MATEMÁTICAS II

PRÁCTICAS CON LINGO

Carlos Ivorra

1 Introducción a la modelización

El objetivo de estas prácticas es aprender a resolver problemas de optimización matemática con la ayuda de la aplicación LINGO. El primer paso antes de poder usar el ordenador es modelizar el problema, es decir, formularlo en términos matemáticos adecuados. Ilustraremos este proceso con la ayuda de un ejemplo:

Problema *Una fábrica se propone confeccionar una serie de trofeos deportivos, correspondientes a las modalidades de fútbol, baloncesto, carrera y tenis. Cada trofeo requiere varios materiales para su fabricación: madera para la base, acero para la estructura y oro para dorados y embellecedores. Además, se conocen las horas de mano de obra que requiere cada trofeo. Los datos aparecen en la tabla siguiente:*

	Madera (en kg)	Acero (en kg)	Oro (en kg)	Mano de obra (en horas)
Fútbol	0.4	0.6	0.2	2.2
Baloncesto	0.5	0.3	0.1	1.7
Carrera	0.6	0.3	0.1	1.2
Tenis	0.4	0.45	0.15	1.3

Por otra parte, la empresa dispone de 55 *kg de madera,* 39 *kg de acero,* 23 *kg de oro y* 175 *horas de mano de obra, y los ingresos que obtiene son de* 7.20 € *por cada trofeo de fútbol,* 4.50 € *por cada trofeo de baloncesto,* 4.80 € *por cada uno de carrera y* 6 € *por cada uno de tenis.*

Determinar la producción que maximiza los ingresos.

La modelización de cualquier problema puede descomponerse en las etapas siguientes:

1) Elección de las variables Las variables del problema se corresponden con las magnitudes cuyo valor podemos decidir. Así, la empresa no puede decidir qué ingresos va a tener, pero sí cuántos trofeos va a fabricar de cada tipo, y esta decisión determinará los ingresos. Ello nos lleva a la siguiente elección de las variables:

F número de trofeos de fútbol que conviene fabricar,
B número de trofeos de baloncesto que conviene fabricar,
C número de trofeos de carrera que conviene fabricar,
T número de trofeos de tenis que conviene fabricar.

Es importante dejar bien claro el significado de cada variable de un modelo.

2) Formulación de las restricciones Hemos dicho que la empresa puede decidir qué cantidad de trofeos fabricará de cada tipo, es decir, que tiene libertad para asignar los valores de las variables F, B, C y T, pero ello no significa que tenga libertad *absoluta*. Por ejemplo, la empresa no puede tomar la decisión de fabricar 1 000 trofeos de fútbol, pues para ello necesitaría 400 kg de madera, y sólo dispone de 55.

Más precisamente, para fabricar F trofeos de fútbol se requieren $0.4\,F$ kg de madera, para fabricar B trofeos de baloncesto hacen falta $0.5\,B$ kg de madera, para fabricar C trofeos de carrera hacen falta $0.6\,C$ kg de madera y para fabricar T trofeos de tenis hacen falta $0.4\,T$ kg de madera. Las necesidades totales de madera son, pues, $0.4\,F+0.5\,B+0.6\,C+0.4\,T$. Como la empresa dispone de 55 kg, su decisión deberá satisfacer la restricción

$$0.4\,F + 0.5\,B + 0.6\,C + 0.4\,T \leq 55.$$

Así mismo tenemos restricciones debidas a las limitaciones en los otros materiales y en la mano de obra. En total, las restricciones a las que nos hemos de ajustar son:

$$\begin{array}{ll} \text{Madera} & 0.4\,F + 0.5\,B + 0.6\,C + 0.4\;\;T \leq 55 \\ \text{Acero} & 0.6\,F + 0.3\,B + 0.3\,C + 0.45\,T \leq 39 \\ \text{Oro} & 0.2\,F + 0.1\,B + 0.1\,C + 0.15\,T \leq 23 \\ \text{Mano de obra} & 2.2\,F + 1.7\,B + 1.2\,C + 1.3\;\;T \leq 175 \end{array}$$

