-2y-t=0 \\ & x-y+u=1 \\ & x,\ y,\ s,\ t,\ u \geq 0. \end{array}$$

En primer lugar observamos que los términos independientes de las restricciones son no negativos. Si no fuera así, cambiaríamos el signo a las restricciones necesarias para arreglarlo.

Ahora nos fijamos en la matriz técnica:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & s & t & u \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

El método de las penalizaciones consiste en añadir nuevas variables al problema, llamadas *variables artificiales,* de modo que formen una submatriz identidad. En nuestro caso, como la columna de $u$ sí que es aprovechable, sólo necesitamos introducir dos variables artificiales:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x & y & s & t & A_1 & A_2 & u \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Esta nueva matriz técnica corresponde al problema

$$\begin{array}{rr} \text{Max.} & 2x+y-MA_1-MA_2 \\ \text{s.a} & x+y-s+A_1=1 \\ & x-2y-t+A_2=0 \\ & x-y+u=1 \\ & x,\ y,\ s,\ t,\ A_1,\ A_2,\ u \geq 0. \end{array}$$

Notemos que también hemos introducido las variables artificiales en la función objetivo, con coeficiente $-M$, donde $M > 0$ representa a un número arbitrariamente grande. De este modo, mientras una variable artificial sea no nula, la función objetivo distará mucho de ser óptima, por lo que el símplex tenderá a anular (hacer no básicas) las variables artificiales. Cuando esto suceda, tendremos una solución factible del problema original.

| |
|---|
| Las variables artificiales se introducen en la función objetivo de forma que cuando sean no nulas den lugar a una solución que diste mucho de ser óptima. Así, en un problema de maximizar se introducen como $-MA_i$ (para que el objetivo sea muy pequeño), mientras que si el problema es de minimizar se introducen como $+MA_i$ (para que sea muy grande). |

Ahora podemos tomar a $A_1$, $A_2$, $u$ como variables básicas, y la tabla correspondiente es

| | | $2$ | $1$ | $0$ | $0$ | $-M$ | $-M$ | $0$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x$ | $y$ | $s$ | $t$ | $A_1$ | $A_2$ | $u$ | |
| $-M$ | $A_1$ | $1$ | $1$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $0$ | $0$ | $1$ |
| $-M$ | $A_2$ | $1$ | $-2$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $0$ | $0$ |
| $0$ | $u$ | $1$ | $-1$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $1$ | $1$ |
| | | $-2M$ | $M$ | $M$ | $M$ | $-M$ | $-M$ | $0$ | $-M$ |
| | | $2+2M$ | $1-M$ | $-M$ | $-M$ | $0$ | $0$ | $0$ | |

Vemos que sólo puede entrar en la base la variable $x$, mientras sale $A_2$. La nueva tabla es

| | | $2$ | $1$ | $0$ | $0$ | $-M$ | $-M$ | $0$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x$ | $y$ | $s$ | $t$ | $A_1$ | $A_2$ | $u$ | |
| $-M$ | $A_1$ | $0$ | $3$ | $-1$ | $1$ | $1$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
| $2$ | $x$ | $1$ | $-2$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $0$ | $0$ |
| $0$ | $u$ | $0$ | $1$ | $0$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $1$ | $1$ |
| | | $2$ | $-4-3M$ | $M$ | $-2-M$ | $-M$ | $M+2$ | $0$ | $-M$ |
| | | $0$ | $5+3M$ | $-M$ | $2+M$ | $0$ | $-2M-2$ | $0$ | |

Ahora entra $y$ y sale $A_1$. La nueva tabla es:

| | | $2$ | $1$ | $0$ | $0$ | $-M$ | $-M$ | $0$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x$ | $y$ | $s$ | $t$ | $A_1$ | $A_2$ | $u$ | |
| $1$ | $y$ | $0$ | $1$ | $-1/3$ | $1/3$ | $1/3$ | $-1/3$ | $0$ | $1/3$ |
| $2$ | $x$ | $1$ | $0$ | $-2/3$ | $-1/3$ | $2/3$ | $1/3$ | $0$ | $2/3$ |
| $0$ | $u$ | $0$ | $0$ | $1/3$ | $2/3$ | $-1/3$ | $-2/3$ | $1$ | $2/3$ |
| | | $2$ | $1$ | $-5/3$ | $-1/3$ | $5/3$ | $1/3$ | $0$ | $5/3$ |
| | | $0$ | $0$ | $5/3$ | $1/3$ | $-5/3-M$ | $-1/3-M$ | $0$ | |

En esta solución, las variables artificiales son no básicas, luego valen 0, luego las variables restantes son una solución factible básica del problema original. Ahora basta eliminar de la tabla las columnas correspondientes a las variables artificiales y seguir iterando:

| | | $2$ | $1$ | $0$ | $0$ | $0$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x$ | $y$ | $s$ | $t$ | $u$ | |
| $1$ | $y$ | $0$ | $1$ | $-1/3$ | $1/3$ | $0$ | $1/3$ |
| $2$ | $x$ | $1$ | $0$ | $-2/3$ | $-1/3$ | $0$ | $2/3$ |
| $0$ | $u$ | $0$ | $0$ | $1/3$ | $2/3$ | $1$ | $2/3$ |
| | | $2$ | $1$ | $-5/3$ | $-1/3$ | $0$ | $5/3$ |
| | | $0$ | $0$ | $5/3$ | $1/3$ | $0$ | |

$\Longrightarrow$

| | | $2$ | $1$ | $0$ | $0$ | $0$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x$ | $y$ | $s$ | $t$ | $u$ | |
| $1$ | $y$ | $0$ | $1$ | $0$ | $1$ | $1$ | $1$ |
| $2$ | $x$ | $1$ | $0$ | $0$ | $1$ | $2$ | $2$ |
| $0$ | $s$ | $0$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $2$ |
| | | $2$ | $1$ | $0$ | $3$ | $5$ | $5$ |
| | | $0$ | $0$ | $0$ | $-3$ | $-5$ | |

Como todos los $w_j$ son $\leq 0$, estamos en la solución óptima. Además, como ninguna variable no básica tiene rendimientos marginales nulos, la solución es única.

Si el método de las penalizaciones termina con alguna variable artificial no nula, eso significa que el problema original es infactible.

# Problemas

1. Considera la siguiente tabla del símplex para un problema de maximizar:

$$
\begin{array}{cc|cccccc|c}
 & & 1 & 6 & 2 & 1 & 2 & 1 & \\
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\
\hline
1 & x_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 2 \\
2 & x_3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\
1 & x_4 & 0 & -2 & 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \\
\hline
 & & 1 & 1 & 2 & 1 & 13 & 5 & \\
\cline{3-8}
 & & 0 & 5 & 0 & 0 & -11 & -4 & 5 \\
\hline
\end{array}
$$

   (a) ¿Cuáles son las variables básicas?

   (b) ¿Cuál es la solución correspondiente a esta tabla?

   (c) ¿Cuánto vale la función objetivo?

   (d) ¿Qué tres cosas podemos verificar para detectar posibles errores de cálculo?

   (e) ¿Qué efecto tiene sobre la función objetivo introducir en la base cada una de las variables no básicas?

   (f) Llamemos $x$ a la variable no básica que ha de entrar en la base. ¿Cuál es?

   (g) Al hacer básica la variable $x$, ésta deja de ser nula y pasa a ser $> 0$. Las demás variables no básicas siguen valiendo 0, pero las variables básicas varían. ¿Cuáles aumentan y cuáles disminuyen?

   (h) De las variables básicas que disminuyen cuando $x$ aumenta, ¿cuál llega antes a 0?

   (i) Calcula la tabla siguiente. Verifica las tres condiciones que debe satisfacer y determina si se trata de la tabla óptima.

   (j) Supón ahora que el objetivo es minimizar. Responde a las cuestiones e, f, g, h. Determina qué variable debe entrar en la base y cuál debe salir.

2. Considera la siguiente tabla del símplex para un problema de maximizar:

$$
\begin{array}{cc|cccccc|c}
 & & 1 & 3 & 2 & 1 & 5 & 6 & \\
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\
\hline
1 & x_1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\
2 & x_3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\
1 & x_4 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & & 1 & -5 & 2 & 1 & 3 & 5 & \\
\cline{3-8}
 & & 0 & 8 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\
\hline
\end{array}
$$

   (a) Responde en este caso a las cuestiones a, b, c, d, e, f, g del problema anterior.

   (b) Llamemos de nuevo $x$ a la variable que entra en la base. A medida que $x$ aumenta, ¿hay alguna variable básica que disminuya y termine por hacerse 0? ¿Cómo se interpreta esto?

   (c) Supón ahora que el problema es de minimizar. ¿Qué efecto tiene sobre la función objetivo introducir en la base cada una de las variables no básicas? ¿Cómo se interpreta esto?

3. Considera la siguiente tabla del símplex para un problema de maximizar:

| | | 1 | −2 | −3 | 1 | 1 | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | |
| 1 | $x_1$ | 1 | 5 | 0 | 0 | 5 | 1 | 5 |
| −3 | $x_3$ | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | −2 | 1 |
| 1 | $x_4$ | 0 | −1 | 0 | 1 | 4 | 0 | 1 |
| | | 1 | −2 | −3 | 1 | 3 | 7 | 3 |
| | | 0 | 0 | 0 | 0 | −2 | −1 | |

(a) Determina la solución correspondiente a esta tabla.

(b) ¿Qué efecto tiene sobre la función objetivo introducir en la base cada una de las variables no básicas? ¿Qué se concluye de ello?

(c) ¿Qué efecto tiene sobre la función objetivo introducir en la base la variable $x_2$?

(d) Si introducimos en la base $x_2$, ¿que variables básicas aumentarán y cuáles disminuirán? ¿Cuál llegará antes a 0? ¿Cómo se interpreta esto?

(e) Calcula dos soluciones óptimas del problema.

4. Considera la siguiente tabla del símplex para un problema de maximizar:

| | | 1 | 3 | −3 | 1 | 1 | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | |
| 1 | $x_1$ | 1 | −1 | 0 | 0 | 5 | 1 | 5 |
| −3 | $x_3$ | 0 | −2 | 1 | 0 | 2 | −2 | 1 |
| 1 | $x_4$ | 0 | −2 | 0 | 1 | 4 | 0 | 1 |
| | | 1 | 3 | −3 | 1 | 3 | 7 | 3 |
| | | 0 | 0 | 0 | 0 | −2 | −1 | |

(a) Determina la solución correspondiente a esta tabla.

(b) ¿Qué efecto tiene sobre la función objetivo introducir en la base cada una de las variables no básicas? ¿Qué se concluye de ello?

(c) ¿Qué efecto tiene sobre la función objetivo introducir en la base la variable $x_2$?

(d) Si introducimos en la base $x_2$, ¿que variables básicas aumentarán y cuáles disminuirán? ¿Cómo se interpreta esto?

5. Resuelve por el método símplex:

$$\begin{array}{rl} \text{Opt.} & x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 14 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0 \end{array}$$

6. Considera el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 2x + 2y + 10 \\ \text{s.a} & 4x + 2y \leq 16 \\ & x + 2y \leq 8 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

(a) ¿Con cuántas tablas diferentes puede empezar el algoritmo del símplex?

(b) Plantea dos de ellas e indica, si procede, la variable de entrada, la de salida y el elemento pivote.

7. Resuelve los problemas siguientes, indicando la solución óptima, de qué tipo es y el valor de la función objetivo.

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & x+2y+z \\ \text{s.a} & x+y+z\geq 3 \\ & 2x-3y+z\geq 6 \\ & x,\,y,\,z\geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Max.} & x-2y+z \\ \text{s.a} & x+y+z\leq 1 \\ & 2x+y-z\geq 4 \\ & x,\,y,\,z\geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Max.} & x-2y+z \\ \text{s.a} & x+y+z\leq 3 \\ & x,\,y,\,z\geq 0 \end{array}$$

8. Resuelve el problema siguiente. Indica las soluciones óptimas y el valor de la función objetivo en cada una de ellas.

$$\begin{array}{rl} \text{Opt.} & x-2y+3z \\ \text{s.a} & x+2y+z\leq 4 \\ & 2x+y-z\leq 2 \\ & x,\,y,\,z\geq 0 \end{array}$$

9. Considera el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & -x+y \\ \text{s.a} & -2x+y\leq 4 \\ & x+y\leq 1 \\ & y\geq 0 \end{array}$$

   (a) Ponlo en forma canónica y resuélvelo mediante el método símplex.

   (b) A partir de la tabla óptima, razona si la solución es única y luego compruébalo gráficamente.

10. La última tabla del símplex correspondiente a un problema de maximizar es

$$\begin{array}{cc|rrrrrr|c} & & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \\ & & x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \\ \hline 1 & x_1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & s_2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & s_1 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 4 \\ \hline & & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \cline{3-8} & & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

   (a) ¿Existe solución óptima?, ¿es única? Si las hay, calcula las otras soluciones básicas óptimas.

   (b) ¿Qué le ocurriría a la función objetivo si introdujéramos $x_3$ en la base?

11. Se sabe que la solución óptima del problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 2x_1+x_2 \\ \text{s.a} & -x_1+x_2\leq 2 \\ & x_1+2x_2\leq 6 \\ & 2x_1+x_2\leq 6 \\ & x_1,\,x_2\geq 0 \end{array}$$

   es $(x_1, x_2) = (2, 2)$. Calcula la tabla óptima del símplex sin realizar ninguna iteración. ¿Qué tipo de solución es?

12. Dado el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x_1+x_2 \\ \text{s.a} & -x_1+x_2\leq 2 \\ & x_2\leq 4 \\ & x_1,\,x_2\geq 0 \end{array}$$

   obtén sin iterar la tabla del símplex correspondiente a las variables básicas $x_2$ y $s_2$ y aplica a partir de ella el algoritmo hasta encontrar la solución óptima.

13. Calcula la tabla del símplex del problema

$$\begin{array}{rr} \text{Max.} & x+2y \\ \text{s.a} & x+y \leq 4 \\ & 2x+y \leq 6 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

correspondiente a las variables básicas $y$, $t$. ¿Es óptima?

14. Considera el problema

$$\begin{array}{rr} \text{Max.} & 3x_1 - x_2 \\ \text{s.a} & 5x_1 - 2x_2 \geq 2 \\ & -6x_1 + x_2 = 3 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1,\, x_2 \geq 0 \end{array}$$

(a) Resuélvelo usando el método de las penalizaciones.

(b) Resuélvelo sin usar el método de las penalizaciones (y sin usar información obtenida en el apartado anterior).

15. Considera el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x \\ \text{s.a} & x+y \geq 1 \\ & x+y \leq 3 \\ & x-y \leq 1 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

La tabla correspondiente a las variables básicas $x$, $t$, $u$ es la siguiente:

$$\begin{array}{cc|ccccc|c} & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & x & y & s & t & u & \\ \cline{3-8} 1 & x & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & t & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & u & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cline{3-8} & & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & \\ \cline{3-7} & & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \cline{3-8} \end{array}$$

(a) Encuentra la solución óptima a partir de esta tabla.

(b) ¿Qué tiene de “peculiar” la primera iteración?

16. Considera el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & -y \\ \text{s.a} & x+y \geq 1 \\ & x+y \leq 3 \\ & x-y \leq 1 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

La tabla correspondiente a las variables básicas $x$, $t$, $u$ es la siguiente:

$$\begin{array}{cc|ccccc|c} & & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \\ & & x & y & s & t & u & \\ \cline{3-8} 0 & x & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & t & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & u & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cline{3-8} & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \cline{3-7} & & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cline{3-8} \end{array}$$

(a) ¿Es la tabla óptima?

(b) ¿Podemos razonar si la solución es de vértice o de arista?

(c) Comprueba gráficamente que tus respuestas a los apartados anteriores son correctas.

# Cuestiones

1. Hemos calculado tres tablas del símplex para un problema lineal de minimización, y observamos lo siguiente:

   (a) En la segunda tabla hay una variable básica que vale 0.

   (b) La función objetivo vale 4 en la primera tabla, 3 en la segunda y 3 en la tercera.

   (c) En la tercera tabla los rendimientos marginales ($w_j$) de una variable básica valen 3.

   Explica por qué podemos afirmar que hemos cometido un error de cálculo.

2. Explica por qué las tablas siguientes son imposibles:

| | | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x$ | $y$ | $z$ | $s$ | $t$ | $u$ | |
| 1 | $x$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 | 1 |
| 0 | $s$ | 0 | 0 | −1 | 1 | 1 | 0 | 3 |
| 2 | $y$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | −1 |
| | | 1 | 2 | 1 | 0 | 2 | 5 | −1 |
| | | 0 | 0 | 0 | 0 | −2 | −5 | |

| | | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x$ | $y$ | $z$ | $s$ | $t$ | $u$ | |
| 1 | $x$ | 1 | 0 | 1 | −2 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | $s$ | 0 | 0 | −1 | 1 | 1 | 0 | 3 |
| 2 | $y$ | 0 | 1 | 3 | 1 | 0 | −2 | 2 |
| | | 1 | 2 | 7 | 0 | 0 | −3 | 5 |
| | | 0 | 0 | −6 | 0 | 0 | 3 | |

3. Estamos resolviendo un problema lineal de maximización mediante el método símplex. Explica qué conclusión podemos extraer en cada uno de los casos siguientes:

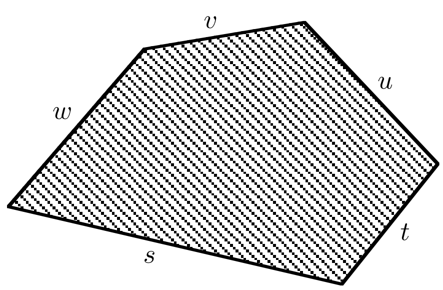
   (a) Tenemos una variable no básica que cumple el criterio de entrada, pero ninguna de las variables básicas cumple el criterio de salida.

   (b) Ninguna variable no básica cumple el criterio de entrada.

   (c) Estamos en la tabla óptima, pero una variable no básica tiene rendimientos marginales nulos. Respecto a ella, ninguna variable básica cumple el criterio de salida.

   (d) Hay una variable artificial no nula y ninguna variable cumple el criterio de entrada.

4. La figura representa el conjunto de oportunidades de un problema de programación lineal en forma canónica (contenido en el cuadrante $x > 0$, $y > 0$). Las letras sobre las aristas indican la variable de holgura de la restricción correspondiente. El objetivo es maximizar $x$.




   (a) Señala la solución correspondiente a las variables básicas $x$, $y$, $t$, $u$, $v$.

   (b) A partir de esta solución, indica qué variable hay que introducir en la base para pasar a cada uno de los vértices adyacentes, así como qué variable sale en cada caso.

(c) Indica qué variable conviene introducir en la base para que la función objetivo aumente lo más posible.

(d) Una vez situados en el nuevo vértice, indica qué variables no básicas tienen rendimientos marginales positivos y cuáles negativos.

(e) Determina la variable que ha de entrar en la base y la que ha de salir.

# Tema 5

# Dualidad en programación lineal

En las prácticas de ordenador hemos visto que éste no sólo nos proporciona la solución óptima de un problema, sino también nos da unos costes reducidos y unos precios duales que aportan información adicional sobre la solución óptima. En el caso de problemas lineales, el método símplex nos proporciona los costes reducidos de las variables (principales) del problema. En efecto, (salvo el signo) éstos no son sino los rendimientos marginales que aparecen en la última fila de la tabla del símplex. El signo puede diferir debido a la siguiente discrepancia en cuanto a la interpretación:

- El coste reducido de una variable (principal) no básica (tal y como lo da LINGO) es lo que *empeora* la función objetivo por cada unidad que hagamos aumentar dicha variable.
- El marginal de una variable (principal) no básica (tal y como aparece en la tabla del símplex) es lo que *aumenta* la función objetivo por cada unidad que hagamos aumentar dicha variable.

