Parte II
Modelización y optimización con LINGO

5 Introducción a LINGO

En esta sección veremos cómo usar LINGO para resolver problemas de programación matemática. El primer paso para resolver un problema es modelizarlo, así que empezamos por plantear y modelizar el problema que usaremos como ejemplo.

5.1 Un ejemplo de modelización

Ejemplo 1a Una empresa necesita incrementar urgentemente el rendimiento de dos líneas de producción de una de sus fábricas. En la primera línea de producción necesita que se produzcan al menos 3 000 unidades más al día, mientras que en la segunda línea necesita al menos 5 000 unidades más. Para ello se dispone a contratar trabajadores temporales, que debe distribuir en turnos de mañana, tarde y noche. La fábrica puede albergar hasta 100 horas adicionales en el turno de mañana, hasta 200 en el turno de tarde y hasta 300 en el turno de noche. Por razones de organización, al menos 190 horas de la primera línea de producción deben realizarse antes de la noche.

La tabla siguiente recoge el número de artículos que pueden producirse en cada hora de trabajo en cada línea según el turno en que se realice:

	Mañana	Tarde	Noche
Línea 1	15	17	20
Línea 2	10	12	15

mientras que la tabla siguiente recoge el precio (en euros) que la empresa deberá pagar por cada hora de trabajo en cada línea y turno:

	Mañana	Tarde	Noche
Línea 1	40	55	100
Línea 2	50	50	90

Determina cuántas horas conviene contratar en cada turno para cada línea de producción de modo que se consiga la producción adicional requerida con coste mínimo.

Para modelizar el problema debemos identificar las variables de decisión, la función objetivo y las restricciones.

• **Determinación de las variables** Las variables representan lo que tenemos que decidir. Imaginemos que ya hemos resuelto el problema y que tenemos que darle la solución al gerente de la empresa. ¿Qué tendríamos que decirle? Nuestra respuesta sería algo así como:

> Para la primera línea de producción conviene contratar 40 horas en el turno de mañana, 30 en el de tarde y 20 en el de noche, mientras que para la segunda línea de producción conviene contratar 30 horas en el turno de mañana, 25 en el de tarde y 47 en el de noche.

Esos números están tomados al azar, precisamente porque lo que nos falta hacer es encontrar la respuesta correcta, la solución óptima, pero, sea la que sea, debe constar de seis números que ahora desconocemos. Dichos números desconocidos son:

M_1	horas que conviene contratar para la línea 1 en el turno de mañana
T_1	horas que conviene contratar para la línea 1 en el turno de tarde
N_1	horas que conviene contratar para la línea 1 en el turno de noche
M_2	horas que conviene contratar para la línea 2 en el turno de mañana
T_2	horas que conviene contratar para la línea 2 en el turno de tarde
N_2	horas que conviene contratar para la línea 2 en el turno de noche

Éstas son, pues, las variables del problema.

• **Determinación de la función objetivo** El problema establece que nuestro objetivo es contratar las horas necesarias con el coste mínimo, luego la función objetivo es la función de coste. Si contratamos M_1 horas para el turno de mañana en la línea 1, su coste será de $40M_1$ €, e igualmente con los demás casos, luego el objetivo es

$$\text{min. } 40M_1 + 50M_2 + 55T_1 + 50T_2 + 100N_1 + 90N_2$$

• **Determinación de las restricciones** Ahora debemos leer atentamente el enunciado y detenernos en cada afirmación que suponga una limitación por la que una solución pudiera ser infactible e introducir la restricción adecuada para que ello no suceda:

En la primera línea de producción necesita que se produzcan al menos 3 000 unidades más al día

Para garantizar esto introducimos la restricción:

$$15M_1+17T_1+20N_1 \geq 3000 \quad \text{prod. línea 1} \geq \text{prod. requerida.}$$

mientras que en la segunda línea necesita al menos 5 000 unidades más.

$$10M_2+12T_2+15N_2 \geq 5000 \quad \text{prod. línea 2} \geq \text{prod. requerida.}$$

La fábrica puede albergar hasta 100 horas adicionales en el turno de mañana

Exigimos que no se rebase dicha capacidad:

$$M_1 + M_2 \leq 100 \qquad \text{horas turno de mañana} \leq \text{capacidad}$$

200 en el turno de tarde y hasta 300 en el turno de noche

$$T_1 + T_2 \leq 200 \qquad \text{horas turno de tarde} \leq \text{capacidad}$$

$$N_1 + N_2 \leq 300 \qquad \text{horas turno de noche} \leq \text{capacidad}$$

> Cuando escribas una restricción puedes comprobar que es coherente comparando las unidades de ambos miembros. Por ejemplo, no tendría sentido escribir
>
>  $M_1 + T_1 + N_1 \geq 3\,000$,
>
> porque a la izquierda estaríamos sumando horas y a la derecha tenemos unidades de producto. En cambio, como 10 son las unidades de producto/hora de trabajo en la línea 1, tenemos que $10M_1$ representa unidades de producto y no horas.
>
> En cambio, $M_1 + M_2 \leq 100$ es correcto porque el miembro izquierdo representa las horas empleadas (en el turno de mañana) y el miembro derecho las horas disponibles en dicho turno.

Por razones de organización, al menos 190 horas de la primera línea de producción deben realizarse antes de la noche.

Esto significa que deben realizarse o bien en el turno de mañana o bien en el de la tarde:

$$M_1 + T_1 \geq 190 \qquad \text{horas en la línea 1 anteriores al turno de noche} \geq \text{cantidad exigida.}$$

Añadiendo las condiciones de no negatividad, el modelo queda como sigue:

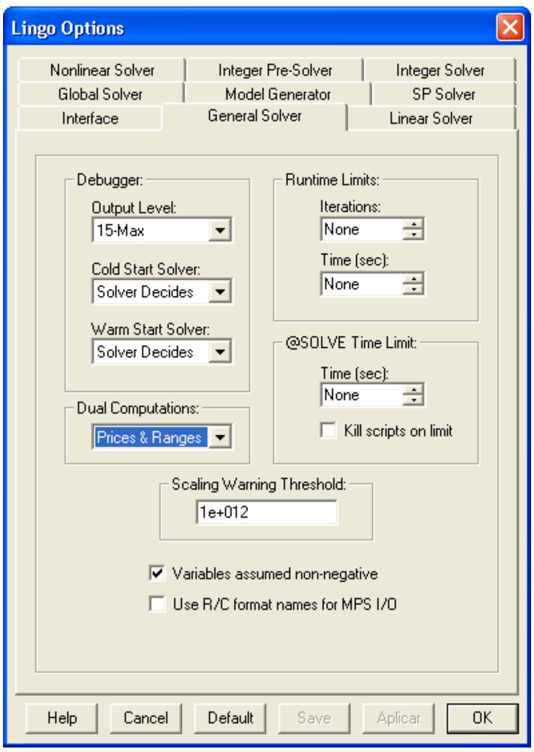
$$
\begin{array}{rll}
\text{Min.} & 40M_1 + 50M_2 + 55T_1 + 50T_2 + 100N_1 + 90N_2 \text{ coste} & \\
\text{s.a} & 15M_1 + 17T_1 + 20N_1 \geq 3000 & \text{producción línea } 1 \geq \text{producción requerida.} \\
 & 10M_2 + 12T_2 + 15N_2 \geq 5000 & \text{producción línea } 2 \geq \text{producción requerida.} \\
 & M_1 + M_2 \leq 100 & \text{horas turno mañana} \leq \text{capacidad} \\
 & T_1 + T_2 \leq 200 & \text{horas turno tarde} \leq \text{capacidad} \\
 & N_1 + N_2 \leq 300 & \text{horas turno noche} \leq \text{capacidad} \\
 & M_1 + T_1 \geq 190 & \text{horas anteriores a la noche en línea } 1 \geq \text{horas} \\
 & M_1, M_2, T_1, T_2, N_1, N_2 \geq 0 & \text{exigidas.}
\end{array}
$$

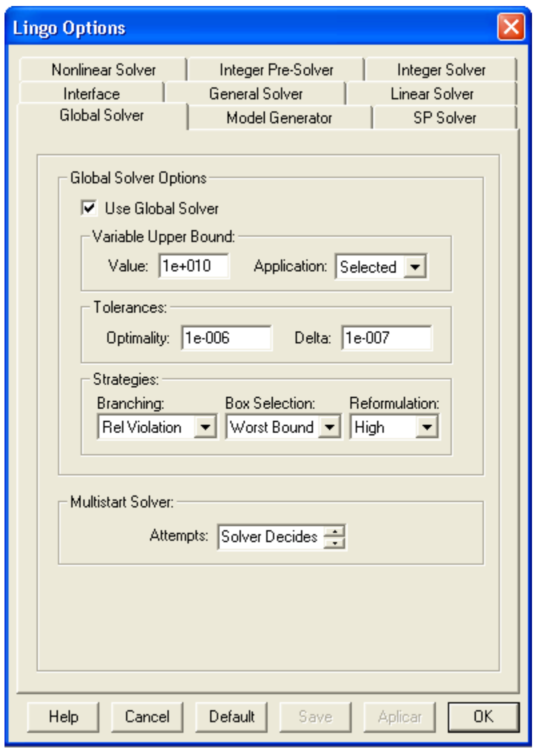
En los apartados siguientes veremos cómo introducir este problema en LINGO y cómo interpretar la solución y toda la información adicional que éste proporciona.

5.2 Introducción de un problema en LINGO

Para empezar a usar LINGO hemos de abrir la aplicación y crear un documento en blanco sobre el que escribir (aunque ya se crea uno por defecto al abrir LINGO, si lo hemos cerrado o queremos otro nuevo, basta acudir al menú File → New). LINGO maneja distintos tipos de documentos. Asegúrate de abrir uno de tipo Lingo Model, con extensión .lg4. Puedes comprobar el tipo de documento en la barra superior de la ventana. Como en cualquier otra aplicación, podemos guardar en cualquier momento nuestro trabajo mediante el menú File → Save o bien File → Save as...

La única configuración que requiere el programa (al menos, para el uso que nosotros le daremos) se introduce mediante el menú LINGO → Options... Aparece entonces un panel de opciones con varias pestañas.





La opción a) hace que LINGO calcule los precios duales y los intervalos de sensibilidad (véase más adelante). Cuando el problema no es de programación lineal esta opción puede dar lugar a un mensaje de error, y en tal caso hay que desactivarla.

La opción b) hace que no sea necesario escribir en cada problema las condiciones de no negatividad, sino que LINGO supone a priori que todas las variables son no negativas.

La opción c) hace que LINGO se asegure de que las soluciones que encuentra sean óptimos globales y no meramente locales. Para problemas muy grandes podría hacer que tarde un tiempo excesivo o incluso que no encuentre la solución.

La opción d) evita que LINGO interprete expresiones como $-x^2$ en el sentido inusual de $(-x)^2$.

Sólo hemos de comprobar cuatro cosas:

a) Que, en la pestaña titulada "General Solver", en la casilla "Dual Computations:" esté seleccionada la opción "Prices & Ranges".

b) Que en esa misma pestaña esté marcada la opción "Variables assumed non-negative".

c) Que en la pestaña titulada "Global Solver" esté marcada la opción "Use Global Solver".

d) Que en la pestaña titulada "Model Generator" esté marcada la opción Unary Minus Priority: Low.

Si pulsamos el botón "Save" de la parte inferior del cuadro, el ordenador recordará estas opciones las próximas veces que usemos LINGO, y no será necesario volver a especificarlas, pero si usamos el programa en otro ordenador (por ejemplo, un ordenador del aula de informática que no sabemos cómo ha sido configurado), deberemos abrir este cuadro de opciones para comprobar que la configuración es correcta.

Ahora ya podemos escribir el problema, para lo cual tecleamos lo siguiente:

```
[Coste] Min= 40*M1+50*M2+55*T1+50*T2+100*N1+90*N2;
[Produccion_L1] 15*M1+17*T1+20*N1>3000;
[Produccion_L2] 10*M2+12*T2+15*N2>5000;
[Horas_M] M1+M2<100;
[Horas_T] T1+T2<200;
[Horas_N] N1+N2<300;
[Distribucion_L1] M1+T1>190;
```

En general, a la hora de introducir un problema en LINGO hemos de tener en cuenta lo siguiente:

a) Cada ecuación termina siempre con un punto y coma. Si una ecuación fuera muy larga y no cupiera en una línea, podemos cambiar de línea cuando queramos. LINGO entenderá que la ecuación termina cuando encuentre el punto y coma.

b) La función objetivo empieza con `Max =` si el objetivo es maximizar y con `Min =` si el objetivo es minimizar.

c) En lugar de escribir $\leq$ o $\geq$ hemos de escribir $<$ o $>$. Las restricciones de igualdad se introducen con $=$.

d) Es necesario escribir los productos con el signo $*$, de modo que obtendríamos un error si escribiéramos `40M1` en lugar de `40*M1`.

e) La coma decimal se representa con un punto.

f) Las potencias se introducen con el circunflejo ^ . Por ejemplo, x^4 se escribiría `x^4`.

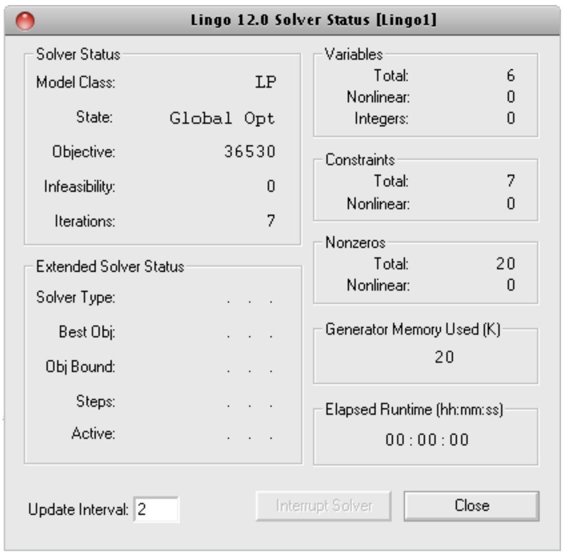
g) No es necesario introducir las condiciones de no negatividad, $M_1, M_2, T_1, T_2, N_1, N_2 \geq 0$, sino que LINGO las da por supuestas. Si quisiéramos especificar que una variable, por ejemplo M_1, es libre, añadiríamos una nueva línea `@Free(M1);`

Otras funciones disponibles son
`@SQRT(x)` para $\sqrt{x}$,
`@LOG(x)` para $\ln x$,
`@EXP(x)` para e^x,
`@SIN(x)` para $\operatorname{sen} x$,
`@COS(x)` para $\cos x$.
Puedes encontrar más funciones en el menú Edit → Paste Function.

h) Los nombres de las variables pueden constar de una o más letras (pero no espacios en blanco, acentos, ni eñes, etc.). No podemos escribir literalmente M_1 con subíndice, pero sí `M1`, como hemos hecho. En cualquier caso, el primer signo de una variable tiene que ser una letra y no un número. Por ejemplo, `1M` no sería un nombre válido para una variable.

i) Las palabras entre corchetes antes de las restricciones no son necesarias, pero ayudan a leer después la solución. Han de cumplir las mismas condiciones que los nombres de las variables. En particular no pueden tener espacios en blanco. Si queremos poner varias palabras podemos usar guiones bajos, como en `Produccion_L1`.

Una vez introducido el modelo, lo resolvemos con el menú LINGO → Solve, o bien con el icono en forma de diana ( ) que hay en la parte superior de la ventana. Si no se produce ningún error, obtendremos una ventana con este aspecto:



La única información que nos interesa es "State: Global Opt", que nos indica que LINGO ha obtenido un óptimo global. Las posibilidades son:

Global Opt: óptimo global.

Local Opt: óptimo local. En tal caso deberemos estudiar si el óptimo es global mediante convexidad.

Infeasible/Unbounded: infactible/no acotado. En este caso aparecerá antes un cuadro de error advirtiéndonos de que el problema no tiene solución.

Unknown: Desconocido. Se da este caso cuando LINGO encuentra un error y no resuelve el problema.

Si LINGO ha encontrado una solución óptima (global o local), cerramos la ventana anterior y veremos otra ventana titulada "Solution Report", que contiene (entre otras líneas que no nos interesan) dos tablas con la solución del problema. Para nuestro ejemplo son:

```
       Variable           Value        Reduced Cost
             M1        100.0000            0.000000
             M2        0.000000            27.00000
             T1        90.00000            0.000000
             T2        110.0000            0.000000
             N1        0.000000            100.0000
             N2        245.3333            0.000000

            Row    Slack or Surplus      Dual Price
          COSTE        36530.00           -1.000000
 PRODUCCION_L1         30.00000            0.000000
 PRODUCCION_L2         0.000000           -6.000000
        HORAS_M        0.000000            37.00000
        HORAS_T        0.000000            22.00000
        HORAS_N        54.66667            0.000000
DISTRIBUCION_L1        0.000000           -77.00000
```

En el apartado siguiente explicamos la información que proporcionan estas tablas.

Si queremos guardar la solución deberemos ir al menú FILE → Save o FILE → Save as. . . , y obtendremos un documento de extensión .lgr.

5.3 Interpretación de la salida de LINGO

Según hemos visto, LINGO proporciona dos tablas con cuatro columnas de datos que vamos a interpretar una por una.

Columna Value Contiene el valor óptimo de cada variable. En nuestro ejemplo, podemos concluir que la solución óptima es

$$(M_1, M_2, T_1, T_2, N_1, N_2) = (100, 0, 90, 110, 0, 245.33)$$

o, dicho de forma más natural, que en la línea 1 a la empresa le conviene contratar 100 horas en el turno de mañana y 90 en el de tarde, mientras que en la línea 2 le conviene contratar 110 horas en el turno de tarde y 245.33 en el de noche.

Columna Slack or Surplus Una de las líneas (habitualmente la primera) contiene el valor óptimo de la función objetivo. En nuestro ejemplo vemos que el coste de contratación mínimo para la empresa es de 36 530 €.

El resto de la columna contiene la *holgura* de cada restricción, es decir, la diferencia entre el valor de su miembro izquierdo y de su miembro derecho. Para interpretar adecuadamente estas holguras tenemos que fijarnos en la interpretación de ambos miembros en el contexto de nuestro problema, así como la relación entre ellos, es decir, si es $\leq$, si es $\geq$ o si es $=$ (en cuyo caso la holgura será necesariamente igual a 0).

- La primera restricción exige que las unidades producidas en la línea 1 deben ser $\geq$ que las 3 000 unidades requeridas, luego la holgura 30 indica que se producen 30 unidades más de las requeridas, es decir un total de 3 030 unidades de producto.
- La segunda restricción exige que las unidades producidas en la línea 2 deben ser $\geq$ que las 5 000 unidades requeridas, luego la holgura 0 indica que se producen exactamente esas 5 000 unidades y ninguna más.
- La tercera restricción exige que que las horas contratadas en el turno de mañana sean $\leq$ que las 100 horas disponibles, luego la holgura 0 indica que se contratan las 100 horas disponibles, sin que sobre ninguna.
- Igualmente, la holgura de la cuarta restricción indica que en el turno de tarde se contratan las 200 horas disponibles, sin que sobre ninguna.
- La quinta restricción exige que las horas contratadas en el turno de noche sean $\leq$ que las 300 horas disponibles, luego la holgura 54.66 indica que se contratan esas horas de menos, es decir, que sólo se contratan $300 - 54.66 = 245.33$ horas.
- La sexta restricción exige que las horas de la línea 1 contratadas antes del turno de noche sean $\geq$ que 190, luego la holgura 0 indica que en los turnos anteriores al turno de noche se contratan exactamente esas 190 horas y ninguna más.

Columna Dual Price Para problemas de programación no lineal, el precio dual de una restricción indica aproximadamente lo que mejoraría la función objetivo por cada unidad que aumente el término independiente de la restricción (de modo que un valor negativo indica que la función objetivo empeoraría).

En general ten presente que si una restricción es de $\geq$, como la primera, que dice que las unidades producidas tienen que ser 3 000 **o más**, la holgura indica las que se producen **de más,** mientras que si una restricción es de $\leq$, como la quinta, es de $\leq$, que indica que las horas contratadas en el turno de noche tienen que ser 300 **o menos**, la holgura indica las horas que se contratan **de menos.**

Así, sería un error interpretar la holgura de la primera restricción como que:

De las 3 000 *unidades requeridas sólo se producen* 2 970*,*

pues si eso pasara la solución sería infactible, o, más sin sentido aún, decir que "sobran" (?) 30 unidades de producto. En este contexto, ni sobran ni faltan unidades de producto. Se producen 3 030 y se entiende que la empresa las puede comercializar todas, ya que si no fuera así habría que poner una restricción de $=$ para excluir un exceso de producción no aprovechable.

En otros términos, la holgura de una restricción de $\geq$ debe sumarse al miembro derecho para obtener el izquierdo, mientras que la de una restricción de $\leq$ debe restarse: en la línea 1 se producen

$$3\,000 + 30 = 3\,030 \text{ unidades}$$

y en el turno de noche se emplean

$$300 - 54.66 = 245.33 \text{ horas.}$$

Aquí es fundamental tener presente que el precio dual informa de lo que sucede si aumenta una unidad **el miembro derecho** de la restricción, no el izquierdo. En este caso las unidades **requeridas** en la línea 1, no las unidades **producidas.** En concreto, sería un error interpretar así el precio dual:

Si se aumenta una unidad la producción de la línea 1 *el coste de la contratación no variará.*

No es si producimos una unidad más (3 031 en total), sino si exigimos producir una más (3 001 en total). Y el coste no variará porque, aunque exijamos producir una más, produciremos las mismas (3 030).

Observemos que un precio dual positivo indica una **mejora** de la función objetivo, y eso es un **aumento** si el objetivo es maximizar y una **disminución** si el objetivo es minimizar.

Disponer de una hora más en el turno de noche no afecta al coste porque de las horas disponibles no estamos empleando 54.66 de ellas, luego, si ya no conviene aprovechar todas las horas disponibles, aunque tuviéramos una más la solución óptima sería la misma y la nueva hora no se aprovecharía tampoco.

En nuestro ejemplo:

- El término independiente de la primera restricción es la producción adicional requerida en la línea 1, luego el precio dual 0 indica que aunque se exigiera producir una unidad más en la línea 1, esto no provocaría ninguna variación en el coste.

  Esto se explica porque, según la solución óptima, ya se están produciendo 30 unidades más de las requeridas en la línea 1, luego exigir que se produzca una más (es decir, exigir que se produzcan al menos 3 001 en lugar de al menos 3 000) daría lugar a la misma solución óptima, en la que producimos 3 030, y el coste, por consiguiente, sería el mismo.

- En cambio, por cada unidad de producto adicional que exigiéramos producir en la línea 2 (sobre las 5 000 que estamos exigiendo ahora), el precio dual -6 indica que el coste de contratación empeorará (es decir, aumentará) en 6 €.

- El término independiente de la tercera restricción son las horas disponibles para el turno de mañana, luego el precio dual 37 indica que por cada hora adicional de que pudiéramos disponer para el turno de mañana (sobre las 100 de que disponemos ahora) el coste de contratación mejoraría (es decir, disminuiría) en 37 €.

- Similarmente, por cada hora adicional de que pudiéramos disponer para el turno de tarde (sobre las 200 que tenemos ahora), el coste de contratación disminuiría en 22 €.

- En cambio, aunque dispusiéramos de una hora más para el turno de noche, esto no afectaría al coste de contratación.

- El término independiente de la última restricción son las horas de la línea 1 que deben contratarse como mínimo antes del turno de noche, luego el precio dual -77 indica que por cada hora adicional que exigiéramos realizar antes del turno de noche en la línea 1 (sobre las 190 que estamos exigiendo ahora), el coste de contratación empeoraría (es decir, aumentaría) en 190 €.

Existe una relación básica entre la holgura y el precio dual de una restricción:

Condición de holgura complementaria: Si la holgura de una restricción es distinta de 0, entonces su precio dual es 0.

Por ejemplo, que la holgura de la primera restricción sea distinta de 0 significa que producimos más de lo requerido, luego, aunque requiramos un poco más de producción, la solución óptima será la misma y la función objetivo no variará, luego el precio dual es 0. Que la holgura de la última restricción no sea 0 significa que sobran horas en el turno de noche, luego disponer de una hora más no ayuda en nada, la solución óptima no varía y la función objetivo tampoco.

Para estimar el efecto sobre la función objetivo de una variación de un término independiente de una restricción que no sea del orden de una unidad, podemos usar que

> Variación de la función objetivo $\approx$ precio dual $\times$ variación del término independiente.

Por ejemplo: ¿Cómo afectaría al coste disponer de 3 horas más en el turno de mañana?

Solución: $37 \cdot 3 = 111$, luego el coste mejoraría (disminuiría) en 111 €.

En realidad para que un cálculo así sea fiable es necesario que el incremento del término independiente no sea muy grande. Más adelante precisaremos este hecho. Conviene observar que en muchos casos el signo del precio dual es previsible:[5]

> **Condición de signo:** El precio dual de una restricción de $\leq$ es siempre ≥ 0, el de una restricción de $\geq$ es siempre ≤ 0, mientras que el de una restricción de $=$ puede tener cualquier signo.

Columna Reduced Cost El coste reducido de una variable x indica lo que empeora aproximadamente la función objetivo cuando cambiamos la condición de no negatividad $x \geq 0$ por $x \geq 1$, es decir, si forzamos a que la variable tome al menos el valor 1. En nuestro ejemplo:

- El coste reducido de M_1 es 0, lo que significa que si forzamos a que se contrate al menos una hora en el turno de mañana para la línea 1 el coste de contratación no se verá afectado.

  Esto se explica porque ya estamos contratando 100 horas en el turno de mañana para la línea 1, por lo que exigir que se contrate al menos una no nos obliga a nada. Con tal exigencia, seguiríamos contratando las 100 horas que ya contratamos y el coste sería el mismo.

- El coste reducido de M_2 es 27, lo que significa que por cada hora que exigiéramos contratar en el turno de mañana para la línea 2 el coste de contratación empeoraría (es decir, aumentaría) en 27 €.

- Los costes reducidos de T_1 y T_2 son 0, lo que significa que si exigiéramos contratar al menos una hora en el turno de tarde para la línea 1 o la línea 2 el coste no se vería afectado (y de nuevo la causa es que ya estamos contratando muchas horas en dichos turnos, luego exigir que se contrate al menos una hora no nos afecta en nada y podemos mantener la misma solución óptima, con el mismo coste).

> Como en el caso del precio dual, es fundamental comprender que el coste reducido de M_1 no dice nada sobre lo que sucedería si **contratáramos una hora más** en el turno de mañana para la línea 1, es decir, si contratáramos 101 horas en lugar de 100, sino lo que sucedería si **exigiéramos contratar al menos una hora** en el turno de mañana para la línea 1, de decir, si cambiamos la condición $M_1 \geq 0$ por $M_1 \geq 1$.
>
> Notemos que un coste reducido no nulo siempre indica un empeoramiento de la función objetivo, pues si lo óptimo es no contratar ninguna hora en el turno de tarde para la línea 2 y, pese a ello, forzamos a que se contrate al menos una hora, tendremos que descartar la solución actual, que es la óptima, luego tendremos que pasar a otra peor, luego la función objetivo empeorará.

- El coste reducido de N_1 es 100, lo que significa que por cada hora que exigiéramos contratar en el turno de noche para la línea 1 el coste de contratación aumentaría en 100 €.

---

[5] La razón es que al aumentar una unidad el término independiente de una restricción de $\leq$ estamos haciendo mayor el conjunto de oportunidades, luego la solución óptima en un conjunto mayor tiene que mejor o igual que la inicial. En cambio, al aumentar una unidad el término independiente de una restricción de $\geq$ estamos reduciendo el conjunto de oportunidades, luego la nueva solución óptima tiene que ser peor o igual que la inicial.

- El coste reducido de N_2 es 0, lo que significa que si forzamos a que se contrate al menos una hora en el turno de noche para la línea 2 el coste de contratación no se verá afectado.

También se da una relación de holgura complementaria para los costes reducidos similar a la correspondiente a los precios duales:

Condición de holgura complementaria: Si una variable es distinta de 0, entonces su coste reducido es 0.

Por ejemplo, si ya estamos contratando 100 horas en el turno de mañana para la línea 1, es obvio que exigir $M_1 \geq 1$ no va alterar la solución óptima, pues ésta ya cumple tal exigencia. Los costes reducidos sólo tienen interés para variables nulas, pues entonces nos informan del coste que tendría forzar a que no fueran nulas.

Como en el caso de los precios duales, podemos usar los costes reducidos para predecir el efecto de incrementos de magnitud distinta de una unidad:

Variación de la función objetivo $\approx$ coste reducido $\times$ valor exigido a la variable.

Por ejemplo: ¿Cómo afectaría al coste contratar 5 horas en el turno de noche para la línea 1?

Solución: $100 \cdot 3 = 300$, luego el coste empeoraría (aumentaría) en 300 €.

5.4 Intervalos de sensibilidad

Para problemas de programación lineal, LINGO nos proporciona información adicional a la que podemos acceder, teniendo activa la ventana en la que está tecleado el problema (no la de la solución) desde el menú LINGO → Range. Así nos aparecen dos nuevas tablas:

```
                    Objective Coefficient Ranges:

                    Current        Allowable        Allowable
     Variable     Coefficient       Increase         Decrease
           M1        40.00000       27.00000         INFINITY
           M2        50.00000       INFINITY         27.00000
           T1        55.00000       INFINITY         27.00000
           T2        50.00000       22.00000         INFINITY
           N1        100.0000       INFINITY         100.0000
           N2        90.00000       INFINITY         27.50000

                       Righthand Side Ranges:

                    Current        Allowable        Allowable
          Row           RHS         Increase         Decrease
PRODUCCION_L1        3000.000       30.00000         INFINITY
PRODUCCION_L2        5000.000       820.0000         3680.000
      HORAS_M        100.0000       15.00000         68.33333
      HORAS_T        200.0000       306.6667         68.33333
      HORAS_N        300.0000       INFINITY         54.66667
DISTRIBUCION_L1      190.0000       68.33333         1.764706
```

Veamos ahora la interpretación de estas tablas. La primera indica los llamados *intervalos de sensibilidad de los coeficientes de la función objetivo* y la segunda los *intervalos de sensibilidad de los términos independientes de las restricciones.*

Intervalos de sensibilidad de los coeficientes de la función objetivo En la primera tabla, la primera columna contiene los coeficientes de cada variable en la función objetivo, por ejemplo, el 40 en la fila de M_1 indica que la función objetivo contiene el término $40M_1$, e igualmente con las demás variables. En nuestro ejemplo dichos coeficientes son los precios de cada hora de trabajo en los distintos turnos y líneas de producción.

Las otras dos columnas indican lo máximo que puede aumentar cada coeficiente y lo máximo que puede disminuir para que la solución óptima del problema siga siendo la misma (aunque el valor óptimo de la función objetivo puede cambiar).

En nuestro ejemplo:

- El precio por hora en el turno de mañana para la línea 1 es de 40 €, y mientras dicho precio no aumente más de 27 €, es decir, mientras no exceda de los 67 €, la solución óptima seguirá siendo la misma.

- El precio por hora en el turno de mañana para la línea 2 es de 50 €, y mientras dicho precio no disminuya más de 27 €, es decir, mientras no sea inferior a los 23 €, la solución óptima seguirá siendo la misma.

- El precio por hora en el turno de tarde para la línea 1 es de 55 €, y mientras dicho precio no disminuya más de 27 €, es decir, mientras no sea inferior a los 28 €, la solución óptima seguirá siendo la misma.

- El precio por hora en el turno de tarde para la línea 2 es de 50 €, y mientras dicho precio no aumente más de 22 €, es decir, mientras no exceda de los 72 €, la solución óptima seguirá siendo la misma.

- El precio por hora en el turno de noche para la línea 1 es de 100 €, y mientras dicho precio no disminuya más de 100 €, es decir, tome el valor que tome, la solución óptima seguirá siendo la misma.

- El precio por hora en el turno de noche para la línea 2 es de 90 €, y mientras dicho precio no disminuya más de 27.50 €, es decir, mientras no sea inferior a los 62.50 €, la solución óptima seguirá siendo la misma.