Hay otras restricciones que no por obvias debemos dejar de explicitar, pues son muy importantes a la hora de resolver el problema: las variables no pueden tomar valores negativos:

$$F,\, B,\, C,\, T \geq 0.$$

3) Determinación de la función objetivo La empresa puede hacer infinitas elecciones distintas de modo que se respeten las restricciones anteriores. El problema es encontrar la mejor y, para ello, hemos de especificar qué entendemos por una solución mejor que otra. En nuestro caso, una solución será mejor cuantos más ingresos proporcione a la empresa. Es claro que una producción (F, B, C, T) proporciona unos ingresos dados por la función

$$I = 7.20\,F + 4.50\,B + 4.80\,C + 6\,T.$$

Por lo tanto nuestro objetivo será maximizar la función I. Notemos que con esto no sólo hemos especificado la función objetivo, sino también la dirección de optimización, que en nuestro caso es maximizar, si bien en otros contextos podría ser minimizar.

Con todo esto, hemos llegado a la siguiente modelización de nuestro problema:

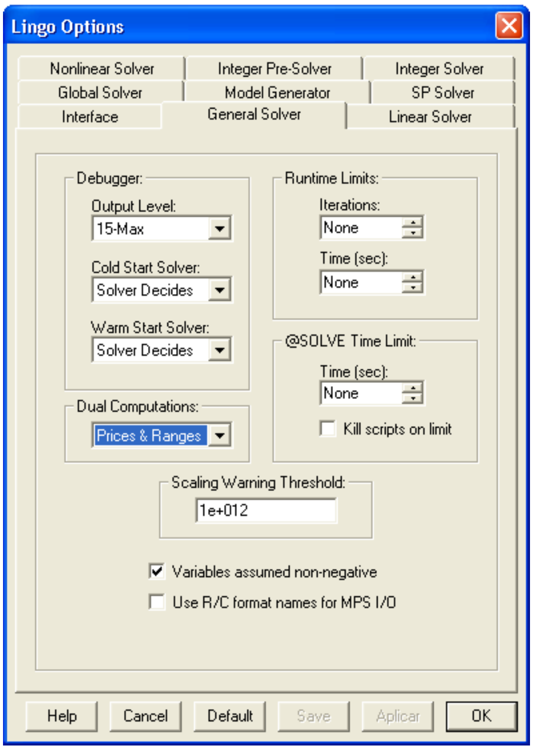
$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 7.20\,F + 4.50\,B + 4.80\,C + 6\,T \\ \text{s.a} & 0.4\,F + 0.5\,B + 0.6\,C + 0.4\;\;T \leq 55 \\ & 0.6\,F + 0.3\,B + 0.3\,C + 0.45\,T \leq 39 \\ & 0.2\,F + 0.1\,B + 0.1\,C + 0.15\,T \leq 23 \\ & 2.2\,F + 1.7\,B + 1.2\,C + 1.3\;\;T \leq 175 \\ & F,\, B,\, C,\, T \geq 0 \end{array}$$

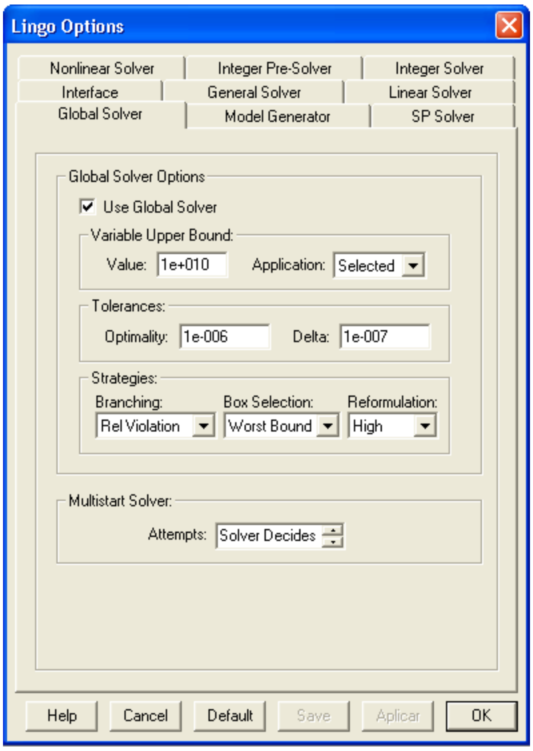
Ahora ya estamos en condiciones de pedirle al ordenador que nos ayude a encontrar la solución óptima.