En este tema vamos a ver que a cada problema lineal le podemos asociar otro problema equivalente (en cuanto que una solución óptima de uno nos permite calcular una solución óptima del otro) al que llamaremos su *problema dual,* cuyas variables, las *variables duales,* son (salvo el signo) los precios duales que proporciona LINGO. La salvedad del signo es similar a la que acabamos de comentar para los costes reducidos:

- El precio dual de una restricción (tal y como lo da LINGO) es lo que *mejora* la función objetivo por cada unidad que hagamos aumentar el término independiente de la restricción.
- La variable dual de una restricción dada es lo que *aumenta* la función objetivo por cada unidad que hagamos aumentar el término independiente de la restricción.

## 5.1 Construcción del problema dual

Dado un problema de programación lineal, vamos a ver cómo se construye su *problema dual.* Para referirnos al problema dado, por oposición a su dual, lo llamaremos *problema primal.* Para construir el problema dual basta seguir las reglas siguientes:

1. *El problema dual tiene tantas variables como restricciones tiene el problema primal.* Si las variables del primal son $x_1, \ldots, x_n$, representaremos las del dual por $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.
2. *El problema dual tiene tantas restricciones como variables tiene el problema primal.*
3. *Si el objetivo del primal es maximizar, el del dual es minimizar, y viceversa.*
4. *Los coeficientes de la función objetivo dual son los términos independientes $b_1, \ldots, b_m$ del problema primal.*

5. *Los términos independientes del problema dual son los coeficientes $c_1, \ldots, c_n$ de la función objetivo del problema primal.*

6. *La matriz técnica del problema dual es la traspuesta $A^t$ de la matriz técnica $A$ del problema primal.*

7. *Los tipos de desigualdades en las restricciones y las condiciones de signo del problema dual vienen dados por la tabla siguiente, conocida como tabla de Tucker:*

| Maximizar | | Minimizar | |
|---|---|---|---|
| Variables | $\geq 0$ | $\geq$ | Restricciones |
| | $\leq 0$ | $\leq$ | |
| | libres | $=$ | |
| Restricciones | $\leq$ | $\geq 0$ | Variables |
| | $\geq$ | $\leq 0$ | |
| | $=$ | libres | |

Veamos cómo podemos recordar el contenido de esta tabla sin necesidad de memorizarla. Para reducir todas las posibilidades a una única regla sólo hemos de introducir el concepto siguiente:

**Restricciones canónicas** Una restricción de un problema de programación matemática es canónica si es de $\leq$ y el problema es de maximizar o si es de $\geq$ y el problema es de minimizar.

y recordar el hecho siguiente:

**Teorema** *El problema dual de un problema dual es el problema primal. En particular, las variables primales son las variables duales del problema dual.*

Esto hace que si tenemos un par de problemas mutuamente duales, podamos considerar como primal a cualquiera de los dos y como dual al otro. En particular, todas las propiedades sobre problemas primales y duales siguen siendo ciertas si cambiamos "dual" por "primal" y viceversa.

Teniendo esto en cuenta, la tabla de Tucker se reduce a la regla siguiente:

**Condición de signo de Kuhn y Tucker** La relación entre una restricción y su variable dual es la siguiente:

| **Restricción** | **Variable dual** |
|---|---|
| Canónica | $\geq 0$ |
| No canónica | $\leq 0$ |
| De igualdad | Libre |

**Ejemplo** Vamos a calcular el problema dual del problema

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & x - 2y + 3z \\ \text{s.a} & x - \ \ y + z \leq 3 \\ & x + 2y - z = 5 \\ & x \geq 0,\ z \leq 0. \end{array}$$

Como el problema primal tiene dos restricciones, el dual tendrá dos variables, a las que llamaremos $\lambda$ y $\mu$. Al aplicar las propiedades 1–6 anteriores obtenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rll} \text{Min.} & x - 2y + 3z & \\ \text{s.a} & x - \ \ y + z \leq 3 & \lambda \\ & x + 2y - z = 5 & \mu \\ & x \geq 0,\ z \leq 0. & \end{array} \qquad \begin{array}{rlccl} \text{Max.} & 3\lambda + 5\mu & & & \\ \text{s.a} & \lambda + \ \ \mu & ? & 1 & x \\ & -\lambda + 2\mu & ? & -2 & y \\ & \lambda - \ \ \mu & ? & 3 & z \end{array}$$

Al lado de cada restricción hemos indicado su variable dual. Para resolver los signos "?" razonamos como sigue:

1. La variable dual de la primera restricción es $x$, en el problema primal vemos que $x \geq 0$, luego, por las condiciones de signo de Kuhn y Tucker, la restricción ha de ser canónica. Como el problema dual es de maximizar, una restricción canónica es de tipo $\leq$.
2. La variable dual de la segunda restricción es $y$, en el problema primal vemos que $y$ es libre, luego la restricción correspondiente ha de ser de igualdad.
3. La variable dual de la tercera restricción es $z$, en el problema primal vemos que $z \leq 0$, luego por las condiciones de signo vemos que la restricción ha de ser no canónica. Como es una restricción de un problema de maximizar, para ser no canónica ha de ser de tipo $\geq$.

Finalmente, para determinar el signo de las variables duales razonamos así:

1. $\lambda$ es la variable dual de la primera restricción del problema primal. Se trata de una restricción no canónica (de tipo $\leq$ en un problema de minimizar), luego por las condiciones de signo de Kuhn y Tucker ha de ser $\lambda \leq 0$.
2. $\mu$ es la variable dual de la segunda restricción del problema primal. Como es una restricción de igualdad, $\mu$ ha de ser libre.

El problema dual es, por consiguiente:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Max.} & 3\lambda + 5\mu \\
\text{s.a} & \lambda + \ \mu \leq \ 1 \\
 & -\lambda + 2\mu = -2 \\
 & \lambda - \ \mu \geq \ 3 \\
 & \lambda \leq 0
\end{array}
$$

■

El cálculo del problema dual de un problema en forma canónica es muy fácil, debido a la observación siguiente:

**Teorema** *El dual de un problema en forma canónica está también en forma canónica.*

Los duales de los problemas en forma canónica se llaman *duales simétricos,* mientras que los duales de los problemas que no están en forma canónica se llaman *asimétricos.*

## 5.2 Teoremas de dualidad

El resultado fundamental sobre dualidad es el siguiente:

**Teorema de dualidad** *Cada solución óptima $\bar{x}^*$ de un problema lineal tiene asociada una solución óptima $\bar{\lambda}^*$ de su problema dual, llamada* solución dual complementaria*. Además, el valor de las respectivas funciones objetivo en $\bar{x}^*$ y $\bar{\lambda}^*$ es el mismo.*

La interpretación de la solución dual complementaria de una solución dada es la que hemos dado al principio del tema: el valor de las variables duales en la solución dual complementaria de una solución dada es (salvo el signo) el precio dual de la restricción correspondiente.

La relación entre la existencia de soluciones de un problema y de su dual puede precisarse más todavía. El resultado básico a este respecto es el teorema siguiente:

**Teorema** *El valor de la función objetivo en una solución factible de un problema lineal es una cota para los valores de la función objetivo en las soluciones del problema dual (cota superior si el dual es de maximizar e inferior si es de minimizar). En particular, si una solución factible primal y otra dual tienen el mismo valor de sus respectivas funciones objetivo, entonces ambas son óptimas.*

Por ejemplo, supongamos que el problema primal es de maximizar y el dual de minimizar. Si la función objetivo primal toma el valor 25 sobre una solución factible $\bar{x}$ y la función objetivo dual toma el valor 40 sobre una solución factible $\bar{\lambda}$, entonces sabemos que el valor óptimo de la función objetivo (que es el mismo para ambos problemas) está comprendido entre 25 y 40.

Como consecuencia, si un problema y su dual son ambos factibles, entonces ambos son acotados (pues el valor de la función objetivo dual sobre una solución factible dual es una cota de la función objetivo primal, y viceversa). Así pues, un problema y su dual se encuentran necesariamente en uno de estos tres casos:

- Ambos tienen solución óptima,
- Ambos son infactibles,
- Uno es infactible y el otro no acotado.

## 5.3 Cálculo de la solución óptima dual

Veamos ahora cómo calcular la solución óptima del problema dual a partir de la del primal.

**Problemas en forma canónica** Si el problema primal está en forma canónica, lo mismo le sucede a su dual. A cada restricción de cualquiera de los dos problemas le podemos asignar dos variables: su variable de holgura (en el propio problema) y su variable dual (en el otro). Esto nos permite asociar a cada variable del problema primal (incluidas las de holgura) una variable del dual y viceversa:

Dada una variable, consideramos la restricción a la que está asociada, sea como variable de holgura o como variable dual, y de ella pasamos a la otra variable asociada a dicha restricción. Se cumple que el valor óptimo de una variable dual es (salvo signo) el rendimiento marginal de su variable asociada en el problema primal. Más precisamente:

**Teorema** *Para problemas en forma canónica, las variables principales de la solución dual complementaria de una solución dada son (salvo signo) los rendimientos marginales de las variables de holgura del problema primal, y las variables de holgura de la solución dual son (también salvo signo) los rendimientos marginales de las variables principales del problema primal.*

Los paréntesis sobre el signo se refieren a que en un problema de maximizar los rendimientos marginales óptimos son no positivos, mientras que en un problema de minimizar son no negativos (salvo que se definan al revés), mientras que las variables son siempre no negativas, luego hay que cambiar el signo cuando sea preciso.

**Ejemplo** Consideremos el par de problemas duales

$$\begin{array}{rr@{\qquad\qquad}rr}
\text{Max.} & 4x+5y & \text{Min.} & 8\lambda+5\mu \\
\text{s.a} & 2x+y\leq 8 & \text{s.a} & 2\lambda \qquad \geq 4 \\
 & y\leq 5 & & \lambda+\mu\geq 5 \\
 & x,\, y\geq 0 & & \lambda,\, \mu\geq 0
\end{array}$$

La tabla óptima del primal es

| | | 4 | 5 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x$ | $y$ | $s$ | $t$ | |
| 4 | $x$ | 1 | 0 | 1/2 | −1/2 | 3/2 |
| 5 | $y$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 5 |
| | | 4 | 5 | 2 | 3 | 31 |
| | | 0 | 0 | −2 | −3 | |

Vemos que el óptimo primal es $\bar{x}^* = (x, y, s, t) = (3/2, 5, 0, 0)$. A partir de la tabla podemos obtener la solución complementaria $\bar{\lambda}^*$ del problema dual. Si asociamos a cada variable principal del problema primal la variable de holgura de su restricción correspondiente en el dual y viceversa, tenemos la siguiente correspondencia entre variables:

$$x \leftrightarrow s', \quad y \leftrightarrow t', \qquad s \leftrightarrow \lambda, \qquad t \leftrightarrow \mu.$$

Por ejemplo, $x$ es la variable dual de la primera restricción dual, y la otra variable asociada a dicha restricción es su variable de holgura $s'$. Igualmente, $s$ es la variable de holgura de la primera restricción primal, y la otra variable asociada a dicha restricción es la variable dual $\lambda$.

El teorema anterior afirma que $\bar{\lambda}^*$ está formada (salvo el signo) por los rendimientos marginales de las variables primales asociadas a cada una de sus variables, es decir,

$$\bar{\lambda}^* = (\lambda, \mu, s', t') = (2, 3, 0, 0).$$

Recíprocamente, los rendimientos marginales del problema dual son los valores de las variables primales:

$$w' = (w'_\lambda, w'_\mu, w'_{s'}, w'_{t'}) = (0, 0, 3/2, 5).$$

■

**Nota:** Para cada par de problemas duales en forma canónica, la relación entre sus variables que acabamos de describir hace corresponder las variables básicas óptimas del problema primal en las variables no básicas óptimas del dual, y viceversa.

Por ejemplo, las variables básicas del problema primal anterior son $x$ e $y$, mientras que sus variables duales asociadas, a saber, $s'$ y $t'$, son las variables no básicas del dual, y viceversa. ■

**Problemas no canónicos** Veamos ahora un método para calcular la solución óptima dual de un problema que no esté en forma canónica. En realidad el caso anterior es un caso particular de éste, pero cuando el problema está en forma canónica es más rápido aplicar el método anterior. Consiste simplemente en utilizar la fórmula

$$\bar{\lambda}^t = \bar{c}_B^t B^{-1},$$

donde $\bar{\lambda}$ es el vector de las variables principales del problema dual (las que queremos calcular), $\bar{c}_B$ es el vector de los coeficientes de la función objetivo primal correspondientes a las variables básicas y $B^{-1}$ es la inversa de la matriz básica primal.

**Ejemplo** Consideremos el par de problemas duales

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x \\ \text{s.a} & x + y \leq 1 \\ & x - y \leq 1 \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Min.} & \lambda + \mu \\ \text{s.a} & \lambda + \mu \geq 1 \\ & \lambda - \mu = 0 \\ & \lambda,\, \mu \geq 0 \end{array}$$

Vamos a resolver el primal y, a partir de su solución, obtendremos la solución óptima del dual. Para ponerlo en forma estándar hacemos $y = y_1 - y_2$ e introducimos variables de holgura:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x \\ \text{s.a} & x + y_1 - y_2 + s = 1 \\ & x - y_1 + y_2 + t = 1 \\ & x,\, y_1,\, y_2,\, s,\, t \geq 0 \end{array} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La tabla óptima es

| | | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x$ | $y_1$ | $y_2$ | $s$ | $t$ | |
| 1 | $x$ | 1 | 0 | 0 | 1/2 | 1/2 | 1 |
| 0 | $y_2$ | 0 | −1 | 1 | −1/2 | 1/2 | 0 |
| | | 1 | 0 | 0 | 1/2 | 1/2 | 1 |
| | | 0 | 0 | 0 | −1/2 | −1/2 | |

Para calcular la solución dual observamos que las variables básicas en la tabla óptima son $(x, y_2)$, luego $c_B = (1, 0)$. La inversa de la matriz básica está en la tabla óptima, en las columnas que contienen la identidad en la matriz $A$. Así pues:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

La solución dual es

$$(\lambda, \mu) = (1, 0) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = (1/2, 1/2).$$

■

# Problemas

1. Plantea el problema dual de los problemas siguientes:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x_1 + x_2 + x_4 \\ \text{s.a} & 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 10 \\ & x_1 + 2x_4 \leq 8 \\ & x_1,\, x_3 \geq 0,\;\; x_2 \leq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Min.} & x_1 + x_2 + x_4 \\ \text{s.a} & 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 10 \\ & x_1 + 2x_4 \leq 8 \\ & x_1,\, x_3 \geq 0,\;\; x_2 \leq 0 \end{array}$$

2. Resuelve los problemas siguientes a través del dual:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 4x + 3y + 5z \\ \text{s.a} & x + y + z \leq 5 \\ & x + 2z \leq 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Max.} & 4x + 3y + 3z \\ \text{s.a} & x + y + z \leq 5 \\ & x + 2z \leq 2 \end{array}$$

3. Plantea el dual del problema

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & -x + 3y + 5z \\ \text{s.a} & x + \;\, y + 2z \geq 3 \\ & x + 2y + 3z \geq 1 \\ & x,\, y,\, z \geq 0 \end{array}$$

   y úsalo para determinar si el primal tiene o no solución óptima.

4. Considera el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max} & 2x + 2y + z \\ \text{s.a} & 2x + y + z \leq 10 \\ & 2x + 2y + 2z = 4 \\ & 2x + y + 2z \geq 6 \\ & x \geq 0,\, y \leq 0 \end{array}$$

(a) Calcula el problema dual.

(b) Pon el primal en forma estándar e introduce las variables artificiales necesarias para poder empezar el algoritmo del símplex.

(c) Escribe la matriz técnica del problema en forma estándar.

(d) Sabiendo que la tabla óptima primal es

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $2$ | $-2$ | $1$ | $-1$ | $0$ | $-M$ | $-M$ | $0$ | |
| | | $x$ | $y_0$ | $z_1$ | $z_2$ | $s_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $s_3$ | |
| $-1$ | $z_2$ | $0$ | $0$ | $-1$ | $1$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $1$ | $4$ |
| $2$ | $x$ | $1$ | $0$ | $0$ | $0$ | $1$ | $-1/2$ | $0$ | $0$ | $8$ |
| $-2$ | $y_0$ | $0$ | $1$ | $0$ | $0$ | $0$ | $-1$ | $1$ | $-1$ | $2$ |
| | | $2$ | $-2$ | $1$ | $-1$ | $1$ | $1$ | $-1$ | $1$ | $8$ |
| | | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $-1$ | $-1-M$ | $1-M$ | $-1$ | |

Calcula la solución $(\lambda, \mu, \nu)$ del problema dual.

5. Hemos resuelto un problema lineal de maximización en forma canónica. La solución es

$$(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2) = (1, 0, 3, 0, 0) \qquad \text{con } z = 20.$$

Los rendimientos marginales han resultado ser

$$(w_{x_1}, w_{x_2}, w_{x_3}, w_{s_1}, w_{s_2}) = (0, -2, 0, -2, -4).$$

Calcula la solución óptima dual, incluido el valor de la función objetivo, calcula los rendimientos marginales duales e indica cuáles son las variables básicas duales.

6. Plantea el problema dual del problema planteado en la página 43 y calcula su solución a partir de la solución del problema primal.

7. Consideremos el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 2x + y - z \\ \text{s.a} & x + 2y + z \le 8 \\ & -x + y - 2z \le 8 \\ & x,\, y,\, z \ge 0 \end{array}$$

Su tabla óptima es

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $2$ | $1$ | $-1$ | $0$ | $0$ | |
| | | $x$ | $y$ | $z$ | $s$ | $t$ | |
| $2$ | $x$ | $1$ | $2$ | $1$ | $1$ | $0$ | $8$ |
| $0$ | $t$ | $0$ | $3$ | $-1$ | $1$ | $1$ | $16$ |
| | | $2$ | $4$ | $2$ | $2$ | $0$ | $16$ |
| | | $0$ | $-3$ | $-3$ | $-2$ | $0$ | |

(a) Escribe el problema dual y obtén su solución óptima a partir de la tabla anterior. Calcula también los rendimientos marginales del problema dual.

(b) Si pudiéramos aumentar uno de los términos independientes de las restricciones, ¿cuál convendría aumentar?

8. Resuelve los problemas siguientes por el método símplex, plantea el problema dual y calcula la tabla óptima del dual a partir de la solución obtenida del primal.

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 3x + y \\ \text{s.a} & x + y \le 10 \\ & 2x + 3y \le 50 \\ & x,\, y \ge 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Max.} & 2x + y \\ \text{s.a} & x + y \le 2 \\ & x \le 1 \\ & x,\, y \ge 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Max.} & x + 2y \\ \text{s.a} & x + y \le 4 \\ & 2x + y \le 6 \\ & x,\, y \ge 0 \end{array}$$

9. Cierto fabricante produce sillas y mesas, para lo cual requiere el uso de dos secciones de producción: la sección de montaje y la sección de pintura. La producción de una silla requiere 1 hora de trabajo en la sección de montaje y 2 horas en la de pintura. Por su parte, la fabricación de una mesa precisa de 3 horas en la sección de montaje y 1 en la de pintura. La sección de montaje sólo puede estar 9 horas diarias en funcionamiento, mientras que la de pintura sólo 8 horas. El beneficio que se obtiene produciendo mesas es el doble que el de sillas. El fabricante pretende maximizar beneficios.

   (a) Modeliza el problema mediante un programa lineal y resuélvelo mediante el símplex.

   (b) Interpreta el valor de las variables principales y el de las de holgura.

   (c) Interpreta los rendimientos marginales.

   (d) Calcula las variables duales e interprétalas.

   (e) Razona si al empresario le conviene aumentar las horas de funcionamiento en la sección de montaje. ¿Y en la de pintura?