Intervalos de sensibilidad de los términos independientes En la segunda tabla, la primera columna contiene los términos independientes de las restricciones. Por ejemplo, el primer 3 000 es la producción exigida en la línea 1, que aparece en el miembro derecho de la primera restricción del problema.

Las otras dos columnas indican lo máximo que puede aumentar y lo máximo que puede disminuir cada coeficiente para que las variables básicas y no básicas de la solución óptima sigan siendo las mismas.

El concepto de variables básicas y no básicas de un problema de programación lineal lo estudiaremos más adelante en teoría, pero de momento podemos dar la siguiente interpretación aproximada del párrafo anterior:

Las otras dos columnas indican lo máximo que puede aumentar y lo máximo que puede disminuir cada coeficiente para que las variables y las holguras que son 0 en la solución óptima sigan siendo 0.

Como en estos términos la conclusión resulta muy abstracta, conviene particularizarla con la interpretación de cada variable y cada holgura en cada problema concreto. En nuestro caso tenemos seis ceros entre variables y holguras:

`M2, N1, PRODUCCION_L2, HORAS_M, HORAS_T, DISTRIBUCION_L1`

Por ejemplo, que la holgura de la producción en la línea 2 sea cero significa que en la línea 2 se produce estrictamente la cantidad exigida y ninguna unidad más. En total, la interpretación del primer intervalo de sensibilidad (el de la producción de la línea 1) sería la siguiente:

• La producción adicional exigida para la línea 1 es de 3 000 unidades de producto. Mientras esta cantidad exigida no aumente más de 30 unidades (hasta 3 030) la solución óptima cumplirá las seis características siguientes:

1) ($M_2 = 0$) no se contratarán horas en el turno de mañana para la línea 2.

2) ($N_1 = 0$) no se contratarán horas en el turno de noche para la línea 1.

3) (`PRODUCCION_L2` $= 0$) en la línea 2 se producirá únicamente la cantidad de producto exigida, y ninguna unidad más.

4) (`HORAS_M` $= 0$) En el turno de mañana se emplearán todas las horas disponibles.

5) (`HORAS_T` $= 0$) En el turno de tarde se emplearán todas las horas disponibles.

6) (`DISTRIBUCION_L1` $= 0$) Las horas contratadas antes del turno de noche en la línea 1 serán las exigidas y ninguna más.

Esto vale igualmente para los demás intervalos:

- La producción adicional exigida para la línea 2 es de 5 000 unidades de producto. Mientras esta cantidad exigida no aumente más de 820 unidades (hasta 5 820) ni disminuya más de 3 680 unidades (hasta 1 320) la solución óptima cumplirá las seis condiciones anteriores.

- Las horas disponibles en el turno de mañana son 100. Mientras esta cantidad no aumente más de 15 unidades (hasta 115) ni disminuya más de 68.33 unidades (hasta 31.66) la solución óptima cumplirá las seis condiciones anteriores.

Al interpretar el intervalo de la producción de la línea 1 podemos decir más concretamente en el punto 3) que se seguirán produciendo las 5 000 unidades exigidas en la línea 2 y ninguna más, pero esto sería incorrecto al interpretar el intervalo de la producción de la línea 2, pues en ese caso estamos analizando precisamente lo que ocurre al modificar ese dato (el 5 000).

Por ejemplo, si sólo exigimos producir 4 000 unidades en la línea 2, este nivel de exigencia está dentro del intervalo de sensibilidad (no es inferior a 1 320), y la conclusión no es que la solución óptima en estas condiciones seguirá produciendo 5 000 unidades en la línea 2, sino que **seguirá produciendo el mínimo exigido,** que ahora ya no es de 5 000, sino de 4 000.

Lo mismo ocurre en los demás casos: al interpretar el intervalo de las horas del turno de mañana no podemos decir que se seguirán contratando las 100 horas disponibles, sino que se seguirán contratando **todas las horas disponibles,** que ya no tienen por qué ser 100.

- Las horas disponibles en el turno de tarde son 200. Mientras esta cantidad no aumente más de 306.66 unidades (hasta 506.66) ni disminuya más de 68.33 unidades (hasta 131.66) la solución óptima cumplirá las seis condiciones anteriores.
- Las horas disponibles en el turno de noche son 300. Mientras esta cantidad no disminuya más de 54.66 unidades (hasta 245.33) la solución óptima cumplirá las seis condiciones anteriores.
- Las horas que hay que contratar como mínimo antes del turno de noche en la línea 1 son 190. Mientras esta cantidad de horas exigidas no aumente más de 68.33 unidades (hasta 258.33) ni disminuya más de 1.76 unidades (hasta 188.24) la solución óptima cumplirá las seis condiciones anteriores.

Aunque LINGO expresa los intervalos de sensibilidad en términos de aumentos y disminuciones admisibles, es decir, en términos relativos respecto del valor actual de cada dato, es frecuente expresarlos en términos absolutos, indicando el menor y el mayor valor que puede tomar el dato en cuestión para permanecer dentro del intervalo. En estos términos, los intervalos de sensibilidad del ejemplo que estamos considerando serían:

- **Coeficientes de la función objetivo:**

M1 Desde 40, puede aumentar 27, luego el intervalo es $]-\infty, 67]$.

M2 Desde 50, puede disminuir 27, luego el intervalo es $[23, +\infty[$.

T1 Desde 55, puede disminuir 27, luego el intervalo es $[28, +\infty[$.

T2 Desde 50, puede aumentar 22, luego el intervalo es $]-\infty, 72]$.

N1 Desde 100, puede disminuir 100, luego el intervalo es $[0, +\infty[$.

N2 Desde 90, puede disminuir 27.50, luego el intervalo es $[62.50, +\infty[$.

(En este ejemplo, casualmente, todos los intervalos tienen un extremo infinito, pero en otros no tiene por qué ser así.)

- **Términos independientes de las restricciones:**

PRODUCCION_L1 Desde 3 000, puede aumentar 30, luego el intervalo es $]-\infty, 3\,030]$.

PRODUCCION_L2 Desde 5 000, puede aumentar 820 o disminuir 3 680, luego el intervalo es $[1\,320, 5\,820]$.

HORAS_M Desde 100, puede aumentar 15 o disminuir 68.33, luego el intervalo es $[31.66, 115]$.

HORAS_T Desde 200, puede aumentar 306.66 o disminuir 68.33, luego el intervalo es $[131.66, 506.66]$.

HORAS_N Desde 300, puede disminuir 54.66, luego el intervalo es $[245.33, +\infty[$.

DISTRIBUCION_L1 Desde 190, puede aumentar 68.33 o disminuir 1.76, luego el intervalo es $[188.24, 258.33]$.

5.5 Consideraciones adicionales sobre la salida de LINGO

• Tanto los precios duales, como los costes reducidos, como los intervalos de sensibilidad, proporcionan información de qué sucede si se modifica uno de los datos del problema. Por ejemplo, si nos preguntan:

¿Cómo afectaría al coste de contratación que la producción adicional requerida en la sección 2 fuera únicamente de 4 000 unidades de producto?

se trata de comparar los problemas

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 40M_1+50M_2+55T_1+50T_2 \\ & +100N_1+90N_2 \\ \text{s.a} & 15M_1+17T_1+20N_1\geq 3000 \\ & 10M_2+12T_2+15N_2\geq \mathbf{5000} \\ & M_1+M_2\leq 100 \\ & T_1+T_2\leq 200 \\ & N_1+N_2\leq 300 \\ & M_1+T_1\geq 190 \\ & M_1,M_2,T_1,T_2,N_1,N_2\geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Min.} & 40M_1+50M_2+55T_1+50T_2 \\ & +100N_1+90N_2 \\ \text{s.a} & 15M_1+17T_1+20N_1\geq 3000 \\ & 10M_2+12T_2+15N_2\geq \mathbf{4000} \\ & M_1+M_2\leq 100 \\ & T_1+T_2\leq 200 \\ & N_1+N_2\leq 300 \\ & M_1+T_1\geq 190 \\ & M_1,M_2,T_1,T_2,N_1,N_2\geq 0 \end{array}$$

> Sería un error responder que las unidades producidas en la línea 2 no pueden ser 4 000 porque entonces la solución sería infactible. Ciertamente, una solución del primer problema en la que se produjeran 4 000 unidades en le línea 2 sería infactible, pero eso no tiene nada que ver con la pregunta. La pregunta no es qué sucede si sólo producimos 4 000 unidades en la línea 2, sino si cambiamos la exigencia de producir 5 000 unidades por la de producir sólo 4 000 unidades, es decir, no se trata de **cambiar la solución** del (primer) problema (por otra infactible) sino de **cambiar el problema** por otro en el cual una solución que sólo produzca 4 000 unidades en la línea 2 pasa a ser factible.

Son dos problemas distintos con soluciones distintas, y la información que proporciona LINGO a través de los precios duales, costes reducidos e intervalos de sensibilidad permite obtener conclusiones sobre la solución del segundo sin resolverlo.
En general, ante una pregunta de este tipo (qué ocurre si cambia algún dato del problema), lo primero que debes hacer es identificar dónde se encuentra en el modelo el dato que se está modificando. En este caso es el término independiente de la segunda restricción.

En segundo lugar debes tener claro sobre qué informa cada uno de los datos que proporciona LINGO, para determinar cuál es el adecuado para responder a la pregunta. El esquema siguiente resume la situación.
En nuestro caso la pregunta consiste en una variación de un término independiente de una restricción, y debemos plantearnos si nos preguntan cómo afecta dicho cambio a la función objetivo o a las características de la solución. Nos preguntan por la variación del coste, que es la función objetivo, luego la

$$\text{Variación}\begin{cases} \text{de un término independiente} \begin{cases} \text{¿cómo afecta a la f.o.?} \rightarrow & \text{precio dual} \\ \text{¿cómo afecta a la solución?} \rightarrow & \text{intervalo} \end{cases} \\ \text{de un coeficiente de la función objetivo} \rightarrow \text{intervalo} \\ x\geq 0 \text{ pasa a } x\geq 1 \rightarrow \quad \text{coste reducido} \end{cases}$$

respuesta nos la dará el precio dual de la restricción correspondiente. Concretamente:

$$-6 \times (-1000) = 6000,$$

luego el coste de contratación mejorará (es decir, disminuirá) en 6 000 €.

• Hay que tener presente que los precios duales no pueden usarse para predecir el efecto de una variación excesivamente grande del término independiente de la restricción, por lo que debemos plantearnos si es fiable el cálculo anterior, en el que hemos considerado una variación de 1 000 unidades de producto. La respuesta es afirmativa, y ello se debe al hecho siguiente:

> En un problema de programación lineal, el precio dual puede usarse para predecir la variación de la función objetivo para variaciones del término independiente que estén dentro del intervalo de sensibilidad de la restricción correspondiente.

En nuestro ejemplo, el intervalo de sensibilidad de la segunda restricción es $[1\,320, 5\,820]$. Como 4 000 está dentro del intervalo, el cálculo que hemos hecho es correcto.

> El cálculo anterior nos proporciona la variación exacta de la función objetivo porque el problema es de programación lineal. Si hay restricciones no lineales un cálculo como el anterior sólo proporciona una aproximación a la variación de la función objetivo, una aproximación que será menos fiable cuanto mayor sea la variación del término independiente, y no tenemos ninguna referencia de la magnitud que puede tener dicha variación para que el resultado sea fiable.

En cambio, ante la pregunta: Si sólo se requirieran 4 000 unidades de producto en la línea 2, se necesitaría contratar menos horas en el turno de mañana?

Ahora se plantea igualmente una variación del término independiente de la segunda restricción, pero no se pregunta por el efecto sobre la función objetivo, sino sobre otra característica de la solución óptima, concretamente sobre si empleará o no las 100 horas disponibles en el turno de mañana. En este caso la respuesta no la encontraremos en el precio dual, sino en el intervalo de sensibilidad de la restricción. Concretamente, vemos que el cambio a 4 000 unidades queda dentro del intervalo de sensibilidad y, por consiguiente, sabemos que la holgura de la restricción `HORAS_M` (que ahora es 0) seguirá siendo 0, lo que se traduce en que se seguirán empleando las 100 horas disponibles.

• Observemos que una variación del término independiente de una restricción puede volver un problema infactible. Sin embargo, si ésta queda dentro del intervalo de sensibilidad correspondiente, tenemos la garantía de que esto no sucederá:

> En un problema de programación lineal, si modificamos un término independiente de una de las restricciones sin salirnos del intervalo de sensibilidad, podemos asegurar que el problema seguirá siendo factible.

• Hay que tener presente que si un cambio de un coeficiente o de un término independiente se sale del intervalo de sensibilidad correspondiente entonces **no podemos afirmar nada** de lo que sucederá con la nueva solución óptima (si es que existe), y lo único que cabría hacer para conocer el resultado es resolver de nuevo el problema con el coeficiente o término independiente modificado.

• Por último, hay que recalcar un error muy frecuente en las interpretaciones de los intervalos de sensibilidad:

> Es incorrecto afirmar que si un cambio en un término independiente de una restricción queda dentro de su intervalo de sensibilidad entonces la solución óptima sigue siendo la misma. Sólo podemos afirmar que las variables y holguras que eran 0 seguirán siendo 0.

Por ejemplo, si resolvemos el problema que estamos considerando suponiendo que sólo hay 50 horas disponibles en el turno de mañana (se trata de un cambio en el término independiente de la tercera restricción que está dentro del intervalo $[31.66, 115]$) la solución óptima no es la misma. De hecho, no podría serlo, porque la anterior empleaba las 100 horas disponibles y ahora sería infactible.

	Solución nueva		Solución inicial
Variable	Value	Reduced Cost	Value
M1	50.00000	0.000000	100.0000
M2	0.000000	27.00000	0.000000
T1	140.0000	0.000000	90.00000
T2	60.00000	0.000000	110.0000
N1	0.000000	100.0000	0.000000
N2	285.3333	0.000000	245.3333
Row	Slack or Surplus	Dual Price	Slack or Surplus
COSTE	38380.00	-1.000000	36530.00
PRODUCCION_L1	130.0000	0.000000	30.00000
PRODUCCION_L2	0.000000	-6.000000	0.000000
HORAS_M	0.000000	37.00000	0.000000
HORAS_T	0.000000	22.00000	0.000000
HORAS_N	14.66667	0.000000	54.66667
DISTRIBUCION_L1	0.000000	-77.00000	0.000000

Vemos que las variables y holguras que eran 0 siguen siendo 0, pero las que no lo eran han cambiado de valor.

Ejemplo 1b Responde las preguntas siguientes sobre el problema del ejemplo 1 basándote exclusivamente en las tablas de las páginas 118 y 122, sin usar LINGO para resolver ningún otro problema:

a) ¿Cuántas horas conviene contratar para la primera línea de producción en cada turno?

b) ¿En total, cuánto tendrá que gastar la empresa en horas extra?

c) Interpreta los dos valores que aparecen en la línea `PRODUCCION_L1` de la página 118.

d) Si la empresa pudiera aumentar la capacidad de alguno de los turnos, ¿en cuál sería preferible?

e) Si, debido a un cambio en la plantilla fija, la capacidad del turno de mañana para horas extra se redujera a 90 horas, ¿perjudicaría ello a la empresa o le beneficiaría? ¿En qué medida?

f) Interpreta el coste reducido de la variable `M2`.

g) Si la empresa quisiera contratar un mínimo de dos horas extra en el turno de mañana para la línea 2, ¿cómo afectaría ello a los costes?

h) Explica si la afirmación siguiente es verdadera o falsa *"Si la empresa quisiera aumentar las horas contratadas para la línea* 2 *en el turno de noche hasta un total de* 247*, ello no afectaría al coste, ya que el coste reducido de la variable* `N2` *es cero."*

i) Supongamos que el precio de las horas extra del turno de mañana de la línea 1 tuviera que ser más elevado de lo previsto. ¿A partir de qué valor debería la empresa replantearse la distribución de horas para tratar de emplear menos en dicho turno?

j) Escribe el intervalo de sensibilidad de la capacidad del turno de mañana. Interprétalo.

k) Si se duplicara la capacidad del turno de tarde, ¿aumentaría con ello la producción de la línea 2? ¿A qué variación de coste daría lugar?

l) Razona cuánto produce diariamente la empresa en la línea 2 con las horas extra contratadas. Si la producción mínima de la línea 2 se redujera a 2 000 unidades, ¿convendría reducir la producción de esta línea hasta esa cifra, convendría mantener la producción actual o tal vez pasar a una producción intermedia?

Solución: a) Conviene contratar 100 horas en el turno de mañana, 90 en el de tarde y ninguna en el de noche.

b) Tendrá que gastar 38 380 €.

c) En la línea 1 conviene producir 30 unidades de producto más que las 3 000 requeridas, y el precio dual 0 indica que si se exigiera producir una más (3 001 en vez de 3 000) el coste de contratación no cambiaría (porque la solución sería la misma).

d) Las capacidades de los turnos son los términos independientes de las restricciones tercera, cuarta y quinta. Lo que determina las preferencias de la empresa es la función objetivo, que en este caso es el coste, luego nos preguntan qué aumento de capacidad reduciría más el coste. Consideramos los precios duales, que son 37, 22 y 0 (para los turnos de mañana, tarde y noche, respectivamente). Esto significa que por cada hora adicional de que podamos disponer el coste mejorará en 37 €, 22 € y 0 €. Por lo tanto, convendría más aumentar la capacidad del turno de mañana, y si no pudiera ser, mejor en el de tarde, mientras que en el de noche es inútil aumentar la capacidad, pues ya tenemos 54 horas que no aprovechamos.

En c), las interpretaciones siguientes serían incorrectas:

De las 3 000 *unidades que hay que producir sólo se producen* 2 970.

Si produjéramos una unidad más, el coste no variaría

No es "si produjéramos" sino "si nos exigieran producir".

En d) nos preguntan por el efecto sobre la función objetivo de variaciones en tres posibles términos independientes, luego, según el esquema de la página 126, debemos mirar los precios duales correspondientes.
La situación de e) es similar.

e) La capacidad del turno de mañana es el término independiente de la tercera restricción, como su precio dual es 37, el efecto sobre el coste de que dicha capacidad se reduzca a 90 horas (es decir, se incrementa en -10) es $37 \cdot (-10) = -370$, es decir, el coste empeorará (aumentará) 370 €. El cálculo es correcto porque el intervalo de sensibilidad permite reducir la capacidad hasta 68.33 unidades, luego 10 queda dentro de dicho margen.

f) No conviene contratar ninguna hora en el turno de mañana para la línea 2, y por cada hora que quisiéramos contratar en ese turno, el coste de contratación empeoraría (es decir, aumentaría) en 27€.

La pregunta g) es qué sucedería si cambiamos la condición de signo $M_2 \geq 0$ por $M_2 \geq 2$, luego, según el esquema de la página 126, miramos el coste reducido.

g) El coste reducido de la variable M es 27. El coste de la empresa empeoraría (aumentaría) en $27 \cdot 2 = 54$€.

h) La afirmación es falsa. El coste reducido sólo indica que si exigimos contratar al menos una hora en el turno de noche para la línea 2 el coste no variará, porque ya estamos contratando 245.33 horas. Pero eso no tiene ninguna relación con lo que sucederá si lo que aumentamos no son las horas exigidas (que ahora no exigimos ninguna y es de lo que habla el coste reducido) sino las horas contratadas. Si aumentamos las horas contratadas estamos pasando a una solución distinta de la óptima, luego[6] será peor, es decir, el coste no se quedará igual, sino que empeorará.

El precio de las horas extra del turno de mañana de la línea 1 es el coeficiente de M_1 en la función objetivo, luego, según el esquema de la página 126, miramos su intervalo de sensibilidad.

i) El intervalo de sensibilidad del coeficiente de M_1 en la función objetivo dice que mientras el precio no aumente más de 27€ (es decir, desde el valor actual de 40 hasta 67€) la solución óptima (es decir, la distribución de horas más conveniente) seguirá siendo la misma y la empresa no necesitará replanteársela. Sólo si el precio excede los 67€ la empresa debería replantearse las horas que contrata en cada turno.

Sería un error muy grave decir que mientras la capacidad esté en el intervalo la solución óptima será la misma. Por ejemplo, actualmente se emplean toda la capacidad. Si ésta disminuyera, la solución óptima ya no podría ser la misma.

j) El intervalo de sensibilidad es $[31.55, 115]$. Mientras la capacidad del turno de mañana no sea inferior a 31.55

1) ($M_2 = 0$) no se contratarán horas en el turno de mañana para la línea 2.
2) ($N_1 = 0$) no se contratarán horas en el turno de noche para la línea 1.
3) (`PRODUCCION_L2` $= 0$) en la línea 2 se producirá únicamente la cantidad de producto exigida, y ninguna unidad más.
4) (`HORAS_M` $= 0$) En el turno de mañana se emplearán todas las horas disponibles.
5) (`HORAS_T` $= 0$) En el turno de tarde se emplearán todas las horas disponibles.
6) (`DISTRIBUCION_L1` $= 0$) Las horas contratadas antes del turno de noche en la línea 1 serán las exigidas y ninguna más.

La capacidad del turno de tarde es el término independiente de la cuarta restricción, y la primera pregunta no hace referencia a si la función objetivo mejora o empeora, sino sobre otra característica de la solución.

k) Duplicar la capacidad del turno de tarde significa aumentar de 200 a 400, que queda dentro del intervalo de sensibilidad. Según el esquema de la página 126 consideramos el intervalo de sensibilidad. Por lo tanto, la variable de holgura de la segunda restricción seguirá siendo 0, lo que se traduce en que la producción de la línea 2 seguirá siendo de 5 000 unidades. Por lo tanto, no aumentará.

[6] Aquí usamos que la solución óptima es única, cosa que se puede razonar a partir de la salida de LINGO, pero de momento no sabemos cómo.

Para determinar el efecto sobre el coste (sabiendo ya que estamos dentro del intervalo de sensibilidad) miramos el precio dual: $22 \cdot 200 = 4\,400$, luego el coste mejorará (disminuirá) en 4 400 €.

La segunda pregunta de k) es sobre el efecto del cambio en la función objetivo, luego miramos el precio dual.

l) La cantidad producida en la línea 2 es el miembro izquierdo de la segunda restricción, luego miramos la variable de holgura. Como es 0, la cantidad producida coincide con la exigida, luego es de 5 000 unidades.
Si la cantidad exigida se reduce a 2 000, el incremento queda dentro del intervalo de sensibilidad, que es $[1\,320, 5\,820]$. Por lo tanto, la variable de holgura de la segunda restricción continuará siendo 0. Esto significa que la cantidad producida seguirá siendo la mínima exigida, luego pasará a ser de 2 000 unidades de producto. Así pues, la respuesta es que convendría reducir la producción hasta el nuevo mínimo exigido.

La segunda pregunta de l) es sobre un cambio en el término independiente de la segunda restricción, y no sobre su efecto en el coste, sino sobre otra característica de la solución, luego, según el esquema de la página 126, miramos el intervalo de sensibilidad.

Observa que el hecho de que la holgura siga siendo 0 no se interpreta como que la producción sigue siendo la misma, sino que sigue siendo la mínima exigida. Como estamos cambiando dicho mínimo, la producción cambia.

5.6 Variables enteras y binarias

• Para exigir en LINGO que una variable `x` sea entera sólo tenemos que escribir `@gin(x);`, mientras que si queremos que sea binaria la instrucción es `@bin(x);`

Por ejemplo, en el problema que estamos considerando nos ha salido que conviene contratar 245.33 horas en el turno de noche. Si no es posible hacer contratos por fracciones de hora, necesitaremos exigir que las variables sean enteras, para lo cual escribimos:

```
[Coste] Min= 40*M1+50*M2+55*T1+50*T2+100*N1+90*N2;
[Produccion_L1] 15*M1+17*T1+20*N1>3000;
[Produccion_L2] 10*M2+12*T2+15*N2>5000;
[Horas_M] M1+M2<100;
[Horas_T] T1+T2<200;
[Horas_N] N1+N2<300;
[Distribucion_L1] M1+T1>190;
@gin(M1); @gin(M2); @gin(T1); @gin(T2); @gin(N1); @gin(N2);
```

El resultado es:

Variable	Value	Reduced Cost
M1	100.0000	40.00000
M2	0.000000	50.00000
T1	90.00000	55.00000
T2	108.0000	50.00000
N1	0.000000	100.0000
N2	247.0000	90.00000

Observemos que la solución entera no resulta de redondear la solución que habíamos obtenido sin exigir variables enteras. Por ejemplo, en la solución anterior las horas contratadas en el turno de noche para la línea 2 eran 245.33, y ahora son 247, mientras que las de tarde de la línea 2, que ya eran un número entero (110 horas) ahora son 108.

Row	Slack or Surplus	Dual Price
COSTE	36580.00	-1.000000
PRODUCCION_L1	30.00000	0.000000
PRODUCCION_L2	1.000000	0.000000
HORAS_M	0.000000	0.000000
HORAS_T	2.000000	0.000000
HORAS_N	53.00000	0.000000
DISTRIBUCION_L1	0.000000	0.000000

> Las interpretaciones que hemos dado para los costes reducidos, precios duales e intervalos de sensibilidad no son aplicables a los problemas de programación entera.

Por lo tanto, la mejor solución entera consiste en contratar 100 horas en el turno de mañana y 90 en el de tarde para la línea 1, y 90 horas en el turno de tarde y 247 en el turno de noche para la línea 2.

5.7 Corrección de errores

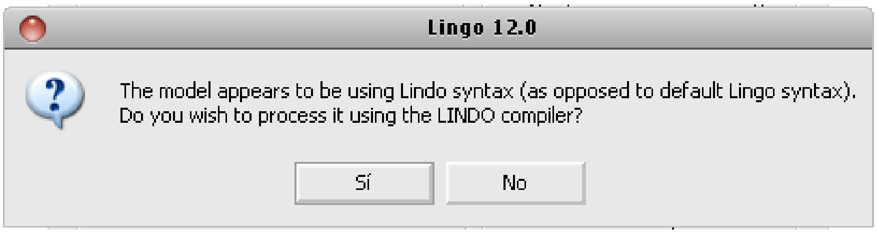
La figura siguiente muestra el mensaje que presenta LINGO cuando cometemos un error. En este caso el error ha sido dejarnos un $*$ en la segunda restricción:

Observemos que LINGO señala mediante un $\wedge$ el punto exacto donde él cree que está el error. En este caso ha acertado, pues señala la variable T2, que debería ir precedida por el $*$ que falta. No obstante, en otras ocasiones el punto que señala puede no ser el punto exacto del error. Eso sucede especialmente cuando nos dejamos un punto y coma al final de una línea. En tal caso LINGO apunta a la línea siguiente.

Un mensaje de error con el que debes tener especial cuidado se da en ciertas circunstancias, por ejemplo, si escribes como primera línea del problema

```
Min 40*M1+50*M2+55*T1+50*T2+100*N1+90*N2;
```

(sin la etiqueta [Coste] y sin el =). En tal caso LINGO muestra el cuadro de diálogo siguiente:



Si te encuentras este cuadro asegúrate de responder No, pues en caso contrario LINGO tratará de interpretar tu modelo con una sintaxis completamente distinta a la que hemos estudiado, y no funcionará nada.

5.8 Sintaxis avanzada de LINGO

A la hora de introducir un problema en LINGO es posible usar una sintaxis avanzada que resulta mucho más práctica y versátil cuando el problema tiene un número elevado de variables o restricciones. En esta sección explicaremos cómo aprovechar algunas de las características del lenguaje de LINGO, para lo cual empezamos planteando un nuevo ejemplo para modelizar:

Ejemplo 3a Un inversor dispone de un capital de 20 000 € que se plantea repartir entre 6 productos financieros. Para cada una de ellas ha establecido (véase la tabla) dos rentabilidades posibles: una optimista y otra pesimista. Determina qué capital le conviene invertir en cada producto para maximizar el rendimiento en el caso optimista garantizando que en el caso pesimista no pueda perderse más del 1% del capital invertido.

Producto	1	2	3	4	5	6
Rentabilidad optimista	0.1	0.05	0.07	0.15	0.09	0.12
Rentabilidad pesimista	−0.1	0	−0.01	−0.2	0.01	−0.2

Solución: Las variables del problema son el capital que conviene invertir en cada producto financiero. Pongamos que x_1 es el capital invertido en el primer producto, etc. La función objetivo es maximizar el rendimiento en el escenario optimista y hay dos restricciones, una que representa que el rendimiento en el escenario pesimista tiene que ser como mínimo -200 (el 1% del capital invertido) y otra que exige que el capital total invertido no exceda del capital disponible:

$$
\begin{array}{rll}
\text{Max.} & 0.1x_1 + 0.05x_2 + 0.07x_3 + 0.15x_4 + 0.09x_5 + 0.12x_6 & \text{Rendimiento optimista} \\
\text{s.a} & -0.1x_1 - 0.01x_3 - 0.25x_4 + 0.01x_5 - 0.2x_6 \geq -200 & \text{Rend. pesimista} \geq 1\% \text{ capital} \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 20000 & \text{cap. invert.} \leq \text{cap. disp.} \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 \geq 0 &
\end{array}
$$

Tecleamos en LINGO:

```
[Rend_optim]Max=0.1*x1+0.05*x2+0.07*x3+0.15*x4+0.09*x5+0.12*x6;
[Rend_pesim]-0.1*x1-0.01*x3-0.25*x4+0.01*x5-0.2*x6>-200;
[Capital]x1+x2+x3+x4+x5+x6<20000;
```

Y la solución óptima resulta ser invertir 1 538.46 € en el producto 4 y 18 461.54 € en el 5, y el rendimiento en el caso optimista será así de 1 892.31 €.

Veamos ahora cómo introducir este mismo problema en LINGO con una sintaxis alternativa cuya ventaja principal es que podríamos usarla igualmente aunque el número de variables fuera mucho mayor.

Para ello expresaremos la función objetivo y las restricciones del problema en términos de *conjuntos.* Concretamente, debemos analizar el problema para darnos cuenta de que en él interviene un conjunto de seis productos financieros, y que cada producto tiene asociados tres números: su rentabilidad optimista, su rentabilidad pesimista y el capital que invertimos en él (los dos primeros son datos y el tercero lo que queremos calcular).

El documento LINGO que vamos a escribir se dividirá en tres secciones: la primera definirá el conjunto de los productos financieros, la segunda introducirá los datos del problema y la tercera contendrá el modelo. La primera sección es la siguiente:

```
SETS:
Producto/1..6/:RO,RP,x;
ENDSETS
```

La sección para definir conjuntos debe empezar por `SETS:` y terminar por `ENDSETS` (sin punto y coma, porque ya queda claro que se trata de un final de sección). Entre ambas palabras podemos definir todos los conjuntos que queramos, en este caso sólo uno, el conjunto `Producto`. A continuación se ponen sus elementos entre barras. Podríamos haber puesto `/1,2,3,4,5,6/`, pero LINGO admite que esto se abrevie a `/1..6/`.

A partir de aquí, cuando escribamos `Producto(i)`, LINGO entenderá que hablamos del i-ésimo producto financiero, donde i puede tomar los valores de 1 a 6.

Tras la definición de un conjunto podemos escribir dos puntos (:) y a continuación los nombres de todos los datos asociados a ese conjunto. En nuestro caso estamos diciendo que cada producto tiene asociada una rentabilidad optimista `RO`, una rentabilidad pesimista `RP` y un capital invertido `x` (notemos que todo esto se pone separado por comas y al final un punto y coma para acabar la instrucción).

Una vez definido el conjunto que necesitábamos, creamos una sección de datos para introducir los datos del problema:

```
DATA:
RO= 0.1 0.05  0.07  0.15 0.09 0.12;
RP=-0.1 0    -0.01 -0.25 0.01 -0.2;
Cap=20000;
ENDDATA
```

La sección de datos debe empezar por `DATA:` y terminar por `ENDDATA`. Para introducir las rentabilidades optimistas escribimos `RO=` y a continuación las rentabilidades optimistas de cada uno de los productos (se pueden separar por comas o por espacios en blanco), con un punto y coma al final. Lo mismo vale para las rentabilidades pesimistas. Introducimos también aquí el capital disponible. Se podría poner en su sitio en el modelo, más abajo, pero si lo ponemos aquí está más a la vista por si queremos modificarlo sin tener que tocar el modelo.