2 Introducción a LINGO

Para empezar a usar LINGO hemos de abrir la aplicación y crear un documento en blanco sobre el que escribir (aunque ya se crea uno por defecto al abrir LINGO, si lo hemos cerrado o queremos otro nuevo, basta acudir al menú File → New). Como en cualquier otra aplicación, podemos guardar en cualquier momento nuestro trabajo mediante el menú File → Save o File → Save as... El documento se guardará con la extensión .lg4.

La única configuración que requiere el programa (al menos, para el uso que nosotros le daremos) se introduce mediante el menú LINGO → Options... Aparece entonces un panel de opciones con varias pestañas.





Sólo hemos de comprobar cuatro cosas:

1. Que, en la pestaña titulada “General Solver”, en la casilla “Dual Computations:” esté seleccionada la opción “Prices & Ranges”.

2. Que en esa misma pestaña esté marcada la opción “Variables assumed non-negative”.

3. Que en la pestaña titulada “Global Solver” esté marcada la opción “Use Global Solver”.

4. Que en la pestaña titulada “Model Generator” esté marcada la opción Unary Minus Priority: Low.

Si pulsamos el botón “Save” de la parte inferior del cuadro, el ordenador recordará estas opciones las próximas veces que usemos LINGO, y no será necesario volver a especificarlas, pero si usamos el programa en otro ordenador (por ejemplo, un ordenador del aula de informática que no sabemos cómo ha sido configurado), deberemos abrir este cuadro de opciones para comprobar que la configuración es correcta.

Ahora ya podemos escribir el problema, para lo cual tecleamos lo siguiente:

```
[Ingresos] Max=7.20*F+4.50*B+4.80*C+6*T;
[Madera] 0.4*F+0.5*B+0.6*C+0.4*T<55;
[Acero] 0.6*F+0.3*B+0.3*C+0.45*T<39;
[Oro] 0.2*F+0.1*B+0.1*C+0.15*T<23;
[Mano_de_obra]2.2*F+1.7*B+1.2*C+1.3*T<175;
```

En general, a la hora de introducir un problema en LINGO hemos de tener en cuenta lo siguiente:

1. Cada ecuación termina siempre con un punto y coma. Si una ecuación fuera muy larga y no cupiera en una línea, podemos cambiar de línea cuando queramos. LINGO entenderá que la ecuación termina cuando encuentre el punto y coma.

2. La función objetivo empieza con `Max =` si el objetivo es maximizar y con `Min =` si el objetivo es minimizar.

3. En lugar de escribir $\leq$ o $\geq$ hemos de escribir $<$ o $>$. Las restricciones de igualdad se introducen con $=$.

4. Es necesario escribir los productos con el signo $*$, de modo que obtendríamos un error si escribiéramos `7.20F` en lugar de `7.20*F` .