# Cuestiones

1. En la tabla siguiente, cada fila corresponde a un tipo de problema lineal y cada columna a una posibilidad para su dual. Pon en cada casilla SI o NO según si es o no posible que el primal y el dual sean de los tipos correspondientes a la fila y la columna:

| | Infactible | No acotado | Acotado |
|---|---|---|---|
| Infactible | | | |
| No acotado | | | |
| Acotado | | | |

2. Si sabemos que $(1, 2, 1)$ es una solución de un problema lineal, ¿qué podemos decir sobre su dual? ¿Y si sabemos que es una solución factible? ¿Y si sabemos que es una solución óptima?

# Tema 6

# Postoptimización y análisis de sensibilidad

En este tema estudiamos las consecuencias de modificar un dato en un problema lineal. Se trata de averiguar si la solución sigue siendo la misma (en cuyo caso no es necesario volver a resolverlo) y, en caso de que varíe, tratar de aprovechar la solución anterior para obtener más rápidamente el nuevo óptimo. La postoptimización es el análisis que se hace ante un cambio concreto, mientras que el análisis de sensibilidad consiste en encontrar el intervalo en el que puede variar un dato sin que se modifique la solución.

Más precisamente, una solución óptima $\bar{x}$ ha de cumplir $\bar{x}_B = B^{-1}\bar{b} \geq 0$ (condición de factibilidad) y $\bar{w} \leq \bar{0}$ para problemas de maximizar o $\bar{w} \geq 0$ para problemas de minimizar (condición de optimalidad). Si al cambiar algún dato se siguen cumpliendo ambas condiciones, entonces tenemos ya la nueva solución óptima, mientras que si deja de cumplirse una de ellas tendremos que iterar para encontrar la nueva solución.

## 6.1 Cambio de un coeficiente de la función objetivo

Estudiamos en primer lugar el caso en que cambia un coeficiente $c_j$. No tiene sentido que corresponda a una variable de holgura, luego supondremos que corresponde a una variable principal. Si corresponde a una variable no básica, lo único que se modifica es $w_j$, mientras que si la variable es básica se modifica todo el vector $\bar{w}$ y la función objetivo. En cualquier caso, la solución puede dejar de ser óptima, pero no dejará de ser factible. Si es así, realizamos las iteraciones necesarias para encontrar el nuevo óptimo.

**Ejemplos** Consideremos el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x + 2y \\ \text{s.a} & x + y \leq 4 \\ & 2x + y \leq 6 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

cuya tabla óptima es

$$\begin{array}{cc|cccc|c} & & 1 & 2 & 0 & 0 & \\ & & x & y & s & t & \\ \hline 2 & y & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & t & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ \hline & & 2 & 2 & 2 & 0 & \\ \cline{3-6} & & -1 & 0 & -2 & 0 & 8 \\ \hline \end{array}$$

1. Estudiar qué sucede si $c_1$ pasa a valer $3/2$.

   Como la variable $x$ es no básica, sólo se modifica la primera columna de la tabla, de modo que resulta $w_1 = -1/2$. Como se sigue cumpliendo la condición de optimalidad, la solución sigue siendo válida, con el mismo valor de la función objetivo.

2. Estudiar qué sucede si $c_1$ pasa a valer 3.

   Ahora la tabla pasa a ser

| | | 3 | 2 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x$ | $y$ | $s$ | $t$ | |
| 2 | $y$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 4 |
| 0 | $t$ | 1 | 0 | $-1$ | 1 | 2 |
| | | 2 | 2 | 2 | 0 | 8 |
| | | 1 | 0 | $-2$ | 0 | |

   Vemos que la solución ya no es óptima, por lo que aplicamos el símplex: entra $x$ y sale $t$:

| | | 3 | 2 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x$ | $y$ | $s$ | $t$ | |
| 2 | $y$ | 0 | 1 | 2 | $-1$ | 2 |
| 3 | $x$ | 1 | 0 | $-1$ | 1 | 2 |
| | | 3 | 2 | 1 | 1 | 10 |
| | | 0 | 0 | $-1$ | $-1$ | |

   La nueva solución óptima es $(x, y) = (2, 2)$ con $F = 10$.

3. Estudiar qué sucede si $c_2$ pasa a valer 4.

   Como la variable $y$ es básica, se modifican todos los rendimientos marginales. La nueva tabla es

| | | 1 | 4 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x$ | $y$ | $s$ | $t$ | |
| 4 | $y$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 4 |
| 0 | $t$ | 1 | 0 | $-1$ | 1 | 2 |
| | | 4 | 4 | 4 | 0 | 16 |
| | | $-3$ | 0 | $-4$ | 0 | |

   Vemos que la solución sigue siendo óptima, sólo que ahora la función objetivo vale $F = 16$.

4. Calcular el intervalo de sensibilidad de $c_1$.

   Esto significa determinar el intervalo en que puede variar $c_1$ sin que la solución deje de ser válida. Para determinarlo ponemos un coeficiente indeterminado en la tabla:

| | | $c_1$ | 2 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x$ | $y$ | $s$ | $t$ | |
| 2 | $y$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 4 |
| 0 | $t$ | 1 | 0 | $-1$ | 1 | 2 |
| | | 2 | 2 | 2 | 0 | 8 |
| | | $c_1 - 2$ | 0 | $-2$ | 0 | |

   La solución seguirá siendo válida mientras $c_1 - 2 \leq 0$, es decir, $c_1 \leq 2$, luego el intervalo de sensibilidad es $]-\infty, 2]$.

5. Calcular el intervalo de sensibilidad de $c_2$.

   Como $y$ es una variable básica, $c_2$ afecta a todos los rendimientos marginales:

$$
\begin{array}{cc|cccc|c}
 & & 1 & c_2 & 0 & 0 & \\
 & & x & y & s & t & \\
\hline
c_2 & y & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\
0 & t & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\
\hline
 & & c_2 & c_2 & c_2 & 0 & \\
\cline{3-6}
 & & 1-c_2 & 0 & -c_2 & 0 & 4c_2 \\
\hline
\end{array}
$$

   La solución seguirá siendo válida mientras $1 - c_2 \leq 0$ y $-c_2 \leq 0$, es decir, $c_2 \geq 1$ y $c_2 \geq 0$. El intervalo es $[1, +\infty[$.

## 6.2 Cambio de un término independiente

El cambio de un término independiente $b_i$ no afecta a los rendimientos marginales, pero sí a la solución $\bar{x}_B = B^{-1}\bar{b}$. El problema es que la nueva solución puede dejar de ser factible. Concretamente, si se sigue cumpliendo $\bar{x}_B \geq 0$, entonces la solución sigue siendo válida, pero es muy importante recordar que *esto no significa que la nueva solución sea la misma que la anterior*. Normalmente habrá cambiado tanto $\bar{x}_B$ como el valor de la función objetivo. Lo único que se conserva respecto a la solución original es que las variables básicas (no su valor) son las mismas.

Si, por el contrario, deja de cumplirse la condición de factibilidad $\bar{x}_B \geq 0$, nos encontramos con una solución infactible con la que el símplex no puede trabajar, así que lo que haremos en tal caso es pasar al problema dual, pues $b_i$ es un coeficiente de la función objetivo, y dicho caso lo hemos estudiado ya en la sección anterior.

**Ejemplos** Consideremos el mismo problema de los ejemplos precedentes.

1. Estudiar qué sucede si $b_1$ pasa a valer 5.

   Los coeficientes $b_i$ no aparecen directamente en la tabla, sino indirectamente, en $\bar{x}_B = B^{-1}\bar{b}$. Para calcular la nueva solución necesitamos la matriz $B^{-1}$. Tenemos que

$$
\begin{array}{cccc} x & y & s & t \end{array}
$$
$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

   (Notemos que $B^{-1}$ puede extraerse también de la tabla óptima). Si $\bar{b}$ pasa a ser $(5, 6)$, tenemos que

$$
B^{-1}\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

   Como se sigue cumpliendo la condición de factibilidad, la solución sigue siendo válida. Ahora bien, la solución original era $(x, y) = (0, 4)$ con variables de holgura $(s, t) = (0, 2)$ y función objetivo $z = 8$, mientras que la nueva solución es $(x, y) = (0, 5)$ con variables de holgura $(s, t) = (0, 1)$ y función objetivo $z = 10$.

2. Calcular el intervalo de sensibilidad de $b_1$.

   Calculamos como antes la matriz $B^{-1}$, de modo que

$$
\bar{x}_B = B^{-1}\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ -b_1 + 6 \end{pmatrix}.
$$

   La solución seguirá siendo factible si $b_1 \geq 0$ y $-b_1 + 6 \geq 0$, es decir, si $b_1 \geq 0$ y $b_1 \leq 6$. El intervalo de sensibilidad es, pues, $[0, 6]$.

3. Estudiar qué sucede si $b_1$ pasa a valer 8.

   Puesto que 8 se sale del intervalo de sensibilidad, la nueva solución no será factible. Planteamos el problema dual:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 4\lambda + 6\mu \\ \text{s.a} & \lambda + 2\mu \geq 1 \\ & \lambda + \ \ \mu \geq 2 \\ & \lambda,\, \mu \geq 0 \end{array}$$

   Como las variables no básicas del primal son $x$, $s$, las variables básicas del dual serán las asociadas a éstas, a saber, $\lambda$ y $s'$. La matriz dual es

$$A' = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \lambda & \mu & s' & t' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array},$$

   luego

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B'^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B'^{-1}A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Por otra parte, los valores de las variables duales los obtenemos de los rendimientos marginales primales: $(\lambda, s') = (2, 1)$.

   Construimos la tabla dual, pero cambiando ya el coeficiente $b_1 = 4$ por 8, tal y como pide el problema:

| | | 8 | 6 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\lambda$ | $\mu$ | $s'$ | $t'$ | |
| 8 | $\lambda$ | 1 | 1 | 0 | $-1$ | 2 |
| 0 | $s'$ | 0 | $-1$ | 1 | $-1$ | 1 |
| | | 8 | 8 | 0 | $-8$ | 16 |
| | | 0 | $-2$ | 0 | 8 | |

   Si no hubiéramos cambiado $b_1$, sería la tabla óptima, pero ahora tenemos que $\mu$ puede entrar en la base (recordemos que el problema es de minimizar, luego entran las variables con rendimientos marginales negativos). Sale $\lambda$ y la nueva tabla es

| | | 8 | 6 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\lambda$ | $\mu$ | $s'$ | $t'$ | |
| 6 | $\mu$ | 1 | 1 | 0 | $-1$ | 2 |
| 0 | $s'$ | 1 | 0 | 1 | $-2$ | 3 |
| | | 6 | 6 | 0 | $-6$ | 12 |
| | | 2 | 0 | 0 | 6 | |

   Ya hemos llegado al óptimo. La solución óptima primal será $(x, y, s, t) = (0, 6, 2, 0)$ con $z = 12$.

## 6.3 Cambio de un coeficiente técnico

Vamos a considerar únicamente el caso en que el coeficiente $a_{ij}$ que varía es no básico. Si fuera básico podría pasar cualquier cosa (incluso que la matriz básica dejara de ser regular). Admitiendo que $a_{ij}$ es no básico, lo único que se modifica es el correspondiente $w_j$, por lo que la solución podrá dejar de ser óptima, si bien seguirá siendo factible.

**Ejemplos** Consideremos el mismo problema que en los ejemplos precedentes.

1. Estudiar qué sucede si $a_{11}$ pasa a valer 2.

   Notemos que se trata de un coeficiente no básico. Calculamos

   $$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (El cálculo está hecho antes.) Ahora obtenemos la nueva matriz $Y$:

   $$Y = B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   La nueva tabla será

   | | | 1 | 2 | 0 | 0 | |
   |---|---|---|---|---|---|---|
   | | | $x$ | $y$ | $s$ | $t$ | |
   | 2 | $y$ | 2 | 1 | 1 | 0 | 4 |
   | 0 | $t$ | 0 | 0 | −1 | 1 | 2 |
   | | | 4 | 2 | 2 | 0 | 8 |
   | | | −3 | 0 | −2 | 0 | |

   Vemos que la solución sigue siendo óptima. (Si no lo hubiera sido, simplemente habríamos calculado las iteraciones necesarias para llegar de nuevo a un óptimo.)

2. Calcular el intervalo de sensibilidad de $a_{11}$.

   Repetimos los cálculos anteriores pero con un coeficiente $a_{11}$ arbitrario:

   $$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 1 & 1 & 0 \\ 2 - a_{11} & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Ahora será $z_1 = 2a_{11}$ y $w_1 = 1 - 2a_{11}$, luego la solución será válida mientras $1 - 2a_{11} \leq 0$. El intervalo es $[1/2, +\infty[$.

## 6.4 Introducción de una nueva variable

Introducir una nueva variable supone introducir una nueva columna en la tabla. Podemos calcular el nuevo $w_{n+1}$. Si es $\leq 0$ para problemas de maximizar o $\geq 0$ para problemas de minimizar, la solución sigue siendo óptima, y la nueva variable (que es no básica) vale 0. Si $w_{n+1} > 0$ calculamos nuevas iteraciones hasta llegar a una solución óptima.

## 6.5 Introducción de una nueva restricción

Si la solución óptima cumple la nueva restricción entonces sigue siendo óptima y no hay nada que hacer. En caso contrario hemos de pasar al dual (donde lo que hemos hecho es añadir una nueva variable y estamos en el caso anterior).

# Problemas

1. Un botellero embotella y comercializa tres tipos de vino $A$, $B$ y $C$. Por cada cuba obtiene un beneficio de 50, 25 y 20 u.m. respectivamente. Cada cuba ha de pasar por dos fases: llenado y precintado. La primera trabaja hasta un total de 640 horas semanales y la segunda 900 horas semanales. El número de horas que una cuba necesita en cada fase viene dado por la tabla siguiente:

| | Llenado | Precintado |
|---|---|---|
| $A$ | 16 | 30 |
| $B$ | 4 | 5 |
| $C$ | 6 | 10 |

La solución óptima del problema lineal que maximiza los beneficios es $(0, 160, 0, 0, 100)$.

(a) ¿Cuántas cubas de tipo $C$ llenaría si las horas totales de la sección de llenado fueran 700?

(b) Si el beneficio por cuba de tipo $A$ fuera de 55 u.m. ¿cuántas cubas de tipo $B$ se llenarían?

(c) ¿Cuánto puede disminuir el beneficio unitario de las cubas de tipo $A$ sin que la solución varíe?

(d) Calcula e interpreta el intervalo de sensibilidad del beneficio por cuba de tipo $B$.

2. Una empresa produce dos artículos en cantidades $x$ e $y$, y los distribuye en un mercado cuya demanda máxima (conjunta para los dos productos) se estima en 200 unidades. El coste de producción unitario es de 2 u.m. para el primer producto y 3 u.m. para el segundo. El presupuesto de la empresa es de 500 u.m. Por otra parte, el beneficio que se obtiene por cada unidad del primer artículo es de 3 u.m., mientras que para el segundo es de 1 u.m.

   (a) Calcula la producción que maximiza los beneficios y el beneficio máximo.

   (b) Estudia las variaciones que se producirían si el beneficio unitario obtenido por el segundo artículo fuera de 2 unidades monetarias en lugar de 1.

   (c) Repite el apartado anterior para un beneficio unitario de 4 u.m.

   (d) Calcula el intervalo de sensibilidad del beneficio unitario de cada uno de los dos artículos.

   (e) Calcula el intervalo de sensibilidad del coste unitario del segundo artículo.

   (f) Calcula el intervalo de sensibilidad de la demanda del mercado.

   (g) Estudia las modificaciones en la solución que se producirían para una demanda de 250 unidades de producto.

   (h) Repite el apartado anterior para una demanda de 300 unidades de producto.

   (i) Supongamos que la empresa se ve obligada a producir al menos tanta cantidad del segundo artículo como la mitad del primero, es decir, $y \geq x/2$ o, equivalentemente, $x - 2y \leq 0$. Obtén la nueva solución óptima.

3. Una empresa fabrica dos productos en cantidades $x_1$ y $x_2$ a partir de dos procesos productivos que vienen representados por las restricciones

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leq 9 \\ 2x_1 + \ \ x_2 &\leq 8, \end{aligned}$$

   donde 9 y 8 son las cantidades disponibles de dos factores de producción. Suponiendo que los beneficios unitarios son de 1 y 2 unidades monetarias respectivamente y sabiendo que el beneficio máximo se obtiene cuando se agotan las disponibilidades de ambos factores productivos,

   (a) Calcula la tabla óptima del problema.

   (b) Realiza el análisis de sensibilidad de $b_1$ e interpreta el resultado.

   (c) Si se implanta un nuevo proceso productivo determinado por la restricción

$$3x_1 + 2x_2 \leq 14,$$

   ¿qué efecto tendría sobre la solución del problema? ¿Cuál será el nuevo óptimo?

4. Considera el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} & 2x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ & 2x_1 + 4x_2 \leq 10 \\ & x_1,\, x_2 \geq 0 \end{array}$$

   Se sabe que las variables básicas en el óptimo son $x_1$ y $s_1$. Realiza el análisis de sensibilidad de $b_1$.

5. Considera el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.a} & x_1 + \;\; x_2 + x_3 \leq 10000 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 20000 \\ & x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0 \end{array}$$

   (a) Sabiendo que las variables básicas de la solución óptima son $x_2$ y $x_3$, calcula la tabla óptima del símplex.
   (b) Plantea el problema dual y, a partir de la tabla anterior, obtén la solución óptima.
   (c) Indica cuál es la nueva solución si $b_1$ pasa a ser 20000.

6. La solución óptima del problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & 2x_1 + \;\; x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ & x_1,\, x_2 \geq 0 \end{array}$$

   es $(x_1, x_2) = (5, 2)$.

   (a) Calcula la tabla óptima sin realizar ninguna iteración.
   (b) Haz el análisis de sensibilidad de $b_1$.
   (c) Calcula la nueva solución óptima si añadimos la restricción $2x_1 + 3x_2 \leq 17$. Indica cuáles son las variables básicas.

7. Una empresa se plantea el siguiente problema lineal:

$$\begin{array}{rll} \text{Max.} & 3x_1 + x_2 + 2x_3 & \text{(beneficios)} \\ \text{s.a} & 2x_1 + \;\; x_2 + \;\; x_3 \leq 18 & \text{(capital)} \\ & 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 15 & \text{(horas de trabajo)} \\ & x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0 & \end{array}$$

   (a) Calcula la tabla óptima del símplex sabiendo que el punto óptimo es $(5, 0, 0)$.
   (b) Haz el análisis de sensibilidad de $a_{12}$ y $a_{22}$.
   (c) Razona el efecto de reducir el trabajo de 15 a 12 horas.
   (d) Calcula el valor de las variables duales. Razona si a la empresa le interesa disponer de más capital o de más horas de trabajo para aumentar sus beneficios.

8. La tabla óptima del problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 10x_1 + 20x_2 \\ \text{s.a} & 3x_1 + 4x_2 \leq 60 \\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 62 \\ & x_2 \leq \;\; 9 \\ & x_1,\, x_2 \geq 0 \end{array}$$

viene dada por

| | | 10 | 20 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | |
| 0 | $s_1$ | 0 | 0 | 1 | $-3/5$ | $-11/5$ | 3 |
| 10 | $x_1$ | 1 | 0 | 0 | $1/5$ | $-3/5$ | 7 |
| 20 | $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 9 |
| | | 10 | 20 | 0 | 2 | 14 | 250 |
| | | 0 | 0 | 0 | $-2$ | $-14$ | |

(a) Obtén la solución óptima del problema dual.

(b) ¿Para qué valores de $c_1$ continúa siendo válida la solución?

9. Una empresa fabrica dos productos en cantidades $x_1$ y $x_2$, a partir de dos procesos productivos representados por las restricciones

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &\leq 8 \\ 2x_1 + \ \ x_2 &\leq 6, \end{aligned}$$

donde 8 y 6 son las cantidades disponibles de dos factores de producción. Los beneficios unitarios son de 6 y 2 unidades monetarias respectivamente.