Finalmente escribimos el modelo. Podríamos definir una sección para ello, pero si no ponemos nada LINGO entiende que lo que queda es ya el modelo que queremos resolver. Recordemos que la función objetivo es

$$\text{Max. } 0.1x_1 + 0.05x_2 + 0.07x_3 + 0.15x_4 + 0.09x_5 + 0.12x_6$$

```
Max= RO(1)*x(1)+RO(2)*x(2)+RO(3)*x(3)+RO(4)*x(4)+RO(5)*x(5)+RO(6)*x(6)
```

Abajo la hemos escrito con el lenguaje que hemos definido en LINGO. Ahora, LINGO nos permite no escribir uno a uno los sumandos, sino que podemos decirle que sume `RO(i)*x(i)` para todos los productos `i`. La forma de hacerlo es la siguiente:

```
[Rend_optim] Max=@Sum(Producto(i):RO(i)*x(i));
[Rend_pesim] @Sum(Producto(i):RP(i)*x(i))>-0.01*Cap;
[Capital] @Sum(Producto(i):x(i))<Cap;
```

Para decir a LINGO que sume escribimos `@Sum()`, dentro indicamos el conjunto sobre el que hay que sumar, que en este caso es para cada `Producto(i)`, es decir, de modo que la `i` tiene que recorrer todo el conjunto de productos. Luego ponemos dos puntos y luego la expresión que hay que sumar para cada producto i, que en este caso es el producto de la rentabilidad optimista del producto por el capital invertido en él, que en este caso es `RO(i)*x(i)`. Las sumas de las dos restricciones se interpretan igual.

> Observa que la forma de escribir en LINGO una suma se corresponde con la notación usual en matemáticas: $\sum_i \mathrm{RO}_i \cdot x_i$, donde la i recorre los seis productos financieros.
>
> Cuando no hay ambigüedad, (como en este caso) LINGO permite suprimir los índices i y escribir `@Sum(Producto: RO*x)` (suma, para cada producto, de su rentabilidad optimista por el capital invertido en él).

El problema completo es:

```
SETS:
Producto/1..6/:RO,RP,x;
ENDSETS

DATA:
RO=0.1 0.05 0.07 0.15 0.09 0.12;
RP=-0.1 0 -0.01 -0.25 0.01 -0.2;
Cap=20000;
ENDDATA

[Rend_optim]Max=@Sum(Producto(i):RO(i)*x(i));
[Rend_pesim]@Sum(Producto(i):RP(i)*x(i))>-0.01*Cap;
[Capital]@Sum(Producto(i):x(i))<Cap;
```

La solución puede verse en la página siguiente. Vemos que LINGO no sólo muestra el valor óptimo de las variables, sino también el de cada dato que hemos definido. La solución es, por supuesto, la misma que habíamos obtenido antes.

Yendo al menú LINGO → Generate → Display Model (teniendo activa la ventana que contiene el modelo que hemos tecleado, no la solución), LINGO nos muestra explícitamente el modelo:

```
MODEL:
 [REND_OPTIM] MAX= 0.1 * X_1 + 0.05 * X_2 + 0.07 * X_3 + 0.15 * X_4 +
  0.09 * X_5 + 0.12 * X_6;
 [REND_PESIM] - 0.1 * X_1 - 0.01 * X_3 - 0.25 * X_4 + 0.01 * X_5 - 0.2 * X_6 >=
  -200;
 [CAPITAL] X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 <= 20000;
 END
```

```
       Variable           Value        Reduced Cost
            CAP        20000.00            0.000000
         RO( 1)       0.1000000            0.000000
         RO( 2)       0.5000000E-01        0.000000
         RO( 3)       0.7000000E-01        0.000000
         RO( 4)       0.1500000            0.000000
         RO( 5)       0.9000000E-01        0.000000
         RO( 6)       0.1200000            0.000000
         RP( 1)      -0.1000000            0.000000
         RP( 2)        0.000000            0.000000
         RP( 3)      -0.1000000E-01        0.000000
         RP( 4)      -0.2500000            0.000000
         RP( 5)       0.1000000E-01        0.000000
         RP( 6)      -0.2000000            0.000000
         X( 1)        0.000000           0.1538462E-01
         X( 2)        0.000000           0.4230769E-01
         X( 3)        0.000000           0.2461538E-01
         X( 4)        1538.462             0.000000
         X( 5)        18461.54             0.000000
         X( 6)        0.000000           0.1846154E-01

            Row    Slack or Surplus      Dual Price
 REND_OPTIMISTA       1892.308             1.000000
 REND_PESIMISTA       0.000000           -0.2307692
        CAPITAL       0.000000            0.9230769E-01
```

Ejemplo 3b Supongamos que los productos financieros del ejemplo 3a invierten el capital en monedas distintas:

Producto	1	2	3	4	5	6
Moneda	\$	€	\$	€	¥	\$

Para diversificar la inversión y disminuir los riesgos, el inversor quiere invertir al menos el 30% de su capital en dólares y otro 30% en euros. Determina la inversión más adecuada con estas condiciones adicionales.

SOLUCIÓN: Se trata de añadir dos nuevas restricciones al modelo:

$$
\begin{array}{ll}
x_1 + x_3 + x_6 \geq 0.3 \cdot 20\,000 & \text{capital invertido en \$} \geq \text{inversión mínima} \\
x_2 + x_4 \geq 0.3 \cdot 20\,000 & \text{capital invertido en €} \geq \text{inversión mínima}
\end{array}
$$

Podemos introducirlas sin escribir explícitamente cada sumando, para lo cual tenemos que definir dos subconjuntos del conjunto de todos los productos financieros, el de los productos que invierten en dólares y el de los que invierten en euros. Para ello modificamos el problema de este modo:

```
SETS:
Producto/1..6/:RO,RP,x;
ProdDolar(Producto)/1,3,6/;
ProdEuro(Producto)/2,4/;
ENDSETS

DATA:
RO=0.1 0.05 0.07 0.15 0.09 0.12;
RP=-0.1 0 -0.01 -0.25 0.01 -0.2;
Cap=20000;
ENDDATA

[Rend_optim]Max=@Sum(Producto(i):RO(i)*x(i));
[Rend_pesim]@Sum(Producto(i):RP(i)*x(i))>-0.01*Cap;
[Capital]@Sum(Producto(i):x(i))<Cap;
[Dolares]@Sum(ProdDolar(i):x(i))>0.3*Cap;
[Euros]@Sum(ProdEuro(i):x(i))>0.3*Cap;
```

Para definir el subconjunto del conjunto de productos financieros formado por los que invierten en dólares (el primero, el tercero y el sexto) usamos la instrucción:

```
ProdDolar(Producto)/1,3,6/;
```

dentro de la sección SETS. Esto significa que el conjunto `ProdDolar` es el subconjunto del conjunto `Producto` formado por los activos $1, 3, 6$. El conjunto de los productos financieros que invierten en euros se define análogamente, y ahora las nuevas restricciones se expresan mediante sumas sobre estos nuevos conjuntos. Ahora la solución es:

```
Variable          Value        Reduced Cost
   X( 1)       0.000000          0.6000000E-02
   X( 2)       5120.000           0.000000
   X( 3)       6000.000           0.000000
   X( 4)       880.0000           0.000000
   X( 5)       8000.000           0.000000
   X( 6)       0.000000          0.2600000E-01
```

• **Observación:** Para no ver la solución “perdida” entre todos los datos del problema, podemos hacer que LINGO nos muestre únicamente los valores de las variables X yendo (con la ventana del problema en primer plano) al menú LINGO → Solution… y seleccionando X en el cuadro Attribute or Row Name.

Uno de los primeros problemas a los que se aplicaron técnicas de programación matemática fue el problema de la dieta. El problema original consistía en encontrar la forma más económica de alimentar al ejército estadounidense manteniendo unos requisitos nutricionales aceptables.

Ejemplo 4a La tabla siguiente contiene algunas características nutricionales de varios alimentos junto con su coste (por cada 100 gramos). Determina la dieta más económica que garantiza un mínimo de 80 gramos de proteínas, 100 de hidratos, 30 de grasas y 2 000 calorías.

	Verdura	Carne	Aceite	Arroz	Fruta	Leche	Pescado	Huevos
Proteínas (g)	0.7	21	0	6.5	1	4	20	13
Hidratos (g)	1.6	0	0	81	10	5	0	1
Grasas (g)	0.8	10	100	0.9	1	1.5	3	12
Calorías	20	200	900	364	50	47	98	162
Coste	0.2	0.9	0.4	0.1	0.3	0.1	1.1	0.2

Solución: Tenemos que decidir qué cantidad incluimos de cada alimento en la dieta, luego tenemos seis variables: Verdura, Carne, etc. La variable Verdura representa las unidades de verdura (la unidad es aquí 100 gramos) que conviene incluir en la dieta, y lo mismo con los demás alimentos.

A la hora de modelizar el problema debemos pensar que tenemos dos conjuntos: un conjunto de seis alimentos y un conjunto de cuatro componentes nutricionales. Por lo tanto, empezamos definiendo estos conjuntos:

```
SETS:
Alimento/Verdura, Carne, Aceite, Arroz, Fruta, Leche, Pescado, Huevos/:Coste,x;
Componente/Proteinas, Hidratos, Grasas, Calorias/:Vmin;
ENDSETS
```

Observemos que a cada alimento le hemos asignado dos datos: su coste y la cantidad x que debemos incluir en la dieta (de modo que ahora tenemos las variables `x(Verdura)`, `x(Carne)`, etc.). Por otra parte, a cada componente le podemos asignar el valor mínimo requerido `Vmin`.

Ahora nos encontramos un una situación nueva, y es que los demás datos del problema no pueden asignarse ni a un alimento ni a una componente, sino que cada uno está asociado a un par (componente, alimento). Por ejemplo, el dato 0.7 que aparece al principio de la tabla es la cantidad de proteínas que tiene la verdura, luego depende tanto del componente "proteínas" como del alimento "verdura".

Para introducir estos datos en LINGO tenemos que definir primero el conjunto que llamamos `Par` formado por todos los pares (componente, alimento), y esto se hace así:

```
SETS:
Alimento/Verdura, Carne, Aceite, Arroz, Fruta, Leche, Pescado, Huevos/:Coste,x;
Componente/Proteinas, Hidratos, Grasas, Calorias/:Vmin;
Par(Componente, Alimento):Cant;
ENDSETS
```

Con esto hemos definido unas variables `Cant(i,j)` para todos los pares posibles (componente i, alimento j). Ahora ya podemos introducir todos los datos en una sección DATA, como se muestra en la página siguiente. Disponer la definición de `Cant` en forma de tabla es sólo por comodidad a la hora de leer el problema, pero a LINGO le daría igual si pusiéramos todos los datos uno detrás de otro, sin cambiar de línea cada vez que terminamos una fila. Mucho menos se necesita que las columnas estén bien alineadas. Lo que sí es importante es terminar con un punto y coma.

```
DATA:
Coste= 0.2 0.9 0.4 0.1 0.3 0.1 1.1 0.2;
Vmin= 80 100 30 2000;
Cant = 0.7  21   0  6.5   1    4  20   13
       1.6   0   0   81  10    5   0    1
       0.8  10 100  0.9   1  1.5   3   12
        20 200 900  364  50   47  98  162;
ENDDATA
```

Las tablas hay que introducirlas por filas, de modo que si hubiéramos definido el conjunto `Par(Alimento, Componente)` y no `Par(Componente, Alimento)` no podríamos haber escrito la tabla como lo hemos hecho, sino que en cada fila debería ir un alimento y no un componente.

Ahora que ya tenemos introducidos los datos podemos escribir el problema. El objetivo es minimizar el coste, que se calcula como:

$$\text{Coste(Verdura)}*\text{X(Verdura)}+ \text{ Coste(Carne)}*\text{X(Carne)}+ \cdots$$

sumando para todos los alimentos. Por lo tanto, ponemos:

```
[CosteDieta] Min = @Sum(Alimento(i):Coste(i)*x(i));
```

Habríamos obtenido un error si hubiéramos querido llamar `[Coste]` a esta ecuación, porque LINGO no admite que una ecuación se llame `Coste` y que uno de los datos del problema (en la sección `DATA`) se llame igual.

Ahora tenemos que introducir la restricción que expresa que las proteínas de la dieta sean al menos el mínimo requerido, es decir:

`[Requisitos(Proteinas)] Cant(Proteinas,Verdura)*X(Verdura)+` $\cdots$ `> 80`,

donde hay que sumar para todos los alimentos. Esto podemos escribirlo así:

```
[Requisitos(1)]@Sum(Alimento(j):Cant(1,j)*x(j))>Vmin(1);
```

Y a continuación tendríamos que escribir tres restricciones más del mismo tipo, `Requisitos(2)`, `Requisitos(3)`, `Requisitos(4)`, que expresaran lo mismo para los hidratos, las grasas y las calorías.

Es importante recordar que habríamos provocado un error si hubiéramos escrito:

`Cant(Proteinas,j)`, o
`Vmin(Proteinas)`,

porque debemos saber que, aunque hemos definido un conjunto `Componentes` cuyos elementos son `Proteinas, Hidratos,` etc., en realidad esto son meros nombres para facilitar la lectura, pero para LINGO los elementos de todos los conjuntos son números 1, 2, 3, etc. Por ello, si queremos referirnos a la cantidad de hidratos en el arroz tendremos que escribir `Cant(2,4)` y no `Cant(Hidratos,Arroz)`, porque así LINGO no lo entenderá.

Ahora bien, una de las ventajas de usar conjuntos es que si tenemos que introducir varias restricciones con la misma estructura (para todos los elementos de un conjunto, como en este caso: una para proteínas, otra para hidratos, etc.), podemos definirlas todas de una vez mediante la instrucción

```
@For(conjunto(i):  restricción);
```

En nuestro caso, tenemos una restricción para cada componente i, luego podemos escribir:

```
@For(Componente(i):[Requisitos]@Sum(Alimento(j):Cant(i,j)*x(j))>Vmin(i));
```

Esto significa que para cada componente i, el problema tiene la restricción `Requisitos(i)` que se indica a continuación.

Con esto ya tenemos el problema completo, que recopilamos en la página siguiente, seguido de la solución óptima (donde hemos separado las variables `x` mediante el menú LINGO → Solution…

```
SETS:
Alimento/Verdura,Carne,Aceite,Arroz,Fruta,Leche,Pescado,Huevos/:Coste,x;
Componente/Proteinas,Hidratos,Grasas,Calorias/:Vmin;
Par(Componente,Alimento):Cant;
ENDSETS

DATA:
Coste= 0.2 0.9 0.4 0.1 0.3 0.1 1.1 0.2;
Vmin= 80 100 30 2000;
Cant = 0.7  21   0  6.5   1    4  20   13
       1.6   0   0   81  10    5   0    1
       0.8  10 100  0.9   1  1.5   3   12
        20 200 900  364  50   47  98  162;
ENDDATA

[CosteDieta]Min=@Sum(Alimento(i):Coste(i)*x(i));
@For(Componente(i):[Requisitos]@Sum(Alimento(j):Cant(i,j)*x(j))>Vmin(i));
```

```
     Variable           Value        Reduced Cost
  X( VERDURA)        0.000000           0.1892308
    X( CARNE)        0.000000           0.5769231
   X( ACEITE)        0.000000           0.4000000
    X( ARROZ)        3.544441            0.000000
    X( FRUTA)        0.000000           0.2846154
    X( LECHE)        0.000000           0.3846154E-01
  X( PESCADO)        0.000000           0.7923077
   X( HUEVOS)        4.381625            0.000000
```

Vemos, pues, que la dieta más económica consiste en tomar 354 gramos de arroz y 438 gramos de huevos. Obviamente es una dieta bastante pobre, porque no hemos impuesto suficientes requisitos dietéticos.

Ejemplo 4b Continuando con el ejemplo anterior, vamos a considerar también el colesterol de cada alimento:

	Verdura	Carne	Aceite	Arroz	Fruta	Leche	Pescado	Huevos
Colesterol (g)	0	0.07	0	0	0	0.003	0.08	0.41

y ahora exigimos que la dieta contenga entre 80 y 120 g de proteínas, entre 100 y 230 g de hidratos, entre 30 y 60 g de grasas, entre 2 000 y 3 000 calorías y que el colesterol no exceda de 1 g. Determina la dieta óptima en estas condiciones.

Solución: Sólo tenemos que modificar ligeramente el ejemplo precedente: hay que añadir el componente Colesterol, y asociar a cada componente un valor máximo, así como incluir las restricciones sobre los valores máximos. El resultado se muestra en la página siguiente:

```
SETS:
Alimento/Verdura,Carne,Aceite,Arroz,Fruta,Leche,Pescado,Huevos/:Coste,x;
Componente/Proteinas,Hidratos,Grasas,Calorias,Colesterol/:Vmin,Vmax;
Par(Componente,Alimento):Cant;
ENDSETS

DATA:
Coste= 0.2 0.9 0.4 0.1 0.3 0.1 1.1 0.2;
Vmin=  80 100 30 2000 0;
Vmax= 120 230 60 3000 1;
Cant = 0.7     21    0  6.5   1      4    20     13
       1.6      0    0   81  10      5     0      1
       0.8     10  100  0.9   1    1.5     3     12
        20    200  900  364  50     47    98    162
         0   0.07    0    0   0  0.003  0.08   0.41;
ENDDATA

[CosteDieta]Min=@Sum(Alimento(i):Coste(i)*x(i));
@For(Componente(i):[Reqmin]@Sum(Alimento(j):Cant(i,j)*x(j))>Vmin(i));
@For(Componente(i):[Reqmax]@Sum(Alimento(j):Cant(i,j)*x(j))<Vmax(i));
```

```
      Variable           Value        Reduced Cost
   X( VERDURA)        0.000000           0.1507878
     X( CARNE)        2.669484            0.000000
    X( ACEITE)        0.000000           0.9997351
     X( ARROZ)        2.498248            0.000000
     X( FRUTA)        0.000000           0.3194293
     X( LECHE)        5.139258            0.000000
   X( PESCADO)        0.000000           0.5133006
    X( HUEVOS)        1.945655            0.000000
```

Ahora nos ha salido una dieta más variada: 266 gramos de carne, 249.8 gramos de arroz, 513.9 gramos de leche y 194.5 gramos de huevos.

Ejemplo 3c Continuando con el ejemplo 3, supongamos que, a las condiciones del ejemplo 3b añadimos que la cantidad invertida en cada producto financiero tiene que ser un múltiplo de 500 €. Determina cuál es la inversión óptima con esta condición adicional.

Solución: La única diferencia es que ahora tomamos como unidad monetaria los 500 € (de modo que los 20 000 € que tenemos para invertir son ahora 40 u.m. y requerimos que las variables sean enteras). Para exigir esta última condición podemos emplear la instrucción `@For`, como se muestra en la página siguiente:

```
SETS:
Producto/1..6/:RO,RP,x;
ProdDolar(Producto)/1,3,6/;
ProdEuro(Producto)/2,4/;
ENDSETS

DATA:
RO=0.1 0.05 0.07 0.15 0.09 0.12;
RP=-0.1 0 -0.01 -0.25 0.01 -0.2;
Cap=40;
ENDDATA

[Rent_optim]Max=@Sum(Producto(i):RO(i)*x(i));
[Rent_pesim]@Sum(Producto(i):RP(i)*x(i))>-0.01*Cap;
[Capital]@Sum(Producto(i):x(i))<Cap;
[Dolares]@Sum(ProdDolar(i):x(i))>0.3*Cap;
[Euros]@Sum(ProdEuro(i):x(i))>0.3*Cap;
@For(Producto(i):@Gin(x(i)));
```

```
Variable          Value        Reduced Cost
   X( 1)        2.000000         -0.1000000
   X( 2)        11.00000         -0.5000000E-01
   X( 3)        10.00000         -0.7000000E-01
   X( 4)        1.000000         -0.1500000
   X( 5)        16.00000         -0.9000000E-01
   X( 6)        0.000000         -0.1200000
```

En estas condiciones conviene invertir $2 \times 500 = 1\,000$ € en el primer producto, $11 \times 500 = 5\,500$ € en el segundo producto, $10 \times 500 = 5\,000$ € en el tercer producto, 500 € en el cuarto producto y $16 \times 500 = 8\,000$ € en el quinto producto.

Ejemplo 5 El modelo de selección de cartera de Markowitz consiste en determinar las cantidades x_i que conviene invertir en un conjunto de activos financieros de modo que la rentabilidad de la inversión no sea inferior a un nivel prefijado y de modo que se minimice el riesgo de la inversión. Dicho riesgo se determina mediante la matriz de varianzas covarianzas $V = (a_{ij})$, donde los índices i, j recorren el número de activos considerados. Con el convenio de tomar como unidad monetaria la cantidad total que se desea invertir, el modelo queda así:

$$
\begin{array}{lll}
\text{Min.} & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j & \text{Riesgo de la inversión} \\
\text{s.a} & \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \geq r_0 & \text{rentabilidad esperada} \geq \text{mínimo exigido} \\
 & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 & \text{Capital invertido} = \text{capital disponible} \\
 & x_i \geq 0 &
\end{array}
$$

Encuentra la cartera de riesgo mínimo que proporciona una rentabilidad de al menos 0.11 a partir de un conjunto de 5 activos cuyas rentabilidades esperadas y cuya matriz de varianzas-covarianzas son las siguientes:

Activo	1	2	3	4	5
Rentabilidad	0.12	0.09	0.08	0.14	0.132

$$\text{Matriz de varianzas-covarianzas} = \begin{pmatrix} 0.07 & 0.03 & 0.05 & 0.07 & 0.05 \\ 0.03 & 0.02 & 0.02 & 0.03 & 0.02 \\ 0.05 & 0.02 & 0.05 & 0.05 & 0.05 \\ 0.07 & 0.03 & 0.05 & 0.12 & 0.09 \\ 0.05 & 0.02 & 0.05 & 0.09 & 0.19 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN: Tenemos un conjunto de cinco activos, y a cada uno de ellos le asociamos una rentabilidad y la cantidad x que conviene invertir en él (estas cantidades son las variables del problema). Los datos de la matriz de varianzas-covarianzas no se asocian a activos, sino a pares de activos, por lo que necesitamos definir el conjunto de dichos pares. El resultado es:

```
SETS:
Activo/1..5/:r,x;
Par(Activo,Activo):a;
ENDSETS

DATA:
r= 0.12 0.09 0.08 0.14 0.132;
a= 0.07 0.03 0.05 0.07 0.05
   0.03 0.02 0.02 0.03 0.02
   0.05 0.02 0.05 0.05 0.05
   0.07 0.03 0.05 0.12 0.09
   0.05 0.02 0.05 0.09 0.19;
rmin=0.11;
ENDDATA

[Riesgo] Min=@Sum(par(i,j):a(i,j)*x(i)*x(j));
[Rentabilidad] @Sum(Activo(i): r(i)*x(i))>rmin;
[Capital] @Sum(Activo(i):x(i))=1;
```

Podríamos haber introducido la función objetivo con dos sumas:

```
Min = @Sum(Activo(i):
@Sum(Activo(j):
a(i,j)*x(i)*x(j)
));
```

pero es más sencillo definir la suma sobre el conjunto de pares de activos, que es lo que hemos hecho.

La cartera con riesgo mínimo resulta ser $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0.14, 0.53, 0, 0.23, 0.09)$.

• Conviene observar que es posible definir los elementos de un conjunto en la sección `DATA` en lugar de la sección `SETS`. Por ejemplo, en el problema de la dieta, en lugar de escribir:

```
SETS:
Alimento/Verdura,Carne,Aceite,Arroz,Fruta,Leche,Pescado,Huevos/:Coste,x;
Componente/Proteinas,Hidratos,Grasas,Calorias,Colesterol/:Vmin,Vmax;
Par(Componente,Alimento):Cant;
ENDSETS
```

donde hemos definido los conjuntos `Alimento` y `Componente` al mismo tiempo que indicamos cuáles son sus elementos, podríamos haber escrito:

```
SETS:
Alimento:Coste,x;
Componente:Vmin,Vmax;
Par(Componente,Alimento):Cant;
ENDSETS
```

sin especificar los elementos, y a continuación, en la sección `DATA`:

```
DATA:
Alimento = Verdura Carne Aceite Arroz Fruta Leche Pescado Huevos;
Componente = Proteinas Hidratos Grasas Calorias Colesterol;
Coste = 0.2 0.9 0.4 0.1 0.3 0.1 1.1 0.2;
Vmin =  80 100 30 2000 0;
Vmax = 120 230 60 3000 1;
Cant = 0.7     21    0  6.5   1      4    20     13
       1.6      0    0   81  10      5     0      1
       0.8     10  100  0.9   1    1.5     3     12
        20    200  900  364  50     47    98    162
         0   0.07    0    0   0  0.003  0.08   0.41;
ENDDATA
```

(Como siempre, es opcional poner o no comas para separar los distintos elementos.) No tiene ningún interés especial posponer así la definición de los elementos de los conjuntos, pero tenemos que saber que pueden introducirse en la sección de datos porque tendremos que hacerlo así si queremos que LINGO los lea de un archivo EXCEL, como vamos a explicar en la sección siguiente.

5.9 Algunos hechos adicionales de interés

- Cuando escribas un modelo en LINGO puede ser útil que añadas comentarios que expliquen qué es cada variable o cada restricción, o que presenten el problema, etc.

  Una línea de comentarios debe empezar con ! y terminar con punto y coma. LINGO no tendrá en cuenta para nada estas líneas. En particular no se quejará si usamos acentos o eñes. Por ejemplo:

  ```
  !Problema del ejemplo 1;
  !M1 = Horas contratadas en el turno de mañana en la línea 1;
  !M2 = Horas contratadas en el turno de mañana en la línea 2;
  !T1 = Horas contratadas en el turno de tarde en la línea 1;
  !T2 = Horas contratadas en el turno de tarde en la línea 2;
  !N1 = Horas contratadas en el turno de noche en la línea 1;
  !N2 = Horas contratadas en el turno de noche en la línea 2;

  [Coste] Min= 40*M1+50*M2+55*T1+50*T2+100*N1+90*N2;
  [Produccion_L1] 15*M1+17*T1+20*N1>3000;
  [Produccion_L2] 10*M2+12*T2+15*N2>5000;
  ```

```
[Horas_M] M1+M2 !Puedes insertar un comentario donde quieras; <100;
[Horas_T] T1+T2<200;
[Horas_N] N1+N2<300;
[Distribucion_L1] M1+T1>190;
```

- LINGO tratará más eficientemente las restricciones de tipo cota, como $3 \leq x \leq 10$, si en lugar de introducirlas junto con las demás restricciones se usa la instrucción:

  ```
  @BND(3,x,10);
  ```

- Para problemas de programación no lineal puedes facilitar que LINGO encuentre una solución óptima (o que encuentre otros óptimos locales si no ha encontrado un óptimo global) indicándole a partir de qué valores de las variables debe empezar a buscar la solución. Esto se hace mediante una sección `INIT`, de este modo:

  ```
  INIT:
  x=5; y=6; z=9;
  ENDINIT
  ```

  o, en caso de que `x` sea una variable asociada a un conjunto de, digamos, cinco elementos:

  ```
  INIT:
  x= 5 6 4 0 1;
  ENDINIT
  ```

  La diferencia con una sección `DATA` es que las igualdades escritas en `DATA` fijan el valor de las variables, que pasan a ser constantes (datos del problema) desde ese momento, mientras que las igualdades de una sección `INIT` sólo marcan puntos de partida que LINGO puede modificar hasta encontrar su valor óptimo.

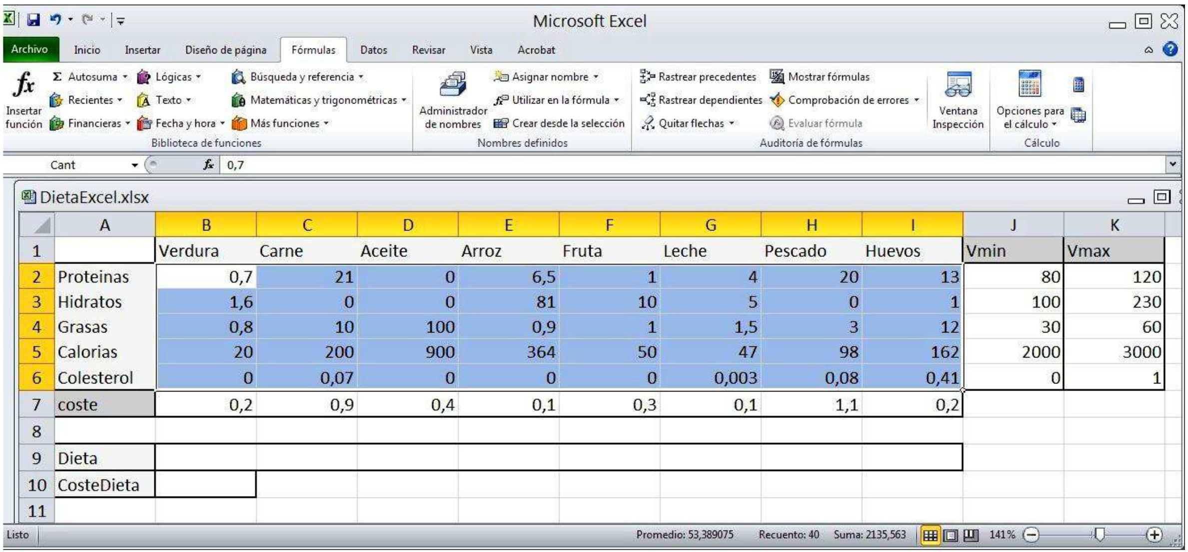
5.10 Importación y exportación de datos

Cuando un problema tiene muchos datos, en lugar de insertarlos todos en el documento de LINGO que contiene el modelo, puede ser más práctico dejarlos en un documento aparte de donde LINGO pueda leerlos. Esto tiene la ventaja adicional de que un mismo programa de LINGO puede usarse con datos diferentes sin tener que modificar nada (simplemente considerando otro documento de datos).

LINGO puede leer y escribir datos en distintos tipos de documentos, como simples documentos de texto (de extensión .txt) o en documentos de EXCEL. Los documentos de texto son más útiles cuando hay tantos datos que es inútil tratar de visualizarlos de ningún modo, mientras que el formato EXCEL es preferible cuando, aunque el número de datos sea elevado, todavía sea práctico el poder organizarlos de un modo visualmente abarcable. Además, EXCEL puede usarse para crear una presentación que incluya la solución obtenida por LINGO y para hacer análisis subsecuentes a partir de ella (gráficos, etc.)

Ejemplo 4c Vamos a resolver con LINGO el problema de la dieta del ejemplo 4b pero introduciendo los datos del problema a través de un documento EXCEL. Los pasos que tenemos que dar son los siguientes:

a) Creamos un documento EXCEL que contenga los datos del problema en cualquier disposición que consideremos conveniente. El documento puede contener cualquier otra información (texto, gráficos, otras celdas que hagan cálculos a partir de los datos del problema, etc.). La figura siguiente muestra un ejemplo sencillo de cómo pueden organizarse los datos:



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		Verdura	Carne	Aceite	Arroz	Fruta	Leche	Pescado	Huevos	Vmin	Vmax
2	Proteinas	0,7	21	0	6,5	1	4	20	13	80	120
3	Hidratos	1,6	0	0	81	10	5	0	1	100	230
4	Grasas	0,8	10	100	0,9	1	1,5	3	12	30	60
5	Calorias	20	200	900	364	50	47	98	162	2000	3000
6	Colesterol	0	0,07	0	0	0	0,003	0,08	0,41	0	1
7	coste	0,2	0,9	0,4	0,1	0,3	0,1	1,1	0,2		
8											
9	Dieta										
10	CosteDieta										
11											

b) Escribimos el problema en LINGO sin los datos, así:

```
SETS:
Alimento:Coste,x;
Componente:Vmin,Vmax;
Par(Componente,Alimento):Cant;
ENDSETS

DATA:
Alimento, Componente, Coste, Vmin, Vmax, Cant = @OLE();
ENDDATA

[CosteDieta]Min=@Sum(Alimento(i):Coste(i)*x(i));
@For(Componente(i):[Reqmin]@Sum(Alimento(j):Cant(i,j)*x(j))>Vmin(i));
@For(Componente(i):[Reqmax]@Sum(Alimento(j):Cant(i,j)*x(j))<Vmax(i));
```

Observemos que no hemos determinado los elementos ni los componentes, y que las seis cosas que en la página anterior definíamos en la sección `DATA` ahora las ponemos en una misma línea, a la izquierda de una igualdad, que en el miembro derecho tiene simplemente `@OLE()` (seguido del punto y coma obligatorio para terminar la línea). OLE significa *Object Linking and Embedding* (enlace e inmersión de objetos), y en el paréntesis que hemos dejado vacío podemos poner la dirección donde está guardado el documento EXCEL del que queremos leer los datos, pero si tenemos un único documento EXCEL abierto, LINGO entenderá que es el que tiene que leer y no hace falta especificar nada. Por eso hemos dejado el paréntesis vacío.

c) Todavía falta un paso, y es que debemos marcar en el documento EXCEL dónde está cada conjunto que LINGO tiene que leer. Por ejemplo, uno de los datos que hemos dicho a LINGO que debe leer en EXCEL es `Cant`, es decir, la matriz con la cantidad de cada componente en cada alimento. Para que LINGO sepa dónde está esa matriz la seleccionamos en el documento EXCEL, tal y como muestra la figura anterior. En la pestaña FÓRMULAS (en la parte superior de la ventana) veremos el ADMINISTRADOR DE NOMBRES y en él pinchamos en ASIGNAR NOMBRE.