5. La coma decimal se representa con un punto.

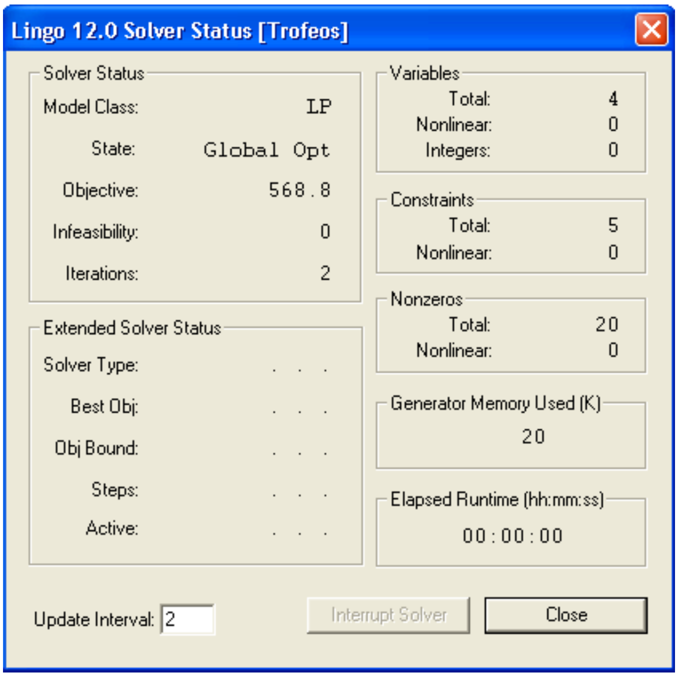
6. Las potencias se introducen con el circunflejo `^` . Por ejemplo, F^4 se escribiría `F^4`.

7. No es necesario introducir las condiciones de no negatividad, $F, B, C, T \geq 0$, sino que LINGO las da por supuestas. Si quisiéramos especificar que una variable, por ejemplo F, es libre, añadiríamos una nueva línea `@Free(F);`

8. Los nombres de las variables pueden constar de una o más letras (pero no espacios en blanco, acentos, ni eñes, etc.). Por ejemplo, podríamos haber llamado a las variables `x1`, `x2`, etc. (Además el primer signo ha de ser una letra y no un número. Por ejemplo, `1x` no valdría como nombre de variable.)

9. Las palabras entre corchetes antes de las restricciones no son necesarias, pero ayudan a leer después la solución. Han de cumplir las mismas condiciones que los nombres de las variables. En particular no pueden tener espacios en blanco. Si queremos poner varias palabras podemos usar guiones bajos, como en `Mano_de_obra`.

Una vez introducido el modelo, lo resolvemos con el menú LINGO → Solve, o bien con el icono en forma de diana ( ) que hay en la parte superior de la ventana. Si no se produce ningún error, obtendremos una ventana con este aspecto:



La única información que nos interesa es “State: Global Opt”, que nos indica que LINGO ha obtenido un óptimo global. Las posibilidades son:

Global Opt: óptimo global.

Local Opt: óptimo local. En tal caso deberemos estudiar si el óptimo es global mediante convexidad.

Infeasible/Unbounded: infactible/no acotado. En este caso aparecerá antes un cuadro de error advirtiéndonos de que el problema no tiene solución.

Unknown: Desconocido. Se da este caso cuando LINGO encuentra un error y no resuelve el problema.

Si LINGO ha encontrado una solución óptima (global o local), cerramos la ventana anterior y veremos otra ventana titulada "Solution Report", que contiene (entre otras líneas que no nos interesan) dos tablas con la solución del problema. Para nuestro problema son:

Variable	Value	Reduced Cost
F	0.000000	0.4800000
B	0.000000	0.6000000E-01
C	61.00000	0.000000
T	46.00000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
INGRESOS	568.8000	1.000000
MADERA	0.000000	2.400000
ACERO	0.000000	11.20000
ORO	10.00000	0.000000
MANO_DE_OBRA	42.00000	0.000000

Si queremos guardar la solución deberemos ir al menú FILE → Save o FILE → Save as..., y obtendremos un documento de extensión .lgr.

Interpretación de la solución El significado de las dos tablas que proporciona LINGO es el siguiente:

1. En la primera tabla, la columna `Value` contiene el valor óptimo de cada variable. En nuestro ejemplo, vemos que conviene fabricar 0 trofeos de fútbol, 0 de baloncesto, 61 de carrera y 46 de tenis.