(a) Determina la solución óptima del problema dual sabiendo que en la solución óptima del primal se fabrican 3 unidades del primer producto.

(b) Si el empresario desea aumentar su producción, ¿qué factor productivo le convendrá más aumentar?

(c) La empresa desea implantar un nuevo proceso productivo, determinado por la restricción $x_1 + 5x_2 \leq 10$. Indica el efecto que tendrá sobre la solución óptima y, en su caso, calcula la nueva solución.

# Tema 7

# Programación no lineal

Todas las técnicas de resolución vistas hasta ahora (excepto la resolución gráfica) son válidas únicamente para problemas de programación lineal. En este tema veremos una técnica aplicable a cualquier problema de programación no lineal (es decir, que es aplicable tanto si las restricciones son lineales como si no).

## 7.1 Condiciones necesarias de optimalidad

En general, un problema de programación no lineal tiene infinitas soluciones factibles, de entre las cuales hemos de encontrar la solución óptima. Vamos a ver que, bajo ciertas hipótesis, ésta ha de cumplir necesariamente ciertas condiciones, lo que en muchos casos nos reducirá la búsqueda a analizar un número finito de puntos.

Para que la técnica que vamos a emplear sea aplicable a un problema, es necesario que sus restricciones satisfagan ciertas hipótesis. Existen muchas hipótesis alternativas que garantizan que las técnicas son aplicables, conocidas como *cualificaciones de restricciones.* Nosotros consideraremos únicamente tres:

**Primera cualificación de restricciones** *No hay restricciones.*

**Segunda cualificación de restricciones (linealidad)** *Todas las restricciones son lineales.*

**Tercera cualificación de restricciones (regularidad)** *Todas las soluciones factibles del problema son regulares.*

La tercera requiere una explicación:

*Una solución factible $\bar{x}$ es regular si es interior o, en caso de ser de frontera, los gradientes de las restricciones saturadas en $\bar{x}$ son linealmente independientes.*

La independencia lineal significa que la matriz formada por los vectores gradientes tiene un menor (un determinante de una submatriz cuadrada) no nulo de orden máximo. En particular:

*Si el problema tiene una única restricción, la regularidad equivale a que el gradiente de la restricción no se anule en ninguna solución factible de frontera.*

Veremos enseguida que la técnica que vamos a emplear requiere derivar la función objetivo y las restricciones por lo que, además, deberemos exigir que éstas sean funciones de clase $C^1$. Como algunas técnicas posteriores requerirán a veces funciones de clase $C^2$, en la práctica requeriremos siempre esta condición más fuerte. En resumen:

Para resolver un problema de programación no lineal deberemos comprobar en primer lugar que tanto la función objetivo como las restricciones sean funciones de clase $C^2$ y que el problema cumpla una de las tres cualificaciones de restricciones anteriores.

Una vez comprobado esto, el paso siguiente es construir la llamada *función lagrangiana* del problema. Se trata de una función $L$ cuyas variables son las variables principales del problema más una nueva variable por cada restricción (incluidas las de signo). Estas nuevas variables se conocen como *multiplicadores de Kuhn y Tucker,* aunque si el problema es de programación clásica es costumbre llamarlas *multiplicadores de Lagrange.*

La función lagrangiana se obtiene sumando a la función objetivo un término $\lambda(b - g(\bar{x}))$ para cada restricción $g(\bar{x}) \leq b$, $g(\bar{x}) \geq b$ o $g(\bar{x}) = b$ del problema (incluidas las de signo), donde $\lambda$ es el multiplicador de Kuhn y Tucker (o de Lagrange) asociado a la restricción.

**Ejemplo** *Calcular la función lagrangiana del problema*

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & xyz \\ \text{s.a} & x+y+z \leq 3 \\ & x^2+y^2+z^2 = 9 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

SOLUCIÓN: $L(x, y, z, \lambda, \mu, \nu) = xyz + \lambda(3 - x - y - z) + \mu(9 - x^2 - y^2 - z^2) - \nu y.$ ■

El paso siguiente es calcular los llamados *puntos de Kuhn y Tucker* del problema, que son los puntos $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ que cumplen las condiciones siguientes, llamadas *condiciones de Kuhn y Tucker:*

**Factibilidad** *El punto $\bar{x}$ satisface las restricciones del problema (es una solución factible).*

**Punto crítico** *Las derivadas de la lagrangiana respecto a las variables principales son nulas en $\bar{x}$:*

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0.$$

**Signo** *Si $\lambda$ es un multiplicador asociado a una restricción canónica entonces $\lambda \geq 0$, mientras que si su restricción es no canónica entonces $\lambda \leq 0$. Los multiplicadores de las restricciones de igualdad son libres.*

Recordemos que llamamos *desigualdades canónicas* a las de $\leq$ si el problema es de maximizar y a las de $\geq$ si el problema es de minimizar.

**Holgura complementaria** *Si $\lambda$ es un multiplicador asociado a una restricción de desigualdad $g(\bar{x}) \leq b$ o $g(\bar{x}) \geq b$ entonces*

$$\lambda(b - g(\bar{x})) = 0.$$

(Equivalentemente, los multiplicadores asociados a las restricciones no saturadas en $\bar{x}$ son nulos.)

El interés de los puntos de Kuhn y Tucker es que se cumple el teorema siguiente:

**Condición necesaria Kuhn y Tucker** *Consideremos un problema de programación no lineal en el que tanto la función objetivo como las restricciones sean de clase $C^2$ y que satisfaga una cualificación de restricciones. Entonces, para todo óptimo local $\bar{x}$ del problema existe un vector $\bar{\lambda}$ de multiplicadores tal que $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ es un punto de Kuhn y Tucker.*

**Ejemplo** *Escribir las condiciones de Kuhn y Tucker para el problema*

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & xyz \\ \text{s.a} & x+y+z \leq 3 \\ & x^2+y^2+z^2 = 9 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

SOLUCIÓN: La función lagrangiana la hemos calculado más arriba. Las condiciones de Kuhn y Tucker son:

**Factibilidad** $x+y+z \leq 3, \qquad x^2+y^2+z^2=9, \qquad y \geq 0.$

**Punto crítico**

$$\frac{\partial L}{\partial x} = yz - \lambda - 2x\mu = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = xz - \lambda - 2y\mu - \nu = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial z} = xy - \lambda - 2z\mu = 0,$$

**Signo** Como la desigualdad de $\lambda$ es canónica y la de $\nu$ no lo es, las condiciones de signo son:

$$\lambda \geq 0, \qquad \nu \leq 0.$$

**Holgura complementaria** $\lambda(3-x-y-z)=0, \qquad \nu y = 0.$

■

El teorema anterior puede resumirse así:

| |
|---|
| Para encontrar las soluciones óptimas de un problema usaremos la implicación<br>Solución óptima $\Longrightarrow$ Punto de Kuhn y Tucker,<br>pero debemos tener presente que para que esta implicación sea cierta el problema debe cumplir una cualificación de restricciones (así como que las funciones que lo definen sean de clase $C^2$). |

Por otra parte:

| |
|---|
| Bajo ningún concepto podemos afirmar que todo punto de Kuhn y Tucker de un problema es una solución óptima. Puede suceder que ningún punto de Kuhn y Tucker sea óptimo (si el problema es no acotado), que haya puntos de Kuhn y Tucker que son óptimos locales y no globales (luego tampoco son soluciones óptimas) o incluso que ni siquiera sean óptimos locales. |

Así pues, el interés de calcular los puntos de Kuhn y Tucker se debe a que en muchos casos nos reduce el problema de encontrar la solución óptima a estudiar un número finito de puntos. Para determinar si un punto de Kuhn y Tucker es o no un óptimo global de un problema emplearemos los métodos que presentamos en la sección siguiente.

**Observaciones** Las condiciones de signo y holgura complementaria sólo aparecen si el problema tiene restricciones de desigualdad. Así pues, si el problema es de programación clásica sólo tenemos condiciones de factibilidad y de punto crítico. En este caso las condiciones se llaman *condiciones de Lagrange* en lugar de condiciones de Kuhn y Tucker y los puntos que las satisfacen se llaman *puntos críticos* en lugar de puntos de Kuhn y Tucker.

Si además el problema no tiene restricciones tampoco hay condiciones de factibilidad, y además la lagrangiana es simplemente la función objetivo. Las condiciones necesarias se reducen entonces a que las derivadas de la función objetivo sean nulas.

**Forma equivalente de las condiciones de Kuhn y Tucker** Los multiplicadores asociados a restricciones de signo siempre pueden despejarse de las condiciones de punto crítico (sin más que pasarlos al otro miembro). Al sustituirlos en las demás condiciones obtenemos una forma equivalente de las condiciones de Kuhn y Tucker en las que no aparecen los multiplicadores de signo.

**Ejemplo** *Eliminar el multiplicador de signo $\nu$ en las condiciones de Kuhn y Tucker del problema anterior.*

SOLUCIÓN: Despejamos de la condición de punto crítico:

$$\nu = xz - \lambda - 2y\mu.$$

Al sustituir en las otras condiciones obtenemos:

$$x + y + z \leq 3, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 9, \qquad y \geq 0,$$

$$yz - \lambda - 2x\mu = 0, \qquad xz - \lambda - 2y\mu \leq 0, \qquad xy - \lambda - 2z\mu = 0,$$

$$\lambda \geq 0, \qquad \lambda(3 - x - y - z) = 0, \qquad (xz - \lambda - 2y\mu)y = 0.$$

Ésta es la versión equivalente sin multiplicadores de signo. ■

**Comprobación de si un punto cumple las condiciones de Kuhn y Tucker** La mejor forma de comprobar si un punto cumple las condiciones de Kuhn y Tucker es en el orden siguiente:

Factibilidad ⇒ Holgura complementaria ⇒ Punto crítico ⇒ Signo.

**Ejemplo** *Comprobar si $(x, y, z) = (0, 3, 0)$ es un punto de Kuhn y Tucker del problema anterior.*

Se cumplen las condiciones de factibilidad:

$$\begin{array}{ll} x + y + z \leq 3 & \Rightarrow\ 0 + 3 + 0 \leq 3 \\ x^2 + y^2 + z^3 = 9 & \Rightarrow\ 0 + 9 + 0 = 9 \\ y \geq 0 & \Rightarrow\ 3 \geq 0 \end{array}$$

Veamos ahora las condiciones de holgura complementaria:

$$\begin{array}{ll} \lambda(3 - x - y - z) = 0 & \Rightarrow\ \lambda \cdot 0 = 0 \\ \nu y = 0 & \Rightarrow\ \nu \cdot 3 = 0 \end{array}$$

Concluimos que se cumplen si $\nu = 0$. Sabiendo esto pasamos a las condiciones de punto crítico:

$$\begin{array}{ll} yz - \lambda - 2x\mu = 0 & \Rightarrow\ -\lambda = 0 \\ xz - \lambda - 2y\mu - \nu = 0 & \Rightarrow\ -\lambda - 6\mu = 0 \\ xy - \lambda - 2z\mu = 0 & \Rightarrow\ -\lambda = 0 \end{array}$$

Vemos que se cumplen si $\lambda = \mu = 0$. Como $(\lambda, \mu, \nu) = (0, 0, 0)$, las condiciones de signo se cumplen también. ■

**Resolución de las condiciones de Kuhn y Tucker** Para problemas de programación clásica las condiciones de Kuhn y Tucker (llamadas entonces condiciones de Lagrange) son simplemente un sistema de ecuaciones que podemos resolver. Cuando el problema tiene restricciones de desigualdad conviene seguir el procedimiento que ilustra el ejemplo siguiente:

**Problema** *Encontrar los puntos de Kuhn y Tucker del problema*

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x^2+y^2 \\ \text{s.a} & x+2y \leq 5 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

SOLUCIÓN: Observamos que tanto la función objetivo como las restricciones son de clase $C^2$ porque son polinomios, así como que se cumple la cualificación de restricciones de linealidad, pues las restricciones son lineales. Esto no hace falta para responder a lo que se pide (calcular los puntos de Kuhn y Tucker), pero sería el primer paso si nos pidieran encontrar los óptimos del problema, pues ahora sabemos que si el problema tiene solución óptima será uno de los puntos de Kuhn y Tucker que vamos a encontrar.

La función lagrangiana es

$$L(x, y, \lambda, \nu_1, \nu_2) = x^2 + y^2 + \lambda(5 - x - 2y) - \nu_1 x - \nu_2 y.$$

Las condiciones de Kuhn y Tucker son:

**Factibilidad** $x + 2y \leq 5, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$

**Punto crítico** $2x - \lambda - \nu_1 = 0, \quad 2y - 2\lambda - \nu_2 = 0.$

**Signo** $\lambda \geq 0, \quad \nu_1 \leq 0, \quad \nu_2 \leq 0.$

**Holgura complementaria** $\lambda(5 - x - 2y) = 0, \quad \nu_1 x = 0, \quad \nu_2 y = 0.$

Para calcular los puntos de Kuhn y Tucker seguimos el sistema siguiente:

1. *Desdoblamos en dos casos cada condición de holgura complementaria:*

$$\lambda = 0 \text{ o bien } 5 - x - 2y = 0, \quad \nu_1 = 0 \text{ o bien } x = 0, \quad \nu_2 = 0 \text{ o bien } y = 0.$$

2. *Formamos todos los casos posibles.* (Serán 2 casos si hay una condición de holgura complementaria, 4 si hay dos, 8 si hay tres, etc.) Aquí tenemos 8 casos:

$$\begin{array}{llll llll} \text{CASO 1:} & \lambda = 0, & \nu_1 = 0, & \nu_2 = 0, & \text{CASO 5:} & x + 2y = 5, & \nu_1 = 0, & \nu_2 = 0, \\ \text{CASO 2:} & \lambda = 0, & \nu_1 = 0, & y = 0, & \text{CASO 6:} & x + 2y = 5, & \nu_1 = 0, & y = 0, \\ \text{CASO 3:} & \lambda = 0, & x = 0, & \nu_2 = 0, & \text{CASO 7:} & x + 2y = 5, & x = 0, & \nu_2 = 0, \\ \text{CASO 4:} & \lambda = 0, & x = 0, & y = 0, & \text{CASO 8:} & x + 2y = 5, & x = 0, & y = 0. \end{array}$$

3. *A las condiciones de cada caso añadimos las de punto crítico (y, si las hubiera, las condiciones de factibilidad que fueran igualdades) y resolvemos el sistema:*

CASO 1: Al sustituir las condiciones del caso 1 en las condiciones de punto crítico obtenemos

$$2x = 0, \quad 2y = 0,$$

luego llegamos al punto $(x, y) = (0, 0)$ con $(\lambda, \nu_1, \nu_2) = (0, 0, 0)$. Los CASOS 2,3,4 nos llevan a la misma solución.

CASO 5: Tenemos

$$2x - \lambda = 0, \quad 2y - 2\lambda = 0, \quad x + 2y = 5, \quad \nu_1 = 0, \quad \nu_2 = 0.$$

Al resolver queda $(x, y) = (1, 2)$ con $(\lambda, \nu_1, \nu_2) = (2, 0, 0)$.

CASO 6: Tenemos

$$2x - \lambda = 0, \quad -2\lambda - \nu_2 = 0, \quad x + 2y = 5, \quad \nu_1 = 0, \quad y = 0.$$

Al resolver queda $(x, y) = (5, 0)$ con $(\lambda, \nu_1, \nu_2) = (10, 0, -20)$.

CASO 7: Se llega al punto $(x, y) = (0, 5/2)$ con $(\lambda, \nu_1, \nu_2) = (5/2, -5/2, 0)$.

Las condiciones del CASO 8 son imposibles, luego no nos dan ningún punto.

En total tenemos los puntos $(x, y, \lambda, \nu_1, \nu_2)$ siguientes

$$(0, 0, 0, 0, 0), \quad (1, 2, 2, 0, 0), \quad (5, 0, 10, 0, -20), \quad (0, 5/2, 5/2, -5/2, 0).$$

4. *Comprobamos que los puntos obtenidos cumplen las condiciones de factibilidad y signo* (que hasta aquí no hemos usado para nada).

   Los cuatro puntos las cumplen, luego tenemos cuatro puntos de Kuhn y Tucker. Si el problema tiene máximo, será necesariamente uno de estos puntos (porque hemos comprobado una cualificación de restricciones). ■

Conviene tener presente una última observación sobre la condición necesaria de Kuhn y Tucker:

> Para que la implicación
>
> $$\text{Solución óptima} \Longrightarrow \text{Punto de Kuhn y Tucker},$$
>
> sea aplicable a un punto en concreto $\bar{x}^*$, no es necesario que se cumpla la hipótesis de regularidad sobre todas las soluciones factibles, sino que basta que el punto $\bar{x}^*$ sea regular.

De este modo, cuando resolvemos un problema con restricciones no lineales, hemos de comprobar la hipótesis de regularidad sobre todas las soluciones factibles, pues así garantizamos que el óptimo —sea cual sea— será regular y, por consiguiente, un punto de Kuhn y Tucker, pero si estamos estudiando la optimalidad de un punto dado basta comprobar que dicho punto es regular. Así, si vemos que es regular pero no cumple las condiciones de Kuhn y Tucker, podemos asegurar que no es óptimo.

## 7.2 Condiciones suficientes de optimalidad

Dado un problema de programación no lineal, aplicando la teoría de la sección anterior podemos encontrar unos puntos (los puntos de Kuhn y Tucker, a menudo un número finito) de modo que si el problema tiene óptimo, dicho óptimo ha de ser uno de ellos, pero no podemos afirmar a priori que el problema tenga óptimo. En esta sección indicaremos cuatro formas de determinar si un punto de Kuhn y Tucker es o no una solución óptima.

**Concavidad/convexidad** Este método es aplicable siempre y cuando el conjunto de oportunidades sea convexo, en particular si las restricciones del problema son lineales. El resultado es el siguiente:

**Teorema (condición suficiente de Kuhn y Tucker)** *Consideremos un problema de programación no lineal y supongamos que:*

- *Las funciones que definen el problema son de clase $C^2$,*
- *El conjunto de oportunidades es convexo,*
- *La función objetivo es (estrictamente) convexa si el problema es de minimizar y (estrictamente) cóncava si el problema es de maximizar.*

*entonces, todo punto de Kuhn y Tucker del problema es un óptimo global (estricto).*

**El teorema de Weierstrass** Este método es aplicable si tenemos sólo un número finito de puntos de Kuhn y Tucker y el conjunto de oportunidades es compacto. Entonces el teorema de Weierstrass nos asegura que el problema tiene solución óptima, y dicha solución tiene que ser un punto de Kuhn y Tucker (supuesto que hayamos comprobado una cualificación de restricciones). Así pues, la solución óptima será simplemente el punto de Kuhn y Tucker en el que la función objetivo tome el valor máximo o mínimo, según proceda.

**Representación gráfica** Este método es aplicable siempre que el problema tenga dos variables y la función objetivo sea lineal. En tal caso estudiamos gráficamente si existe óptimo (aunque no sepamos calcular cuánto vale). El óptimo será el mejor punto de Kuhn y Tucker, como en el caso anterior.