Entonces aparecerá un cuadro de diálogo en el que podemos introducir el nombre que queramos. En este caso debemos introducir `Cant` (que es el nombre con que LINGO buscará la matriz) y apretamos el botón de aceptar.

Repetimos el proceso con los otros cinco grupos de datos. Por ejemplo, para definir `Alimento` seleccionamos las celdas que contienen los ocho alimentos (Verdura, Carne, etc.) y les asignamos el nombre `Alimento`. Hay que hacer lo mismo con `Componente, Coste, Vmin` y `Vmax.` En cada caso seleccionamos la fila o columna que contiene los datos correspondientes.

> La imagen anterior corresponde a EXCEL 2010. Si tienes una versión anterior o posterior del programa y ves que estas explicaciones no se corresponden con ella, pon en Google *"How to create a named range in Excel"* y busca instrucciones que se correspondan con tu versión.

Es fundamental que el nombre que demos a cada grupo de celdas coincida con el nombre que hemos puesto en la sección `DATA` de LINGO, o si no éste no encontrará los datos que pretende leer y dará un mensaje de error.

Ahora ya podemos resolver el problema en LINGO (teniendo abierta la hoja de EXCEL y ninguna otra) y obtendremos exactamente la misma solución que antes.

• Opcionalmente, podemos hacer que LINGO escriba la solución en la hoja de cálculo. Para ello sólo tenemos que hacer lo siguiente:

d) Al final del modelo tecleado en LINGO añadimos una nueva sección `DATA` que contenga lo siguiente:

```
DATA:
OLE()= x, CosteDieta;
ENDDATA
```

Esto significa que LINGO debe escribir en el documento EXCEL los valores de `x` (es decir, la composición de la dieta) y el valor de `CosteDieta,` que es como hemos llamado a la función objetivo, es decir, el coste mínimo de la dieta.

> Observemos que para que LINGO **lea** datos de EXCEL escribimos **`@OLE()` a la derecha** del igual, mientras que para que **escriba** datos en EXCEL escribimos **`@OLE()` a la izquierda** del igual.

e) Pero todavía falta decirle a LINGO en qué celdas de la hoja EXCEL debe escribir la solución. Si queremos que la escriba en el recuadro que en la figura anterior aparece al lado de la palabra "Dieta", seleccionamos las celdas correspondientes (desde B9 hasta I9) y asignamos a la selección el nombre `x`, y luego seleccionamos la celda B10 y le asignamos el nombre `CosteDieta`.

Si ahora volvemos a resolver el problema, veremos que LINGO escribe en las celdas indicadas la composición de la dieta óptima y el coste mínimo.

6 Problemas de modelización

6.1 Ejemplos resueltos

Ejemplo 1 Una empresa fabrica un producto en dos fábricas F_1 y F_2 y lo vende en Madrid y en Valencia, donde hay una demanda de 150 y 250 kg de producto, respectivamente. Para llevarlo desde las fábricas hasta los destinos contrata a una empresa de transporte que sólo está dispuesta a hacer el servicio si la cantidad total transportada es de al menos 450 kg. Los costes de transporte vienen dados por la tabla siguiente:

	Madrid	Valencia
F_1	5	8
F_2	6	7

Determina las cantidades de producto que conviene llevar desde cada fábrica a cada ciudad para servir como mínimo las cantidades demandadas minimizando el coste de transporte, teniendo en cuenta que las fábricas tienen unas capacidades limitadas de producción de 100 y 500 kg, respectivamente.

MODELIZACIÓN: En primer lugar determinamos las variables del problema:

F1M kg de producto que conviene transportar de la fábrica 1 a Madrid.

F1V kg de producto que conviene transportar de la fábrica 1 a Valencia.

F2M kg de producto que conviene transportar de la fábrica 2 a Madrid.

F2V kg de producto que conviene transportar de la fábrica 2 a Valencia.

> Recuerda que las variables tienen que corresponderse con lo que tenemos que decidir. En este caso lo que nos piden decidir es cuántos kg debemos transportar desde cada fábrica hasta cada ciudad.
>
> Cuanto más descriptivos sean los nombres de las variables más fácil te resultará modelizar el problema. Por ejemplo F1M, F1V es mejor que x_{11}, x_{12}.
>
> La función objetivo es lo que nos piden maximizar o minimizar, que en este caso el coste.

En segundo lugar determinamos la función objetivo, que en este caso es el coste de transporte.

$$\text{Coste} = 5F1M + 8F1V + 6F2M + 7F2V$$

Por último determinamos las restricciones del problema. Vemos que se exige servir 450 kg de producto como mínimo. Esto nos lleva a

$$F1M + F1V + F2M + F2V \geq 450 \quad \text{kg servidos} \geq \text{mínimo exigido.}$$

Otra condición es que hay que servir como mínimo las cantidades demandadas. Esto es una restricción para cada ciudad:

$$\begin{aligned} F1M + F2M &\geq 150 \quad \text{kg servidos a Madrid} \geq \text{demanda en Madrid} \\ F1M + F2M &\geq 250 \quad \text{kg servidos a Valencia} \geq \text{demanda en Valencia} \end{aligned}$$

Por último, cada fábrica tiene una capacidad, por lo que tenemos que imponer que la cantidad servida desde cada fábrica no exceda su capacidad:

$$\begin{aligned} F1M + F1V &\leq 100 \quad \text{kg servidos desde F1} \leq \text{capacidad de F1} \\ F2M + F2V &\leq 500 \quad \text{kg servidos desde F2} \leq \text{capacidad de F2} \end{aligned}$$

En total, el modelo es el siguiente:

Min.	$5F1M + 8F1V + 6F2M + 7M2V$	coste
s.a	$F1M + F1V + F2M + F2V \geq 450$	cantidad total transportada $\geq$ cantidad mínima
	$F1M + F2M \geq 150$	kg servidos a Madrid $\geq$ demanda en Madrid
	$F1V + F2V \geq 250$	kg servidos a Valencia $\geq$ demanda en Valencia
	$F1M + F1V \leq 100$	kg servidos desde $F_1 \leq$ capacidad de F_1
	$F2M + F2V \leq 500$	kg servidos desde $F_2 \leq$ capacidad de F_2
	$F1M,\ F1V,\ F2M,\ F2V \geq 0$	

En LINGO se introduce así:

```
[Coste] Min = 5*F1M+8*F1V+6*F2M+7*M2V;
[Cantidad_total] F1M+F1V+F2M+F2V > 450;
[Demanda_Madrid] F1M+F2M > 150;
[Demanda_Valencia] F1V+F2V > 250;
[Capacidad_F1] F1M+F1V < 100;
[Capacidad_F2] F2M+F2V < 500;
```

Modelización con conjuntos: Veamos ahora cómo introducir en LINGO el mismo modelo empleando conjuntos. Para ello observamos que el problema involucra a un conjunto de fábricas y un conjunto de ciudades, pero además tenemos que observar que las variables del problema no se corresponden con ninguno de estos dos conjuntos, sino que cada variable se corresponde con una ruta posible fábrica-ciudad, por lo que también tendremos que definir el conjunto de las rutas fábrica-ciudad. Esto nos lleva a:

```
SETS:
Fabrica/F1..F2/;
Ciudad/Madrid,Valencia/;
Ruta(Fabrica,Ciudad);
ENDSETS
```

A continuación tenemos que asociar cada dato o variable del problema a los conjuntos de los que depende. Por ejemplo, cada demanda está asociada a una ciudad (demanda de Madrid y demanda de Valencia), cada capacidad está asociada a una fábrica (capacidad de F1 y capacidad de F2), cada coste de transporte está asociado a una ruta (coste de transportar de una fábrica a una ciudad) y, por último, ya hemos indicado que las variables están asociadas a rutas (cantidad transportada de una fábrica a una ciudad). Esto nos lleva a:

```
SETS:
Fabrica/F1..F2/:Capacidad;
Ciudad/Madrid,Valencia/:Demanda;
Ruta(Fabrica,Ciudad):C,x;
ENDSETS
```

Hemos llamado `C` a los costes de transporte de las rutas y `x` a las variables. Por ejemplo, si resolvemos el problema en este punto obtenemos:

```
          Variable           Value
     CAPACIDAD( F1)       1.234568
     CAPACIDAD( F2)       1.234568
   DEMANDA( MADRID)       1.234568
 DEMANDA( VALENCIA)       1.234568
     C( F1, MADRID)       1.234568
   C( F1, VALENCIA)       1.234568
     C( F2, MADRID)       1.234568
   C( F2, VALENCIA)       1.234568
     X( F1, MADRID)       1.234568
   X( F1, VALENCIA)       1.234568
     X( F2, MADRID)       1.234568
   X( F2, VALENCIA)       1.234568
```

Vemos así que tenemos definidas las capacidades de las fábricas, las demandas de las ciudades, los costes de cada ruta y las variables del problema (ahora, por ejemplo, la variable que llamábamos F1M es `X(F1,Madrid)`). Como todavía no hemos asignado ningún valor a las variables, LINGO les asigna el valor por defecto `1.234568`.

El siguiente paso es introducir los datos del problema:

```
DATA:
capacidad=100 500;
demanda = 150 250;
C= 5  8
   6  7;
TM = 450;
ENDDATA
```

Notemos que la cantidad mínima que debe ser transportada `TM` no está asociada a ningún conjunto, por lo que la introducimos ahora por primera vez.

> Es muy importante que para introducir la tabla `C` igual que está en el enunciado hemos tenido que definir antes el conjunto `Ruta(Fabrica, Ciudad)` y no `Ruta(Ciudad,Fabrica)`.
> Si hubiéramos tomado las fábricas como primer índice no se produciría ningún error, pero LINGO entendería incorrectamente que 8 es el coste de transporte de la fábrica 2 a Madrid y no de la fábrica 1 a Valencia.

Ahora ya podemos escribir el modelo. Observemos la función objetivo:

$$\text{Min. } 5F1M + 8F1V + 6F2M + 7M2V$$

Vemos que consta de una suma para todas las variables, y las variables a su vez dependen del conjunto de rutas, luego se trata de una suma para todas las rutas posibles. Cada sumando consta del coste de la ruta correspondiente multiplicado por la cantidad transportada en esa ruta. Esto nos lleva a:

```
[Coste] Min = @Sum(Ruta(i,j):C(i,j)*x(i,j));
```

> Para escribir la suma en LINGO usamos `@Sum` e indicamos que la suma es para cada ruta. Como cada ruta está asociada a una fábrica y una ciudad, debemos escribir `Ruta(i,j)`, que significa "la ruta de la fábrica i a la ciudad j". Luego indicamos que cada sumando consta del coste `C(i,j)` multiplicado por la cantidad transportada `x(i,j)`.

Consideremos ahora la primera restricción:

$$F1M + F1V + F2M + F2V \geq 450$$

Vemos que el miembro izquierdo es una suma en la que aparecen todas las variables, y éstas dependen de las rutas, luego se trata de una suma para todas las rutas:

```
[Cantidad_total] @Sum(Ruta(i,j): x(i,j)) > TM;
```

Las restricciones siguientes son las de la demanda:

$$\begin{array}{ll} F1M + F2M \geq 150 & \text{kg servidos a Madrid} \geq \text{demanda en Madrid} \\ F1V + F2V \geq 250 & \text{kg servidos a Valencia} \geq \text{demanda en Valencia} \end{array}$$

> Recuerda que no se puede escribir `x(i,Madrid)` o `demanda(Madrid)`, porque los índices tienen que ser números y `Madrid` es el elemento 1 del conjunto de ciudades. En todo caso podríamos escribir `x(i,@index(Madrid))`, donde la función `@index` nos da el índice de `Madrid` en el conjunto de ciudades (en este caso 1).

Tenemos una restricción para Madrid y otra para Valencia. En cada una de ellas la suma del miembro izquierdo tiene un sumando para cada fábrica, luego es una suma sobre el conjunto de las fábricas:

```
[Demanda_M] @Sum(fabrica(i):x(i,1)) > demanda(1)
[Demanda_V] @Sum(fabrica(i):x(i,2)) > demanda(2)
```

Como siempre, no ponemos únicamente `@Sum(fabrica:)`, sino que introducimos una variable i que recorrerá las fábricas. Así `@Sum(fabrica(i):)` significa "suma para toda fábrica i".

Sin embargo, para que el problema pueda adaptarse fácilmente a problemas con un número de ciudades mayor, es conveniente escribir las dos restricciones mediante una misma expresión mediante `@For`. En este caso tenemos una restricción para cada ciudad, luego `@For` debe generar una restricción para cada ciudad:

```
@For(ciudad(j):[Demanda_] @Sum(fabrica(i):x(i,j))>demanda(j));
```

Ahora hemos puesto `@For(ciudad(j):)`, que significa "[crea una restricción] para cada ciudad j". Luego viene la etiqueta de la restricción, que no puede ser `demanda`, porque ya hemos usado este nombre para la demanda requerida en cada ciudad, así que hemos puesto `Demanda_`, con un guión bajo adicional. Después viene la restricción, que es como las dos que habíamos escrito, salvo que en lugar de 1 o 2 ponemos j, que es el índice que recorre las ciudades.

Ahora consideramos las dos restricciones de la capacidad:

$$\begin{array}{ll} F1M + F1V \leq 100 & \text{kg servidos desde } F_1 \leq \text{capacidad de } F_1 \\ F2M + F2V \leq 500 & \text{kg servidos desde } F_2 \leq \text{capacidad de } F_2 \end{array}$$

Nuevamente tenemos dos restricciones, pero ahora es una para cada fábrica, luego necesitamos un `@For(Fabrica(i):)`, es decir "[genera una restricción] para cada fábrica i". A su vez, en cada restricción hay que sumar para todas las ciudades, es decir, necesitamos un `@Sum(Ciudad(j):)`. En definitiva:

```
@For(fabrica(i): [Capacidad_] @Sum(ciudad(j):x(i,j))<capacidad(i));
```

En definitiva, el problema queda como se indica en la página siguiente:

```
SETS:
Fabrica/F1..F2/:Capacidad;
Ciudad/Madrid,Valencia/:Demanda;
Ruta(Fabrica,Ciudad):C,x;
ENDSETS

DATA:
capacidad=100 500;
demanda = 150 250;
C= 5  8
   6  7;
TM = 450;
ENDDATA

[Coste] Min = @Sum(Ruta(i,j):C(i,j)*x(i,j));
[Cantidad_total] @Sum(Ruta(i,j): x(i,j)) > TM;
@For(ciudad(j):[Demanda_] @Sum(fabrica(i):x(i,j))>demanda(j));
@For(fabrica(i): [Capacidad_] @Sum(ciudad(j):x(i,j))<capacidad(i));
```

La solución que proporciona LINGO es:

```
          Variable           Value        Reduced Cost
      X( F1, MADRID)      100.0000            0.000000
    X( F1, VALENCIA)      0.000000            2.000000
      X( F2, MADRID)      100.0000            0.000000
    X( F2, VALENCIA)      250.0000            0.000000
```

Así pues, desde la fábrica 1 conviene servir 100 kg a Madrid, y desde la fábrica 2 conviene servir 100 kg Madrid y 250 a Valencia. El coste es de 2 850 u.m.

Modelo con sumatorios: Esta forma de introducir el problema en LINGO tiene la ventaja de que se adapta con cambios mínimos para cualquier número de fábricas y ciudades. Ahora es fácil escribir también el modelo en una forma general que valga para cualquier número de fábricas y ciudades:

Si llamamos m al número de fábricas y n al número de ciudades, el problema es:

$$\begin{array}{lll} \text{min.} & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij} & \\ \text{s.a} & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq d_j & j = 1,\ldots,n \\ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq c_i & i = i,\ldots,m \\ & x_{ij} \geq 0 & \end{array}$$

`@Sum(Ruta(i,j): )`

`@Sum(fabrica(i): )`

`@Sum(ciudad(j): )`

`@For(ciudad(j): )`

`@For(fabrica(i): )`

Ejemplo 2 Una empresa maderera suministra a 5 mercados desde tres centros de producción. Actualmente está sirviendo la madera por tren, pero se plantea la posibilidad de emplear el transporte marítimo en lugar del terrestre, o de combinar adecuadamente ambos medios de transporte. Las tablas siguientes contienen el coste unitario de transportar un pie-tabla de madera desde cada centro de producción hasta cada mercado por tren y por barco:

Centro	Mercado 1	Mercado 2	Mercado 3	Mercado 4	Mercado 5
A	51	62	35	45	56
B	59	68	50	39	46
C	49	56	53	51	37

Coste del transporte por tren

Centro	Mercado 1	Mercado 2	Mercado 3	Mercado 4	Mercado 5
A	48	68	48	–	54
B	66	75	55	49	57
C	–	61	64	59	50

Coste del transporte por barco
(Donde no se indica ningún coste es porque no hay ruta marítima disponible.)

De cada centro puede extraerse anualmente 15, 20 y 15 millones de pies-tabla de madera, respectivamente, y la demanda de cada mercado es de 11, 12, 9, 10 y 8 millones de pies-tabla respectivamente.

a) Determina el coste de transportar la madera en tren (la solución que la empresa pone en práctica actualmente).

b) Determina el coste que tendría el transporte por barco.

c) Determina si sería preferible un uso combinado de ambos medios de transporte.

d) Concluye con una propuesta concreta sobre la forma en que la empresa debería distribuir la madera para que el coste fuera mínimo. ¿Tu propuesta requiere grandes cambios respecto de la solución actual?

e) Escribe con sumatorios los tres modelos correspondientes a los apartados a), b) y c).

> Cuando resuelvas el problema del transporte en barco, tendrás que introducir las restricciones:
> `x(1,4)=0;`
> `x(3,1)=0;`
> para impedir que se transporte madera por las dos rutas inexistentes.
> Al introducir la tabla de costes LINGO te requerirá que pongas algún valor en las dos entradas que faltan. Puedes poner un cero (o cualquier otro valor).

SOLUCIÓN: Los apartados a) y b) corresponden al mismo esquema de problema del ejemplo anterior, así que se deja como problema propuesto adaptar (mínimamente) el modelo de dicho ejemplo. Vamos a resolver el apartado c).

Como en el ejemplo anterior, necesitamos un conjunto de centros, otro de mercados y además un conjunto de rutas, formado por todos los pares posibles (centro, mercado).

Cada centro tiene asociada su producción, cada mercado su demanda, pero ahora cada ruta tiene asociados dos costes, el coste del tren y el coste del barco.
Similarmente, ahora tenemos dos variables asociadas a cada

ruta: una para la cantidad de madera que conviene transportar en tren y otra para la cantidad que conviene transportar en barco, por dicha ruta. Estas consideraciones se reflejan en la definición siguiente de conjuntos:

```
SETS:
Centro/A..C/:Produccion;
Mercado/M1..M5/:Demanda;
Ruta(Centro,Mercado):CosteTren,CosteBarco,Tren,Barco;
ENDSETS
```

Con esto hemos definido las variables `Tren(centro, mercado)` y `Barco(centro, mercado)` que representarán las cantidades de madera que conviene transportar por tren y por barco, respectivamente, de cada centro a cada mercado.

Una vez introducidas estas definiciones, los datos del enunciado se introducen de forma natural:

```
DATA:
Produccion = 15 20 15;
Demanda    = 11 12 9 10 8;
CosteTren = 51 62 35 45 56
            59 68 50 39 46
            49 56 53 51 37;
CosteBarco= 48 68 48  0 54
            66 75 55 49 57
             0 61 64 59 50;
ENDDATA
```

Ahora introducimos la función objetivo, que es minimizar el coste. Por ejemplo, el coste de transporte del centro A al mercado M1 es `51 Tren(A,M1)+ 48 Barco(A, M1)` (el coste de cada unidad transportada por tren por el número de unidades transportadas más el coste de cada unidad transportada por barco por el número de unidades transportadas, e igualmente hay que sumar los costes correspondientes por las demás rutas posibles. Así pues, la función objetivo se calcula sumando para todas las rutas, y cada sumando es a su vez la suma del coste del tren por esa ruta y el coste del barco por esa ruta:

```
[Coste] Min=@Sum(Ruta(i,j):
                 CosteTren(i,j)*Tren(i,j)+CosteBarco(i,j)*Barco(i,j)
                 );
```

Ahora tenemos que exigir que de cada centro no salga más madera que la que puede producir. Esto es una restricción distinta para cada centro, luego usaremos `@For(Centro(i):   )`

En la restricción correspondiente al centro `i` tenemos que sumar toda la madera que se transporta por tren y por barco a cada uno de los mercados, luego se trata de una suma sobre los mercados:

```
@For(Centro(i):[Produccion_]
               @Sum(Mercado(j): Tren(i,j)+Barco(i,j)) < Produccion(i)
    );
```

Ahora tenemos que exigir que a cada mercado llegue como mínimo la cantidad demandada. Esto es una restricción para cada mercado, luego usaremos `@For(Mercado(j): )`

En la restricción correspondiente al mercado `j` tenemos que sumar toda la madera que llega hasta él por tren y por barco desde cada uno de los centros, luego se trata de una suma sobre los centros:

```
@For(Mercado(j):[Demanda_]
                @Sum(Centro(i): Tren(i,j)+Barco(i,j)) > demanda(j)
     );
```

```
SETS:
Centro/A..C/:Produccion;
Mercado/M1..M5/:Demanda;
Ruta(Centro,Mercado):CosteTren, CosteBarco,Tren,Barco;
ENDSETS

DATA:
Produccion = 15 20 15;
Demanda    = 11 12 9 10 8;
CosteTren = 51 62 35 45 56
            59 68 50 39 46
            49 56 53 51 37;
CosteBarco= 48 68 48  0 54
            66 75 55 49 57
             0 61 64 59 50;
ENDDATA

[Coste_] Min=@Sum(Ruta(i,j):CosteTren(i,j)*Tren(i,j)+CosteBarco(i,j)*Barco(i,j));
@For(Centro(i): [Produccion_]
                @Sum(Mercado(j): Tren(i,j)+Barco(i,j)) < Produccion(i)
     );
@For(Mercado(j):[Demanda_]
                @Sum(Centro(i):Tren(i,j)+Barco(i,j)) > demanda(j)
    );

Barco(@Index(A),@Index(M4))=0;
Barco(3,1)=0;
```

> Notemos que en las etiquetas de las restricciones hemos puesto `Produccion_` y `Demanda_` , con una barra baja al final, porque obtendríamos un error si llamáramos igual a las etiquetas que a las cantidades que hemos definido en la sección `DATA`.

Las dos últimas restricciones son las que indican que las cantidades transportadas por barco del centro `A` al mercado `M4` y del centro `C` al mercado `M1` tienen que ser 0 (porque no hay ruta marítima). Hemos expresado cada una de ellas en una de las dos formas alternativas que puedes elegir. Daría error escribir `Barco(A,M4)=0;` O bien usamos los índices correspondientes a los centros y los mercados (la segunda línea) o bien los calculamos con la función `@Index` (la primera línea).

Dejamos como problema propuesto calcular y discutir la solución como pide el enunciado. Terminamos presentando el modelo con sumatorios como pide el apartado d). Por abreviar llamamos x_{ij}, y_{ij} a las variables que en LINGO hemos llamado `Tren(i,j)` y `Barco(i,j)`.

Las variables del problema son:

x_{ij} pies-tabla de madera que conviene transportar por tren del centro i al mercado j,
y_{ij} pies-tabla de madera que conviene transportar por barco del centro i al mercado j.

`@Sum(Ruta(i,j): )`

`@For(Centro(i): )`

$$
\begin{array}{lll}
\text{Min} & \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5}(\mathrm{CT}_{ij}\, x_{ij} + \mathrm{CB}_{ij}\, y_{ij}) & \\
\text{s.a} & \sum_{j=1}^{5}(x_{ij} + y_{ij}) \leq p_i & i = 1, \ldots, 3 \\
 & \sum_{i=1}^{3}(x_{ij} + y_{ij}) \geq d_j & j = 1, \ldots, 5 \\
 & y_{14},\ y_{31} = 0 & \\
 & x_{ij}, y_{ij} \geq 0 &
\end{array}
$$

`@Sum(Mercado(j): )`

`@Sum(Centro(i): )`

`@For(Mercado(j): )`

Las cantidades CT_{ij} y CB_{ij} representan los costes unitarios de transportar por tren y por barco, respectivamente, un pie-tabla de madera desde el centro de producción i hasta el mercado j. Llamamos p_i a la producción máxima del centro i y d_j a la demanda del mercado j.

Modelización alternativa del problema Si en lugar de dos medios de transporte alternativos tuviéramos más posibilidades, hubiera sido conveniente no tratar a cada medio mediante un juego de variables distinto, sino incluir a los medios en la definición de las rutas. Para ello definimos un conjunto adicional de medios de transporte, que en este caso consta de dos medios: tren y barco, y definimos el conjunto de rutas como el de las ternas (centro, mercado, medio). Ahora las variables del problema son de la forma `X(i,j,k)`, de modo que, por ejemplo, la variable `X(A, M3, Tren)` representa la cantidad que conviene transportar por tren desde el centro `A` hasta el mercado `M3`.

```
SETS:
Centro/A..C/:Produccion;
Mercado/M1..M5/:Demanda;
Medio/Tren, Barco/;
Ruta(Centro,Mercado,Ruta):Coste,X;
ENDSETS
```

La única precaución que hemos de tener si planteamos así el modelo es la de introducir los costes en el orden correcto. Sería:

```
DATA:
Coste = 51 48 62 68 35 48 45  0 56 54
        59 66 68 75 50 55 39 49 46 57
        49  0 56 61 53 64 51 59 37 50;
ENDDATA
```

Hay que escribir primero el coste del primer centro, primer mercado y considerar todas las rutas posibles (tren y barco), lo que nos da `51, 48`; luego primer centro, segundo mercado y todas las rutas, es decir, `62, 68`, y así sucesivamente.

Dejamos como problema propuesto el completar el modelo con estos conjuntos.

Ejemplo 3 Una compañía tiene tres agentes de ventas en tres ciudades, Austin, Boston y Chicago, y se propone enviarlos a otras tres, Denver, Edmonton y Fargo. La tabla siguiente indica el coste de un billete de avión de cada una de las ciudades a otra:

	Denver	Edmonton	Fargo
Austin	250	400	350
Boston	400	600	350
Chicago	200	400	250

Determina a qué ciudad conviene enviar a cada agente para que el coste de los vuelos sea el menor posible.

Solución: Lo que se nos pide determinar es adónde enviamos al vendedor que está en Austin, adónde enviamos al de Boston y adónde enviamos al de Chicago, o más, precisamente, si al vendedor de Austin lo enviamos a Denver, a Edmonton o a Fargo, si al de Boston lo enviamos a Denver, a Edmonton o a Fargo y lo mismo para el de Chicago.

Esto nos lleva a plantear un problema con nueve variables binarias. Por ejemplo, la variable `x(Austin, Denver)` valdrá 1 si enviamos al agente de Austin a Denver, y 0 en caso contrario, e igualmente con todas las demás posibilidades.

Para introducir el problema en LINGO tenemos que considerar el conjunto de las ciudades origen y el de las ciudades destino, así como el conjunto de los vuelos posibles, de cada origen a cada destino:

```
SETS:
Origen/Austin,Boston,Chicago/;
Destino/Denver,Edmonton,Fargo/;
Vuelo(Origen,Destino):coste,x;
ENDSETS

DATA:
Coste = 250 400 350
        400 600 350
        200 400 250;
ENDDATA
```

En este problema tenemos que especificar que las variables son binarias. Para indicar que `x(1,1)` es binaria escribiríamos `@BIN(x(1,1));` pero no necesitamos escribir esta instrucción para cada variable, sino que podemos usar `@For`, así:

```
@For(Vuelo(i,j): @BIN(x(i,j)));
```

El objetivo del problema es minimizar el coste de los vuelos. El coste de Austin a Denver es `coste(Austin,Denver)*x(Austin,Denver)`, pues este producto vale 250 si realmente se realiza ese vuelo (la variable `x(Austin,Denver)` toma el valor 1) y vale 0 si no se realiza ese vuelo. Lo mismo vale para los demás vuelos posibles, luego el coste total es la suma, para todos los vuelos posibles, de los productos `coste(i,j)*x(i,j)`:

```
[Coste_] Min=@Sum(Vuelo(i,j): Coste(i,j)*x(i,j));
```

Si resolvemos el problema sin añadir nada más, LINGO nos dará la solución obvia: no se realiza ningún vuelo y así el coste es el mínimo posible: 0. Por eso tenemos que añadir restricciones que digan que cada agente tiene que volar hasta alguna de las ciudades destino.

Por ejemplo, para expresar que el agente de Austin debe volar a alguna de las ciudades, tendríamos que escribir:

```
x(Austin, Denver) + x(Austin, Edmonton) + x(Austin, Fargo) = 1;
```

Así obligamos a que, de los tres vuelos posibles para el vendedor de Austin, uno de ellos se lleve a cabo. Y hemos de poner otra restricción análoga para Boston y otra para Chicago. En definitiva, tenemos que escribir una restricción para cada origen, lo cual se consigue con `@For(Origen(i):  );` y cada restricción consiste en que la suma para todos los destinos sea 1:

```
@For(Origen(i): [Salida]
              @Sum(Destino(j): x(i,j)) =1
    );
```

Podríamos pensar que con esto ya hemos impuesto todas las restricciones necesarias, pero podemos ver que no es así resolviendo el problema. La solución que obtenemos con lo dicho hasta ahora es:

Variable	Value	Reduced Cost
X(AUSTIN, DENVER)	1.000000	250.0000
X(AUSTIN, EDMONTON)	0.000000	400.0000
X(AUSTIN, FARGO)	0.000000	350.0000
X(BOSTON, DENVER)	0.000000	400.0000
X(BOSTON, EDMONTON)	0.000000	600.0000
X(BOSTON, FARGO)	1.000000	350.0000
X(CHICAGO, DENVER)	1.000000	200.0000
X(CHICAGO, EDMONTON)	0.000000	400.0000
X(CHICAGO, FARGO)	0.000000	250.0000

Y vemos que no nos sirve, porque LINGO nos propone enviar a Denver tanto al agente de Austin como al de Chicago, cuando queremos enviar a cada uno a una ciudad distinta. Para ello, igual que hemos pedido que de cada origen salga un vuelo, también tenemos que pedir que a cada destino llegue un vuelo. Por ejemplo, para pedir que a Denver llegue un vuelo (y sólo uno) escribiríamos:

```
x(Austin,Denver) + x(Boston, Denver) + x(Chicago, Denver) = 1;
```

Hay que escribir una restricción para cada destino, luego usamos `@For(Destino(j): )`, y cada restricción consiste en una suma para todos los orígenes. Escribimos ya el modelo completo:

```
SETS:
Origen/Austin,Boston,Chicago/;
Destino/Denver,Edmonton,Fargo/;
Vuelo(Origen,Destino):coste,x;
ENDSETS

DATA:
coste= 250 400 350
       400 600 350
       200 400 250;
ENDDATA

[Coste_] Min = @Sum(Vuelo(i,j): Coste(i,j)*x(i,j));
@For(Origen(i):   [Salida] @Sum(Destino(j): x(i,j)) = 1);
@For(Destino(j): [Llegada] @Sum(Origen(i):  x(i,j)) = 1);
@For(vuelo(i,j): @BIN(x(i,j)));
```

La solución que proporciona LINGO consiste en enviar al vendedor de Austin a Edmonton, al de Boston a Fargo y al de Chicago a Denver, con un coste de 950 u.m. El modelo es:

Variables:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el agente de la ciudad } i \text{ vuela a la ciudad } j, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Min.} & \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij} \\ \text{s.a} & \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = 1 \qquad i = 1,\dots,3 \\ & \sum_{i=1}^{3} x_{ij} = 1 \qquad j = 1,\dots,3 \\ & x_{ij} \text{ binarias} \end{array}$$

donde c_{ij} es el coste del vuelo de la ciudad i a la ciudad j.