2. En la primera tabla, la columna `Reduced Cost` indica[1] lo que empeoraría la función objetivo (es decir, lo que disminuiría si el problema es de maximizar o lo que aumentaría si es de minimizar) si en lugar de haber exigido que la variable correspondiente fuera no negativa (es decir, $F \geq 0$), hubiéramos exigido $F \geq 1$. En nuestro ejemplo:

   - Hemos visto que no conviene producir trofeos de fútbol, pero si exigiéramos producir uno (es decir, si exigiéramos $F \geq 1$) nuestros ingresos disminuirían 0.48 € (o, más en general, por cada trofeo que fabricáramos de fútbol, perderíamos 0.48 €).
   - Hemos visto que no conviene producir trofeos de baloncesto, pero si exigiéramos producir uno (es decir, si exigiéramos $B \geq 1$) nuestros ingresos disminuirían 0.06 € (o, más en general, por cada trofeo que fabricáramos de baloncesto, perderíamos 0.06 €).
   - Como conviene producir 61 trofeos de carrera, si exigiéramos producir al menos uno ($C \geq 1$) seguiríamos produciendo 61, con lo que la solución sería la misma y los ingresos no variarían. Por eso el coste reducido es 0.

     ¡Atención! Sería un error muy grave interpretar el coste reducido igual a 0 como que si en lugar de producir 61 trofeos de carrera decidiéramos producir 62 los ingresos serían los mismos.

[1] El coste reducido es el multiplicador de Kuhn y Tucker de la condición de signo correspondiente a la variable, con el signo cambiado si el problema es de maximizar.

- Como conviene producir 46 trofeos de tenis, si exigiéramos producir al menos uno ($T \geq 1$) seguiríamos produciendo 46, con lo que la solución sería la misma y los ingresos no variarían. Por eso el coste reducido es 0.

3. En la segunda tabla, la fila correspondiente a la función objetivo contiene su valor óptimo (y en la segunda columna habrá siempre un 1). En nuestro caso, el máximo ingreso que podemos obtener con los trofeos es de 568.8 €.

4. En la segunda tabla, para las filas asociadas a las restricciones, la columna `Slack` contiene la *variable de holgura* de la restricción correspondiente, es decir, la diferencia entre el valor que toma la restricción y el valor máximo o mínimo que puede tomar. En nuestro ejemplo:
   - La holgura de la restricción sobre la madera es 0, lo cual significa que para fabricar los trofeos necesitaremos los 55 kg de madera disponibles (no sobrará nada).
   - Igualmente, la holgura del acero es 0, por lo que necesitaremos los 39 kg de acero disponibles.
   - La holgura del oro es 10, lo que significa que al fabricar los trofeos nos sobrarán 10 kg de oro, es decir, que sólo usaremos 13 de los 23 kg disponibles.
   - La holgura de la mano de obra es 42, lo que significa que para fabricar los trofeos nos sobrarán 42 horas de mano de obra de las 175 horas disponibles.

5. En la segunda tabla, la columna `Dual Price` indica[2] lo que mejoraría la función objetivo (lo que aumentaría si el problema es de maximizar o lo que disminuiría si es de minimizar) por cada unidad que pudiéramos aumentar el término independiente de la restricción correspondiente. En nuestro ejemplo:
   - Por cada kg más de madera de que pudiéramos disponer, nuestros ingresos aumentarían en 2.4 €.
   - Por cada kg más de acero de que pudiéramos disponer, nuestros ingresos aumentarían en 11.2 €.
   - Como nos sobra oro, disponer de 1 kg más de oro no nos ayudaría en nada, la solución sería la misma y los ingresos también. Por eso el precio dual es 0.
   - Lo mismo sucede con la mano de obra.

NOTA Observa cómo ha expresado LINGO el coste reducido de la variable B: `0.6000000E-01`. En general, la notación `1.3400000E3` significa 1 340, es decir, que hay que correr la coma 3 lugares hacia la derecha (porque el número tras la `E` es positivo, si fuera negativo, como en el caso de la variable B de nuestro ejemplo, hay que correrla hacia la izquierda).

Análisis de sensibilidad Para problemas de programación lineal (como es el caso del problema de los trofeos) podemos pedir a LINGO información adicional sobre la solución. Para ello hacemos lo siguiente:

1. Ponemos en primer plano la ventana en la que hemos escrito el modelo (no la que contiene la solución).
2. Vamos al menú LINGO → Range.