**Observaciones sobre la aplicación de los criterios precedentes** Para aplicar correctamente estos criterios es importante tener en cuenta los hechos siguientes:

- El criterio de concavidad/convexidad requiere que el conjunto de oportunidades sea convexo. Si el problema tiene restricciones de igualdad éstas tendrán que ser lineales para que podamos decir que definen hiperplanos, mientras que si hay restricciones de desigualdad no es necesario que sean lineales, sino que en tal caso tendremos que estudiar si definen conjuntos de nivel superior o inferior convexos (estudiando para ello la concavidad o convexidad de la restricción).
- No hay que confundir la condición suficiente de Kuhn y Tucker (el método de concavidad/convexidad) con el teorema local-global. El primero parte de un punto de Kuhn y Tucker, mientras que el segundo parte de un óptimo local. Además el segundo no requiere que el objetivo del problema se corresponda con la concavidad o convexidad de la función, mientras que el primero sí.
- Para aplicar el teorema de Weierstrass hemos de conocer todos los puntos de Kuhn y Tucker del problema, pues hemos de quedarnos con el mejor. Por ejemplo, si nos dan un punto para comprobar si cumple las condiciones de Kuhn y Tucker pero no nos dicen si hay otros, no podremos aplicar este método.
- Si tenemos varios puntos de Kuhn y Tucker y la función objetivo toma en ellos valores diferentes, entonces el método de concavidad/convexidad no es aplicable, pues si lo fuera podríamos concluir que todos ellos son óptimos globales, lo cual es absurdo. Dicho de otro modo, el método de concavidad/convexidad requiere que sólo exista un punto de Kuhn y Tucker o —de haber varios— que la función objetivo valga lo mismo en todos ellos.
- Los métodos anteriores —en caso de ser aplicables— nos proporcionan siempre óptimos globales, que son lo que realmente interesa en un problema de programación matemática.
- Cuando uno de los métodos anteriores no es aplicable (por ejemplo, si tratamos de aplicar el método de concavidad/convexidad y la función objetivo resulta ser convexa cuando debería ser cóncava o viceversa) no podemos concluir por ello que el problema no tiene óptimo global. De hecho, no podemos concluir nada. Tendremos que probar otro método o tratar de mostrar que el problema no está acotado.
- Una forma elemental de probar que un problema no tiene óptimo global es encontrar una solución factible que mejore a todos los puntos de Kuhn y Tucker. Así, ninguno de ellos será óptimo y (supuesto que hayamos comprobado una cualificación de restricciones) podremos afirmar que el problema no tiene óptimo global.

## 7.3 Interpretación económica de los multiplicadores

Los multiplicadores de Kuhn y Tucker asociados a la solución óptima de un problema de programación no lineal no son (salvo el signo) sino los costes reducidos o los precios duales que proporciona LINGO. Concretamente, salvo en un caso que indicaremos a continuación se cumple lo siguiente:

> El valor del multiplicador de Kuhn y Tucker asociado a una restricción correspondiente a una solución óptima indica aproximadamente lo que *aumenta* la función objetivo por cada unidad que hagamos aumentar el término independiente de la restricción.

Por consiguiente, si un término independiente $b$ correspondiente a una restricción de multiplicador $\lambda$ experimenta un incremento $\Delta b$, el valor óptimo de la función objetivo del nuevo problema con $b$ incrementado experimentará un incremento aproximadamente igual a $\lambda \cdot \Delta b$. Esta aproximación sólo será aceptable para incrementos marginales de $b$, esto es, incrementos pequeños en comparación con el valor de $b$.

Observemos que si la restricción no está saturada en el óptimo $\bar{x}^*$ entonces la condición de holgura complementaria asociada a la restricción implica que $\lambda_i = 0$ y, en efecto, esto significa que una pequeña modificación en $b_i$ no altera el valor óptimo, ya que dicho valor óptimo se seguirá alcanzando en el mismo punto $\bar{x}^*$.

Por otra parte, puede suceder (aunque no es frecuente) que $\lambda_i = 0$ aunque la restricción esté saturada. En tal caso las condiciones de Kuhn y Tucker tienen infinitas soluciones y no podemos interpretar ningún multiplicador:

| |
|---|
| Si un multiplicador de Kuhn y Tucker es nulo y su restricción está saturada, los multiplicadores de Kuhn y Tucker no tienen interpretación económica. |

**Ejemplo** *La función de costes de una empresa viene dada por $C(x, y) = x^2 + y^2 + 2x + 4y + 10$, donde $x$ e $y$ son las cantidades producidas de dos artículos. Determina el coste mínimo necesario para producir un total de 21 unidades de producto. ¿Qué sucedería si la empresa decidiera incrementar su producción en dos unidades?*

Solución: El problema es minimizar el coste sujeto a la restricción $x + y = 21$, es decir,

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & x^2 + y^2 + 2x + 4y + 10 \\ \text{s.a} & x + y = 21 \end{array}$$

Para resolverlo comprobamos que podemos aplicar las condiciones necesarias de optimalidad:

- Tanto la función objetivo como la restricción son de clase $C^2$ porque son polinomios.
- Como cualificación de restricciones se cumple que la restricción es lineal.

Por consiguiente, si existe mínimo, ha de ser un punto que cumpla las condiciones necesarias. Para escribirlas construimos la función lagrangiana:

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + 2x + 4y + 10 + \lambda(21 - x - y).$$

Las condiciones necesarias son:

$$x + y = 21, \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2 - \lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 4 - \lambda = 0.$$

Igualando $\lambda$ en las dos últimas ecuaciones obtenemos $y = x - 1$. Sustituyendo en la primera queda $2x = 22$, luego $x = 11$, $y = 10$ y $\lambda = 24$.

Así pues, si hay solución óptima, ésta ha de ser el punto crítico $(x, y) = (11, 10)$ con multiplicador $\lambda = 24$.

Para determinar si este punto es realmente una solución óptima estudiaremos si la función objetivo es convexa. El método es aplicable porque la restricción es lineal. La matriz hessiana de la función objetivo es

$$HC(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

que es definida positiva, luego $C$ es convexa. Concluimos que el punto $(11, 10)$ es un mínimo global estricto. Por lo tanto el coste mínimo es $C(11, 10) = 293$ u.m.

En principio, si la producción pasara a ser de 23 unidades, para saber qué coste resultaría tendríamos que resolver el nuevo problema

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & x^2 + y^2 + 2x + 4y + 10 \\ \text{s.a} & x + y = 23 \end{array}$$

**Ejercicio** *Resuelve este problema y comprueba que el nuevo coste es de* 343 *u.m., con lo que el incremento de coste que ocasiona aumentar la producción en* 2 *unidades resulta ser de* $343 - 293 = 50$ *u.m.*

Sin embargo, si nos basta una respuesta aproximada, no es necesario repetir todos los cálculos. El multiplicador $\lambda = 24$ nos informa de que el incremento de coste que ocasionará un incremento de la producción $\Delta b = 2$ será aproximadamente

$$\Delta C^* \approx \lambda \cdot \Delta b = 24 \cdot 2 = 48 \text{ u.m.}$$

El error que cometemos con esta aproximación es de 2 u.m. sobre un total de 50, por lo que es una aproximación admisible.

**Ejemplo** *Una empresa fabrica tres artículos en cantidades $x$, $y$, $z$ y trata de maximizar sus beneficios de acuerdo con el problema siguiente:*

$$\begin{array}{rll} \textit{Max.} & 7x + 4y + 2z & \textit{Función de beneficios,} \\ \textit{s.a} & x + y + z \geq 500 & \textit{Producción total,} \\ & 2x + 6y + z \leq 1.500 & \textit{Coste de la producción,} \\ & x + 2y \leq 100 & \textit{Cantidad empleada de un input } I, \\ & x,\ y,\ z \geq 0 & \end{array}$$

*La solución óptima resulta ser* $(x, y, z) = (100, 0, 1.300)$ *con multiplicadores* $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 2, 3)$, $(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = (0, -14, 0)$ *(los últimos son los de las restricciones de signo). Interpreta estos multiplicadores.*

Solución: El multiplicador $\lambda_1$ es nulo porque la restricción no está saturada (la producción óptima es de $1.400 > 500$ unidades). Indica que aunque exigiéramos producir más de 500 unidades en total ello no afectaría a la solución óptima.

Por cada unidad adicional en que la empresa pudiera incrementar su presupuesto sus beneficios aumentarían en 2 unidades monetarias.

Por cada unidad adicional que la empresa pudiera emplear del input $I$, sus beneficios aumentarían en 3 unidades monetarias.

Los multiplicadores $\nu_1$ y $\nu_3$ son nulos porque las restricciones $x \geq 0$ y $z \geq 0$ no están saturadas en la solución óptima. Esto indica que si las cambiáramos por $x \geq 1$ o $z \geq 1$ la solución seguiría siendo la misma.

Por cada unidad que la empresa fabricara del segundo artículo, sus beneficios disminuirían en 14 unidades monetarias.

**Nota** *Las interpretaciones siguientes serían incorrectas:*

$\lambda_1 = 0$ significa que por cada unidad que la empresa aumente su producción total el beneficio no se verá alterado.

$\nu_1 = 0$ significa que un aumento en la producción del primer artículo no afectará a los beneficios. ■

**Relación con la programación lineal** Según lo visto hasta aquí es inmediato que las variables duales de un problema de programación lineal no son sino los multiplicadores de Kuhn y Tucker correspondientes a las restricciones del problema distintas de las condiciones de signo. De hecho, la construcción del problema dual es precisamente la que es para garantizar que las condiciones de Kuhn y Tucker del problema dual son exactamente las mismas que las del primal, salvo que lo que en el primal son variables principales en el dual son multiplicadores y viceversa (siempre que eliminemos en ambas los multiplicadores de las condiciones de signo, tal y como hemos explicado que se puede hacer).

# Problemas

1. Resuelve:

$$\text{Min. } x^2+xy+y^2-6x+2, \qquad \text{Max. } x^2+xy+y^2+x+5y,$$

$$\text{Max. } 3x^2+5y^2+5z^2+2yz+6zx-2xy, \qquad \text{Max. } 4x-6y-x^2-2y^2.$$

2. Sabiendo que la función $f(x,y)=x^4+y^4-4xy+3$ tiene mínimo global, calcúlalo y determina si es estricto o no estricto. ¿Tiene máximo global?

3. Encuentra los extremos globales de los problemas siguientes:

$$\begin{array}{rl} \text{Opt.} & 3x^2+xy+4y^2 \\ \text{s.a} & 3x+y=72 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Opt.} & x^2+y^2+z^2+t^2 \\ \text{s.a} & x+y+z+t=1 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Opt.} & x^2+y^2+z^2-2x-2y \\ \text{s.a} & x+y-2z=0 \\ & y-x=0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Opt.} & -x^2+xy+yz-y^2-z^2 \\ \text{s.a} & x+z=2 \\ & x+y=4 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Opt.} & 4x-y \\ \text{s.a} & y=x^2 \end{array}$$

4. Resuelve

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & xy \\ \text{s.a} & x^2+y^2=8. \end{array}$$

5. Resuelve

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x+y+z \\ \text{s.a} & x^2+y^2+z^2=2. \end{array}$$

6. La función de utilidad de un consumidor es

$$U(x,y)=2x^3-9x^2-6y+40,$$

donde $x$ e $y$ son las cantidades adquiridas de dos bienes $A$ y $B$. El precio unitario de $A$ es de 2€, el de $B$ de 1€ y el consumidor dispone de un presupuesto de 6€.

   (a) Calcula la utilidad máxima que puede obtener el consumidor si gasta todo su presupuesto.

   (b) Estudia qué aumento de utilidad puede conseguirse con un aumento de una unidad de presupuesto.

   (c) ¿Que ocurriría si el consumidor decidiera comprar una unidad del segundo bien?

7. Una empresa exporta cantidades $x$, $y$ (en miles de toneladas) de su producto a dos países. Su función de beneficios es

$$B(x,y)=-x^2+4xy-2y^2+10.$$

La legislación del país impone a la empresa una cuota de exportación de 10.5 miles de toneladas.

(a) Calcula la cantidad que conviene exportar a cada país de modo que la cantidad total exportada sea la que marca la cuota.

(b) Razona el efecto que tendría sobre la empresa que la cuota pasara a ser de 10 miles de toneladas.

(c) Calcula el beneficio de la empresa que consigue exportando la misma cantidad a ambos países.

(d) Calcula las cantidades a exportar si desaparece la cuota de exportación.

(e) Razona si a la empresa le conviene la existencia de la cuota.

8. La función de producción de una empresa es

$$P(x,y) = x^2 + 2y^2 + 10xy,$$

donde $x$ e $y$ son las cantidades empleadas de dos factores de producción. El precio unitario de los factores es de 1 y 2 u.m. respectivamente, y la empresa dispone de un presupuesto de 70 u.m. que debe gastar en su totalidad.

(a) Calcula la producción máxima que puede conseguir la empresa y las cantidades requeridas de los factores de producción.

(b) Estudia la conveniencia de aumentar el presupuesto disponible.

9. Una empresa produce tres productos en cantidades $x$, $y$, $z$. La función de costes es

$$C(x,y,z) = x^2 + 2x + y^2 + 2z + 100.$$

A su vez, vende los productos en dos mercados con la siguiente estructura de demanda

$$\begin{aligned} 2x + 8y + 6z &= 204 \\ 2x + 4y + 2z &= \ \ 92 \end{aligned}$$

donde los términos independientes representan la demanda de cada mercado.

(a) Calcula la producción que minimiza los costes.

(b) Calcula el coste óptimo.

(c) Razona si a la empresa le interesa un aumento en la demanda de los mercados. ¿En cuál preferentemente?

10. Resuelve los problemas siguientes:

$$\begin{array}{ll} \text{Max.} & -x^2 - y^2 \\ \text{s.a} & x + y \le 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{Min.} & x^2 + y^2 \\ \text{s.a} & x + y \ge -1 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{Max.} & x + y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \le 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{Min.} & x + y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \le 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Min.} & x \\ \text{s.a} & -x + y \le 0 \\ & y \ge 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{Max.} & x \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \le 1 \\ & x,\, y \ge 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{Max.} & x^2 + y^2 \\ \text{s.a} & xy \ge 25 \\ & x,\, y \ge 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{Min.} & x^2 + y^2 \\ \text{s.a} & xy \ge 25 \\ & x,\, y \ge 0 \end{array}$$

11. Considera el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Max.} & y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \le 6 \\ & x^2 - y \ge 0 \\ & x,\, y \ge 0 \end{array}$$

(a) Resuélvelo gráficamente.

(b) Comprueba que el óptimo cumple las condiciones de Kuhn y Tucker.

12. Considera el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 6x+3y-x^2+4xy-4y^2 \\ \text{s.a} & x+y\leq 3 \\ & 4x+y\leq 9 \\ & x,\, y\geq 0 \end{array}$$

Sabiendo que $(2,1)$ es su único punto de Kuhn y Tucker, razona que es el único máximo global.

13. Dado el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 2x+y \\ \text{s.a} & xy\leq 4 \\ & x-y\geq -2 \\ & y\geq 0, \end{array}$$

   (a) Comprueba gráficamente que $(-2,0)$ es un óptimo global del problema.
   (b) Razona que es un punto de Kuhn y Tucker (sin comprobar explícitamente que cumple las condiciones).
   (c) Comprueba explícitamente que cumple las condiciones de Kuhn y Tucker.

14. Considera el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & (x-2)^2+(y-2)^2 \\ \text{s.a} & x-y\leq 8 \\ & x+y\geq -4 \\ & x,\, y\geq 0 \end{array}$$

   (a) Escribe las condiciones de Kuhn y Tucker.
   (b) Comprueba si los puntos $(2,-6)$ y $(8,0)$ verifican dichas condiciones.
   (c) A partir de los resultados del apartado anterior, ¿qué se puede decir sobre su optimalidad?

15. Dado el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & -4x^2-2xy-y^2 \\ \text{s.a} & x^2+y^2\leq 4 \\ & x+y\geq 1 \end{array}$$

   (a) Comprueba si los puntos $(0,1)$, $(1,0)$ y $(2,2)$ cumplen las condiciones de Kuhn y Tucker.
   (b) ¿Son óptimos del problema?

16. Considera el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x^2+y^2 \\ \text{s.a} & x+y\leq 1 \\ & x-y\leq 0 \\ & x\geq 0 \end{array}$$

   (a) Comprueba que el punto $(0,0)$ cumple las condiciones de Kuhn y Tucker.
   (b) ¿Podemos aplicar las condiciones de suficiencia para concluir que es un máximo global?
   (c) ¿Es un máximo global?

# Cuestiones

1. Tenemos un problema de programación y comprobamos que la función objetivo y las restricciones son de clase $C^2$ así como que todas las soluciones factibles son regulares. ¿De qué nos sirve esta comprobación? (¿qué podemos afirmar gracias a ello?)

2. En lugar de comprobar la regularidad de las soluciones factibles, ¿qué otra comprobación alternativa nos permite llegar a la misma conclusión?

3. En un problema de programación matemática tenemos una solución factible que no cumple las condiciones de Kuhn y Tucker. ¿Podemos afirmar que no es un óptimo del problema?

4. Tenemos un punto de Kuhn y Tucker en un problema de maximización y ya hemos comprobado que podemos aplicar las condiciones necesarias. ¿Cuáles son las dos cosas que hemos de comprobar para garantizar que el punto es un máximo global? Si no se cumplieran, ¿tendríamos otra posibilidad de probar que el punto es un máximo global?

5. Para un problema de programación con restricciones encontramos tres puntos que cumplen las condiciones necesarias de optimalidad. ¿Podemos afirmar que al menos uno de ellos es una solución óptima? ¿Y si el problema es de maximizar y la función objetivo es cóncava?

6. Tenemos un problema de programación clásica sin restricciones y hemos encontrado tres puntos que satisfacen las condiciones necesarias de optimalidad, pero la función objetivo no es cóncava ni convexa. ¿Podremos probar que alguno de los puntos es un óptimo global mediante el teorema de Weierstrass?

7. Si un problema no tiene óptimos globales, ¿puede, no obstante, tener puntos que satisfagan las condiciones necesarias de optimalidad?, ¿y si es infactible?

8. Tenemos un problema de maximizar cuyo conjunto de oportunidades es convexo y que cumple una cualificación de restricciones. Hemos encontrado dos puntos de Kuhn y Tucker en los que la función objetivo toma dos valores diferentes. ¿Puede ser cóncava la función objetivo? (¿Qué podríamos decir de dichos puntos si lo fuera?)

9. Como en la cuestión anterior, sabemos que los dos puntos son los únicos puntos de Kuhn y Tucker. ¿Qué tendríamos que comprobar para poder aplicar el teorema de Weierstrass? Si se cumple lo necesario, ¿qué nos permitiría concluir dicho teorema?

10. En un problema de programación, hemos comprobado que hay exactamente tres puntos de Kuhn y Tucker. ¿Podría ocurrir que ninguno de ellos fuera una solución óptima? ¿Y si el problema cumple una cualificación de restricciones?

11. Las restricciones de un problema son $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $x^2 + y^3 - z^4 = 1$ y el óptimo se alcanza en $(1, 0, 0)$. ¿Podemos asegurar que es un punto de Kuhn y Tucker?

12. Explica el error del razonamiento siguiente: Tenemos un punto de Kuhn y Tucker de un problema de minimizar en el que todas las soluciones factibles son regulares y todas las funciones son de clase $C^2$. Si además la función objetivo es lineal, podemos afirmar que es convexa, luego el punto será un mínimo global.

13. Explica las diferencias que hay entre el teorema local-global y la condición suficiente de Kuhn y Tucker.

# 8

# Problemas adicionales

## 8.1 Introducción a la optimización / Programación entera

1. Dado el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 2x + y \\ \text{s.a.} & x^2 + y \geq 9 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

   Razona si es infactible, no acotado o tiene solución óptima. Explica lo que significa que sea del tipo que indiques.