Ejemplo 4 Una fábrica de productos químicos dispone de tres materias primas que tiene que mezclar para producir dos productos elaborados. La tabla siguiente indica los porcentajes de cada materia prima que puede tener como mínimo y como máximo cada uno de los dos productos, así como las toneladas disponibles de cada uno de ellos, el coste de cada tonelada, las toneladas de cada uno de los dos productos elaborados que se requiere producir y el precio de venta por tonelada de cada uno de ellos.

Determina qué cantidad de cada materia prima conviene emplear en la fabricación de cada uno de los productos para maximizar el beneficio.

	Productos		Toneladas	Coste
Materia prima	$P1$	$P2$	Disponibles	unitario
$M1$	$40\% - 60\%$	$50\% - 60\%$	2 000	1.00
$M2$	$10\% - 20\%$	$10\% - 40\%$	1 000	1.50
$M3$	$20\% - 50\%$	$20\% - 30\%$	500	3.00
Toneladas requeridas	600	700		
Precio de venta	10	8		

SOLUCIÓN: Lo que tenemos que determinar es cuántas toneladas de la primera materia prima destinamos al primer producto y cuántas al segundo, cuántas toneladas de la segunda materia prima destinamos al primer producto y cuántas al segundo, y lo mismo con la tercera materia prima. En definitiva, las variables son las toneladas `x(i,j)` de la materia prima i que se destinan al producto j.

Para modelizar este problema necesitamos un conjunto de materias primas, otro de productos y el conjunto de pares (materia prima, producto), pues las variables dependen de estos pares. Por lo tanto definimos:

```
SETS:
Materia/M1..M3/:Disponible,coste;
Producto/P1..P2/:Requerido,precio;
Par(Materia, Producto):pmin,pmax,x;
ENDSETS
```

Observemos cómo hemos distribuido los datos del enunciado entre los conjuntos: cada materia prima tiene asociada una cantidad disponible y un coste, cada producto tiene asociado una cantidad requerida y un precio, y cada par (materia, producto) tiene asociado un porcentaje mínimo, un porcentaje máximo y las cantidades x_{ij} que son las variables del problema. La introducción de los datos es pura rutina:

```
DATA:
Disponible = 2000 1000 500;
Coste = 1 1.5 3;
Requerido = 600 700;
Precio = 10 8;
pmin = 0.4 0.5
       0.1 0.1
       0.2 0.2;
pmax = 0.6 0.6
       0.2 0.4
       0.5 0.3;
ENDDATA
```

El objetivo del problema es maximizar el beneficio, que podemos calcular como ingresos menos costes. Veamos cómo calcular los ingresos. Para ello tenemos que sumar los ingresos que proporciona cada producto, luego necesitaremos un `@Sum(Producto(j):  )`. El ingreso del producto j es su precio por la cantidad producida. Por ejemplo, las toneladas producidas de `P1` son `x(M1, P1) + x(M2, P1) + x(M3, P1)`, porque recordemos que `M1` se obtiene mezclando esas cantidades de las materias primas. En general, la cantidad producida del producto `j` es la suma de todas las materias primas que lo componen, luego los ingresos son

```
@Sum(Producto(j):
                precio(j) * @Sum(Materia(i): x(i,j))
    )
```

Los costes son los costes de todas las materias primas empleadas. Cada cantidad empleada `x(i,j)` tiene un coste `coste(i)` por tonelada, luego hay que sumar `coste(i) *x(i,j)` para todos los pares `(i,j)` de (materia prima, producto):

```
@Sum(par(i,j): coste(i)*x(i,j))
```

En definitiva, el objetivo es:

```
[Beneficio] Max = @Sum(Producto(j):
                                 precio(j) * @Sum(Materia(i): x(i,j))
                      ) - @Sum(par(i,j): coste(i)*x(i,j));
```

La restricción más obvia es que tenemos unas cantidades limitadas de materias primas, de modo que, por ejemplo, no podemos usar más de 2 000 toneladas de `M1`, y análogamente con las demás materias primas. Tenemos, pues, una restricción por cada materia prima, luego usaremos un `@For(Materia(i):[Stock] );`

Fijada la materia prima `i`, la cantidad total que empleamos de ella es `x(i,P1)+ x(i,P2)`, luego tenemos una suma para todos los productos. Por ello usamos `@Sum( Producto(j):  )` En total las restricciones de stock son:

```
@For(Materia(i): [Stock]
                        @Sum(Producto(j): x(i,j)) < Disponible(i)
    );
```

Ahora introducimos las restricciones sobre la composición de cada producto. Por ejemplo, tenemos que exigir que la cantidad de `M1` en `P1` no sea superior al 60%. La cantidad de `M1` en `P1` es `x(M1,P1)`, y el 60% del total de `P1` es `pmax(M1,P1)*(x(M1,P1)+ x(M2,P1)+ x(M3,P1))`. Por lo tanto la restricción es

```
[Maximo (M1,P1)] x(M1,P1) < pmax(M1,P1)*(x(M1,P1)+ x(M2,P1)+ x(M3,P1)),
```

> Sería un error haber escrito: `@Sum(Materia(i):x(i,j))` Porque `@For(par(i,j)` ya fija una materia prima `i` y un producto `j`, y ahora queremos sumar todas las materias primas `k` sin que `i` deje de hacer referencia a la materia prima que hemos fijado.

Para expresar la parte final usamos `@Sum(Materia(k):  )` y restricciones de este tipo hay una para cada par (materia prima, producto), luego usamos `@For(par(i,j):  )`. El resultado es:

```
@For(par(i,j): [maximo]
     x(i,j) < pmax(i,j)* @Sum(Materia(k): x(k,j))
     );
```

Las restricciones de los porcentajes mínimos son análogas:

```
@For(par(i,j): [minimo]
                        x(i,j) > pmin(i,j)* @Sum(Materia(k): x(k,j))
    );
```

Por último falta exigir que se produzcan las toneladas requeridas de cada producto. Esto supone una restricción para cada producto, luego usamos `@For(Producto(j):   )`. La cantidad producida de `Pj` es

```
x(M1,Pj)+x(M2,Pj)+x(M3,Pj),
```

luego tenemos que exigir que esta suma (que expresamos mediante `@Sum(Materia(i):)` sea igual a la producción requerida. Escribimos ya el modelo completo:

```
SETS:
Materia/M1..M3/:Disponible, coste;
Producto/P1..P2/:Requerido, precio;
Par(Materia, Producto):pmin, pmax,x;
ENDSETS

DATA:
Disponible = 2000 1000 500;
Coste= 1 1.5 3;
Requerido = 600 700;
Precio = 10 8;
pmin = 0.4 0.5
       0.1 0.1
       0.2 0.2;
pmax = 0.6 0.6
       0.2 0.4
       0.5 0.3;
ENDDATA

[Beneficio] Max=@Sum(Producto(j):
                     Precio(j)*@Sum(Materia(i): x(i,j))
                     )-@Sum(Par(i,j): coste(i)*x(i,j));
@For(Materia(i): [Stock]
                         @Sum(Producto(j): x(i,j))< Disponible(i)
     );
@For(par(i,j): [Maximo]
                         x(i,j) < pmax(i,j)* @Sum(Materia(k): x(k,j))
     );
@For(par(i,j): [Minimo]
                         x(i,j) > pmin(i,j)* @Sum(Materia(k): x(k,j))
     );
@For(Producto(j): [Produccion] @Sum(Materia(i): x(i,j))=Requerido(j));
```

La solución que proporciona LINGO es:

```
  Variable           Value        Reduced Cost
 X( M1, P1)        360.0000           0.000000
 X( M1, P2)        420.0000           0.000000
 X( M2, P1)        120.0000           0.000000
 X( M2, P2)        140.0000           0.000000
 X( M3, P1)        120.0000           0.000000
 X( M3, P2)        140.0000           0.000000
```

Lo cual significa que hay que fabricar el producto P1 mezclando 360 toneladas de M1, 120 toneladas de M2 y otras 120 toneladas de M3, mientras que el producto P2 tiene que formarse mezclado 420 toneladas de M1, 140 toneladas de M2 y otras 140 de M3.

Ejemplo 5 Una empresa fabrica ocho productos cuyo precio de venta en el mercado viene determinado por la cantidad total producida x_i según se indica en la tabla siguiente, que incluye además el coste de producción de cada unidad:

	Prod. 1	Prod. 2	Prod. 3	Prod. 4	Prod. 5	Prod. 6	Prod. 7	Prod. 8
Precio	$100 - 5x_1$	$250 - 6x_2$	$300 - x_3$	$125 - 3x_4$	$400 - 4x_5$	$110 - 4x_6$	$215 - 2x_7$	$190 - x_8$
Coste	30	45	20	35	40	25	10	15

Determina las cantidades que conviene producir de cada uno de los artículos para obtener el máximo beneficio.

Solución: Las variables del problema son las cantidades x_i que conviene producir de cada uno de los ocho artículos. Observamos que el precio de cada artículo es de la forma $a_i - b_i x_i$, donde a_i y b_i son datos asociados a cada producto, luego para modelizar el problema definimos un conjunto de productos y le asociamos las cantidades siguientes:

```
SETS:
Producto/P1..P8/:a,b,coste,x;
ENDSETS

DATA:
     a= 100 250 300 125 400 110 215 190;
     b=   5   6   1   3   4   4   2   1;
coste =  30  45  20  35  40  25  10  15;
ENDDATA
```

Ahora sólo tenemos que calcular la función de beneficio. El beneficio que proporciona el artículo i se calcula como ingresos − costes. Los ingresos se obtienen como el precio de venta por la cantidad vendida, es decir:

$$\text{Ingreso}_i = (a_i - b_i x_i)x_i$$

y el coste es $c_i x_i$, luego tenemos que sumar el beneficio $(a_i - b_i x_i)x_i - c_i x_i$ para todos los productos:

```
[Beneficio ]Max=@Sum(Producto(i): (a(i)-b(i)*x(i))*x(i)-coste(i)*x(i));
```

La solución que proporciona LINGO es

```
Variable          Value        Reduced Cost
  X( P1)       7.000000           0.000000
  X( P2)       17.08333           0.000000
  X( P3)       140.0000           0.000000
  X( P4)       15.00000           0.000000
  X( P5)       45.00000           0.000000
  X( P6)       10.62500           0.000000
  X( P7)       51.25000           0.000000
  X( P8)       87.50000           0.000000
```

y el beneficio óptimo es de 43 731.98 u.m.

Ejemplo 6 Un inversor quiere adquirir una cartera de activos financieros por valor de 1 u.m. Para ello ha seleccionado diez posibles activos entre los que repartir su inversión. La tabla siguiente contiene la información que ha recopilado sobre ellos:

Activo	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
Rentabilidad esperada	0.27	0.21	0.06	0.08	0.007	0.1	0.1	0.64	0.52	0.39
País	GB	GB	ESP	ESP	USA	USA	USA	USA	DE	DE
Empresa ecológica	Sí	No	Sí	No	Sí	No	No	No	No	No
Recomendación	++	−	+	++	+	−	+	+	−	++

La última fila resume la valoración de un experto que ha clasificado los activos entre poco seguros (−), seguros (+) y muy seguros (++). Además el inversor dispone de la matriz de varianzas-covarianzas de las rentabilidades históricas de los activos, que determinan el riesgo de la inversión mediante

$$R(x_1,\ldots,x_{10}) = \sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10} a_{ij}x_ix_j,$$

donde x_i es el capital invertido en el activo i-ésimo y a_{ij} es la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix}
4.5 & 3.6 & 4 & 3.7 & 3.7 & 3.8 & 3.9 & 8.9 & 4.5 & 4.3 \\
3.6 & 3.2 & 3.4 & 3.1 & 3.2 & 3.3 & 3.3 & 7.3 & 3.7 & 3.5 \\
4 & 3.4 & 4 & 3.5 & 3.6 & 3.7 & 3.8 & 8 & 4 & 3.8 \\
3.7 & 3.1 & 3.5 & 3.2 & 3.3 & 3.3 & 3.3 & 7.2 & 3.7 & 3.5 \\
3.7 & 3.2 & 3.6 & 3.3 & 3.6 & 3.6 & 3.5 & 7 & 3.7 & 3.5 \\
3.8 & 3.3 & 3.7 & 3.3 & 3.6 & 3.7 & 3.6 & 7.2 & 3.9 & 3.6 \\
3.9 & 3.3 & 3.8 & 3.3 & 3.5 & 3.6 & 3.7 & 7.6 & 3.9 & 3.6 \\
8.9 & 7.3 & 8 & 7.2 & 7 & 7.2 & 7.6 & 21.3 & 9.3 & 9.5 \\
4.5 & 3.7 & 4 & 3.7 & 3.7 & 3.9 & 3.9 & 9.3 & 4.8 & 4.6 \\
4.3 & 3.5 & 3.8 & 3.5 & 3.5 & 3.6 & 3.6 & 9.5 & 4.6 & 5
\end{pmatrix}$$

El inversor desea encontrar la cartera con riesgo mínimo que proporcione una rentabilidad esperada de 0.3 con las condiciones siguientes de diversificación:

- Al menos el 20% del capital debe invertirse en empresas ecológicas.
- Al menos el 30% del capital debe invertirse en empresas estadounidenses.
- Al menos el 40% del capital debe invertirse en las empresas calificadas con ++ por el experto.

Solución: Definimos un conjunto de activos, el conjunto de los pares de activos para introducir la matriz `A` y los subconjuntos del conjunto de activos correspondientes a las restricciones de diversificación:

```
SETS:
Activo/A1..A10/:rent,x;
Par(activo,activo):a;
Ecologico(activo)/A1,A3,A5/;
EEUU(activo)/A5,A6,A7,A8/;
Recomendado(activo)/A1,A4,A10/;
ENDSETS

DATA:
a= 4.5  3.6    4  3.7  3.7  3.8  3.9   8.9  4.5  4.3
   3.6  3.2  3.4  3.1  3.2  3.3  3.3   7.3  3.7  3.5
     4  3.4    4  3.5  3.6  3.7  3.8     8    4  3.8
   3.7  3.1  3.5  3.2  3.3  3.3  3.3   7.2  3.7  3.5
   3.7  3.2  3.6  3.3  3.6  3.6  3.5     7  3.7  3.5
   3.8  3.3  3.7  3.3  3.6  3.7  3.6   7.2  3.9  3.6
   3.9  3.3  3.8  3.3  3.5  3.6  3.7   7.6  3.9  3.6
   8.9  7.3    8  7.2    7  7.2  7.6  21.3  9.3  9.5
   4.5  3.7    4  3.7  3.7  3.9  3.9   9.3  4.8  4.6
   4.3  3.5  3.8  3.5  3.5  3.6  3.6   9.5  4.6    5;

Rent = 0.27  0.21 0.06 0.08 0.007 0.1 0.1 0.64 0.52 0.39;
ENDDATA

[Riesgo] Min=@Sum(par(i,j):a(i,j)*x(i)*x(j));
[Capital] @Sum(Activo(i):x(i))=1;
[Rentabilidad] @Sum(Activo(i): rent(i)*x(i))>0.3;
[Ecologicos] @Sum(Ecologico(i):x(i))>0.2;
[Estadounidenses] @Sum(EEUU(i):x(i))>0.3;
[Recomendados] @Sum(Recomendado(i):x(i))>0.4;
```

La cartera óptima resulta tener la composición siguiente:

$A1$	$A2$	$A5$	$A6$	$A7$	$A9$	$A10$
0.043	0.072	0.16	0.015	0.13	0.23	0.35

y el riesgo mínimo es de 4.04.

Ejemplo 7 Un comercio abre las 24 horas del día, y la tabla siguiente indica cuántos dependientes son necesarios en cada franja horaria:

Franja	Dependientes	Franja	Dependientes
De 0 am a 6 am	2	de 4 pm a 6 pm	6
de 6 am a 10 am	8	de 6 pm a 10 pm	5
de 10 am a 12 pm	4	de 10 pm a 0 am	3
de 12 a 4 pm	3		

Cada dependiente trabaja cuatro horas, descansa una hora y luego trabaja cuatro horas más. La hora de inicio de la jornada puede ser cualquiera que fije la empresa. Determina cuántos dependientes deben empezar su jornada a cada hora para que el número de dependientes necesarios sea el mínimo posible.

SOLUCIÓN: Definimos un conjunto de horas, desde `H0` hasta `H23` y las variables `x(H0)`, `x(H(1)`, etc representan el número de trabajadores que deben empezar a las 0 am, a la 1 am, etc.

El "truco" está en definir una matriz de disponibilidad de esta forma:

```
SETS:
Hora/H0..H23/:necesarios,x;
Par(Hora, Hora):disponibles;
ENDSETS

DATA:
necesarios = 2 2 2 2 2 2 8 8 8 8 4 4 3 3 3 3 6 6 5 5 5 5 3 3;

disponibles = 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
              0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
              0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
              0 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
              0 0 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
              0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
              0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
              0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0
              0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0
              0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0
              0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0
              0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0
              0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 0 0
              0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 0
              0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0
              0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1
              1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1
              1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1 1
              1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1
              1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0
              0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1
              1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1
              1 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1
              1 1 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1;
ENDDATA
```

Así, por ejemplo, `disponibles(H0,H3)=1` significa que los dependientes que empiezan en `H0` están disponibles en `H3`, mientras que `disponibles(H0,H4)=0` significa que los dependientes que empiezan en `H0` no están disponibles en `H4` (porque es su hora de descanso).

El modelo queda así:

```
[Total] Min = @Sum(hora(h): x(h));
@For(hora(h):[necesarios_]
                          @Sum(hora(i):disponibles(i,h)*x(i)) > necesarios(h)
    );
@For(hora(h):@GIN(x(h)));
```

La función objetivo es la suma de todas las variables `x(h)`, es decir, la suma de los dependientes que empiezan a las 0 am, más los que empiezan a la 1 am, etc. Eso nos da el total de dependientes empleados.

Luego tenemos una restricción para cada hora `h`, que expresa que el número de dependientes disponibles en la hora `h` tiene que ser mayor o igual que el número de dependientes necesarios a dicha hora. Para calcular el número de dependientes disponibles consideramos los trabajadores `x(i)` que empiezan a la hora `i` y los multiplicamos por `disponibles(i,h)`. Esto hace que los `x(i)` trabajadores que empiezan a la hora `i` sólo se cuentan si están disponibles a la hora `h`, y al sumar para todas las horas `i` obtenemos el total disponible a la hora `h`.

La solución es que se necesitan 16 dependientes, concretamente:

H1	H2	H4	H5	H6	H10	H13	H14	H15	H16	H17
5	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1

6.2 Problemas propuestos (para modelizar sin conjuntos)

1. La función de utilidad de un consumidor es

$$U = 100\,000 - (x - 100)^2 - (y - 100)^2 - (z - 100)^2,$$

donde x, y, z son las cantidades que adquiere de tres bienes sustitutivos A, B, C cuyos precios son, respectivamente, 3, 6 y 2 €. Determina el presupuesto mínimo necesario para conseguir una utilidad de 80 000 unidades. 139.4

   (a) Interpreta los costes reducidos de las variables.

   (b) Calcula el aumento de presupuesto que sería necesario si el consumidor quisiera 1 000 unidades más de utilidad. Haz el cálculo aproximado a partir de la solución obtenida y de forma exacta (volviendo a resolver el problema). Compara los resultados.

   (c) (Manteniendo el nivel de utilidad en 80 000) si los productos A y C sólo se pudieran comprar en paquetes de una unidad, mientras que B se pudiera comprar a granel, ¿convendría entonces comprar algo del producto B? ¿Subiría mucho el coste?

2. La función de utilidad de un consumidor es

$$U = 100\,000 - (x - 100)^2 - (y - 100)^2 - (z - 100)^2 - (w - 100)^2,$$

donde x, y, z, w son las cantidades que adquiere de cuatro bienes A, B, C, D. Los bienes A y B son sustitutivos, y el consumidor decide que necesita al menos 30 unidades de uno u otro indistintamente. El bien C es complementario de A y B, de modo que cada unidad de A requiere 2 de C y cada unidad de B requiere 3 de C (y cualquier unidad adicional de C resulta inútil). El bien D es escaso, y el consumidor no puede encontrar en el mercado más de 5 unidades. Los precios de los bienes son 20, 25, 2 y 1 unidad monetaria, respectivamente. Calcula las cantidades a adquirir de cada producto para maximizar la utilidad con un presupuesto de 1 000 unidades monetarias. 77605.2

3. La función de producción de una empresa es

$$P(x, y, z) = \sqrt[10]{x^2 y^3 z^5},$$

donde x, y, z son las cantidades empleadas de tres factores de producción. El coste unitario de cada factor es, respectivamente, de 4, 6 y 5 unidades monetarias. Además, el proceso de producción exige emplear, como mínimo, el doble de unidades del primer factor que del segundo. Determina la cantidad óptima que hay que emplear de cada factor para conseguir una producción de 1 000 unidades de producto con el coste mínimo. 14567.1

   Interpreta el precio dual de la producción.

4. Una empresa utiliza tres inputs en la producción de su producto, en cantidades x, y, z, con los cuales consigue una producción dada por $P(x, y, z) = 3x + \ln(y + 2z)$ kg de producto. Los precios de los inputs son 2 €/kg, 5 €/kg y 3 €/kg, respectivamente. La producción requiere al menos 30 kg de cada input, y la cantidad empleada del tercero ha de ser al menos tanta como la de los dos primeros juntos. La empresa dispone de un presupuesto de 10 000 € para la producción. Determina las cantidades que ha de comprar de cada input para maximizar su producción. 5864.2

(a) ¿Le convendría a la empresa reducir la cantidad empleada de alguno de los inputs, en caso de que fuera posible?

(b) ¿Qué aumento de producción podría conseguir con 500 unidades adicionales de presupuesto?

5. Una empresa pretende lanzar un nuevo producto en tres mercados diferentes y quiere determinar los precios p_1, p_2 y p_3 a los que le conviene vender cada kg en cada uno de ellos. Para que la producción resulte rentable ninguno de los precios puede ser inferior a los 80 €, que es el coste de producir un kg de producto, y el segundo mercado no aceptaría un precio superior al del primero. Se estima que la demanda de cada mercado viene dada por las funciones

$$D_1(p_1) = 400 - p_1, \qquad D_2(p_2) = 1000 - 3p_2, \qquad D_3(p_3) = 900 - 5p_3.$$

Determina los precios que maximizan los beneficios garantizando una demanda de 1 000 kg
81333.3 de producto.

Si la empresa redujera su producción, ¿su beneficio aumentaría o disminuiría?

6. Un inversor quiere distribuir un capital de 1 u.m. entre tres activos financieros. El riesgo de la inversión viene dada por la función

$$R(x, y, z) = 0.01x^2 + 0.02y^2 + 0.03z^2 + 0.01xy + 0.002yz + 0.03xz,$$

donde x, y, z son las cantidades invertidas en cada activo. La rentabilidad esperada del primer activo es de un 2%, la del segundo de un 3% y la del tercero de un 4%. Determina qué capital le conviene invertir en cada activo para maximizar la rentabilidad sin que el
0.037 riesgo de la inversión supere un nivel de 0.02.

(a) Interpreta el precio dual de la restricción del riesgo.

(b) ¿Qué sucedería si el inversor quisiera invertir al menos la décima parte del capital en el primer activo?

7. Una empresa multinacional de transportes se plantea las alternativas siguientes para invertir un capital de 1 millón de euros:

(a) Incrementar su stock de combustible, a un precio de 2 € /litro.

(b) Incrementar su flota de camiones, a un precio de 1 100 € /vehículo.

(c) Comprar un edificio para oficinas que le ofrece una constructora por 100 000 €.

(d) Comprar acciones de otra compañía, a un precio de 10 € cada una.

El rendimiento unitario esperado para cada inversión es el siguiente:

Combustible	10 €
Camiones	9 000 €
Edificio	850 000 €
Acciones	15 €

8213000 Determina la inversión que maximiza el rendimiento.

8. Un jefe de personal ha de distribuir cuatro trabajadores para hacer dos trabajos, de forma que dos trabajadores hagan uno de ellos y los otros dos el otro. La tabla siguiente contiene las horas que necesita cada trabajador para hacer su parte de cada trabajo. Determina cuál es la asignación que minimiza el tiempo necesario. 12

	Trabajador 1	Trabajador 2	Trabajador 3	Trabajador 4
Trabajo 1	3	4	2	6
Trabajo 2	2	3	1	4

9. Un empresario dispone de 500 u.m. para hacer diversas inversiones en su negocio. Las posibilidades que se plantea son las siguientes:

   (a) Invertir 100 u.m. en renovación de máquinas. La utilidad de esta inversión se valora en 2 unidades.

   (b) Invertir 300 u.m. en abrir un nuevo mercado de distribución, con una utilidad valorada en 3 unidades.

   (c) Invertir 80 u.m. en cursillos de formación para los trabajadores, con una utilidad de 1 unidad.

   (d) Invertir 85 u.m. en una rebaja promocional de los precios de sus productos, con una utilidad de 1 unidad.

   (e) Invertir cualquier cantidad en publicidad. Cada u.m. destinada a este fin proporcionaría 0.01 unidades de utilidad.

   De las cuatro primeras posibilidades, se quiere llevar a término un máximo de tres, y conviene llevar adelante al menos una de las dos primeras. Determina las inversiones que conviene hacer y la cantidad del presupuesto que conviene invertir en publicidad para maximizar la utilidad. 6.35

10. Una empresa tiene que planificar su producción mensual de cuatro productos A, B, C, D, de tal modo que la producción total no sea inferior a 1000 unidades. De éstas, al menos 100 han de ser del producto B, debido a un compromiso con los distribuidores. La elaboración de los productos A y B requiere de una materia prima M de la que la empresa dispone en cantidad limitada: las existencias para el mes son de 900 kg, cada unidad de A requiere 2 kg de M y cada unidad de B requiere 4. Por otra parte, cada unidad de A, B, C y D requiere, respectivamente, 2, 3, 2 y 4 horas de mano de obra, y la plantilla de la empresa puede trabajar 2500 horas al mes. La función de costes de la empresa es $C(x,y,z,w) = 2000 + 2x^2 + 3y^2 + z^2 + w - x - y$, donde x, y, z, w son las cantidades producidas de cada artículo. Calcula la producción que minimiza los costes, así como el coste óptimo. 358533.2

    (a) ¿Es un inconveniente para la empresa la limitación en la cantidad disponible de M?

    (b) Si ello fuera posible, ¿le convendría a la empresa cancelar su compromiso sobre el producto B?

    (c) ¿Sería rentable para la empresa pagar horas extra a sus trabajadores a 400 u.m.?

    (d) ¿Podemos deducir del precio dual de la producción que a la empresa le convendría reducir su producción?

11. Un empresario textil quiere comprar pantalones vaqueros de hombre y de mujer a dos fabricantes para venderlos en dos tiendas. El primer fabricante le vende cada pantalón por 30 €, y puede servirle un máximo de 1 000 unidades, mientras que el segundo puede servirle hasta 800 a un precio de 41 €. El empresario los venderá por 50 € (los de hombre) y 60 € (los de mujer) en la primera tienda, y por 45 € y 55 € en la segunda. El empresario quiere comprar el mismo número de pantalones de hombre que de mujer para cada tienda, en total, un máximo de 600 unidades para la tienda 1 y 900 para la tienda 2. Determina cuántas unidades le conviene comprar a cada fabricante de cada tipo para cada tienda
27374 para maximizar sus beneficios con un presupuesto de 50 000 €.

12. El propietario de una pastelería acude a un mercado mayorista con el propósito de comprar entre 10 y 20 kg de harina, entre 30 y 45 docenas de huevos (que se venden en paquetes indivisibles) y azúcar. Por cada kg de harina que compre necesitará 2 kg de azúcar, y por cada docena de huevos otro medio kg (y no está interesado en comprar más azúcar del que necesita). De cada uno de los tres productos puede elegir entre dos marcas: una de calidad, con unos precios fijos, y una marca blanca del distribuidor, cuyo precio depende de la cantidad adquirida, según la tabla siguiente:

Precio	Harina (€/kg)	Huevos (€/docena)	Azúcar (€/kg)
Marca de calidad	0.8	1.20	1
Marca blanca	$1.4 - 0.04\mathrm{Ha_b}$	$3.5 - 0.06\mathrm{Hu_b}$	$1.8 - 0.02\mathrm{Az_b}$

donde Ha_b, Hu_b y Az_b son, respectivamente, las cantidades adquiridas de harina, huevos y azúcar de marca blanca en las unidades indicadas en la tabla. Para garantizar un nivel de calidad de sus productos, el comprador quiere gastar al menos 20 € en productos de calidad, pero por razones de economía no quiere que la cantidad adquirida de la marca de calidad de cada producto sea mayor que el 30% de la cantidad adquirida de la marca blanca correspondiente.

Determina qué cantidades de cada marca de cada producto debe adquirir el comprador
111.87 para minimizar el coste.

13. Un inversor se plantea invertir 40 000 u.m. en una operación de compra-venta de pisos en dos urbanizaciones en construcción. Las tablas siguientes contienen los precios a los que puede adquirir cada vivienda según sus características, así como los precios a los que pretende venderlos.

	Urbanización 1		Urbanización 2	
	precio compra	precio venta	precio compra	precio venta
Piso normal	550	600	350	410
Piso de lujo	700	780	600	675
Ático (de lujo)	800	900	véase enunciado	1 000

Para la compra de áticos en la segunda urbanización, el inversor ha negociado con el constructor un precio de $850 + 10/x$, donde x es el número total de áticos que compra en ella.

Para asegurarse de que podrá vender todas las viviendas, teniendo en cuenta una estimación de la demanda, quiere que el número de pisos normales en cada urbanización sea igual al número de viviendas de lujo (pisos y áticos) que adquiera en ellas. Además quiere adquirir al menos tres veces más pisos que áticos, así como que el número de pisos normales en la urbanización 1 sea al menos el 15% del número total de viviendas adquiridas entre las dos urbanizaciones.

Determina cuántas viviendas debe adquirir de cada clase en cada urbanización para maximizar el beneficio de la operación. 5 800

14. Santi se va de excursión y debe decidir qué mete en la mochila, por lo que ha elaborado la siguiente tabla, que recoge el peso de cada uno de los objetos que podría llevarse, así como la utilidad que cada uno de ellos le proporcionaría:

	Peso (kg)	Utilidad		Peso (kg)	Utilidad
Bocadillo	0.5	9	Bolsa de frutos secos	0.2	6
Agua	1 (por litro)	10 (por litro)	Chubasquero	0.1	7
Paraguas	0.7	8	Cámara de fotos	0.6	7
Apuntes de Matemáticas II	1	0.5	Batería extra para la cámara de fotos	0.3	2

Santi tiene algunas ideas claras:

- Es imprescindible llevar algo para comer.
- Necesitará al menos un litro y medio de agua. Hay que tener en cuenta que su cantimplora tiene una capacidad de 3 litros y pesa 0.4 kg.
- No tiene sentido coger dos objetos para protegerse de la lluvia.
- Sería poco práctico cargar con una batería extra si no se lleva la cámara.