Así se abrirá una nueva ventana (cuyo contenido podemos guardar mediante FILE → Save) con dos nuevas tablas:

[2] El precio dual es el multiplicador de Kuhn y Tucker de la restricción correspondiente, con el signo cambiado si el problema es de minimizar.

```
                    Objective Coefficient Ranges:

                      Current        Allowable        Allowable
      Variable      Coefficient       Increase         Decrease
             F         7.200000       0.4800000        INFINITY
             B         4.500000       0.6000000E-01    INFINITY
             C         4.800000        1.200000       0.8571429E-01
             T         6.000000        1.200000       0.3000000

                         Righthand Side Ranges:

                      Current        Allowable        Allowable
           Row            RHS         Increase         Decrease
        MADERA         55.00000        23.00000         20.33333
         ACERO         39.00000        21.00000         11.50000
           ORO         23.00000        INFINITY         10.00000
  MANO_DE_OBRA         175.0000        INFINITY         42.00000
```

La interpretación es la siguiente:

1. La primera tabla contiene, en su primera columna, el coeficiente de la función objetivo de la variable correspondiente, y en las otras dos columnas lo que puede aumentar y lo que puede disminuir dicho coeficiente para que la solución óptima siga siendo la misma. En nuestro ejemplo:

   - El ingreso que proporciona cada trofeo de fútbol es de 7.2 €, y mientras dicho ingreso no aumente más de 0.48 € (es decir, mientras no sobrepase los 7.68 €) la solución óptima seguirá siendo la misma. (El `INFINITY` en la tercera columna significa que por mucho que disminuya dicho ingreso por trofeo la solución óptima seguirá siendo la misma.)
   - El ingreso que proporciona cada trofeo de baloncesto es de 4.5 €, y mientras dicho ingreso no aumente más de 0.06 € (es decir, mientras no sobrepase los 4.56 €) la solución óptima seguirá siendo la misma.
   - El ingreso que proporciona cada trofeo de carrera es de 4.8 €, y mientras dicho ingreso no aumente más de 1.20 € o disminuya más de 0.08 € la solución óptima seguirá siendo la misma.
   - El ingreso que proporciona cada trofeo de tenis es de 6 €, y mientras dicho ingreso no aumente más de 1.20 € o disminuya más de 0.30 € la solución óptima seguirá siendo la misma.

2. La segunda tabla contiene, en su primera columna, el término independiente de la restricción correspondiente, y en las otras dos columnas lo que puede aumentar y lo que puede disminuir dicho coeficiente para que la solución óptima tenga las mismas variables básicas. El significado preciso de esta afirmación se estudiará más adelante, pero, de momento, como una aproximación aceptable para trabajar, podemos entenderlo así: mientras el término independiente se mantenga en el rango indicado, las variables (incluidas las de holgura) que en la solución óptima valen 0 seguirán tomando el valor 0.

   En nuestro ejemplo, las variables que valen 0 son F, B y las variables de holgura de la madera y el acero. Por lo tanto:

   - Disponemos de 55 kg de madera, y mientras la cantidad de madera disponible no aumente en más de 23 kg o disminuya en más de 20.33 kg seguirá sin convenir fabricar trofeos de fútbol y de baloncesto y seguiremos empleando toda la madera y todo el acero disponibles.
   - Disponemos de 39 kg de acero, y mientras la cantidad de acero disponible no aumente en más de 21 kg o disminuya en más de 11.5 kg seguirá sin convenir fabricar trofeos de fútbol y de baloncesto y seguiremos empleando toda la madera y todo el acero disponibles.

- Disponemos de 23 kg de oro, y mientras la cantidad de oro disponible no disminuya en más de 10 kg seguirá sin convenir fabricar trofeos de fútbol y de baloncesto y seguiremos empleando toda la madera y todo el acero disponibles.
- Disponemos de 157 horas de mano de obra, y mientras la cantidad de horas de mano de obra disponibles no disminuya en más de 42 horas seguirá sin convenir fabricar trofeos de fútbol y de baloncesto y seguiremos empleando toda la madera y todo el acero disponibles.