2. Resuelve gráficamente los problemas siguientes:

$$\begin{array}{rl} \text{Opt.} & y - 5x \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \leq 9 \\ & y \geq x^2 \\ & y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Opt.} & y \\ \text{s.a} & y \leq 1 + x^2 \\ & x \leq 1 \\ & x \geq -1 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Max.} & 2x - y \\ \text{s.a.} & y + x^2 \leq 4 \\ & x \geq 1 \\ & y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Min.} & x + y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \leq 4 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & x - 3y \\ \text{s.a.} & x^2 + y^2 \leq 16 \\ & x \geq 2 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

3. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & x - y \\ \text{s.a.} & y + x^2 \leq 4 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

   (a) Resuélvelo gráficamente.
   (b) Calcula el valor óptimo de la función objetivo.
   (c) Escribe el conjunto de oportunidades. Estudia si es compacto.
   (d) Razona si los puntos siguientes son soluciones del problema. En caso afirmativo, indica si son factibles o infactibles, interiores o de frontera:

$$(0, 0), \quad (1, 1), \quad (1, -3).$$

4. Transforma el problema siguiente para que tenga restricciones de igualdad y todas sus variables sean no negativas:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x - y + z \\ \text{s.a} & y \geq -2 \\ & x^4 + y^2 + 2z \leq 11 \\ & x \leq 0,\ z \geq 0. \end{array}$$

5. Enuncia el teorema de Weierstrass. ¿Se podía aplicar en el problema siguiente?

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 3x^2 + 2xy^2 - z \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \leq 1 \\ & 3x^2 + z \leq 10 \\ & z \geq 0 \end{array}$$

6. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x - y + z \\ \text{s.a} & y \geq -2 \\ & x^4 + y^2 + 2z \leq 11 \\ & x \leq 0\,,\ z \geq 0 \end{array}$$

   (a) Escribe el conjunto de oportunidades.
   (b) Comprueba que el problema tiene solución óptima.
   (c) En general, ¿qué tiene que cumplir una solución factible para ser interior? ¿Y de frontera? Encuentra una de cada tipo de este problema.
   (d) El hecho de que $f(-1, 0, 1) = 0$, ¿me da alguna información sobre el valor óptimo de la función objetivo? ¿Y el hecho de que $f(1, 0, 5) = 6$?
   (e) Transforma el problema para que todas sus restricciones (excepto las de signo) sean de igualdad y todas sus variables sean no negativas.

7. Tenemos un problema de programación lineal entera de variables $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ en el que estamos maximizando la función objetivo y en el que se exige que las variables $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ sean enteras. Resolvemos el problema relajado y obtenemos:

   - $(4.222, 0, 1.111)$ con $f = 18.222$

   (a) Explica cuál es el siguiente paso si queremos resolver el problema entero mediante el método de ramificación y acotación.
   (b) Indica (razonando la respuesta) cuál es la solución óptima del problema entero sabiendo que es una de las siguientes:
      - $(0.1, 0.1, 2)$ con $f = 9.5$
      - $(4.25, 0, 1)$ con $f = 17.750$
      - $(2, 0, 4)$ con $f = 26$
      - $(0, 1, 4.2)$ con $f = 13$
      - $(3.2, 0, 5)$ con $f = 34.6$

8. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 2x + y + 7z \\ \text{s.a} & x + 4z \leq 5 \\ & 5y - 6z \leq 10 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \quad x,\ z \text{ enteras} \end{array}$$

   La solución óptima del problema relajado es $(0, 3.5, 1.25)$. Escribe los dos subproblemas lineales que debemos resolver según el método de ramificación y acotación.

## 8.2 Programación lineal

1. Aplica el algoritmo del símplex a la tabla siguiente para un problema de minimizar hasta llegar a la tabla óptima.

$$
\begin{array}{cc|rrrrr|c}
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\
 & & x & y & z & u & v & \\
\hline
1 & x & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 \\
2 & y & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 4 \\
3 & z & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & 12 \\
\hline
 & & 1 & 2 & 3 & 14 & -8 & \\
\cline{3-7}
 & & 0 & 0 & 0 & -10 & 13 & 46 \\
\hline
\end{array}
$$

2. Repite la pregunta anterior suponiendo que el problema es de maximizar.

3. Razona a qué tipo de solución corresponde la tabla siguiente según si el problema es de maximizar o de minimizar.

$$
\begin{array}{cc|rrrrr|c}
 & & 2 & 3 & 2 & -3 & 0 & \\
 & & x & y & z & w & s & \\
\hline
2 & x & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 3 \\
3 & y & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 8 \\
\hline
 & & 2 & 3 & -8 & -3 & -2 & \\
\cline{3-7}
 & & 0 & 0 & 10 & 0 & 2 & 30 \\
\hline
\end{array}
$$

4. Considera el problema siguiente:

$$
\begin{array}{rl}
\text{Max.} & 2x + 3y + z \\
\text{s.a} & 3x + y + 2z \leq 12 \\
 & 4x + 2y + 3z = 17 \\
 & x,\ y,\ z \geq 0
\end{array}
$$

   (a) Calcula sin hacer ninguna iteración la tabla del símplex correspondiente a las variables básicas $x$, $z$.

   (b) Razona si la tabla es óptima y, en tal caso, si corresponde a una solución de vértice, de arista finita o de arista infinita. Indica también el valor óptimo de la función objetivo.

   (c) Escribe la solución óptima y razona que es una solución factible básica del problema.

   (d) Calcula el intervalo de sensibilidad del coeficiente de la variable $y$ en la primera restricción. Indica su interpretación.

   (e) Calcula el intervalo de sensibilidad del coeficiente de $x$ en la función objetivo.

   (f) Razona por postoptimización cuál sería la nueva solución óptima si $c_1 = 10$.

5. Considera el problema siguiente:

$$
\begin{array}{rl}
\text{Min.} & 6x - 7y + z \\
\text{s.a} & 5x - 6y + 2z \leq 65 \\
 & 6x - 7y + \ \ z \geq 77 \\
 & x \geq 0,\ y \leq 0,\ z \geq 0.
\end{array}
$$

   (a) Ponlo en forma estándar.

   (b) Determina si existe una solución factible básica con variables básicas $x, y_0$.

   (c) Calcula la tabla del símplex correspondiente a la solución del apartado anterior.

   (d) Razona si es óptima y, si no lo es, itera hasta llegar al óptimo.

(e) Escribe la solución óptima $(x, y, z)$ del problema y razona si es de vértice, de arista o de arista infinita.

(f) Calcula el problema dual (del problema original, no del que has puesto en forma estándar).

(g) Calcula la solución óptima del problema dual.

(h) Interpreta la segunda variable dual ($\mu$ o $\lambda_2$ o como la hayas llamado).

(i) Calcula el intervalo de sensibilidad de $b_1 = 65$. Interpreta el resultado.

(j) ¿Cuál sería la nueva solución óptima si $b_1 = 66$?

(k) Calcula por postoptimización la nueva solución óptima si la segunda restricción pasa a ser $6x - 7y + 2z \geq 77$.

6. Considera la siguiente tabla del símplex para un problema de minimizar:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $-1$ | $-2$ | $0$ | |
| | | $x$ | $y$ | $s$ | |
| $-2$ | $y$ | $-1$ | $1$ | $1$ | $2$ |
| | | $2$ | $-2$ | $-2$ | $-4$ |
| | | $-3$ | $0$ | $2$ | |

Indica si corresponde a un problema con solución óptima, no acotado o infactible. Razona la respuesta.

7. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 3x + 2y - 5z \\ \text{s.a} & 2x + 9y - z = 2 \\ & x + 5y \geq 1 \\ & x,\ y \geq 0,\ z \leq 0 \end{array}$$

(a) Ponlo en forma estándar.

(b) Calcula directamente, sin hacer iteraciones, la tabla del símplex correspondiente a las variables básicas $x$ e $y$.

(c) Razona si la tabla es óptima. Si lo es, escribe la solución óptima y, si no lo es, itera hasta llegar a la tabla óptima.

(d) Escribe el problema dual (del problema original, no del problema en forma estandar).

(e) Calcula la solución óptima del problema dual a partir de la solució óptima del primal.

(f) Calcula el intervalo de sensibilidad del término independiente de la primera restricción.

(g) Calcula la nueva solución óptima y el nuevo valor óptimo de la función objetivo si dicho término independiente pasa a valer $b_1 = 1.9$.

(h) ¿Y si el coeficiente de $x$ en la función objetivo pasa a valer $c_1 = 2$?

8. Considera el problema siguiente $(P_0)$:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & -2x + 3y \\ \text{s.a} & x + 4y \leq 18 \\ & x + y \leq 6 \\ & x,\ y \geq 0 \end{array}$$

(a) Estudia si el problema tiene una solución factible básica con variables básicas $x$ e $y$.

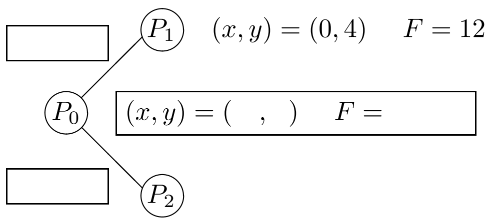
(b) Sabiendo que $(x, y) = (0, 4.5)$ es solución óptima del problema, obtén la tabla óptima del símplex sin realizar ninguna iteración. ¿Es una solución de vértice, de arista finita o de arista infinita?

(c) Calcula el intervalo de sensibilidad de $a_{11}$ (es decir, del coeficiente técnico de la variable $x$ en la primera restricción).

(d) Calcula el problema dual. Calcula la solución óptima dual $(\lambda, \mu, s', t')$ a partir de la tabla óptima primal. Indica cuáles son los rendimientos marginales duales y el valor óptimo de la función objetivo dual.

(e) Utiliza el apartado anterior para calcular aproximadamente el nuevo valor óptimo de la función objetivo si el término independiente de la primera restricción pasara a ser 18.5.

(f) Considera ahora la version del problema $P_0$ que consiste exigir, además, que las variables $x$ e $y$ sean enteras. Para resolverlo vamos a aplicar el método de ramificación y acotación. Completa en el árbol siguiente los datos referentes a la solución óptima del problema lineal asociado ($P_0$) e indica las restricciones que deben añadirse para pasar a los problemas $P_1$ y $P_2$ (rellena los 3 recuadros).




(g) Resuelve el problema $P_2$ (es decir, el que resulta al añadir a $P_0$ la restricción adecuada) por el método de las penalizaciones.

(h) Completa el árbol con la información obtenida en el apartado anterior. ¿Conocemos ya la solución óptima del problema con variables enteras o habría que seguir ramificando?

9. Dado el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 2x - y + z \\ \text{s.a.} & x + y + 3z \geq 1 \\ & \quad - y + 2z = 4 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \end{array}$$

(a) Razona que $(x, y, z) = (0, 0, 2)$ es una solución factible básica.

(b) Construye la tabla del símplex asociada a dicha solución (directamente, sin realizar ninguna iteración).

(c) Razona si la solución dada es la óptima. Si es óptima indica de qué tipo es, y si no es óptima aplica el método símplex para resolver el problema.

(d) Plantea el problema dual del problema inicial. ¿Qué puedes decir sobre la solución del problema dual?

10. Resuelve el problema siguiente por el método símplex.

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 2x + 5y + 3z \\ \text{s.a} & x + 2y + z \geq 8 \\ & x + 4y + 2z \leq 10 \\ & x + y + z = 2 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \end{array}$$

Razona si es infactible, no acotado o si tiene solución óptima, y en tal caso indica cuál es. Calcula el problema dual.

11. Resuelve el problema siguiente por el método símplex. Razona si tiene solución óptima, si es infactible o no acotado.

$$
\begin{array}{rl}
\text{Max.} & x+3y+2z \\
\text{s.a} & x-\ \ y+2z\le 1 \\
 & 2x+\ \ y+\ \ z\le 2 \\
 & -3x+2y+\ \ z=6 \\
 & x,\ y,\ z\ge 0
\end{array}
$$

12. La tabla siguiente es la primera tabla de un problema de minimizar, donde $s$ es una variable de holgura y $A$ una variable artificial:

$$
\begin{array}{cc|ccccc|c|}
 & & 1 & 3 & 2 & ? & ? & \\
 & & x & y & z & s & A & \\
\hline
? & ? & 1 & 0 & -3 & 1 & & 2 \\
? & ? & 1 & 0 & 2 & 0 & & 4 \\
? & ? & 2 & 1 & 1 & 0 & & 1 \\
\hline
 & & & & & & & \\
\cline{3-7}
 & & & & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

(a) Complétala y aplica el método símplex.

(b) Razona si el problema es infactible, no acotado o si tiene solución óptima.

13. Considera la siguiente tabla del símplex:

$$
\begin{array}{cc|ccccc|c|}
 & & 2 & 1 & 1 & 7 & M & \\
 & & x & y & z & w & A & \\
\hline
2 & x & 1 & 0 & 1 & -3 & 1 & 3 \\
1 & y & 0 & 1 & 2 & 4 & -1 & 8 \\
\hline
 & & 2 & 1 & 4 & -2 & 1 & \\
\cline{3-7}
 & & 0 & 0 & -3 & 9 & M-1 & 14 \\
\hline
\end{array}
$$

(a) Razona si corresponde a un problema de maximizar o de minimizar.

(b) Haz las iteraciones necesarias para llegar a la tabla óptima.

(c) Razona que la tabla final es óptima (en particular, que no corresponde a un problema infactible) y razona si la solución es de vértice, de arista finita o de arista infinita.

14. Resuelve el problema siguiente por el método de las penalizaciones. Escribe primero el problema al que corresponde la nueva matriz técnica.

$$
\begin{array}{rl}
\text{Min.} & x \\
\text{s.a} & y+z\le 2 \\
 & -x+y+2z\ge 5 \\
 & x,\ y,\ z\ge 0
\end{array}
$$

15. Considera el problema siguiente:

$$
\begin{array}{rl}
\text{Max.} & 3x+2y-5z \\
\text{s.a} & x+2z\le 3 \\
 & -3x+y-z=3 \\
 & x+z\ge 2 \\
 & x,\ y\ge 0,\ \ z\le 0
\end{array}
$$

(a) Calcula el problema dual.

(b) Pon el primal en forma estándar.

(c) Resuelve el problema primal por el método símplex sin calcular ninguna matriz inversa. Razona si el problema es infactible, no acotado o si tiene solución óptima y, en tal caso, indica cuál es.

(d) Estudia si $(x, y, z_0) = (2, 9, 0)$ es una solución factible básica del problema primal.

16. Considera el problema:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 2x + 5y + 3z \\ \text{s.a} & x + 2y + z \leq 8 \\ & x + 4y + 2z \leq 10 \\ & x + y + z \leq 2 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \end{array}$$

(a) Escribe el problema dual.

(b) A partir de la tabla

| | | 2 | 5 | 3 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x$ | $y$ | $z$ | $s$ | $t$ | $u$ | |
| 5 | $y$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| 0 | $s$ | −1 | 0 | −1 | 1 | 0 | −2 | 4 |
| 0 | $t$ | 3 | 0 | −2 | 0 | 1 | −4 | 2 |
| | | 5 | 5 | 5 | 0 | 0 | 5 | 10 |
| | | −3 | 0 | −2 | 0 | 0 | −5 | |

razona si es óptima y, si lo es, si corresponde a una solución de vértice o de arista.

(c) Escribe la solución óptima y el valor óptimo de la función objetivo.

(d) Calcula la solución óptima $(\lambda, \mu, \nu, s', t', u')$ del problema dual.

(e) Calcula la tabla óptima del problema dual sin hacer ninguna iteración.

(f) Determina, sin calcular ninguna otra tabla del símplex, el nuevo valor de la función objetivo si la tercera restricción pasa a ser $x + y + z \leq 5$.

(g) Determina si la solución seguirá siendo óptima si la función objectivo pasa a ser igual a $2x + 3y + 3z$. La nueva solución ¿será de vértice, de arista finita o de arista infinita?

(h) Determina la nueva solución óptima si $b_1 = 8$ pasa a ser $b_1 = 3$.

17. Una empresa quiere comprar dos materias primas en cantidades $x$ e $y$, con las que quiere fabricar dos artículos $A$ y $B$, y se plantea el problema siguiente para minimizar el coste de la producción:

$$\begin{array}{rll} \text{Min.} & 3x + y & \text{Coste} \\ \text{s.a} & 5x + 2y \geq 100 & \text{Producción del artículo } A \geq \text{producción mínima} \\ & 3x + y \geq 55 & \text{Producción del artículo } B \geq \text{producción mínima} \\ & x,\ y \geq 0 & \end{array}$$

Considera la tabla siguiente:

| | | 3 | 1 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x$ | $y$ | $s$ | $t$ | |
| 3 | $x$ | 1 | 0 | 1 | −2 | 10 |
| 1 | $y$ | 0 | 1 | −3 | 5 | 25 |
| | | 3 | 1 | 0 | −1 | 55 |
| | | 0 | 0 | 0 | 1 | |

(a) Razona si es óptima. Si no lo es, itera hasta que llegues a la tabla óptima; si lo es, razona si la solución es de vértice, de arista finita o de arista infinita.

(b) ¿Qué cantidades le conviene comprar a la empresa de cada materia prima? ¿Cuál es el coste mínimo?

(c) Escribe el problema dual.

(d) Calcula la solución óptima del problema dual a partir de la tabla óptima primal.

(e) Explica la interpretación económica de $\lambda$ y $\mu$.

(f) Calcula la tabla del problema dual correspondiente a las variables básicas $\lambda$ y $\mu$.

(g) Calcula el intervalo de sensibilidad del precio de la segunda materia prima. Explica su interpretación económica.

(h) ¿Qué cambios se producirían en la solución óptima y en el coste mínimo si quisiéramos una producción mínima de 105 unidades del artículo $A$?

18. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & -2x+2y-6z \\ \text{s.a} & 2x+y-3z \geq 1 \\ & -x+y+2z=2 \\ & y \geq 0 \quad x,\, z \leq 0 \end{array}$$

(a) Pon el problema en forma estándar.

(b) Sabiendo que $(x, y, z) = (0, 2, 0)$ es solución óptima del problema, obtén la tabla óptima del símplex sin realizar ninguna iteración. ¿Es una solución de vértice, de arista finita o de arista infinita?

(c) Escribe el problema dual (del original, no del problema en forma estándar) y calcula la solución óptima dual a partir de la del primal.

(d) Calcula el intervalo de sensibilidad de $c_2$ (es decir, el coeficiente de la variable $y$ en la función objetivo).

(e) Calcula el intervalo de sensibilidad de $b_2$ (es decir, el término independiente de la segunda restricción).

19. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 6x+3y+z \\ \text{s.a} & 2x+2y+z \leq 7 \\ & 5x+\ \ y+z \geq 5 \\ & x \leq 3 \\ & x,\, y,\, z \geq 0 \end{array}$$

(a) Escribe la tabla inicial del símplex según el método de las penalizaciones. Razona qué variable debe entrar y cuál debe salir, pero no realices ninguna iteración.

(b) Razona que el problema tiene solución óptima.

(c) Comprueba que $(x, y, z) = (0, 2, 3)$ cumple la definición de solución factible básica.

(d) Calcula sin hacer ninguna iteración la tabla del símplex asociada a la solución anterior.

(e) Razona si la tabla de la pregunta anterior es óptima y, si no lo es, realiza las iteraciones necesarias hasta llegar a la tabla óptima.

(f) Escribe la solución óptima y el valor óptimo de la función objetivo. Razona si la solución es de vértice, de arista finita o de arista infinita.

(g) Escribe el problema dual.

(h) Calcula la solución óptima del problema dual a partir de la tabla óptima del primal.

(i) Razona cómo variaría el valor óptimo de la función objetivo si la segunda restricción pasara a ser $5x + y + z \geq 4.8$.

(j) Calcula el intervalo de sensibilidad del coeficiente de $z$ en la función objetivo.

(k) Calcula por postoptimización cuál sería la nueva solución óptima si la segunda restricción pasara a ser $5x + y + z \geq 0.8$.

(l) Supón ahora que, además de cambiar la restricción como indica el apartado anterior, exigimos que las variables sean enteras. Escribe los dos problemas que habría que resolver por el método de ramificación y acotación a partir de la solución que has obtenido.

20. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 3x + 5y + z \\ \text{s.a} & 2x + 3y + z \leq 6 \\ & x \qquad\quad - z \leq 2 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \end{array}$$

cuya solución óptima viene dada por la tabla:

| | | 3 | 5 | 1 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x$ | $y$ | $z$ | $s$ | $t$ | |
| 5 | $y$ | 2/3 | 1 | 1/3 | 1/3 | 0 | 2 |
| 0 | $t$ | 1 | 0 | −1 | 0 | 1 | 2 |
| | | 10/3 | 5 | 5/3 | 5/3 | 0 | 10 |
| | | −1/3 | 0 | −2/3 | −5/3 | 0 | |

(a) Escribe la solución del problema: el valor de todas las variables y el de la función objetivo. Indica si la solución es única y si es degenerada.

(b) Obtén la solución del problema dual y el valor óptimo del problema dual. Interpreta las variables (principales) duales.

(c) Calcula el intervalo de sensibilidad de $b_2$ del problema primal.

(d) Calcula mediante postoptimización la nueva solución óptima si el coeficiente de $y$ en la función objetivo (primal) pasa a ser $c_2 = 4$. (Indica el valor óptimo de las variables y el de la función objetivo.)

21. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x - 2y \\ \text{s.a.} & x + y \leq 3 \\ & -x + y \geq 1 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

(a) Ponlo en forma estándar y escribe la matriz técnica del problema resultante.

(b) Estudia si el punto $(x, y_1, y_2, s_1, s_2) = (3, 0, 0, 0, -4)$ es una solución básica del problema. ¿Es factible?, ¿es degenerada?

(c) Resuelve el problema aplicando el método de las penalizaciones (observa que sólo hace falta una variable artificial).

(d) Razona si la tabla final corresponde a un problema infactible, no acotado, con solución de vértice, de arista o de arista infinita. Si hay solución óptima, indica el valor de $(x, y)$ así como el valor óptimo de la función objetivo.

(e) Calcula el problema dual del problema inicial (no del que has puesto en forma estándar). Llama $\lambda$ y $\mu$ a las variables duales.

(f) A partir de la tabla óptima primal que has obtenido en (c), calcula la solución dual complementaria $(\lambda, \mu)$.

(g) Pon el problema dual en forma estándar y calcula la tabla del símplex correspondiente a las variables básicas $\mu_0$ y $s'$. Razona si es óptima y, en caso de que lo sea, si corresponde a una solución de vértice, de arista o de arista infinita.

22. Considera el problema siguiente, en el que las variables representan las cantidades que una empresa ha de producir de dos artículos para usar las 30 horas de mano de obra que tiene contratadas sin exceder las 19 unidades disponibles de una materia prima $M$:

$$
\begin{array}{rll}
\text{Min.} & x+y & \text{coste} \\
\text{s.a} & 3x+5y=30 & \text{horas de mano de obra usadas} = \text{horas disponibles} \\
& 2x+3y \leq 19 & \text{cantidad empleada de } M \leq \text{cantidad disponible} \\
& x,\, y \geq 0. &
\end{array}
$$

(a) Escribe la primera tabla del símplex según el método de las penalizaciones. Explica qué variable entra y qué variable sale, pero no hagas la iteración.

(b) Comprueba que $(x, y) = (10, 0)$ y $(0, 6)$ son soluciones básicas del problema. ¿Son factibles?

(c) Calcula todas las soluciones factibles básicas del problema.

(d) Justifica que el problema tiene solución óptima y calcúlala a partir del apartado anterior.

(e) A partir de la solución óptima, calcula la tabla del símplex óptima.

(f) Calcula el problema dual y ponlo en forma estándar.

(g) Calcula la solución óptima del problema dual.

(h) ¿Cómo afectaría al coste utilizar media hora más de mano de obra?

(i) Sabiendo que la tabla óptima del dual es

| | | 30 | $-30$ | $-19$ | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\mu_0$ | $s'$ | $t'$ | |
| 30 | $\lambda_1$ | 1 | $-1$ | $-3/5$ | 0 | $1/5$ | $1/5$ |
| 0 | $s'$ | 0 | 0 | $-1/5$ | 1 | $-3/5$ | $2/5$ |
| | | 30 | $-30$ | $-18$ | 0 | 6 | 6 |
| | | 0 | 0 | $-1$ | 0 | $-6$ | |

razona si corresponde a una solución de vértice, de arista finita o de arista infinita.

(j) La avería de una máquina hace que cada unidad del primer artículo no requiera 3, sino 10 horas de mano de obra. Calcula la nueva solución óptima.

(k) Calcula el intervalo de sensibilidad de la cantidad de $M$ disponible.

(l) Determina cuál será la nueva producción óptima si la cantidad disponible de $M$ se reduce a 17 unidades.

23. Considera el problema siguiente:

$$
\begin{array}{rl}
\text{Max.} & 2x+y \\
\text{s.a} & x+y \leq 2 \\
& -x+y \geq 0 \\
& x \leq 0,\, y \geq 0
\end{array}
$$

(a) Ponlo en forma estándar

(b) Estudia si hay una solución factible básica con variables básicas $s$ y $t$.

(c) Calcula sin hacer iteraciones la tabla del símplex correspondiente a las variables $(x_0, y) = (0, 2)$.

(d) Razona que la tabla del apartado anterior es óptima. Razona si es de vértice, de arista finita o de arista infinita.

(e) Calcula el problema dual (del problema dado, no del problema en forma estándar).

(f) Calcula la solución óptima dual $(\lambda, \mu)$ a partir de la taula óptima primal. Indica también el valor óptimo de la función objetivo dual.

(g) Razona cómo variará el máximo de la función objetivo si la primera restricción cambiara a $x + y \leq 2.5$.

(h) Calcula el intervalo de sensibilidad del coeficiente de la variable $y$ en la función objetivo. Indica su interpretación.

(i) Razona por postoptimización qué pasaría si dicho coeficiente pasara a valer 3.

(j) Calcula el intervalo de sensibilidad del término independiente de la segunda restricción. Indica su interpretación.

(k) Razona por postoptimización cuál sería la nueva solución óptima si $b_2 = 1/2$. Indica también el nuevo valor óptimo de la función objetivo.

24. Una empresa quiere comprar dos inputs en cantidades $x$ e $y$ y se plantea el problema siguiente para minimizar su coste:

$$\begin{array}{rll} \text{Min.} & 6x + 2y & \text{Coste} \\ \text{s.a} & x \geq 50 & \text{Cantidad del 1er input} \geq \text{necesidad mínima} \\ & 3x + y \geq 250 & \text{Producción} \geq \text{producción mínima} \\ & x,\ y \geq 0 & \end{array}$$

(a) Calcula el problema dual.

(b) Pon el primal y el dual en forma estándar.

(c) Estudia si el problema dual tiene una solución factible básica con variables básicas $\lambda$ y $\mu$. ¿Es degenerada?

(d) Resuelve el problema primal por el método símplex sin calcular ninguna matriz inversa. Razona si el problema es infactible, no acotado o si tiene solución óptima y, en este último caso, indica si es de vértice, de arista finita o de arista infinita.

(e) ¿Qué cantidades le conviene comprar a la empresa de cada input? ¿Cuál es el coste mínimo?

(f) Calcula la solució óptima del dual a partir de la tabla óptima primal.

(g) ¿Qué aumento de coste requeriría una producción mínima de 255 unidades?

(h) Calcula la tabla del símplex del problema dual correspondiente a les variables básicas. $\lambda$ y $\mu$.

(i) Determina entre qué valores puede variar el precio del primer input sin que la solución óptima cambie.

(j) Calcula, por postoptimización, la nueva solución óptima si la necesidad mínima del primer input pasa a ser de 90 unidades.

25. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & -2x + 4y + 3z \\ \text{s.a} & x - 2y + z = 2 \\ & 2x + 4y \leq 12 \\ & -x + 2y \geq 4 \\ & x \leq 0,\ y,\ z \geq 0 \end{array}$$

(a) Ponlo en forma estándar.

(b) Resuelve el problema por el método símplex, sin calcular ninguna matriz inversa.

(c) Razona que el problema no es infactible.

(d) Indica cuál es la solución óptima $(x, y, z)$ y el valor óptimo de la función objetivo.

(e) Razona si la solución óptima es de vértice, de arista finita o de arista infinita.

(f) Escribe el problema dual (del problema dado, no del problema en forma estándar).

(g) Razona cómo afectaría al valor óptimo de la función objetivo que la primera restricción cambiara a $x - 2y + z = 2.5$

26. Resuelve el problema siguiente por el método símplex sin calcular ninguna matriz inversa. Razona si el problema tiene solución óptima, es infactible o no acotado.

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & -3x + y + 2z \\ \text{s.a} & 4x + 6z \leq 8 \\ & -x + y - 2z \geq 2 \\ & x + 2z = 2 \\ & x \leq 0,\ y,\ z \geq 0 \end{array}$$

27. Escribe el dual del problema anterior (del problema del enunciado, no del problema en forma estándar).

28. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & -2x + 3y + 2z \\ \text{s.a} & -2x + y + 2z \leq 5 \\ & 3x + y + z \geq 2 \\ & x \leq 0,\ y, z \geq 0 \end{array}$$

(a) Calcula el problema dual.

(b) Pon el primal en forma estándar.

(c) Plantea la primera tabla del símplex con las variables artificiales necesarias.

(d) A partir de la tabla anterior haz una iteración. Razona si la tabla que obtienes es óptima y, si no lo es, razona qué variable entraría y cuál saldría, pero no hagas más iteraciones.

(e) Calcula directamente (sin usar los dos apartados anteriores) la tabla correspondiente a la solución $(x, y, z) = (0, 5, 0)$.

(f) Razona si la tabla del problema anterior es óptima. Si lo es, razona si es de vértice o de arista.

(g) Calcula la solución óptima del problema dual.

(h) Razona por postoptimización cuál sería la nueva solución óptima si la primera restricción pasara a ser $-2x + y \leq 5$.

(i) Calcula el intervalo de sensibilidad del término independiente de la primera restricción.

29. Considera el problema:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 2x + 3y \\ \text{s.a} & 2x + y \leq 4 \\ & 3x + y \leq 4 \\ & x,\ y \geq 0 \end{array}$$

Su tabla óptima es:

| | | 2 | 3 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x$ | $y$ | $s$ | $t$ | |
| 3 | $y$ | 2 | 1 | 1 | 0 | 4 |
| 0 | $t$ | 1 | 0 | −1 | 1 | 0 |
| | | 6 | 3 | 3 | 0 | 12 |
| | | −4 | 0 | −3 | 0 | |

(a) Estudia si existe una solución factible básica con variables básicas $x$, $y$.

(b) Escribe la solución óptima y el valor óptimo de la función objetivo.

(c) Escribe el problema dual.

(d) Calcula la solución óptima del problema dual.

(e) Calcula la tabla óptima del dual sin hacer ninguna iteración.

(f) Razona si la solución óptima del dual es de vértice, de arista finita o de arista infinita.

(g) Calcula el intervalo de sensibilidad del término independiente de la primera restricción. Indica su interpretación.

(h) Determina por postoptimización la nueva solución óptima (y el valor óptimo de la función objetivo) si dicho término independiente pasa a valer 2.

(i) ¿Y si pasa a valer 5?

30. Considera la tabla siguiente:

| | | 3 | 1 | −6 | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x$ | $y$ | $z$ | $w$ | |
| 3 | $x$ | 1 | 0 | −1 | −2 | 10 |
| 1 | $y$ | 0 | 1 | −3 | −1 | 25 |
| | | 2 | 3 | −6 | −7 | 55 |
| | | 0 | 0 | 0 | 8 | |

(a) Si el problema es de minimizar, razona que la tabla es óptima, indica cuál es la solución óptima y de qué tipo es (vértice, arista finita o arista infinita).

(b) Si el problema es de maximizar, indica cómo es el problema y cómo sera, por lo tanto, su dual.

31. Una empresa fabrica dos productos en cantidades diarias $x$ e $y$. Dispone de 200 horas diarias de mano de obra y el segundo artículo requiere una materia prima de la que se dispone a razón de 30 unidades diarias. Los beneficios unitarios son de 2 y 5 u.m. respectivamente. El problema es

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 2x + 5y \\ \text{s.a.} & 3x + 5y \leq 200 \\ & \phantom{3x + {}} 3y \leq 30 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

y su tabla óptima es

| | | 2 | 5 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x$ | $y$ | $s$ | $t$ | |
| 2 | $x$ | 1 | 0 | 1/3 | −5/9 | 50 |
| 5 | $y$ | 0 | 1 | 0 | 3/9 | 10 |
| | | 2 | 5 | 2/3 | 5/9 | 150 |
| | | 0 | 0 | −2/3 | −5/9 | |

(a) La empresa está estudiando modificar el precio de venta del primer artículo. Determina entre qué valores puede variar el beneficio unitario de dicho artículo para que la solución siga siendo óptima.

(b) Calcula las variables duales e interprétalas. ¿Le interesaría a la empresa pagar 10 horas extras diarias a 1 u.m. cada una?

32. Calcula el problema dual del problema siguiente:

$$\begin{array}{rc} \text{Max.} & 2x+y+4z \\ \text{s.a} & x+2z \geq 2 \\ & -3x+y-z=3 \\ & x+z \leq 1 \\ & x \geq 0 \ z \leq 0 \end{array}$$

33. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 2x+y \\ \text{s.a.} & x \geq 1 \\ & x+y \geq 0 \\ & x \geq 0,\ y \leq 0 \end{array}$$

(a) Plantea el problema dual y resuélvelo por el método de las penalizaciones. **Nota:** La solución más rápida se obtiene si en la primera tabla tomas como variables básicas $(\lambda_1, A)$.

(b) Calcula la solución $(x, y)$ del problema primal a partir de la solución obtenida del dual.

(c) Comprueba si la solución $(\lambda_1, \lambda_2, s_1', s_2') = (2, 0, 0, -1)$ es una solución básica del problema dual.

(d) Escribe las condiciones de Kuhn y Tucker del problema primal y comprueba si la solución $(x, y)$ que has obtenido anteriormente las satisface.

34. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 5x+6y \\ \text{s.a} & 3x+2y \leq 9 \\ & x+2y=5 \\ & x,\ y \geq 0 \end{array}$$

(a) Reuélvelo por el método símplex, usando el método de las penalizaciones.

(b) Indica la solución óptima y razona de qué tipo es (de vértice, de arista finita o de arista infinita).

(c) Calcula el problema dual.

(d) Calcula la solución óptima del dual a partir de la del primal.

(e) Razona cómo variaría el valor mínimo de la función objetivo si el término independiente de la segunda restricción pasara a valer 6.

(f) Pon el dual en forma estándar y calcula la tabla del dual correspondiente a la solución $(\lambda_0, \mu_1, \mu_2) = (0, 3, 0)$.

(g) Justifica que la tabla dual es óptima y razona de qué tipo es.

(h) Calcula el intervalo de sensibilidad de la variable $y$ en la función objetivo. Interpreta el resultado.

(i) Razona mediante postoptimización cuál sería la nueva solución óptima si el término independiente $b_1 = 9$ pasara a ser $b_1 = 3$.

(j) En el caso en que las variables del problema fueran enteras, escribe los problemas que habría que resolver a continuación según el método de ramificación y acotación.

35. Una empresa planea producir dos artículos en cantidades $x$ e $y$. El coste de producción unitario es de 3 u.m. para el primero y 5 para el segundo, y la empresa dispone de un presupuesto de 30 u.m. diarias. Por otra parte, la empresa dispone de un máximo de 20 horas diarias de mano de obra, con lo que el problema de maximizar beneficios resulta ser:

$$\begin{array}{rll} \text{Max.} & 2x+5y & \text{Función de beneficios} \\ \text{s.a.} & 3x+5y \leq 30 & \text{Coste de la producción diaria} \\ & x+2y \leq 20 & \text{Horas diarias de producción} \\ & x,\, y \geq 0 & \end{array}$$

La tabla óptima resulta ser

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2 | 5 | 0 | 0 | |
| | | $x$ | $y$ | $s$ | $t$ | |
| 5 | $y$ | $3/5$ | 1 | $1/5$ | 0 | 6 |
| 0 | $t$ | $-1/5$ | 0 | $-2/5$ | 1 | 8 |
| | | 3 | 5 | 1 | 0 | 30 |
| | | $-1$ | 0 | $-1$ | 0 | |

(a) Calcula las variables duales $(\lambda_1, \lambda_2)$ e interprétalas.

(b) La solución muestra que no resulta rentable producir el primer artículo. Ante esta situación, la empresa se plantea la posibilidad de reducir de algún modo el coste de producción. Determina cuánto tendría que reducirse al menos dicho coste para que la producción del primer artículo pasara a ser rentable.

36. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x+3y \\ \text{s.a} & x+y \leq 5 \\ & x \geq 1 \\ & y \leq 0 \end{array}$$

(a) Resuélvelo mediante el método símplex sin calcular ninguna matriz inversa.

(b) Razona si la tabla óptima obtenida corresponde a una solución de vértice, de arista o de arista infinita.

(c) ¿A qué clase de problema correspondería dicha tabla si el objetivo fuera minimizar?

(d) Escribe el problema dual.

(e) Calcula la solución óptima $(\lambda, \mu)$ del problema dual (solución dual complementaria) y el valor óptimo de la función objetivo.

(f) Calcula el intervalo de sensibilidad de $b_1$ (el término independiente de la primera restricción del problema primal).

(g) Interpreta el intervalo obtenido.

37. El problema siguiente determina el beneficio máximo que puede obtener una empresa con una producción $(x, y)$ de dos artículos y con una restricción sobre las horas de producción disponibles:

$$\begin{array}{rll} \text{Max.} & xy+4000x & \text{beneficio} \\ \text{s.a} & x+2y=5000 & \text{horas empleadas} = \text{horas disponibles} \\ & x,\, y \geq 0 & \end{array}$$

(a) Pon un ejemplo de solución infactible y otro de solución factible. Razona si la solución factible es interior o de frontera.

(b) Resuelve el problema.

(c) Razona el efecto que tendría sobre los beneficios la producción de una unidad del segundo artículo.

(d) La empresa desea determinar la producción que minimiza el coste exigiendo una producción mínima de 1 000 unidades del segundo artículo. Resuelve el problema correspondiente mediante el método símplex (sin partir de ninguna solución factible conocida):

$$\begin{array}{rll} \text{Min.} & 3x + 7y & \text{coste} \\ \text{s.a} & x + 2y = 5000 & \text{horas empleadas} = \text{horas disponibles} \\ & y \geq 1000 & \text{producción de } y \geq \text{producción mínima} \\ & x,\, y \geq 0 & \end{array}$$

(e) Calcula el problema dual del problema de la pregunta anterior y ponlo en forma estándar.

(f) Calcula la tabla del problema dual correspondiente a la solución

$$(\lambda_1, \lambda_2, \mu) = (3, 0, 1).$$

(g) Razona si la solución anterior es óptima y, si lo es, razona si es de vértice, de arista finita o de arista infinita.

(h) Resuelve gráficamente el problema de la pregunta (d).

(i) En el problema de la pregunta (d), determina el intervalo de sensibilidad del coste de producción del primer artículo y el de la producción mínima del segundo artículo.

## 8.3 Programación no lineal

1. El problema siguiente determina el consumo óptimo de dos bienes $A$ y $B$ para minimizar el coste manteniendo un nivel de utilidad dado:

$$\begin{array}{rll} \text{Min.} & 2x + y & \text{Coste} \\ \text{s.a} & x^2 + y \geq 9 & \text{Utilidad} \geq 9 \\ & x,\, y \geq 0 & \end{array}$$

   (a) Resuélvelo gráficamente.
   (b) Calcula el coste mínimo.
   (c) Razona si la solución óptima es interior o de frontera.
   (d) Comprueba que cumple las condiciones de Kuhn y Tucker.
   (e) Determina qué efecto sobre el coste tendría exigir un nivel de utilidad de 10 unidades.
   (f) ¿Qué sucedería con el coste si necesitáramos comprar una unidad del segundo bien?