¿Qué le conviene a Santi meter en la mochila para maximizar la utilidad si el contenido de la mochila no debe pesar más de 4 kg? Ten en cuenta que Santi también debe decidir qué cantidad de agua se lleva. 51

15. Un restaurante quiere contratar camareros temporales para reforzar los turnos de fin de semana (viernes, sábado y domingo) mediante dos tipos de contratos: para camareros con y sin experiencia. Los camareros sin experiencia cobran 400 € por turno y los que sí tienen 700 € por turno. Además, los camareros con experiencia tienen un suplemento de 70 € en los turnos de domingo. Se calcula que van a hacer falta 5 camareros para los viernes, 10 para los sábados y otros 10 para los domingos. Por otra parte, se quiere contratar como mínimo a un camarero con experiencia en cada turno, y el número de camareros con experiencia ha de ser al menos el 55% de los contratados. Determina cuántos camareros conviene contratar de cada tipo en cada turno para minimizar su coste. 14270

16. Carlos entra a un restaurante en el que se ofrece un menú de 20 € que incluye un primero, un segundo y un postre. Si quiere tomar café, debe pagar 1 € más. En la tabla siguiente se muestra el menú, indicándose las calorías de cada plato y la utilidad que cada uno de ellos proporcionaría a Carlos. Cada ítem marcado con un $*$ supone 2 € de suplemento. ¿Qué platos debe elegir Carlos para maximizar la utilidad conseguida con la comida si no puede tomar más de 1 100 calorías y sólo lleva 24 €? ¿Incluiría su elección el café? 14

		Utilidad	Calorías
Primeros	Ensalada de langostinos*	2	200
	Croquetas	1	300
Segundos	Lubina	2	300
	Solomillo*	6	600
Postres	Brownie	5	500
	Fruta de temporada	3	100
	Café	4	100

17. Una empresa tiene fábricas en tres ciudades C_1, C_2 y C_3. La ciudad C_1 dispone de una refinería de petróleo en la que la empresa puede comprar hasta un máximo de 800 barriles de gasóleo semanales a 8 u.m. el barril. En la ciudad C_2 hay unas minas en las que la empresa puede comprar hasta 700 t de carbón semanales a 10 u.m. la t. Cada barril de gasóleo proporciona la energía equivalente a una t de carbón. El coste de transportar un barril de gasóleo es de 2 u.m. por km., mientras que el de una t de carbón es de 1 u.m. por km. Las distancias en km. entre las tres ciudades vienen dadas por la tabla siguiente:

	C_1	C_2	C_3
C_1	0	20	15
C_2		0	30
C_3			0

Si las fábricas de C_1 y C_3 requieren 500 unidades de energía semanales cada una (entre gasóleo y carbón) y la fábrica de C_2 requiere 300, determina qué cantidad de cada fuente
21800 de energía debe consumir cada fábrica para minimizar los costes de abastecimiento.

(a) ¿Podría volverse infactible el problema si el suministro de carbón disminuyera en 200 t?

(b) Si la empresa tuviera que aumentar el consumo de energía de una de sus fábricas, ¿en cuál de ellas le resultaría más barato hacerlo?

(c) ¿Cuánto tendría que disminuir como mínimo el coste de suministrar gasóleo a C_3 para que la empresa pudiera replantearse el uso de gasóleo en dicha ciudad?

(d) Si el coste de suministrar gasóleo a la ciudad C_1 aumentara en 20 u.m./t, ¿convendría sustituir parte del gasóleo por carbón?

(e) Interpreta los precios duales de las cantidades máximas de carbón y gasóleo que la empresa puede comprar.

(f) ¿Podría la empresa aumentar el consumo de la fábrica de C_1 en 200 unidades con sus posibilidades de suministro actuales?

(g) Interpreta el intervalo de sensibilidad de las 500 unidades de energía que consume la fábrica de C_3. Indica qué seis características de la solución actual se seguirán cumpliendo mientras dicho número se mantenga dentro del intervalo.

18. Tina, Mar y Flora son tres hermanas peluqueras. Esta tarde van a una boda, por lo que deben organizarse para tener las tres el recogido del pelo listo llegado el momento. Indica quién debe peinar a quién para minimizar el tiempo total que dedican a ello, teniendo en cuenta lo siguiente: 4

    - Tina tarda 2 horas en hacer un peinado, mientras que Mar tarda 3/4 de hora y Flora 1 hora.
    - Tina y Mar saben peinarse a sí mismas, pero esto les lleva algo más de tiempo. Concretamente, Tina necesita media hora más de lo normal y Mar un cuarto de hora.
    - Como Flora tiene dolores de espalda, sólo podría peinar a una de sus hermanas.
    - Tina y Mar no se llevan bien, así que ninguna de ellas quiere peinar a la otra.
    - Mar tiene otras cosas que hacer y no puede emplear más de 1 hora y media entre su propio peinado (se lo haga ella o no) y peinar a sus hermanas.

19. La cadena de gimnasios BF ha abierto dos centros en Valencia. En el gimnasio número 1 hay 100 personas matriculadas, mientras que en el gimnasio número 2 hay 200. En cada uno de los gimnasios se van a impartir 6 clases diarias de una hora, para lo que la cadena puede contratar a 3 monitores (Pablo, Lilia y Diana). Calcula cuántas horas de clase diarias debe asignar BF a cada monitor en cada gimnasio para minimizar los costes, teniendo en cuenta lo siguiente: 200

    - Pablo cobra 20€ por hora. Además, exige que el gimnasio le proporcione 1/3 de litro de bebida isotónica por cada hora de clase. Cada litro de esta bebida le cuesta al gimnasio 1.20€.
    - BF debe pagar a Lilia $2x$€ por hora, donde x es el número total de horas que la monitora trabaja para la empresa. Como Lilia también estudia, sólo puede dedicar 5 horas al día a su trabajo.
    - Diana pide por cada clase de una hora una cantidad base de 22€ más 2 céntimos de euro por cada persona matriculada en el gimnasio donde se da la clase.
    - BF quiere que, en cada gimnasio, 3 de las clases se dediquen a una actividad llamada Bodypump. Hay que tener en cuenta que Pablo y Lilia están cualificados para dirigir esta actividad, mientras que Diana no ha recibido la formación correspondiente.
    - Por exigencia de los clientes, Pablo debe impartir en total 3 clases más al día que Diana.

20. A Luis le han encargado que organice un puesto de hamburguesas en una feria. Se plantea vender hamburguesas de ternera y mixtas (de ternera y cerdo) y ha contactado con dos proveedores que le pueden servir la carne necesaria. El primer proveedor le vende la carne picada a 8€/kg la de ternera y a 6€/kg la de cerdo, mientras que el segundo le ofrece mejores precios (a 6€/kg la ternera y a 5€/kg el cerdo), pero sólo en piezas grandes de 10kg.

    Según sus estimaciones sobre la asistencia a la feria, Luis considera que no conviene comprar más de 100 kg de carne en total, y no quiere comprar más de 6 piezas grandes para no tener que picar demasiada carne. Por otra parte, las hamburguesas mixtas tienen más demanda, así que Luis quiere preparar al menos tres veces más mixtas que de ternera.

Cada hamburguesa de ternera lleva 200 gramos de ternera, mientras que una mixta lleva 100 gramos de ternera y 50 gramos de cerdo. Calcula cuántas hamburguesas conviene preparar de cada tipo y cuánta carne hay que comprar a cada proveedor de cada tipo para maximizar los beneficios, teniendo en cuenta que Luis piensa vender las hamburguesas de
786.8 ternera a 3 € y las mixtas a 2 €.

21. Una empresa ha encargado a Luis que organice dos plantas de producción de hamburguesas. Ya cuenta con las instalaciones y maquinara necesarias, pero falta contratar a los trabajadores oportunos. Los destinados a la planta 1 cobrarán 40 € diarios y los destinados a la planta 2 cobrarán 35 € diarios. Se pretende elaborar dos clases de hamburguesas: de ternera y mixtas. Las de ternera llevan 200 gramos de ternera, mientras que las mixtas llevan 150 gramos de ternera y 100 gramos de cerdo. Las plantas pueden recibir diariamente (entre las dos) 3 000 kg de carne de ternera (que compra a 4 €/kg) y 3 100 kg de cerdo (que compra a 2 €/kg). Por otra parte, teniendo en cuenta la maquinaria disponible, el número máximo de hamburguesas que puede procesar diariamente cada trabajador en cada planta viene dado por la tabla siguiente:

	Ternera	Mixtas
Planta 1	140	270
Planta 2	160	750

Por razones de demanda, Luis decide que se produzcan al menos tres veces más hamburguesas mixtas que de ternera. Por otra parte, la planta 2 no tiene capacidad para más de 15 trabajadores. Además, Luis piensa fijar el precio de sus hamburguesas en función de la producción total P, de modo que venderá las de ternera a $p_T = 2 + 10\,000/(P+1)$ € y las mixtas a $p_M = 1 + 10\,000/(P+1)$ €. Calcula el número de trabajadores que conviene contratar en cada planta y el número de hamburguesas que conviene elaborar de cada tipo
17 141.66 (conjuntamente entre las dos plantas) para maximizar los beneficios.

22. Luis tiene dos hijos, Luisito y Manolito, a los que lleva de vez en cuando a comer fuera. El menú favorito de sus hijos se compone de hamburguesas y refrescos. Cada vez que salen, Luisito se pide dos hamburguesas y Manolito una. Luis ha decidido racionalizar su consumo teniendo en cuenta las preferencias de sus hijos, pero también criterios de salud, moderación y economía. Cada hamburguesa cuesta 2 € si es de ternera y 1.5 € si es de pollo, y el refresco favorito de sus hijos cuesta 5 €/litro (pero no tienen por qué pedir ni beberse litros enteros cada vez). La tabla siguiente muestra la utilidad que Luis estima que cada producto tiene para cada uno de sus hijos, así como los gramos de grasa de cada hamburguesa:

	Hamburguesa de ternera	Hamburguesa de pollo	Refresco
Utilidad Luisito	5	2	1
Utilidad Manolito	2	1	2.5
Grasa	35	20	–

Luis considera razonable que cada uno de sus hijos beba entre 0.1 y 0.5 litros de refresco por cada hamburguesa. Además Luisito no debe tomar al mes en estas comidas rápidas más de 200 gramos de grasa, mientras que Manolito no debe excecer los 100 gramos. Además, como ya se ha dicho, Luisito toma el doble de hamburguesas que Manolito. Determina cuántas hamburguesas de cada tipo y cuántos litros de refresco debe dejar Luis que tome cada hijo al mes con un presupuesto de 50 € para maximizar su utilidad conjunta, calculada como el producto de sus utilidades individuales. 262.5

23. El profesor de matemáticas de un colegio tiene que seleccionar parejas de alumnos para participar en un concurso de televisión. Hay siete alumnos interesados cuya nota media del curso anterior viene recogida en la tabla siguiente. Se indica además si destacan en ciencias o en letras.

	Anita	Benito	Carmencita	Damianito	Emilito	Florianito	Gracita
Edad	12	12	12	13	14	14	15
Nota	10	6	7	8	9	7	5
Orient.	Ciencias	Ciencias	Letras	Ciencias	Letras	Ciencias	Letras

Las normas del concurso exigen que los miembros de cada pareja se diferencien como máximo en un año de edad. La profesora considera que una pareja formada por un alumno que destaque en ciencias y otro en letras estará mejor preparada para ganar el concurso, por lo que valora la aptitud de cada posible pareja con el criterio siguiente: la aptitud de una pareja es la suma de sus notas más 3 puntos extra si las orientaciones de sus miembros son distintas. El problema es determinar qué parejas deben ser formadas para participar en el concurso de modo que la aptitud total sea la máxima posible. A esto hay que añadir las consideraciones siguientes:

(a) Gracita no está dispuesta a participar si no participa también Emilito (aunque no formen pareja).

(b) Benito es el hijo del director del colegio, así que tiene que salir elegido sí o sí.

(c) La profesora considera que sería bueno que dos de las parejas fueran Carmencita y Danielito, por una parte, y Emilito y Florianito por otra. No se atreve a imponerlo, pero considera oportuno añadir 10 puntos a la aptitud total si esas dos parejas son seleccionadas.

Determina las parejas que conviene enviar al concurso. (Observa que en primer lugar tendrás que determinar cuáles son las parejas válidas según las reglas del concurso.) Comprueba que las parejas que propones cumplen todos los requisitos exigidos.

24. Una empresa agropecuaria ha adquirido dos nuevas granjas para gallinas y ahora debe comprar gallos, gallinas y pienso para ponerlas en funcionamiento. Cada gallo cuesta 20 u.m. y cada gallina 30 u.m., mientras que el pienso le cuesta a 3 u.m./kg. La primera granja puede albergar hasta 200 animales y la segunda 300, y es necesario que en cada granja haya un gallo por cada 10 gallinas. Por otra parte, la empresa desea adquirir ya el pienso necesario para los próximos cuatro meses, y se estima que, en dichos meses, cada gallo necesitará 1.2 kg y cada gallina 3.5 kg. Los ingresos esperados que proporcionará cada animal dependen de las instalaciones de cada granja:

	Granja 1	Granja 2
Gallo	39	38
Gallina	55	50

Determina cuántos animales conviene comprar de cada tipo para cada granja y cuántos kg de pienso conviene comprar en total para maximizar los beneficios si la empresa cuenta con un presupuesto de 9 000 u.m.

25. Un inversor dispone de 170 000 € que quiere invertir a un año a través de dos bancos de su confianza. Cada uno de ellos le ofrece un depósito y acciones del propio banco en las condiciones siguientes:

	Rentabilidad del depósito	Precio de cada acción	Rendimiento esperado por cada acción
Banco 1	2%	20	2
Banco 2	2.5%	15	1.7

El banco 1 le ofrece también la posibilidad de invertir 30 000 € en un proyecto impulsado por la entidad que le proporcionaría al cabo de un año un rendimiento de 5 000 € . Además, si el cliente se decide a aceptar esta inversión, el banco 1 le aumenta la rentabilidad de su depósito a un 5% en lugar del 2%. En cualquier caso (tanto si acepta esta inversión adicional como si no), el cliente debe invertir en el banco 1 al menos un capital de 55 000 € (entre el depósito y las acciones) para recibir los tipos de interés indicados.

Por otra parte, por razones de diversificación, el inversor quiere cumplir también los requisitos siguientes:

(a) No depositar más de 90 000 € en el banco 1.
(b) No invertir más de 60 000 € en productos de riesgo (las acciones más la posible inversión extra en el banco 1).
(c) El capital depositado en el banco 2 no debe superar el doble del capital depositado en el banco 1.

26. Un bufete de abogados se dispone a ocuparse de un caso de gran envergadura, para el cual quiere destinar a cinco de sus empleados. Dos de ellos deberán ocuparse de las tareas previas de documentación del caso y otros tres lo presentarán ante el juez. En una preselección realizada entre los abogados que han solicitado intervenir en el caso se han fijado seis posibles candidatos, cuya capacidad profesional para cada una de las dos fases ha sido valorada con un indicador entre 0 y 10 reflejado en la tabla siguiente:

Candidato	1	2	3	4	5	6
Capacidad fase 1	5	9	6	4	7	10
Capacidad fase 2	8	3	8	9	6	7

Como la fase 2 es mucho más delicada, el bufete quiere exigir al equipo que se encargará de ella el doble de capacidad total que al destinado a la fase 1. Además, la capacidad total del equipo dedicado a la fase 1 no podrá ser inferior a 10 unidades. Por último, hay que tener en cuenta que el candidato número 6 está acostumbrado a contar con el número 4 entre sus colaboradores, por lo que se ha presentado voluntario con la condición de que sólo se incorporará a uno de los equipos si el número 4 también forma parte de él.

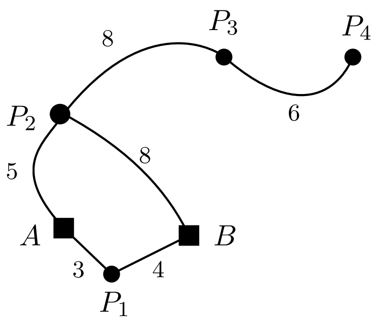
Determina qué abogados deben encargarse de cada una de las dos fases maximizando la capacidad total de los seleccionados.

27. La diputación de una provincia dispone de un presupuesto de 70 000 u.m./año para invertir en recursos sanitarios en tres ciudades A, B y C de su jurisdicción. Concretamente, se plantea la posibilidad de construir un hospital en cada una de ellas, así como crear al menos 100 nuevas plazas de médicos y 300 de auxiliares sanitarios. La tabla siguiente recoge el coste medio anual de cada plaza, así como el de la construcción del hospital en cada ciudad y un indicador que es mayor cuanto más necesaria sea la dotación:

	Médico		Auxiliar		Hospital	
Ciudad	coste	necesidad	coste	necesidad	coste	necesidad
A	300	5	150	3	8 000	100
B	250	7	100	5	10 000	500
C	100	3	90	10	9 000	300

Se considera que, como mínimo, la zona necesita un hospital, aunque más de dos sería excesivo. Por razones logísticas el número de plazas de médico que se creen en A debe ser como mínimo el número de plazas de médico que se creen en B y en C conjuntamente y, por otra parte, en cada ciudad, el número de plazas de auxiliar no debe triplicar al de plazas de médico. Determina cuántas plazas de cada tipo deben crearse en cada ciudad y en qué ciudades conviene construir hospitales para maximizar el índice total de necesidades atendidas sin exceder el presupuesto.

28. Una empresa tiene cuatro fábricas en cuatro localidades de una comarca, P_1, P_2, P_3 y P_4, las cuales necesitan mensualmente el suministro de una materia prima. La fábrica de P_1 requiere 30 kg mensuales, la de P_2 requiere 15, la de P_3 requiere 12 y la de P_4 requiere 24. Dicha materia prima puede comprarla a dos empresas suministradoras situadas en dos ciudades cercanas A y B, cada una de las cuales puede proporcionarle hasta 50 kg al mes. La empresa suministradora de A le cobra 1 € por kg de materia prima transportada y por cada km recorrido, mientras que la situada en B le cobra 0.80 € por kg y km. En el plano figuran las distancias en km entre las distintas localidades de la comarca.



Por otra parte, la empresa no desea perder su relación comercial con ninguna de las dos suministradoras, por lo que quiere que cada una de ellas sirva al menos a una de las fábricas. Determina desde cuál de las dos ciudades conviene servir la materia prima a cada una de las cuatro fábricas para minimizar los costes de transporte.

29. Un empresario teatral piensa destinar un presupuesto de 10 000 € a organizar un espectáculo de variedades, y ha realizado unas negociaciones preliminares con varios artistas que podrían formar parte del mismo. La tabla siguiente indica el salario que le pagaría a cada uno, así como un indicador de la taquilla estimada que cada artista podría aportar:

	salario	taquilla
El mago Aquilino	3 000	500
El ventrílocuo Bonifacio	2 600	440
Calixta la malabarista	1800	200
Demetrio y sus pulgas amaestradas	1 600	100
El humorista Eladio	1 000	360

En total quiere contratar a tres o a cuatro artistas. Más concretamente, tiene que elegir a un cabeza de cartel, que realizaría una actuación más extensa y cobraría el doble de lo acordado en la negociación preliminar (y aumentaría la previsión de taquilla en un 50%), así como una segunda figura, que también sería destacada en la publicidad, y que cobraría un 50% más de lo pactado (y aumentaría la previsión de taquilla en un 25%) y a uno o dos artistas más para completar el elenco. La previsión es que cada euro invertido en publicidad aumente en un 0.01% el indicador de taquilla correspondiente a las dos primeras figuras. Además, se plantea la posibilidad de realizar una gala extraordinaria que aumentaría en 300 unidades la previsión de taquilla, pero que costaría 2 000 € de organizar.

También hay que tener en cuenta las consideraciones siguientes:

- El mago Aquilino y el ventrílocuo Bonifacio son muy famosos, y no están dispuestos a participar si no tienen papeles destacados (sea como cabeza de cartel o como segunda figura).
- El empresario no considera que un espectáculo de pulgas amaestradas sea apropiado para cabeza de cartel.
- El humorista Eladio se está promocionando, por lo que está dispuesto a reducir un 30% su salario (en lugar de duplicarlo) si se le da la cabeza de cartel, y no cobraría de más por el segundo puesto.
- El domador de pulgas no está dispuesto a compartir cartel con alguien tan joven e inexperto como es Eladio.

Determina a quién conviene contratar como cabeza de cartel, a quién como segunda figura y a quién o quiénes como restantes artistas, así como la cantidad que conviene invertir en publicidad y si conviene o no realizar la gala extraordinaria para maximizar la taquilla esperada.

30. Una empresa de limpieza subcontrata a otras dos empresas A y B para atender cinco trabajos que no puede realizar con su propio personal. Cada una de las empresas A y B puede atender un máximo de tres trabajos, y ha presentado un presupuesto en función del tiempo y el desplazamiento que requiere cada trabajo, según se refleja en la tabla siguiente:

Trabajo	1	2	3	4	5
Empresa A	20	50	45	40	55
Empresa B	25	40	30	30	60

No obstante, la empresa A ha comunicado que no le resulta rentable aceptar el trabajo 1 si no se hace cargo también del 2 o del 3, que requieren un desplazamiento a la misma zona. Por razones tributarias, la empresa contratante no quiere que la facturación de ninguna de las dos subcontratas supere al doble de la de la otra. Calcula qué trabajos conviene asignar a cada empresa para minimizar el coste.

6.3 Problemas propuestos (para modelizar con conjuntos)

1. Una empresa de aviación dispone de un total de 55 aviones que puede destinar a 15 rutas turísticas diferentes. Cada ruta debe tener destinados entre tres y cinco aviones. La tabla siguiente recoge los ingresos que proporciona cada avión según en la ruta en la que se emplee y los costes que requiere.

Ruta	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9	R_{10}	R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	R_{15}
Ingresos	5	8	21	7	17	13	6	9	10	12	11	6	19	12	14
Costes	2	3	15	4	9	9	2	6	8	7	7	4	10	8	6

Los costes totales no pueden exceder el presupuesto máximo que la empresa pretende dedicar a estas rutas, que es de 380 u.m.

Calcula el número de aviones que la empresa debe destinar a cada ruta para maximizar sus beneficios. 281

(a) ¿Agotará la empresa su presupuesto?
(b) ¿Empleará todos sus aviones?

2. Una editorial quiere promocionar sus productos mediante un equipo de 30 vendedores que planea distribuir en 10 ciudades. Un estudio de mercado ha establecido el número de productos que puede vender diariamente de media cada comercial en cada ciudad, y que viene reflejado en la tabla siguiente, junto con los objetivos de ventas diarias previstos.

Ciudad	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	Objetivo
Ensayo	15	23	12	17	17.5	19.3	14	20	29	20.8	500
Diccionarios	3	4	4	2	3.5	5	1.8	4	4.2	1.7	100
Enciclopedias	1	2	0.5	2	2.1	2.9	3	2	0.7	0.2	40
Complemento	0				100			150		190	

Cada vendedor cobra 300 € diarios más un complemento por desplazamiento en función de la distancia de su destino, que viene indicado en la última fila de la tabla. La editorial quiere enviar al menos un vendedor a cada ciudad, y las previsiones de ventas suponen que no se van a enviar más de cinco a cada una. Determina cuántos vendedores conviene enviar a cada ciudad para lograr los objetivos de ventas con coste mínimo. 9 440

¿Conviene emplear los 30 vendedores disponibles?

3. Una empresa distribuye su producto en 12 mercados cuyas funciones de demanda vienen dadas por la tabla siguiente:

mercado	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
demanda	$500-3p$	$400-4p$	$1000-6p$	$900-2p$	$600-7p$	$800-5p$

mercado	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}
demanda	$400-5p$	$900-3p$	$1200-8p$	$700-3p$	$800-4p$	$700-4p$

El coste unitario de producción es de 75 €, por lo que la empresa no está dispuesta a vender el producto a menos de 80 €. Por otra parte, el mercado M_4 no aceptaría un precio superior al del mercado M_3. Determina a qué precio conviene vender el producto en cada mercado para maximizar los beneficios. 97 807

¿En qué mercados se consiguen los mayores niveles de ventas?

4. Determina la composición de una dieta con coste mínimo que satisfaga los requisitos nutricionales determinados por la tabla siguiente:

	verdura	carne	aceite	arroz	fruta	leche	pescado	huevos	mín	máx
proteínas	0.7	21	0	6.5	1	4	20	13	80	120
hidratos	1.6	0	0	81	10	5	0	1	100	230
grasas	0.8	10	100	0.9	1	1.5	3	12	30	60
colesterol	0	0.07	0	0	0	0.003	0.08	0.41	0	1
vitamina C	107	0	0	0	9	0.5	0	0	150	1 000
hierro	0.5	1.5	0	0.8	0.4	0.1	2.2	2.2	12	20
fibra	1.8	0	0	1.4	2	0	0	0	8	15
calorías	20	200	900	364	50	47	98	162	2 000	3 000
coste	0.2	0.9	0.4	0.1	0.3	0.1	1.1	0.2		

5. Una empresa tiene cuatro bulldozers en cuatro garajes distintos, y tiene que llevar cada uno a una obra. La tabla siguiente indica las distancias en km de cada garaje a cada obra:

	Obra 1	Obra 2	Obra 3	Obra 4
Bulldozer 1	90	75	75	80
Bulldozer 2	35	85	55	65
Bulldozer 3	125	95	90	105
Bulldozer 4	45	110	95	115

Determina qué bulldozer conviene enviar a cada obra para que la distancia total recorrida sea la mínima posible.

6. Una empresa tiene ocho furgonetas en ocho puntos distintos de una ciudad, y tiene que enviar cinco de ellas a cinco puntos distintos donde son requeridas. La tabla siguiente contiene el coste de transporte de cada origen a cada destino. Determina cuáles de las ocho furgonetas deben ser enviadas a cada uno de los cinco destinos para minimizar el coste de transporte.

	Destino A	Destino B	Destino C	Destino D	Destino E
Furgoneta 1	300	290	280	290	210
Furgoneta 2	250	310	290	300	200
Furgoneta 3	180	190	300	190	180
Furgoneta 4	320	180	190	240	170
Furgoneta 5	270	210	190	250	160
Furgoneta 6	190	200	220	190	140
Furgoneta 7	220	300	230	180	160
Furgoneta 8	200	190	260	210	180

7. Resuelve el problema del ejemplo 5 de la página 164 teniendo en cuenta además que la empresa dispone de un presupuesto de 5 000 u.m. para la producción y que las cantidades producidas tienen que ser enteras.

8. En el problema del ejemplo 6 de la página 165, determina cuál es la máxima rentabilidad que puede conseguir el inversor si no está dispuesto a asumir un riesgo mayor de 3.9.

9. Una empresa fabrica tres artículos A, B y C en cuatro fábricas F_1, F_2, F_3 y F_4. Con el personal de que dispone, no puede cubrir la demanda prevista para el mes próximo, sino que le faltarían por cubrir 20 000 unidades de A, 30 000 unidades de B y 25 000 de C. Por eso se plantea contratar trabajadores temporales. La tabla de la izquierda contiene los artículos que puede fabricar cada trabajador en cada fábrica según que se dedique a la producción de A, a la de B o a la de C, mientras que la tabla de la derecha contiene el coste de fabricar cada producto en cada fábrica.

Productividad	A	B	C
F_1	150	210	175
F_2	200	190	170
F_3	190	130	200
F_4	150	170	190

Coste	A	B	C
F_1	30	50	35
F_2	25	40	40
F_3	30	45	45
F_4	35	50	30

Por otra parte, cada trabajador cobrará un sueldo de 800 € por su trabajo. Determina cuántos trabajadores conviene destinar a cada fábrica para la producción de cada artículo para cubrir las unidades demandadas con coste mínimo. 2 980 625

(a) ¿Estarán todas las fábricas a máxima capacidad?

(b) ¿Le conviene a la empresa producir más cantidad de la que necesita de alguno de los artículos?

(c) ¿Qué sucedería con el coste mínimo si la empresa no quisiera excedentes?

10. Una empresa explota dos minas, con las que satisface la demanda de mineral de cinco ciudades. La tabla siguiente recoge el coste de transportar cada tonelada de mineral de cada mina a cada ciudad, junto con la capacidad máxima de extracción diaria de cada mina y la demanda diaria de cada ciudad.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Capacidad
M_1	20	30	15	20	40	850
M_2	25	30	45	10	35	800
Demanda	300	300	400	350	390	

La empresa vende cada tonelada de mineral a un precio $p = 200 - 0.01T$, donde T es el total de toneladas diarias extraídas. Determina cuántas toneladas debe servir desde cada mina a cada ciudad para maximizar el beneficio. 202 275

(a) ¿Le conviene extraer de cada mina la máxima cantidad posible?

(b) ¿Conviene atender toda la demanda de todas las ciudades?

11. Una compañía de autobuses necesita como mínimo los conductores siguientes según el día de la semana:

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
18	16	15	16	19	14	12

Cada conductor debe trabajar cinco días consecutivos y descansar los otros dos. Determina cuántos conductores deben iniciar su jornada laboral cada día para cubrir las necesidades de la compañía. 22

12. Un autobús con 12 turistas ha llegado a un pequeño pueblo y, por un error de la agencia de viajes, no se han hecho las reservas en el único hotel de la localidad. Éste sólo dispone de 5 habitaciones individuales y 3 dobles libres. Cada turista trata de conseguir una habitación por su cuenta, y la tabla siguiente contiene lo que está dispuesto a pagar por una habitación individual y por una doble compartida con alguno de sus compañeros de viaje.

Turista	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}
Individual	300	350	300	400	250	100	150	200	300	250	150	100
doble	150	100	100	200	200	90	90	150	0	200	90	100

Determina qué tipo de habitación conviene asignar a cada turista para maximizar los
2 840 ingresos del hotel y qué turista tendrá que dormir en el autobús.

13. Una refinería dispone de cuatro tipos de hidrocarburos que quiere mezclar para producir tres tipos de gasolina: con plomo, sin plomo y de alto octanaje. La tabla siguiente contiene los requisitos que debe satisfacer la composición de cada tipo de gasolina junto con su precio de venta en €/barril,así como el número de barriles disponibles de cada hidrocarburo y su coste en €/barril.

	H_1	H_2	H_3	H_4	Precio
con plomo	mínimo 40%	máximo 20%	mínimo 30%		12
sin plomo			mínimo 40%		18
alto octanaje	mínimo 10%	máximo 50%			10
Disponible	5 000	3 400	4 000	1 500	
Coste	9	7	12	6	

Determina cómo deben mezclarse los hidrocarburos para conseguir el máximo beneficio.

14. Una empresa se dispone a reorganizar su sección de recepción de llamadas telefónicas, que va a estar operativa desde las 7 de la mañana hasta las 8 de la tarde, para lo cual va a contratar dos tipos de telefonistas: de habla española y bilingües (español-inglés). La tabla siguiente indica las necesidades estimadas de telefonistas que hablen español e inglés a cada hora del día:

Hora	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7
Español	4	4	5	6	6	8	5	4	4	5	5	5	3
Inglés	5	5	4	3	2	3	4	3	2	1	3	4	4

Por ejemplo, a las 7 de la mañana se necesitan como mínimo 5 telefonistas que hablen inglés (es decir, bilingües) y además tiene que haber otros 4 que hablen español (bilingües o no). Los telefonistas bilingües cobran un 10% más que los de habla española. Cada telefonista puede empezar a trabajar a cualquier hora entre las 7 y las 11 de la mañana, trabaja cuatro horas seguidas, libra una hora y luego trabaja otras cuatro horas. Determina cuántos trabajadores de cada tipo conviene contratar para que empiecen su jornada a cada hora para minimizar el coste.

15. Una empresa se propone ampliar el capital y el número de trabajadores que destina a las diez fases de que consta la elaboración de su producto. La tabla siguiente recoge el incremento de producción que espera obtener por cada unidad de capital invertida y cada trabajador en cada fase, así como el presupuesto mensual disponible para cada una de las dos partidas y el salario que cobra cada trabajador según la fase de la que se encarga:

	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	Presupuesto
Capital invertido	3	5	3	2	4	1	4	4	6	5	1 500
Trabajadores	2	6	1	3	3	4	2	1	5	4	1 000
Salario	10	15	5	11	16	12	20	6	17	15	

Además, en cada fase, es necesario destinar al menos 3 unidades monetarias de capital por cada trabajador que se destine a ella.

Por otra parte, el proceso de producción requiere que por cada trabajador que se contrate para la fase 10 se contraten exactamente 2 para la fase 9, y en la fase 3 hacen falta al menos 7 trabajadores. Determina qué aporte de capital y cuántos trabajadores requiere cada fase para maximizar la producción total. 9 159

16. El director de personal de una empresa debe organizar la plantilla de tres nuevas fábricas $F1$, $F2$ y $F3$. Para ello tiene contratados cinco directivos A, B, C, D y E, que debe asignar a las fábricas, de modo que dos de las fábricas tengan dos directivos y la restante uno, y falta todavía contratar a los trabajadores necesarios. Los salarios mensuales convenidos con los directivos, así como el de los trabajadores, dependen de su destino final según la tabla siguiente:

	$F1$	$F2$	
A	4 000 €	3 000 €	3 500 €
B	3 000 €	3 500 €	3 3200 €
C	4 200 €	4 000 €	4 000 €
D	3 500 €	3 600 €	3 100 €
E	3 700 €	4 000 €	3 900 €
Trabajadores	1 000 €	900 €	1 100 €

Las fábricas 1 y 3 requieren 50 trabajadores por cada directivo, mientras que la fábrica 2 requiere 60 por cada directivo. Por otra parte, el director de personal debe tener en cuenta que B y C no están dispuestos a trabajar juntos y que A sólo está dispuesto a trabajar en la fábrica 2 si E trabaja con él.

Determina a qué fábricas hay que destinar cada directivo y cuántos trabajadores conviene contratar en cada una de ellas para minimizar el coste de la plantilla. 280 500

17. Inés tiene que realizar un viaje en avión y puede facturar una maleta y llevar además una bolsa de equipaje de mano. Después de incluir lo impresicindible, le quedan 5 kg. disponibles en la maleta y 3 kg. en la bolsa, y tiene que elegir qué objetos incluye en ellas. Las posibilidades vienen dadas por la tabla siguiente, en la que se incluye la utilidad de coger cada objeto.

	Peso	Utilidad
Una botella de vino	1.5	10
Un frasco de perfume	0.5	5
Un ordenador portátil	2.5	15
Un disco duro externo	0.5	8
Una carpeta con documentos de trabajo	0.9	40
Una novela	0.8	20
Un cómic	0.5	15
Cajas de bombones	0.4	3

Los documentos de trabajo, la novela y el cómic tienen 10 unidades más de utilidad si se llevan en la bolsa de mano, pues en tal caso Inés puede usarlos durante el vuelo. Además hay que tener en cuenta que:

- La ley no permite llevar líquidos en las bolsas de mano.
- La botella de vino y el frasco de perfume son posibles regalos para su madre, de modo que como mucho tendrá que llevar uno de los dos.
- Las cajas de bombones son posibles regalos para otros cuatro familiares, con lo que tampoco tendría sentido llevar más de cuatro.
- Los documentos de trabajo son imprescindibles.
- Aparte de dichos documentos, Inés quiere llevar seguro algo de lectura, pero sólo una cosa.
- Sería tonto coger el disco duro si no se lleva el portátil.

Determina qué objetos hay que llevar en la maleta y cuáles en la bolsa para maximizar la utilidad.

18. El profesor de gimnasia de un colegio tiene que organizar un equipo de fútbol para competir con el colegio del barrio vecino. Dispone únicamente de siete niños interesados, pero el equipo del otro colegio sólo cuenta con seis, así que tiene de descartar a uno. Tras examinar sus habilidades, les ha asignado una aptitud entre 0 y 10 para jugar como porteros, defensas o delanteros (como el número de jugadores es reducido, no considera la figura de mediocampista), tal y como indica la tabla siguiente:

	Albertito	Benito	Casimirito	Danielito	Emilito	Felipito	Gerardito
Delantero	0	0	4	2	8	7	6
Defensa	5	7	6	8	9	0	0
Portero	4	5	5	0	0	0	0

Una valoración de 0 indica que el profesor no lo considera apto para esa posición. Determina la alineación que maximiza la aptitud total del equipo teniendo en cuenta las consideraciones adicionales siguientes:

(a) El número de defensas debe estar entre 2 y 3.

(b) El profesor ha observado que Emilito y Gerardito se compenetran muy bien como delanteros, por lo que si ambos juegan en esa posición se consiguen dos unidades adicionales de aptitud.

(c) Gerardito no quiere participar en el equipo si no juega también su hermano Albertito.

Resuelve el problema con LINGO, indica quiénes jugarán como delanteros, quiénes como defensas y quién será el portero. Comprueba que la alineación que propones cumple todos los requisitos indicados. 42

19. Un alumno se dispone a hacer el examen final de Matemáticas II. Éste consta de 10 preguntas, de las cuales las cuatro primeras pertenecen al examen de LINGO y las otras seis a la prueba de síntesis. La tabla siguiente contiene la puntuación de cada pregunta, una estimación de los minutos que el alumno necesitará para contestarla y una estimación (de 0 a 10) de la confianza que el alumno tiene en que su respuesta sea correcta.

Pregunta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Puntuación	0.5	0.3	0.4	0.8	1	1	0.6	1.7	0.8	0.9
Tiempo	10	20	15	20	15	30	15	20	25	30
Confianza	3	6	10	7	2	5	7	9	1	10

Las preguntas 5 y 6 son alternativas (se puede hacer una de las dos, pero no ambas). Además el alumno observa que la pregunta 9 depende del resultado de la 8, de modo que si no responde a la 8 no puede hacer la 9. Para aprobar la asignatura, la nota final debe ser al menos de 5 puntos, pero la prueba de síntesis debe ser aprobada independientemente de la parte de LINGO (es decir, el alumno necesita sacar al menos 2.5 puntos de los 5 puntos que vale la prueba de síntesis).

Si la duración máxima del examen es de dos horas y media, determina qué preguntas debe abordar el alumno para que su confianza en aprobar sea máxima, así como cuánto tiempo conviene que dedique a repasar sus respuestas, teniendo en cuenta que cada minuto destinado a repasar aumenta su confianza en 10 unidades.

20. El jefe de personal de una empresa ha entrevistado a diez candidatos para cubrir siete puestos de trabajo: res de categoría A y tres de categoría B. La tabla siguiente recoge la aptitud de cada candidato para cada categoría y su nivel de inglés:

Nombre	Aptitud para cat. A	Aptitud para cat. B	Nivel de Inglés
Argensola, Lupercio Leonardo	3	6	Alto
Asbaje, Juana Inés	5	6	Bajo
Böhl, Cecilia	7	5	Bajo
Cienfuegos, Beatriz	9	7	Alto
Dodgson, Charles	8	4	Alto
Fernández Flórez, Wenceslao	8	7	Bajo
García Alas, Leopoldo	4	8	Bajo
Larra Sánchez, Mariano	6	6	Bajo
Pollock, Mary	7	8	Alto
Saavedra Ramírez, Ángel	6	9	Bajo

Determina a qué candidatos conviene contratar para los puestos de cada categoría de modo que se maximice la aptitud total de los contratados, teniendo en cuenta que la categoría A requiere un nivel alto de inglés y que, para obtener una subvención del gobierno, la empresa debe asignar al menos una mujer a cada categoría. 54

21. Un alumno se dispone a hacer el examen final de Matemáticas II. Éste consta de 10 preguntas, de las cuales las cuatro primeras pertenecen al examen de LINGO y las otras seis a la prueba de síntesis. La tabla siguiente contiene la puntuación de cada pregunta, una estimación de los minutos que el alumno necesitará para contestarla y una estimación (de 0 a 10) de la confianza que el alumno tiene en que su respuesta sea correcta.

Pregunta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Puntuación	0.5	0.3	0.4	0.8	1	1	0.6	1.7	0.8	0.9
Tiempo	10	20	15	20	15	30	15	20	25	30
Confianza	3	6	10	7	2	5	7	9	1	10

Las preguntas 5 y 6 son alternativas (se puede hacer una de las dos, pero no ambas). Además el alumno observa que la pregunta 9 depende del resultado de la 8, de modo que si no responde a la 8 no puede hacer la 9. Para aprobar la asignatura, la nota final debe ser al menos de 5 puntos, pero la prueba de síntesis debe ser aprobada independientemente de la parte de LINGO (es decir, el alumno necesita sacar al menos 2.5 puntos de los 5 puntos que vale la prueba de síntesis).

Si la duración máxima del examen es de dos horas y media, determina qué preguntas debe abordar el alumno para que su confianza en aprobar sea máxima, así como cuánto tiempo conviene que dedique a repasar sus respuestas, teniendo en cuenta que cada minuto destinado a repasar aumenta su confianza en 10 unidades.

22. Considera de nuevo el problema 30 de la página 180, pero bajo el supuesto de que hay tres empresas y seis trabajos, de modo que los presupuestos son:

Trabajo	1	2	3	4	5	6
Empresa A	20	50	45	40	55	35
Empresa B	25	40	30	30	60	50
Empresa C	22	43	37	28	55	45

La restricción tributaria sigue siendo que la facturación de ninguna de las empresas debe llegar a ser dos veces mayor que la de cualquiera de las otras.

7 Problemas de interpretación

7.1 Ejemplos resueltos

Ejemplo 1 Una empresa dispone de un presupuesto de 500 € para fabricar cuatro artículos A, B, C y D. La tabla siguiente contiene el coste unitario de producción y el precio unitario de venta:

Artículo	A	B	C	D
Coste	5	3	2	2
Precio	8	6	6	4

La empresa se ha comprometido con un distribuidor de su producto a suministrarle al menos 100 unidades de los artículos A y B, al menos 300 unidades de C y D y al menos 50 unidades de A y D. Calcula la producción que maximiza los beneficios de la empresa. El modelo es:

$$
\begin{array}{rll}
\text{Max.} & 3x+3y+4z+2w & \text{beneficio} \\
\text{s.a} & 5x+3y+2z+2w \leq 500 & \text{presupuesto} \\
& x+y \geq 100 & \text{compromisoAB} \\
& z+w \geq 300 & \text{compromisoCD} \\
& x+w \geq 50 & \text{compromisoAD} \\
& x,y,z,w \geq 0 &
\end{array}
$$

a) Resuelve el problema con LINGO. Explica el resultado.

b) ¿Le convendría a la empresa aumentar su presupuesto hasta $1\,000$ €? Responde a las cuestiones siguientes considerando un presupuesto de $1\,000$ €. 1600

c) ¿Qué cantidad le conviene a la empresa fabricar de cada artículo?

d) ¿Cuál es el beneficio máximo que puede conseguir?

e) Interpreta el coste reducido del artículo A.

f) Explica cómo se interpreta que el coste reducido del artículo B sea 0.

g) ¿Cómo variaría el beneficio de la empresa si el distribuidor se conformara con 95 unidades entre los artículos A y B? ¿Y si pidiera 110?

h) Interpreta el intervalo de sensibilidad de la variable y.

i) Interpreta el precio dual y el intervalo de sensibilidad del compromiso AD.

j) ¿Perjudicaría en algo a la empresa que el distribuidor exigiera 320 unidades entre los productos C y D?

k) Indica si la solución que proporciona LINGO nos permite concluir lo siguiente o no: "Si la empresa aumentara en una unidad la producción conjunta de C y D, el beneficio obtenido no variaría".

l) La empresa estudia la posibilidad de aumentar el precio de venta de alguno de sus productos. Si se decidiera por el producto C, ¿le convendría replantearse las cantidades a producir? ¿Y si aumentara 1.5 € el precio de venta del producto D?

m) El distribuidor informa a la empresa de que sólo le comprará el producto B si se lo vende a un precio de 3.5 € /unidad. ¿Le convendrá a la empresa servirle las mismas cantidades? ¿Y si el distribuidor acepta un precio de 4.5 € /unidad?

n) Si el presupuesto fuera de $2\,000$ €, ¿convendría producir más de 100 unidades entre los artículos A y B?

o) Modeliza el problema adecuado para determinar el presupuesto mínimo necesario para atender los compromisos con el distribuidor. ¿Cuál es dicho presupuesto mínimo?, ¿con qué producción
900 se consigue?

SOLUCIÓN:

a) Resuelve el problema con LINGO. Explica el resultado.

El problema es infactible. La explicación se ve al resolver la pregunta siguiente, pues con un presupuesto de 1 000 euros ya hay solución óptima. La explicación es, pues, que con 500 € la empresa no tiene presupuesto suficiente para producir todo lo que se ha comprometido a producir.

b) ¿Le convendría a la empresa aumentar su presupuesto hasta 1 000 €?

Sí que le convendría, porque con 500 € no puede hacer nada.

1600 Responde a las cuestiones siguientes considerando un presupuesto de 1 000 €.

c) ¿Qué cantidad le conviene a la empresa fabricar de cada artículo?

Nada del primero, 100 unidades del segundo, 300 del tercero y 50 del cuarto.

d) ¿Cuál es el beneficio máximo que puede conseguir?

1 600 €.

e) Interpreta el coste reducido del artículo A.

A la empresa no le conviene producir ninguna unidad del artículo A, pero, si se viera obligada a producirlo, por cada unidad que produjera, su beneficio empeoraría (disminuiría) en 2 €. (Más técnicamente: si cambiáramos la restricción $x \geq 0$ por $x \geq 1$, el nuevo beneficio sería 2 € menor.)

f) Explica cómo se interpreta que el coste reducido del artículo B sea 0.

Como la solución óptima supone producir 100 unidades del artículo B, si cambiáramos la restricción $y \geq 0$ por $y \geq 1$ la solución óptima sería la misma y el beneficio no cambiaría. Dicho de otro modo: no nos afectaría que nos obligaran a producir al menos una unidad del artículo B porque, sin que nos obliguen, ya estamos produciendo 100.

Sería erróneo afirmar que si aumentara una unidad la cantidad producida del artículo B, el beneficio no variaría.

g) ¿Cómo variaría el beneficio de la empresa si el distribuidor se conformara con 95 unidades entre los artículos A y B? ¿Y si pidiera 110?

El precio dual de la segunda restricción indica lo que mejoraría la función objetivo (lo que aumentaría el beneficio) por cada unidad que aumentara el término independiente de la restricción (la cantidad comprometida de A y B). Como no hablamos de aumentar una unidad, sino de otro incremento, multiplicamos el precio dual por el incremento en ambos casos:

$$(-3)(-5) = 15 \qquad (-3) \cdot 10 = -30.$$

Así pues, si la cantidad comprometida pasara a ser 95 el beneficio mejoraría (o sea, aumentaría) en 15 €, mientras que si pasara a ser 110 empeoraría (disminuiría) en 30 €.

h) Interpreta el intervalo de sensibilidad de la variable y.

El beneficio unitario del artículo B es de 3 € /u.p. Para mantenerse en el intervalo de sensibilidad, este valor puede aumentar 3 € o disminuir 2 € . En otras palabras, el intervalo de sensibilidad es $[1, 6]$. Mientras el beneficio unitario se mantenga en este intervalo la solución óptima será la misma, es decir, seguiremos produciendo las mismas cantidades de los cuatro artículos (aunque el beneficio se modificará).

i) Interpreta el precio dual y el intervalo de sensibilidad del compromiso AD.

Por cada unidad adicional que la empresa se comprometiera a fabricar de los artículos A y D, el beneficio empeoraría (disminuiría) en 2 €.

La cantidad comprometida de los artículos A y D es de 50 unidades, y, para mantenerse en el intervalo de sensibilidad, esta cantidad puede aumentar 300 unidades o disminuir 50 unidades. En otras palabras, el intervalo de sensibilidad es $[0, 350]$. Mientras la cantidad comprometida se mantenga en este intervalo, las variables de la solución que ahora son 0 seguirán siendo 0. Concretamente, esto significa:

- Seguirá siendo $x = 0$, es decir, se seguirá sin producir el artículo A.
- Seguirá siendo $s_1 = 0$, es decir, la restricción presupuestaria seguirá saturada, es decir, se seguirá agotando el presupuesto.
- Seguirá siendo $s_2 = 0$, es decir, la restricción del compromiso AB seguirá saturada, es decir, se seguirá produciendo la mínima cantidad exigida por el compromiso.
- Seguirá siendo $s_4 = 0$, es decir, la restricción del compromiso AD seguirá saturada, es decir, se seguirá produciendo la mínima cantidad exigida por el compromiso.

j) ¿Perjudicaría en algo a la empresa que el distribuidor exigiera 320 unidades entre los productos C y D?

Cuando nos pregunten si va a afectar en algo la modificación de un término independiente (en este caso el de la tercera restricción), lo primero que hemos de mirar es si la restricción está saturada. En este caso no lo está, porque se nos exige producir 300 unidades y estamos fabricando 350 (esto se ve en la variable de holgura $s_3 = 50$). En general, si la restricción no está saturada y se sigue cumpliendo con el cambio propuesto, la solución óptima no cambiará. Es lo que sucede en nuestro caso: si nos exigen producir 320 unidades no nos afectará en nada porque ya nos conviene producir 350 sin que nos lo exijan.

k) Indica si la solución que proporciona LINGO nos permite concluir lo siguiente o no: “Si la empresa aumentara en una unidad la producción conjunta de C y D, el beneficio obtenido no variaría”.

Sería un error concluir que esto es cierto basándose en que el precio dual de la tercera restricción vale 0. Lo que esto nos dice es que si nos obligaran a producir al menos 301 unidades de C y D en lugar de 300 como ahora, el beneficio no cambiará (ni la solución, tal y como hemos razonado en el apartado anterior). Ni el precio dual, ni ningún otro dato de la solución que proporciona LINGO, nos permite afirmar nada[7] de qué pasaría si aumentáramos la producción conjunta de C y D (es decir, si pasáramos de producir 350 unidades a 351).

l) La empresa estudia la posibilidad de aumentar el precio de venta de alguno de sus productos. Si se decidiera por el producto C, ¿le convendría replantearse las cantidades a producir? ¿Y si aumentara 1.5 € el precio de venta del producto D?

Un aumento en el precio de venta de un producto daría lugar al mismo aumento en el beneficio unitario, es decir, en el coeficiente correspondiente de la función objetivo. El intervalo de sensibilidad del coeficiente de z nos dice que el precio unitario del producto C puede aumentar cualquier cantidad sin que la solución óptima varíe. Por lo tanto, sea cual sea el aumento de precio, a la empresa no le convendrá replantearse las cantidades a producir, sino que le seguirá conviniendo producir lo mismo que ahora.

Para el producto D el máximo aumento es de 2 € y, como el aumento de 1.5 € queda dentro de este rango, la conclusión es la misma. Si habláramos, por ejemplo, de un incremento de 3 € en el precio del producto D, ya habría que volver a resolver el problema, porque la solución óptima podría ser distinta.

m) El distribuidor informa a la empresa de que sólo le comprará el producto B si se lo vende a un precio de 3.5 €/unidad. ¿Le convendrá a la empresa servirle las mismas cantidades? ¿Y si el distribuidor acepta un precio de 4.5 €/unidad?

Estamos hablando de reducir el precio (y por lo tanto el beneficio unitario) en 2.5 €. Como el intervalo de sensibilidad permite una reducción máxima de 2 €, la empresa debería volver a resolver el problema, porque la producción óptima ya no tendría por qué ser la misma. En el segundo caso hablamos de una reducción de 1.5 €, que queda dentro del intervalo, luego en este caso la producción óptima seguiría siendo la misma.

n) Si el presupuesto fuera de 2 000 €, ¿convendría producir más de 100 unidades entre los artículos A y B?

Se trata de estudiar las consecuencias de aumentar en 1 000 € el término independiente de la primera restricción. En su intervalo de sensibilidad leemos “allowable increase: infinity”, lo que significa que, aunque aumentemos el término independiente en cualquier cantidad, las variables que ahora son cero seguirán siendo cero. Como nos preguntan por la producción conjunta de los artículos A y B, nos fijamos en la variable de holgura de la segunda restricción, que ahora es cero, luego seguirá siendo cero al aumentar el presupuesto. Esto significa que la cantidad producida entre A y B seguirá siendo de 100 unidades.

[7] En realidad más adelante veremos que se puede deducir que la solución óptima es única y, sabiendo esto, si pasamos a otra solución en la que producimos más de la cantidad óptima, necesariamente será una solución peor, luego el beneficio disminuirá.

o) Modeliza el problema adecuado para determinar el presupuesto mínimo necesario para atender los compromisos con el distribuidor. ¿Cuál es dicho presupuesto mínimo?, ¿con qué producción se consigue? 900

Se trata de buscar la producción que minimiza el coste sujeto a que se respeten los tres compromisos:

$$\begin{array}{rll} \text{Min.} & 5x + 3y + 2z + 2w & \text{coste} \\ \text{s.a} & x + y \geq 100 & \text{compromisoAB} \\ & z + w \geq 300 & \text{compromisoCD} \\ & x + w \geq 50 & \text{compromisoAD} \\ & x, y, z, w \geq 0 & \end{array}$$

La solución óptima consiste en producir 100 unidades de B, 250 de C y 50 de D, con un coste de 900 €. Por lo tanto, el mínimo presupuesto necesario es de 900 €.

Ejemplo 2 Una empresa debe atender lo más rápidamente posible una demanda de 800 unidades de un producto A y 600 unidades de otro producto B, y para elaborarlos dispone de tres fábricas F_1, F_2 y F_3, la tercera de las cuales puede elaborar cualquier cantidad del producto B, pero no está preparada para elaborar el producto A. El problema siguiente determina las cantidades que le conviene elaborar en cada fábrica de cada producto para minimizar el tiempo requerido garantizando un beneficio mínimo de 5 900 €.

$$\begin{array}{rll} \text{Min.} & 5X_{1A} + 14X_{1B} + 7X_{2A} + 6X_{2B} + 7X_{3B} & \text{Tiempo (en minutos)} \\ \text{s.a} & X_{1A} + X_{1B} \leq 700 & \text{Producción } F_1 \leq \text{capacidad} \\ & X_{2A} + X_{2B} \leq 600 & \text{Producción } F_2 \leq \text{capacidad} \\ & X_{1A} + X_{2A} \geq 800 & \text{Producción } A \geq \text{compromiso} \\ & X_{1B} + X_{2B} + x_{3B} \geq 600 & \text{Producción } B \geq \text{compromiso} \\ & 3X_{1A} + 12X_{1B} + 9X_{2A} + 5X_{2B} + 3X_{3B} \geq 5\,900 & \text{Beneficio obtenido} \geq \text{exigido} \\ & X_{1A},\ X_{1B},\ X_{2A},\ X_{2B},\ X_{3B} \geq 0 & \end{array}$$

a) ¿Qué cantidades de cada producto conviene producir en la fábrica F_1?

b) ¿Cuántos minutos requerirá la producción total? ¿A cuántas horas equivalen?

c) Indica cuáles son las variables básicas y cuáles las no básicas de la solución óptima.

d) Interpreta el valor 25 que aparece en la línea:

```
         Row    Slack or Surplus      Dual Price
 CAPACIDAD_1         25.00000          0.000000
```

e) Si la empresa quisiera exigir un beneficio mínimo de 6 000 €, ¿aumentaría o disminuiría el tiempo necesario para la producción? ¿En cuánto?

f) Interpreta el coste reducido de la variable `X1B`.

g) En la solución falta el coste reducido de la variable `X3B`. Indica su interpretación. ¿Puedes deducir cuánto vale?

h) Si la empresa tuviera que aceptar un compromiso de 10 unidades adicionales, ¿cómo podría atenderlo más rápidamente, si fuera del producto A o del producto B?

i) Explica por qué es falsa la afirmación siguiente y corrígela: *"Como no estamos empleando toda la capacidad de la fábrica F_1, el precio dual de su restricción de capacidad es 0, lo que significa que podemos aumentar la cantidad producida en dicha fábrica sin alterar por ello el tiempo total empleado."*

j) Si la empresa pudiera reducir a 5 minutos el tiempo necesario para producir en F_2 una unidad del producto A, ¿le convendría replantearse las cantidades que debe de producir en cada fábrica?

k) Si el compromiso de producto B fuera de 500 unidades en lugar de 600, ¿seguiría siendo necesaria toda la capacidad de la fábrica F_2 o quedaría parte sin aprovechar?

l) ¿Qué beneficio podría obtener la empresa si pudiera aumentar en 40 unidades la capacidad de la fábrica F_2?

Variable	Value	Reduced Cost
X1A	675.0000	0.000000
X1B	0.000000	0.2500000
X2A	125.0000	0.000000
X2B	475.0000	0.000000
X3B	125.0000	?

Row	Slack or Surplus	Dual Price
TIEMPO	7975.000	-1.000000
CAPACIDAD_1	25.00000	0.000000
CAPACIDAD_2	0.000000	2.500000
PRODUCCION_A	0.000000	-2.750000
PRODUCCION_B	0.000000	-4.750000
BENEFICIO	0.000000	-0.7500000

Objective Coefficient Ranges:

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
X1A	5.000000	3.000000	0.1111111
X1B	14.00000	INFINITY	0.2500000
X2A	7.000000	0.1111111	3.000000
X2B	6.000000	1.666667	0.1111111
X3B	7.000000	0.7692308E-01	1.666667

Righthand Side Ranges:

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
CAPACIDAD_1	700.0000	INFINITY	25.00000
CAPACIDAD_2	600.0000	50.00000	316.6667
PRODUCCION_A	800.0000	14.28571	385.7143
PRODUCCION_B	600.0000	33.33333	500.0000
BENEFICIO	5900.000	1900.000	100.0000

Solución:

a) Conviene producir 675 unidades del producto A y ninguna del producto B.

b) Requiere 7 975 minutos, que equivalen a $7\,975/60 = 133$ horas.

c) Como hay cinco restricciones, tiene que haber 5 variables básicas, que son x_{1A}, x_{2A}, x_{2B}, x_{3B}, s_1 (donde s_1 es la variable del holgura de la primera restricción).

   Las variables no básicas son x_{1B}, s_2, s_3, s_4, s_5.

d) Significa que, aunque la fábrica 1 puede producir hasta 700 unidades de producto, conviene producir 25 unidades menos de esta capacidad máxima.

e) Miramos el precio dual de la quinta restricción, que es -0.75, lo que nos dice que si el beneficio exigido pasa de 5 900 a 6 000, es decir, si aumenta en 100, el tiempo requerido mejorará en $-0.75 \times 100 = -75$, es decir, empeorará (aumentará) en 75 minutos.

f) No conviene producir el producto B en la fábrica 1, pero si necesitáramos producir una unidad de dicho producto en dicha fábrica, el tiempo requerido aumentaría en 0.25 minutos.

g) Dicho coste reducido es lo que aumentaría el tiempo requerido si cambiáramos la restricción $x_{1B} \geq 0$ por $x_{1B} \geq 1$, es decir, si nos viéramos obligados a producir al menos una unidad del producto B en la fábrica 1, y el resultado es 0, puesto que ya estamos produciendo 125 unidades de dicho producto en dicha fábrica, luego si estuviéramos obligados a producir una unidad no necesitaríamos cambiar la solución, luego el tiempo empleado sería el mismo.

h) Miramos los precios duales de las restricciones tercera y cuarta: el primero es -2.75, que nos dice que si aumentáramos la producción de A en 10 unidades, el tiempo requerido aumentaría en 27.5 minutos, mientras que si el aumento fuera del producto B el aumento de tiempo sería (según el otro precio dual) de 47.5 minutos. Por lo tanto, sería preferible aumentar la producción de A.

i) La afirmación es falsa porque el precio dual nulo nos dice que el tiempo empleado no cambiará si aumentamos la capacidad de la fábrica, no la cantidad producida en ella. No es lo mismo: en este caso, la capacidad es de 700 unidades, mientras que la producción es de 625 unidades. Es el 700 y no el 625 lo que podemos alterar sin que varíe el tiempo.

j) El intervalo de sensibilidad del coeficiente de x_{2A} en la función objetivo es $[4, 7.11]$. Como 5 minutos está dentro del intervalo, la solución óptima no cambiará, luego no convendrá replantearse la producción.

k) El intervalo de sensibilidad de la cuarta restricción permite un descenso de hasta 500 unidades, luego un descenso de 100 queda dentro del intervalo, lo que implica que las variables no básicas seguirán siendo las mismas. Como la variable de holgura de la restricción de capacidad de F_2 es cero, seguirá siendo cero, lo que significa que seguiremos empleando toda la capacidad.

l) El intervalo de sensibilidad de la capacidad de la fábrica F_2 permite un aumento de hasta 50 unidades, luego un aumento de 40 queda dentro del intervalo. Por lo tanto, las variables no básicas serán las mismas y, en particular, como la variable de holgura de la restricción de beneficio es cero, seguirá siendo cero, luego el beneficio seguirá siendo el mismo: 5 900 €.

7.2 Problemas propuestos

1. Una empresa desea planificar la producción diaria de seis artículos para garantizar una producción mínima de 50 unidades de los tres de gama baja y de 20 unidades de los tres de gama alta sin exceder las 90 horas de trabajo disponibles. Además, por condiciones de mercado estima que venderá de uno de ellos el doble que de otro.

$$
\begin{array}{rll}
\text{Min.} & 5u+8v+5w+3x+y+2z & \text{coste} \\
\text{s.a} & u+v+w \geq 50 & \text{producción mínima gama baja} \\
 & x+y+z \geq 20 & \text{producción mínima gama alta} \\
 & x = 2z & \text{restricción de mercado} \\
 & 3.2u+v+3.3w+1.7x+2.1y+z \leq 90 & \text{horas empleadas} \leq \text{disponibles} \\
 & u,\ v,\ w,\ x,\ y,\ z \text{ enteras} &
\end{array}
$$

430 (a) Determina las cantidades que le conviene producir de cada uno y el coste mínimo.

(b) ¿Agotará la empresa las horas disponibles?

Supón ahora que los productos no son contables y que, por lo tanto, tiene sentido considerar producciones fraccionarias. Vuelve a resolver el problema sin suponer que las variables sean enteras. Las preguntas siguientes se refieren a dicha solución.

(c) ¿Cuánto ha variado el coste mínimo?

(d) ¿Podríamos haber obtenido la solución óptima con variables enteras redondeando la solución sin variables enteras?

(e) ¿Agotará en este caso las horas de mano de obra disponibles?

(f) Interpreta el coste reducido y el intervalo de sensibilidad de la variable u.

(g) Interpreta el precio dual y el intervalo de sensibilidad de la restricción sobre las horas de mano de obra.

(h) Si la empresa quisiera exigir más producción, ¿qué aumentaría menos el coste, aumentar la producción de los artículos de gama alta o de gama baja?

(i) Explica, teniendo en cuenta la interpretación anterior, por qué es falsa esta afirmación: *Si la mano de obra disponible se redujera en* 10 *horas la solución óptima seguiría siendo la misma.* Di cinco cosas que podríamos decir de la solución óptima en ese caso en virtud del análisis de sensibilidad.

(j) Si uno de los costes de producción subiera una unidad, ¿podría cambiar la solución óptima? ¿Si subiera cuál, concretamente?

(k) Si la empresa pudiera reducir el coste de producción del primer artículo, ¿cuánto tendría que reducirlo al menos para que su producción pudiera ser conveniente?

(l) Si la empresa deseara producir al menos 55 unidades de gama baja, ¿de cuál de los tres artículos le convendría producir las 5 unidades adicionales?

(m) Si, por exigencias del mercado, la empresa se viera obligada a producir algunas unidades de los artículos 1 o 3, ¿cuál de los dos sería preferible producir?

2. Una empresa sirve un producto desde tres plantas de producción a dos mercados. El problema siguiente determina las cantidades x_{ij} de producto que debe servir desde cada planta i a cada mercado j para maximizar su beneficio teniendo en cuenta que la producción en cada planta está limitada por una restricción presupuestaria y que hay unas demandas mínimas que deben ser satisfechas:

$$\begin{array}{rll} \text{Max.} & 10x_{11} + 8x_{12} + 6x_{21} + 8x_{22} + 3x_{31} + 7x_{32} & \text{Beneficio} \\ \text{s.a} & x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 450 & \text{Demanda del primer mercado} \\ & x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 500 & \text{Demanda del segundo mercado} \\ & 3x_{11} + 2x_{12} \leq 300 & \text{Presupuesto de la primera planta} \\ & 2x_{21} + x_{22} \leq 550 & \text{Presupuesto de la segunda planta} \\ & x_{31} + 4x_{32} \leq 400 & \text{Presupuesto de la tercera planta} \\ & x_{11},\, x_{12},\, x_{21},\, x_{22},\, x_{31},\, x_{32} \geq 0 & \end{array}$$

Responde a las preguntas particularizando las respuestas al problema concreto, evitando en tu conclusión final expresiones generales como "función objetivo" "variable de holgura", etc.