2. Una empresa puede producir dos artículos en cantidades $x$, $y$. Sus posibilidades de producción están limitadas por la restricción $x^2 + 5y^2 \leq 105$ y, por otra parte, se ha comprometido a producir almenos 4 unidades del segundo artículo. El modelo siguiente determina la producción que maximiza el beneficio:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x + 3y \\ \text{s.a} & x^2 + 5y^2 \leq 105 \\ & y \geq 4 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

   (a) Estudia si la solución $(x, y) = (5, 4)$ es factible o infactible, interior o de frontera.
   (b) Comprueba que $(x, y) = (5, 4)$ es regular. ¿Qué podemos concluir de ello?
   (c) Escribe las condiciones de Kuhn y Tucker del problema.

(d) Comprueba que $(x, y) = (5, 4)$ es un punto de Kuhn y Tucker y calcula sus multiplicadores.

(e) Razona que $(x, y) = (5, 4)$ es la solución óptima.

(f) Razona el efecto que tendría sobre el beneficio que las posibilidades de producción de la empresa fueran $x^2 + 5y^2 \leq 107$.

(g) ¿Cómo afectaría al beneficio la producción de una unidad más del segundo artículo?

3. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x + 3y \\ \text{s.a} & x + 2y \leq 6 \\ & 5x + 2y \geq 10 \\ & y \geq 0. \end{array}$$

(a) Escribe las condiciones de Kuhn y Tucker del problema (sin resolverlas).

(b) Estudia si los puntos $(6, 0)$ y $(1, 2.5)$ son o no puntos de Kuhn y Tucker del problema. En caso afirmativo calcula sus multiplicadores asociados.

(c) Razona si alguno de los puntos anteriores es óptimo.

(d) Transforma el problema para que tenga restricciones de igualdad, variables no negativas y objetivo de minimizar.

4. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & x^2 - y^2 \\ \text{s.a} & x + 2y = 5 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

(a) Resuélvelo.

(b) Razona cómo variaría el valor mínimo de la función objetivo si el término independiente de la primera restricción pasara a valer 6.

(c) ¿Y si pidiéramos que $x$ fuera al menos 0.1?

5. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & x + y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 = 4 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

(a) Indica una solución factible interior, una solución factible de frontera y una solución infactible.

(b) Resuelve el problema.

(c) Transforma el problema de manera que tenga objetivo de maximizar y variables no negativas.

6. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 2x + y \\ \text{s.a.} & x \geq 1 \\ & x + y \geq 0 \\ & x \geq 0,\, y \leq 0 \end{array}$$

(a) Estudia si el conjunto de oportunidades es compacto y si es convexo.

(b) Razona, sin comprobarlo explícitamente, que la solución óptima ha de cumplir las condiciones de Kuhn y Tucker.

(c) Escribe las condiciones de Kuhn y Tucker del problema y comprueba si el punto $(1, 0)$ las satisface.

7. Considera el problema siguiente, en el que las variables representan las cantidades empleadas de dos factores para la producción de un artículo:

$$\begin{array}{rll} \text{Max.} & x^2+y^2+4xy & \text{producción} \\ \text{s.a} & x+y=4 & \text{coste} = \text{presupuesto} \\ & x,\, y \geq 0. & \end{array}$$

   (a) ¿Podemos asegurar que la solución óptima (si existe) es un punto de Kuhn y Tucker?
   (b) Estudia si $(x, y) = (2, 2)$ es un punto de Kuhn y Tucker.
   (c) Razona si podemos concluir que es óptimo en virtud de la condición suficiente de Kuhn y Tucker. ¿Y por el teorema de Weierstrass?
   (d) Calcula la solución óptima.
   (e) ¿Qué incremento de producción podríamos conseguir si el presupuesto pasara a ser de 4.5 u.m.?
   (f) Repite los apartados (c) y (d) cambiando el objetivo por Min. $x^2 + y^2 + 4xy$.

8. Sabemos que la solución óptima del problema siguiente es $(x, y) = (3, 0)$:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 2x+y \\ \text{s.a.} & x^2+y \geq 9 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

   (a) Razona si la solución óptima es interior o de frontera.
   (b) Comprueba que cumple las condiciones de Kuhn y Tucker.
   (c) Razona qué efecto tendría sobre la función objetivo que el término independiente de la primera restricción pasara a ser 10.

9. Una empresa quiere producir 100 unidades entre tres artículos minimizando el coste. En la producción hay que emplear una materia prima de la que sólo posee 1 600 unidades. El problema correspondiente es:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 10x+30y+30z+2x^2+2xy-z^2 \\ \text{s.a} & x+y+z=100 \\ & 10x+40y+80z \leq 1600 \\ & x, y, z \geq 0 \end{array}$$

   (a) Razona que la solución óptima es un punto de Kuhn y Tucker.
   (b) Escribe las condiciones de Kuhn y Tucker (sin resolverlas).
   (c) Al calcular los puntos de Kuhn y Tucker, el mejor resulta ser $(x, y, z) = (80, 20, 0)$. Razona que es la solución óptima.
   (d) Comprueba si se puede aplicar la condición suficiente de Kuhn y Tucker.
   (e) Determina qué aumento de coste requeriría la producción de 102 unidades de producto.
   (f) A la empresa le ofrecen comprarle una unidad del tercer artículo por 100 u.m. Razona si le conviene aceptar la oferta.

10. Resuelve el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & x^2+xy+y^2 \\ \text{s.a} & x+y \geq 6. \end{array}$$

11. Resuelve el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 2x^2+3y^2+2xy+z^2 \\ \text{s.a} & x+y=3 \\ & z \geq 0 \end{array}$$

12. Resuelve el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 10y + 9z - x^2 - y^2 - z^2 + xz \\ \text{s.a} & y^2 \leq 1 \end{array}$$

13. Resuelve el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 2x + y \\ \text{s.a} & x^2 + y = 9 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

14. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 2 - x^2 - 4y \\ \text{s.a} & x + 2y \leq 2 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

   (a) Resuélvelo.

   (b) La solución óptima que has encontrado ¿es interior o de frontera?, ¿y la solución $(1/2, 1/2)$? Pon un ejemplo de solución infactible.

15. Resuelve el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 2x^2 - y^2 + 4 \\ \text{s.a} & 2x + y = 6 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

   ¿Cuál será aproximadamente el nuevo valor óptimo de la función objetivo si el término independiente de la primera restricción pasa a ser 6.5?

16. Encuentra los puntos de Kuhn y Tucker del problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & -x^2 - y^2 + 8x \\ \text{s.a} & x + y = 6 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

   Demuestra que el problema tiene solución óptima e indica cuál es.

17. Resuelve el problema siguiente haciendo uso de la teoría general de programación no lineal:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & x^2 - y^2 \\ \text{s.a} & x + y = 5 \\ & x \geq 1 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

   ¿Cuál será aproximadamente el nuevo valor óptimo de la función objetivo si el término independiente de la primera restricción pasa a ser $5'5$?

18. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & -12x + 3y \\ \text{s.a} & y - x^2 \geq 1. \end{array}$$

   (a) Justifica que si hay solución óptima, ésta tiene que ser un punto de Kuhn y Tucker.

   (b) Justifica que todo punto de Kuhn y Tucker ha de ser un óptimo global del problema.

   (c) Calcula los puntos de Kuhn y Tucker del problema.

   (d) Calcula el valor óptimo de la función objetivo (justificando tu respuesta) y razona cuál sería el nuevo valor óptimo si la restricción pasara a ser $y - x^2 \geq 0.8$.

(e) Justifica gráficamente que tiene solución óptima.

(f) Razona si también la tendría si la función objetivo fuera Max. $x + y$.

(g) Razona que, con este objetivo alternativo, el problema no puede tener puntos de Kuhn y Tucker.

19. (a) Escribe las condiciones de Kuhn y Tucker para el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 8x - 2y \\ \text{s.a} & y - x^2 \geq 2 \end{array}$$

y comprueba que el punto $(2, 6)$ las cumple.

(b) Demuestra que es un óptimo global.

(c) ¿Se puede aplicar la condición necesaria en el problema?

(d) Sabiendo que $(2, 6)$ es el único punto de Kuhn y Tucker, razona que es el único máximo global.

(e) Ahora vamos a minimizar la función objetivo, es decir,

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 8x - 2y \\ \text{s.a} & y - x^2 \geq 2\ . \end{array}$$

Resuelve este nuevo problema sabiendo que no tiene ningún punto de Kuhn y Tucker.

20. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 4x - y \\ \text{s.a} & y - x^2 \geq 1 \end{array}$$

(a) Indica una solución factible interior, una solución factible de frontera y una solución infactible.

(b) Resuelve el problema.

(c) Transforma el problema de modo que tenga objetivo de minimizar y que la restricción sea de igualdad.

21. Una empresa quiere producir dos variantes de un artículo en cantidades $x$ e $y$. Desea una producción conjunta de 90 unidades y tiene una materia prima limitada a 100 unidades. Para minimizar el coste plantea el problema siguiente:

$$\begin{array}{rll} \text{Min.} & 2x^2 + 3y^2 - xy & \text{Función de coste} \\ \text{s.a.} & x + \ \ y = 90 & \text{Producción exigida} \\ & x + 2y \leq 100 & \text{Materia prima disponible.} \\ & x,\, y \geq 0 & \end{array}$$

(a) Aplica el teorema de Weierstrass. ¿Cuál es la conclusión?

(b) Escribe las condiciones de Kuhn y Tucker del problema (sin resolverlas).

(c) La solución óptima es $(x, y) = (80, 10)$. Comprueba que cumple las condiciones de Kuhn y Tucker y calcula sus multiplicadores.

(d) ¿Cómo afectaría al coste que la empresa dispusiera de una unidad más de materia prima?

22. El problema siguiente calcula la producción máxima que puede conseguir una empresa en función de las cantidades $x$, $y$, $z$ de materias primas que utiliza, teniendo en cuenta que no puede usar más de 60 kg en total y que dispone de un presupuesto de 70 unidades monetarias.

$$\begin{array}{rll} \text{Max.} & 2x^2 + 4y^2 + 3z^2 & \text{Función de producción} \\ \text{s.a.} & x + y + z \leq 60 & \text{Cantidad total de materias primas} \\ & 2x + 2y + 3z \leq 70 & \text{Coste} \leq \text{presupuesto} \\ & x,\, y,\, z \geq 0 & \end{array}$$

(a) Escribe las condiciones de Kuhn y Tucker del problema.
(b) Sabiendo que $(0, 35, 0)$ es el único punto de Kuhn y Tucker, razona que es la solución óptima.
(c) Calcula los multiplicadores de Kuhn y Tucker correspondientes.
(d) Si la empresa no pudiera usar únicamente la segunda materia prima, ¿qué le convendría más, comprar un poco de la primera o de la tercera?
(e) ¿Cómo afectaría a la producción disponer de dos unidades más de presupuesto?
(f) Pon un ejemplo de solución de frontera y otro de solución interior del problema, razonando por qué es cada una del tipo correspondiente.

23. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & B = 300x + 200y - x^2 \\ \text{s.a.} & 2x + y \leq 20 \\ & x + 2y \leq 5 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

donde $B$ es la función de beneficios de una empresa y las variables $x$, $y$ representan las cantidades producidas de dos artículos $A_1$ y $A_2$.

(a) ¿Podemos asegurar que la solución óptima cumple las condiciones de Kuhn y Tucker?
(b) Estudia si la solución $(x, y) = (5, 0)$ cumple dichas condiciones.
(c) Estudia si el punto anterior es un óptimo global del problema.
(d) Supón que la empresa recibe una oferta de 200 u.m. por fabricar una unidad del artículo $A_2$. ¿Le convendría?

24. Considera el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 2x^2 + 4xy + y^2 \\ \text{s.a} & 2x^2 + 2y \leq 5 \\ & y \geq 0. \end{array}$$

(a) Razona que tiene solución óptima.
(b) Razona que la solución óptima ha de ser un punto de Kuhn y Tucker.
(c) Sabiendo que $(x, y) = (-1, 1.5)$ es el mejor punto de Kuhn y Tucker, razona que es la solución óptima. Determina si es interior o de frontera.
(d) Comprueba que el punto del apartado anterior es ciertamente un punto de Kuhn y Tucker del problema. Indica el valor de los multiplicadores de Kuhn y Tucker.
(e) Transforma el problema para que tenga objetivo de maximizar, restricciones de igualdad y variables no negativas.

Supón a partir de aquí que las variables $x$ e $y$ han de ser enteras.

(f) Escribe los problemas que habría que resolver según el método de ramificación y acotación.
(g) Las soluciones de estos problemas son $(x, y) = (-1, 1)$ y $(x, y) = (-0.7, 2)$. Escribe los tres primeros nodos del árbol correspondiente a la ramificación y acotación y razona si conocemos ya la solución óptima o si hemos de seguir ramificando.

25. Una empresa quiere producir un máximo de 1 000 unidades entre tres artículos maximizando su beneficio. Además, requiere una producción mínima de 80 unidades del primer artículo. El problema correspondiente es:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 100x + 90y + 150z - x^2 - y^2 - 3z^2 - 2xy \\ \text{s.a} & x + y + z \leq 1000 \\ & x \geq 80 \\ & x, y, z \geq 0 \end{array}$$

(a) Razona que la solución óptima ha de ser un punto de Kuhn y Tucker.

(b) Escribe las condiciones de Kuhn y Tucker (sin resolverlas).

(c) Estudia si los puntos $(500, 500, 0)$ y $(80, 0, 25)$ son de Kuhn y Tucker.

(d) Calcula la solución óptima del problema.

(e) ¿Cómo afectaría a la empresa que la máxima producción admisible fuera de 500 unidades?

(f) ¿Y si tuviera que producir 85 unidades del primer artículo?

26. Un consumidor desea maximizar su utilidad al comprar dos bienes sujeto a una restricción presupuestaria. Además necesita comprar al menos 5 unidades del segundo producto:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & U = xy \\ \text{s.a} & x + 3y = 24 \\ & x \geq 0,\ y \geq 5. \end{array}$$

(a) Resuelve el problema. Indica las cantidades que debe comprar de cada producto y la utilidad máxima que consigue con dicha solución.

(b) Interpreta el multiplicador de la restricción presupuestaria.

(c) Razona qué sucedería con la utilidad si el consumidor necesitara comprar 6 unidades del segundo producto.

27. El problema siguiente maximiza la función de beneficios de una empresa que quiere producir un total de 20 unidades de dos artículos en cantidades $x$ e $y$.

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 100x + 200y - x^2 - 4xy \\ \text{s.a} & x + y = 20 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

(a) Resuelve el problema. Indica qué cantidad de cada artículo debe producir la empresa y qué beneficio obtiene con ello.

(b) Interpreta el multiplicador de Kuhn y Tucker de la primera restricción.

(c) Si a la empresa le ofrecieran 100 u.m. por producir una unidad del primer artículo, ¿le interesaría aceptar la oferta?

28. El problema siguiente determina las cantidades que ha de adquirir un consumidor de dos productos para maximizar su utilidad con un presupuesto de 6 u.m.

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x^2 + xy + 2y^2 \\ \text{s.a} & 3x + 2y = 6 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

(a) Resuelve el problema.

(b) Razona cómo cambiaría la utilidad óptima si el presupuesto fuera de 6.5 u.m.

(c) Interpreta el multiplicador de Kuhn y Tucker de la restricción $x \geq 0$.

(d) Razona cuál sería la solución óptima si las variables tuvieran que ser enteras.

29. Una empresa produce tres artículos en cantidades $x$, $y$, $z$. El problema siguiente determina las cantidades que conviene producir de cada uno para maximizar los beneficios, teniendo en cuenta una restricción que determina la frontera de posibilidades de producción de la empresa.

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 14x + 18y + 7z - x^2 - y^2 - z^2 - 2xy - 2xz - 2yz \\ \text{s.a} & 2x + 4y + z^2 \leq 14 \\ & x,\, y,\, z,\, \geq 0 \end{array}$$

(a) Comprueba que la producción óptima es $(x, y, z) = (3, 2, 0)$. (Primeramente tendrás que comprobar que el punto es de Kuhn y Tucker.)

(b) Razona el efecto que tendría sobre los beneficios de la empresa que ésta tuviea que producir al menos una unidad del tercer artículo.

(c) Con una inversión en maquinaria de 4.5 u.m., la empresa podría aumentar sus posibilidades de producción hasta $2x + 4y + z^2 \leq 16$. ¿Le convendría?

30. Una empresa fabrica dos productos en cantidades $x$ e $y$. El problema siguiente determina la producción que maximiza el beneficio sujeto a que el coste no exceda del presupuesto y que la cantidad empleada de un input $I$ sea al menos la cantidad que la empresa ha adquirido ya del mismo.

$$\begin{array}{rll} \text{Max.} & x + 3y & \text{Beneficio} \\ \text{s.a} & x + 2y \leq 6 & \text{coste} \leq \text{presupuesto} \\ & 5x + 2y \geq 10 & \text{cantidad empleada de } I \geq \text{cantidad adquirida} \\ & x,\ y \geq 0 & \end{array}$$

(a) Escribe las condiciones de Kuhn y Tucker del problema (sin resolverlas).

(b) Estudia si los puntos $(6, 0)$ y $(1, 2.5)$ son o no puntos de Kuhn y Tucker del problema. En caso afirmativo calcula sus multiplicadores asociados.

(c) Razona si alguno de los puntos anteriores es óptimo.

(d) Interpreta el multiplicador de la restricción presupuestaria.

(e) ¿Qué efecto tendría sobre los beneficios que la empresa adquiriera (y pretendiera utilizar) 2 unidades más del input $I$?

(f) Razona si el conjunto de oportunidades es compacto.

(g) Transforma el problema para que tenga restricciones de igualdad (sin contar las de signo) y objetivo de minimizar.

31. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & -x + 2y \\ \text{s.a} & x + 3y \leq 6 \\ & x - y \geq 0 \\ & x,\ y \geq 0 \text{ enteras} \end{array}$$

Para las primeras preguntas, considera el problema relajado (es decir, no consideres las variables enteras).

(a) Razona que, si tiene solución óptima, ésta cumplirá las condiciones de Kuhn y Tucker.

(b) Aplica el teorema de Weierstrass al problema. ¿Cuál es la conclusión?

(c) Plantea las condiciones del Kuhn y Tucker del problema.

(d) Pon el problema en forma estándar y calcula la solución básica correspondiente a las variables básicas $x$ e $y$. ¿Es factible?

(e) Comprueba si la solución $(x, y)$ (sin las variables de holgura) que has encontrado en el apartado anterior es un punto de Kuhn y Tucker. Indica el valor de los multiplicadores.

(f) Estudia (con la teoría de programación no lineal) si la solución que has encontrado en la pregunta (d) es óptima.

(g) Calcula sin iterar la tabla del símplex asociada a la solución de la pregunta (d). Razona si es óptima y, si lo es, razona si corresponde a una solución de vértice o de arista.

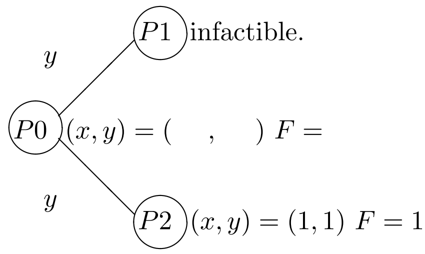
(h) Sin hacer uso de los apartados anteriores, escribe una primera tabla del símplex sin calcular ninguna matriz inversa. A partir de ella, haz una iteración. En la tabla que obtengas, razona qué variable entraría y cuál saldría, pero no hagas más iteraciones.

(i) Calcula el problema dual.

(j) Razona el efecto sobre la función objetivo de cambiar la primera restricción a $x + 3y \leq 8$.

(k) Calcula el intervalo de sensibilidad del coeficiente de la $x$ en la función objectivo.

(l) Para resolver el problema original (con variables enteras) aplicamos el método de ramificación y acotación. Completa el árbol siguiente con los datos obtenidos en los apartados anteriores. (No olvides indicar las restricciones añadidas.)




¿A qué conclusión llegamos?