(a) Razona cuáles son las variables básicas y no básicas de la solución óptima.

(b) Razona si en algún mercado se sirve menos demanda de la considerada en el problema.

(c) Si la empresa quisiera abrir una nueva línea de transporte, ¿qué le resultaría más favorable, empezar a servir su producto desde la planta 2 hasta el mercado 1 o desde la planta 3 al mercado 2?

(d) ¿Cómo afectaría al beneficio de la empresa que pudiera reducir la demanda del primer mercado hasta 425 unidades?

(e) Si el beneficio esperado por cada unidad servida desde alguna de las plantas a alguno de los mercados disminuyera 2 unidades, ¿debería la empresa replantearse las cantidades a servir?

(f) Razona cuáles de estos cambios podrían realizarse sin afectar al beneficio de la empresa:

a) aumentar 10 unidades la cantidad servida al mercado 2,

b) servir dos unidades más de la planta 3 al mercado 1,

c) aumentar a 600 unidades las 500 unidades que ahora deben servirse al segundo mercado.

(g) Interpreta el intervalo de sensibilidad del presupuesto de la tercera planta. Di todo lo que podemos afirmar, a partir de la información que da LINGO, sobre las características que tendrá de la nueva solución. (No se valorarán respuestas genéricas que no se refieran al contexto concreto de este problema.)

(h) Si la empresa pudiera aumentar en un 10% el presupuesto de una de sus plantas, ¿a qué mercado convendría destinar la producción adicional?

3. Una empresa fabrica un producto en dos fábricas F_1 y F_2 y lo vende en Madrid y en Valencia, donde hay una demanda de 150 y 250 kg de producto, respectivamente. Para llevarlo desde las fábricas hasta los destinos contrata a una empresa de transporte que sólo está dispuesta a hacer el servicio si la cantidad total transportada es de al menos 450 kg. El problema siguiente determina las cantidades de producto que conviene llevar desde cada fábrica a cada ciudad para minimizar el coste de transporte, teniendo en cuenta que cada fábrica tiene una capacidad máxima de producción.

$$
\begin{array}{rll}
\text{Min.} & 5x_{1M} + 8x_{1V} + 6x_{2M} + 7x_{2V} & \text{coste} \\
\text{s.a} & x_{1M} + x_{1V} \leq 100 & \text{kg servidos desde } F_1 \leq \text{capacidad de } F_1 \\
 & x_{2M} + x_{2V} \leq 500 & \text{kg servidos desde } F_2 \leq \text{capacidad de } F_2 \\
 & x_{1M} + x_{2M} \geq 150 & \text{kg servidos a Madrid} \geq \text{demanda en Madrid} \\
 & x_{1V} + x_{2V} \geq 250 & \text{kg servidos a Valencia} \geq \text{demanda en Valencia} \\
 & x_{1M} + x_{1V} + x_{2M} + x_{2V} \geq 450 & \text{cantidad total transportada} \geq \text{cantidad mínima} \\
 & x_{1M},\, x_{1V},\, x_{2M},\, x_{2V} \geq 0 &
\end{array}
$$

(a) Indica el coste mínimo. ¿Cuántos kg de producto hay que transportar desde la fábrica
2850 F_1 a Madrid?, ¿y desde F_2 a Valencia?

(b) Interpreta los costes reducidos de las variables x_{1V} y x_{2M}.

(c) Interpreta el intervalo de sensibilidad de la variable x_{2V}.

(d) Interpreta el intervalo de sensibilidad de la capacidad de F_2.

(e) Si el coste de transportar cada kg de producto desde F_2 hasta Madrid aumentara 0.5 u.m., ¿convendría entonces reducir la cantidad transportada en ese trayecto?

(f) ¿Cuánto tendría que disminuir el coste de transporte desde F_1 hasta Valencia para que pudiera interesar ese recorrido?

(g) Razona si la afirmación siguiente es verdadera o falsa y corrígela en el segundo caso: *"El precio dual correspondiente a la restricción sobre la capacidad de F_2 vale* 0*, y esto significa que podríamos aumentar la cantidad servida desde F_2 sin que por ello se vieran afectados los costes, ya que aún no se ha agotado toda la capacidad de producción de F_2."*

(h) Razona si la afirmación siguiente es verdadera o falsa y corrígela en el segundo caso: *"El precio dual correspondiente a la restricción sobre la demanda de Madrid vale* 0*, y esto significa que si la demanda de Madrid aumentara una unidad el coste no se vería afectado, ya que la cantidad servida actualmente en Madrid ya cubre esa posible demanda adicional.*

(i) Si la empresa de transporte aumentara a 452 kg la cantidad mínima a transportar, ¿sería conveniente servir producto desde F_1 a Valencia?, ¿cuál sería aproximadamente el nuevo coste?

(j) Si disminuyera la demanda en Valencia un 20%, ¿la nueva solución óptima daría lugar a un excedente de producto en esta ciudad?

4. Una empresa dispone de 5 000 u.m. para invertir en la fabricación de dos productos A y B. Para ello puede hacer uso de dos plantas de producción P_1 y P_2, con unas capacidades máximas de 400 y 175 unidades, respectivamente. El problema siguiente determina las cantidades de cada producto que deben fabricarse en cada planta para maximizar el beneficio de la empresa, teniendo en cuenta que ya se ha hecho un encargo de 100 unidades de A y 200 de B.

Max.	$60x_{A1} + 80x_{A2} + 40x_{B1} + 45x_{B2}$	beneficio
s.a	$x_{A1} + x_{B1} \leq 400$	producción en $P_1 \leq$ capacidad de P_1
	$x_{A2} + x_{B2} \leq 175$	producción en $P_2 \leq$ capacidad de P_2
	$x_{A1} + x_{A2} \geq 100$	producción de $A \geq$ cantidad encargada
	$x_{B1} + x_{B2} \geq 200$	producción de $B \geq$ cantidad encargada
	$40x_{A1} + 20x_{A2} + 10x_{B1} + 5x_{B2} \leq 5\,000$	coste de fabricación $\leq$ presupuesto
	$x_{A1},\, x_{A2},\, x_{B1},\, x_{B2} \geq 0$	

(a) ¿Cuál es el beneficio máximo? ¿Qué cantidad del producto A debe fabricarse en la planta P_2?, ¿y de B en la planta P_1? 21875

(b) Interpreta los costes reducidos de las variables x_{A1} y x_{B2}.

(c) Interpreta el intervalo de sensibilidad de la variable x_{A2}.

(d) Indica cuatro características de la solución actual que seguirían siendo ciertas si la cantidad encargada del producto A aumentara en 10 unidades. ¿El beneficio aumentaría o disminuiría en tal caso?

(e) Si se duplicara el beneficio generado por cada unidad de B fabricada en P_1, ¿esto haría conveniente aumentar su producción en dicha planta?

(f) ¿Cuánto tendría que aumentar como mínimo el beneficio generado por cada unidad de A fabricada en P_1 para que pudiera interesar su fabricación en dicha planta?

(g) Explica por qué la interpretación siguiente sería incorrecta y corrígela: *"El precio dual correspondiente a la restricción sobre la cantidad encargada de B vale* 0*, y esto significa que podríamos reducir la cantidad producida de B sin que por ello se viera afectado el beneficio, ya que estamos produciendo bastante más cantidad de la encargada".*

(h) Si la empresa pudiera aumentar su presupuesto en 2 u.m., ¿interesaría la fabricación de A en P_1?, ¿cuál sería el nuevo beneficio, aproximadamente?

(i) Si aumentara la capacidad de P_2 en un 90%, ¿la nueva solución óptima agotaría la capacidad de dicha planta?

(j) ¿Podemos asegurar que con su presupuesto actual la empresa podría cubrir un aumento de 100 unidades en la demanda del producto B?, ¿y de 200 unidades?

5. Una empresa dispone de tres plantas en las que debe procesar 1 000 toneladas de una materia prima. El proceso tiene dos fases, y la tercera planta tiene una capacidad limitada para la segunda fase, luego parte de la materia prima que ha procesado en la fase 1 debe enviarla a las otras dos plantas para completar la fase 2. El problema siguiente determina cuántas toneladas de materia prima se deben enviar a la planta 1 (`P1`), cuántas se deben enviar a la planta 2 (`P2`), y cuántas de las enviadas a la planta 3 deben acabar de procesarse en cada una de las plantas (`P31`, `P32`, `P33`) para minimizar el coste de la producción teniendo en cuenta que, para que sean operativas, las plantas 1 y 2 deben trabajar conjuntamente al menos un total de 2 000 horas en la segunda fase.

$$\begin{array}{lll}
\text{Min.} & 10P_1 + 15P_2 + 20P_{31} + 18P_{32} + 12P_{33} & \text{Coste} \\
\text{s.a} & P_1 + P_2 + P_{31} + P_{32} + P_{33} = 1\,000 & \text{Toneladas a procesar} \\
& P_1 \leq 200 & \text{Capacidad de } P_1 \text{ para la primera fase} \\
& P_2 \leq 300 & \text{Capacidad de } P_2 \text{ para la primera fase} \\
& P_{33} \leq 100 & \text{Capacidad de } P_3 \text{ para la segunda fase} \\
& 4(P_1 + P_{31}) + 2(P_2 + P_{32}) \geq 2\,000 & \text{Horas empleadas en } P_1 \text{ y } P_2 \\
& P_1,\ P_2,\ P_{31},\ P_{32},\ P_{33} \geq 0 &
\end{array}$$

Responde a las preguntas particularizando las respuestas al problema concreto, evitando en tu conclusión final expresiones generales como "función objetivo" "variable de holgura", etc.

(a) Di cuáles son las variables básicas y no básicas de la solución óptima.

(b) Interpreta los DOS números de la línea

```
     Row    Slack or Surplus      Dual Price
 HORAS12          200.0000        0.000000
```

(c) Si la planta 1 necesitara recibir al menos 3 toneladas de la planta 3, ¿cuánto variaría exactamente el coste de producción?

(d) Las estimaciones de los costes de procesado no son del todo fiables, y alguno de ellos podría ser en realidad una unidad mayor o menor que el previsto. ¿Podía eso alterar la solución más conveniente para la empresa? ¿Y el coste mínimo?

(e) ¿Cuál sería el coste de producción óptimo si la cantidad de materia prima a procesar fuera de 950 toneladas?

(f) En tal caso (si hubiera que procesar 950 toneladas), di todo lo que podemos afirmar, a partir de la información que da LINGO, sobre las características que tendrá la nueva solución. (No se valorarán respuestas genéricas que no se refieran al contexto concreto de este problema.)

(g) Si la empresa pudiera aumentar un 50% la capacidad para la primera fase de una de las dos primeras plantas, ¿de cuál sería más conveniente? ¿Tenemos garantías de que podrá aprovechar totalmente ese aumento?

6. Un empresario está estudiando la posibilidad de aportar capital a cuatro plantas de producción con objeto de hacerlas más eficientes. Actualmente la producción mensual de las cuatro plantas se realiza en 100 000 minutos, y se estima que cada unidad de capital invertida en cada planta puede reducir el tiempo en 3, 7, 4 y 5 minutos respectivamente. El problema siguiente determina qué cantidad de capital conviene invertir en cada planta para minimizar el tiempo total de producción sujeto a unas restricciones presupuestarias, exigiendo además que la utilidad de la inversión no sea inferior a 5 000 unidades y una condición técnica debido a que la producción de la primera planta está condicionada a la de la tercera:

$$\begin{array}{rll} \text{Min.} & 100\,000 - 3x - 7y - 4z - 5w & \text{Tiempo} \\ \text{s.a} & 4x + 5y + 2z + 3w \geq 5000 & \text{Utilidad} \\ & x + y \leq 600 & \text{Presupuesto plantas 1 y 2} \\ & z + w \leq 800 & \text{Presupuesto plantas 3 y 4} \\ & x \geq 2z + 1 & \text{Restricción técnica} \\ & x,\, y,\, z,\, w \geq 0 & \end{array}$$

Responde a las preguntas particularizando las respuestas al problema concreto, evitando en tu conclusión final expresiones generales como “función objetivo” “variable de holgura”, etc.

(a) Razona cuáles son las variables básicas y no básicas de la solución óptima.

(b) ¿Cuál es la utilidad que consigue el empresario con su inversión?

(c) Interpreta los costes reducidos de las variables z y w.

(d) Si el empresario pudiera disponer de más capital, ¿le convendría aumentar el presupuesto de las dos primeras plantas o el de las dos últimas?

(e) Interpreta el intervalo de sensibilidad del presupuesto de las plantas 1 y 2. No se valorarán respuestas genéricas que no se refieran a la situación concreta del problema.

(f) Actualmente, cada unidad de capital invertida en la planta 1 reduce el tiempo de producción en 3 minutos. Si este coeficiente de -3 disminuyera hasta -6, ¿convendría invertir más en dicha planta?

(g) Si el empresario dispusiera de 100 u.m. adicionales para las plantas 3 y 4, ¿en cuál de las plantas convendría invertirlas concretamente? ¿cuál pasará a ser el tiempo de producción?

7. Un inversor se plantea participar en cuatro posibles fondos de inversión, aportando a cada uno de ellos un capital x, y, z, w respectivamente. El problema siguiente determina el capital que conviene invertir en cada fondo para maximizar la rentabilidad esperada, teniendo en cuenta que el máximo capital disponible para invertir es de 100 u.m., que la inversión debe superar un índice mínimo referente a la responsabilidad social de la inversión (invertir en empresas ecológicas, que satisfagan criterios éticos, etc.). Además se imponen dos condiciones de diversificación que fijan un máximo que puede invertirse en los dos primeros fondos y un mínimo requerido en los dos últimos.

$$\begin{array}{rll} \text{Max.} & 0.1x + 0.2y + 0.15z + 0.21w & \text{Rentabilidad} \\ \text{s.a} & x + y + z + w \leq 100 & \text{Capital disponible} \\ & 0.7x + 0.3y + 0.15z + 0.01w \geq 50 & \text{Responsabilidad social} \\ & x + y \leq 70 & \text{Diversificación 1} \\ & z + w \geq 20 & \text{Diversificación 2} \\ & x,\ y,\ z,\ w \geq 0 & \end{array}$$

Responde a las preguntas particularizando las respuestas al problema concreto, evitando en tu conclusión expresiones generales como "función objetivo" "variable de holgura", etc.

(a) Interpreta la variable de holgura de la última restricción.

(b) ¿Qué rentabilidad podría conseguir el inversor si fuera menos exigente con la responsabilidad social de su inversión y se conformara con un índice mínimo de 49.5 unidades?

(c) Si el inversor quiere diversificar aún más su inversión y se plantea invertir al menos 0.1 u.m. en el segundo fondo, ¿cómo afectaría esto a la rentabilidad esperada?

(d) Interpreta el intervalo de sensibilidad del capital disponible.

(e) Si la rentabilidad esperada para el cuarto fondo resultara ser de 0.3, ¿convendría replantearse la inversión?

(f) Interpreta los costes reducidos de las variables X e Y.

(g) Interpreta los precios duales de las restricciones de diversificación. Explica por qué es cero el segundo.

(h) Si el inversor descubriera que la rentabilidad esperada del primer fondo es en realidad 0.09, ¿le convendría reducir el capital invertido en él?

(i) Interpreta el intervalo de sensibilidad del índice de responsabilidad social.

(j) Razona cómo afectaría a la rentabilidad de la inversión que el inversor quisiera aumentar su exigencia de responsabilidad social hasta 53 puntos.

(k) Si el inversor aceptara invertir 71 unidades entre los dos primeros fondos, ¿invertiría una unidad más o seguiría invirtiendo en ellos lo mismo que ahora? Si decidiera invertirla, ¿la invertiría en el primero o en el segundo?

(l) Si permitiéramos invertir 71 unidades entre los dos primeros fondos, ¿invertiríamos 0.5 unidades más en cada uno, o 1 más en el primero, o 1 más en el segundo o no podemos saberlo exactamente? ¿Mejoraría con ello la rentabilidad esperada?

(m) Razona si la afirmación siguiente es verdadera o falsa: "Como el coste reducido de la variable X es 0, podemos afirmar que invertir una unidad más en el primer fondo no afectará a la rentabilidad esperada".

8. Una cooperativa agrícola valenciana quiere distribuir su cosecha de 2 000 t de naranjas entre el consumo interno español y la exportación a tres países: Alemania, Francia y Gran Bretaña. El problema siguiente determina la distribución que maximiza el beneficio teniendo en cuenta que al menos 1 000 toneladas deben destinarse al consumo nacional (una parte V a la Comunidad Valenciana y otra E al resto de España) y que los costes de exportación no deben exceder del presupuesto destinado a tal fin. Además, por razones de mercado la cantidad distribuida en la Comunidad Valenciana debe ser el 10% de la distribuida en el resto de España y la exportación a Alemania y Gran Bretaña se beneficia de una subvención cuya cuantía interesa que no sea inferior a 800 u.m.

$$\begin{array}{rll}
\text{Max.} & 195V + 190E + 220A + 200F + 210GB & \text{beneficio} \\
\text{s.a} & V + E + A + F + GB \leq 2000 & \text{toneladas cosechadas} \\
& V + E \geq 1\,000 & \text{consumo nacional} \\
& V = 0.1E & \text{distribución nacional} \\
& 23A + 5F + 27GB \leq 5000 & \text{coste exportación} \\
& 80A + 90GB \geq 800 & \text{subvención} \\
& V,\, E,\, A,\, F,\, GB \geq 0 &
\end{array}$$

Responde a las preguntas siguientes particularizando la respuesta al problema concreto, evitando en tu conclusión final expresiones generales como "función objetivo", "variable de holgura", etc.

(a) Interpreta el coste reducido de la variable `GB`.

(b) La cooperativa se ha encontrado con que 30 toneladas de naranjas han resultado de calidad insuficiente para su venta por los canales de distribución previstos, pero puede venderlas a una fábrica de zumos por 5 000 u.m. ¿Cuánto va a perder en total a causa de este cambio?

(c) La cooperativa pidió la subvención porque necesitaba las 800 u.m. de financiación para emprender la producción, pero podría haberse propuesto conseguir una cuantía mayor. ¿Le habría convenido hacerlo?

(d) Razona si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas y si son falsas corrígelas:

   i. De las 1 000 toneladas disponibles para consumo nacional sólo se distribuyen 964.

   ii. El coste reducido 0 de la variable `V` indica que la cooperativa podría destinar más toneladas a la Comunidad Valenciana sin que ello afectara a su beneficio.

(e) Calcula los valores máximo y mínimo que puede tomar el presupuesto destinado a la exportación para permanecer en su intervalo de sensibilidad. Indica qué características concretas de la solución óptima seguirán cumpliéndose mientras dicho presupuesto no se salga del intervalo.

(f) Si la empresa pudiera aumentar en 5 u.m. el precio por tonelada en alguno de los cinco posibles destinos, ¿le convendría modificar las cantidades distribuidas? ¿Podría dar lugar esto a alguna variación en el beneficio óptimo?

(g) La cooperativa se plantea destinar 100 u.m. adicionales a financiar la exportación. ¿Cómo repercutiría ello en sus beneficios? ¿Le convendría utilizar las 100 u.m. o quedaría una parte sin gastar? ¿Con dicha financiación adicional convendría servir naranjas a Gran Bretaña?

9. Una empresa dispone de tres plantas industriales para la fabricación de dos productos A y B. A lo largo del mes próximo desea producir al menos 1 000 t de A y 2 300 t de B con coste mínimo. Cada planta tiene una capacidad máxima para la producción mensual que no puede ser rebasada. Por otra parte, en las plantas 1 y 2 hay un stock de una materia prima perecedera M que debe gastarse necesariamente el próximo mes (sin perjuicio de que, en caso de que sea necesario, pueda adquirir más cantidad). En cambio, en la planta 3 las reservas disponibles de una segunda materia prima N están limitadas y no es previsible que pueda conseguirse más durante el próximo mes. El problema siguiente determina las cantidades que le conviene producir a la empresa de cada producto en cada una de las plantas:

$$
\begin{array}{rll}
\text{Min.} & 10A_1 + 17B_1 + 8A_2 + 20B_2 + 7A_3 + 15B_3 & \textit{Coste} \\
\text{s.a} & A_1 + A_2 + A_3 \geq 1000 & \textit{Producción mínima de A} \\
& B_1 + B_2 + B_3 \geq 2300 & \textit{Producción mínima de B} \\
& A_1 + B_1 \leq 2000 & \textit{Capacidad planta 1} \\
& A_2 + B_2 \leq 1200 & \textit{Capacidad planta 2} \\
& A_3 + B_3 \leq 800 & \textit{Capacidad planta 3} \\
& 5A_1 + B_1 \geq 6100 & \textit{Stock de M en la planta 1} \\
& 5A_2 + B_2 \geq 300 & \textit{Stock de M en la planta 2} \\
& 22A_3 + 10B_3 \leq 2000 & \textit{Reservas de N en la planta 3} \\
& A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 \geq 0 &
\end{array}
$$

Responde a las preguntas siguientes particularizando las respuestas al ejemplo concreto, evitando en tu conclusión final expresiones generales como “función objetivo”, “variable de holgura”, “término independiente”, etc.

(a) ¿Qué cantidad de cada producto conviene producir en la planta 1? ¿Cuál es el coste total de la producción?

(b) Di cuáles son las variables básicas y cuáles las no básicas de la solución óptima.

(c) Razona qué efecto tendría sobre el coste que se estropearan 50 t del stock de M de la planta 1.

(d) Interpreta las dos cantidades de la fila

```
Row    Slack or Surplus   Dual Price
 M2        825.0000        0.000000
```

(e) Supongamos que, por razones de transporte, independientemente de la cantidad que produzca en la fábrica 1, la empresa necesita fabricar al menos 10 unidades del producto A bien en la fábrica 2 o bien en la 3. ¿En cuál sería más conveniente?

(f) Si la empresa pudiera aumentar la capacidad de producción de alguna de las fábricas, ¿de cuál sería preferible?

(g) Supón que la empresa consigue abaratar el proceso productivo del artículo B en la fábrica 2 de modo que el coste unitario pasa a ser de 6 u.m/t. ¿Convendría entonces replantearse las cantidades a producir en cada fábrica?

(h) Interpreta los tres números que aparecen en la línea siguiente, haciendo referencia al contexto concreto del problema:

```
                 Current        Allowable        Allowable
     Row             RHS         Increase         Decrease
      M1        6100.000         300.0000         100.0000
```

(i) Si la empresa pudiera aumentar sus reservas de la materia prima N a 3 000 unidades, ¿las usaría o seguiría usando la misma cantidad de que dispone actualmente?

(j) Si la empresa quisiera producir 50 unidades más del producto B, ¿podemos saber si hará falta más materia prima M en la planta 1 que ahora?, ¿y en la planta 2? ¿Cuánto variará el coste?

10. Un comerciante dispone de un stock de tres clases de aceite, en cantidades respectivas de 9 000, 15 000 y 12 000 litros y piensa transportar parte de los productos en dos camiones para su venta. El problema siguiente determina los litros de cada tipo de aceite que debe cargar en cada camión para obtener el máximo beneficio con la venta teniendo en cuenta que los camiones tienen una capacidad de 10 y 20 toneladas respectivamente y que, por razones de espacio, necesita sacar de su almacén al menos 8 000 litros del aceite 2 y otros 8 000 del aceite 3.

$$
\begin{array}{rll}
\text{Max.} & 150x_1 + 200x_2 + 80y_1 + 50y_2 + 40z_1 + 45z_2 & \text{Beneficio} \\
\text{s.a} & 0.92x_1 + 0.94y_1 + 1.1z_1 \leq 10\,000 & \text{Capacidad camión 1} \\
 & 0.92x_1 + 0.94y_1 + 1.1z_1 \leq 20\,000 & \text{Capacidad camión 2} \\
 & x_1 + x_2 \leq 9\,000 & \text{Stock aceite 1} \\
 & y_1 + y_2 \leq 15\,000 & \text{Stock aceite 2} \\
 & z_1 + z_2 \leq 12\,000 & \text{Stock aceite 3} \\
 & y_1 + y_2 \geq 8\,000 & \text{Condición aceite 2} \\
 & z_1 + z_2 \geq 8\,000 & \text{Condición aceite 3} \\
 & x_1,\, x_2,\, y_1,\, y_2,\, z_1,\, z_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

(a) Razona cuáles son las variables básicas y las no básicas de la solución óptima.

(b) Razona si la afirmación siguiente es verdadera o falsa y en caso de ser falsa corrígela: "Como la holgura de la restricción `CONDICION2` es de 5744.681, esto significa que de los 8 000 litros de aceite 2 que hay que transportar, en realidad sólo se transportan 5 744.681".

(c) Si el comerciante pudiera sustituir uno de los camiones por otro de mayor capacidad, ¿cuál sería preferible que sustituyera?

(d) Los dos camiones se dirigen a distribuidoras distintas. ¿Cómo afectaría a los beneficios que el comerciante tuviera que servir 100 litros de aceite 1 al primer distribuidor (el que recibe el primer camión)?

(e) Si, debido a un aumento de los costes de transporte, el beneficio que proporciona cada litro de aceite 3 transportado en el camión 2 pasara a ser de 30 u.m., ¿qué cantidad de aceite 3 convendría transportar en esas condiciones en el camión 2?

(f) Si el comerciante quisiera desprenderse de al menos 10 000 litros del aceite 3, ¿le convendría reducir la cantidad a transportar de aceite 1? ¿Cómo afectaría al beneficio esta decisión?

11. Un comerciante dispone de un stock de tres clases de aceite, en cantidades respectivas de 9 000, 15 000 y 12 000 litros y piensa transportar parte de los productos en dos camiones para su venta. El problema siguiente determina los litros de cada tipo de aceite que debe cargar en cada camión para obtener el máximo beneficio con la venta teniendo en cuenta que los camiones tienen una capacidad de 10 y 20 toneladas respectivamente y que, por razones de espacio, necesita sacar de su almacén al menos 8 000 litros del aceite 2 y otros 8 000 del aceite 3.

$$
\begin{array}{rll}
\text{Max.} & 150x_1 + 200x_2 + 80y_1 + 50y_2 + 40z_1 + 45z_2 & \text{Beneficio} \\
\text{s.a} & 0.92x_1 + 0.94y_1 + 1.1z_1 \leq 10\,000 & \text{Capacidad camión 1} \\
& 0.92x_1 + 0.94y_1 + 1.1z_1 \leq 20\,000 & \text{Capacidad camión 2} \\
& x_1 + x_2 \leq 9\,000 & \text{Stock aceite 1} \\
& y_1 + y_2 \leq 15\,000 & \text{Stock aceite 2} \\
& z_1 + z_2 \leq 12\,000 & \text{Stock aceite 3} \\
& y_1 + y_2 \geq 8\,000 & \text{Condición aceite 2} \\
& z_1 + z_2 \geq 8\,000 & \text{Condición aceite 3} \\
& x_1,\, x_2,\, y_1,\, y_2,\, z_1,\, z_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

(a) Resuelve el problema con LINGO.

(b) Razona cuáles son las variables básicas y las no básicas de la solución óptima.

(c) Razona si la afirmación siguiente es verdadera o falsa y en caso de ser falsa corrígela: “Como la holgura de la restricción `CONDICION2` es de 5744.681, esto significa que de los 8 000 litros de aceite 2 que hay que transportar, en realidad sólo se transportan 5 744.681”.

(d) Si el comerciante pudiera sustituir uno de los camiones por otro de mayor capacidad, ¿cuál sería preferible que sustituyera?

(e) Los dos camiones se dirigen a distribuidoras distintas. ¿Cómo afectaría a los beneficios que el comerciante tuviera que servir 100 litros de aceite 1 al primer distribuidor (el que recibe el primer camión)?

(f) Si, debido a un aumento de los costes de transporte, el beneficio que proporciona cada litro de aceite 3 transportado en el camión 2 pasara a ser de 30 u.m., ¿qué cantidad de aceite 3 convendría transportar en esas condiciones en el camión 2?

(g) Si el comerciante quisiera desprenderse de al menos 10 000 litros del aceite 3, ¿le convendría reducir la cantidad a transportar de aceite 1? ¿Cómo afectaría al beneficio esta decisión?

12. Un comerciante tiene un presupuesto de 1 000 € para reponer su stock de tres marcas de cerveza: *Mouha, San Ezequiel y Dumm.* De las dos primeras compra con y sin alcohol, mientras que *Dumm* sólo produce cerveza con alcohol. El problema siguiente determina los litros de cada tipo de cerveza de cada marca para maximizar los beneficios teniendo en cuenta que quiere gastar al menos 400 € en cerveza con alcohol y 350 en cerveza sin alcohol. Además, por ser la más vendida, quiere comprar al menos 200 litros más de marca San Ezequiel que de las otras dos.

$$\begin{array}{rll}
\text{Max.} & 0.70Mc + 0.60Ec + 0.56Dc + 0.70Ms + 0.30Es & \text{Beneficio} \\
\text{s.a} & Mc + 0.80Ec + 0.60Dc + 0.60Ms + 0.40Es \leq 1\,000 & \text{Presupuesto} \\
 & Mc + 0.80Ec + 0.60Dc \geq 400 & \text{Con alcohol} \\
 & 0.60Ms + 0.40Es \geq 350 & \text{Sin alcohol} \\
 & Ec + Es - Mc - Ms - Dc \geq 200 & \text{San Ezequiel} \\
 & Mc,\ Ec,\ Dc,\ Ms,\ Es \geq 0 &
\end{array}$$

(a) Resuelve el problema con LINGO.

(b) Razona cuáles son las variables básicas y las no básicas de la solución óptima.

(c) Razona si la afirmación siguiente es verdadera o falsa y en caso de ser falsa corrígela: "Como la holgura de la restricción `SIN` es de 250 €, esto significa que de los 350 € que el comerciante pretende gastar en cerveza sin alcohol, sólo le conviene gastar 250 €".

(d) Interpreta el precio dual de la restricción correspondiente a la cerveza con alcohol.

(e) Observa que sólo conviene comprar cerveza con alcohol de una marca. Si el comerciante quisiera comprar 50 litros de otra marca, ¿de cuál le convendría más? ¿Cómo variarían sus beneficios en tal caso?

(f) El comerciante ha observado que si sube 0.30 € el precio de venta de una de las cervezas (y, por consiguiente, el beneficio que obtiene por litro), le conviene seguir comprando las mismas cantidades de cada tipo. ¿En cuál de las cervezas está pensando?

(g) Si el comerciante tuviera 400 € más de presupuesto, ¿cuánto pasaría a gastar en total en cerveza?, ¿y en cerveza con alcohol?, ¿y en cerveza sin alcohol?

13. Una empresa necesita producir 500 t de un material de construcción en el mínimo tiempo posible. Para ello puede combinar diferentes procesos de producción, cada uno de los cuales tiene su propio tiempo de ejecución, su propio coste y su propio consumo de materias primas. El problema siguiente determina las toneladas de material que debe producir con cada proceso para que las horas necesarias sean las mínimas sin exceder el presupuesto disponible ni los 2 000 kg disponibles de una materia prima.

$$
\begin{array}{lll}
\text{Min.} & 0.5x + 0.3y + 0.2z & \text{Horas} \\
\text{s.a} & x + y + z \geq 500 & \text{Producción total} \geq \text{producción requerida} \\
 & 3x + 5y + \;\; 7z \leq 2\,200 & \text{Coste} \leq \text{presupuesto} \\
 & 10x + y + 15z \leq 2\,000 & \text{kg de input} \leq \text{kg disponibles} \\
 & x,\, y,\, z \geq 0 &
\end{array}
$$

(a) Resuelve el problema con LINGO. Indica las cantidades a producir con cada proceso y las horas necesarias para la producción.

(b) Interpreta el 150 que aparece en la columna `Slack or Surplus`.

(c) Interpreta el coste reducido de las variables y, z.

(d) ¿Qué presupuesto adicional necesitaría la empresa para reducir el tiempo necesario en 10 horas?

(e) ¿Cómo se interpreta que el precio dual de la primera restricción sea negativo?

(f) Escribe el intervalo de sensibilidad del presupuesto e interprétalo en términos concretos referidos al problema específico.

(g) Razona a partir de la solución obtenida en (a) si en caso de que la producción requerida fuera de 450 t disminuiría el coste de la producción.