Variables enteras Supongamos que la cantidad de madera necesaria para fabricar un trofeo de tenis fuera de 0.3 kg en lugar de 0.4, como habíamos supuesto. Si modificamos este dato y volvemos a resolver el problema, obtenemos la solución siguiente:

```
    Variable           Value        Reduced Cost
           F        0.000000           0.8000000
           B        0.000000           0.1000000
           C        72.50000            0.000000
           T        38.33333            0.000000

         Row    Slack or Surplus      Dual Price
    INGRESOS        578.0000            1.000000
      MADERA        0.000000            2.000000
       ACERO        0.000000            12.00000
         ORO        10.00000            0.000000
MANO_DE_OBRA        38.16667            0.000000
```

Esto significa que hemos de fabricar 72.5 trofeos de carrera y 38.33 trofeos de tenis, pero esto es absurdo. Si fabricamos medio trofeo de carrera no vamos a ganar nada con ello, porque nadie nos comprará un trofeo sin acabar. La solución de este problema sólo tiene sentido si las cantidades a producir son enteras. La forma de obligar a LINGO a que nos proporcione soluciones enteras es añadir al modelo la línea

```
@GIN(F); @GIN(B); @GIN(C); @GIN(T);
```

(En realidad son cuatro instrucciones distintas, por eso van separadas por punto y coma, pero da igual escribirlas en la misma línea o una debajo de otra.) Ahora la solución que obtenemos es

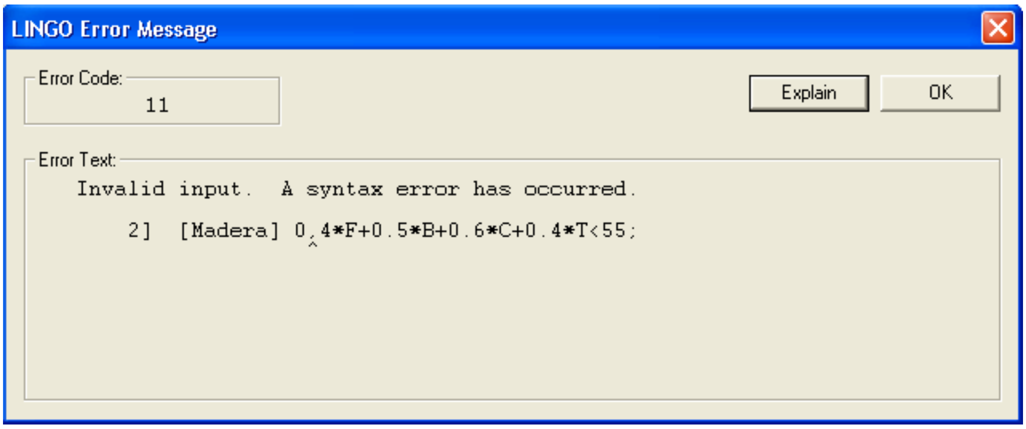
```
    Variable           Value        Reduced Cost
           F        0.000000           -7.200000
           B        2.000000           -4.500000
           C        71.00000           -4.800000
           T        38.00000           -6.000000

         Row    Slack or Surplus      Dual Price
    INGRESOS        577.8000            1.000000
      MADERA        0.000000            0.000000
       ACERO        0.000000            0.000000
         ORO        10.00000            0.000000
MANO_DE_OBRA        37.00000            0.000000
```

Lo que supone fabricar 2 trofeos de baloncesto, 71 de carrera y 38 de tenis, lo cual sí que es factible. Notemos que la solución entera no se obtiene redondeando la solución fraccionaria. Si nos hubiéramos limitado a redondear habríamos concluido que nos convenía producir únicamente 72 trofeos de carrera y 38 de tenis, con lo que habríamos obtenido unos ingresos de 573.6 €, que son inferiores a los 577.8 € de la solución que nos ha proporcionado LINGO.

A veces es necesario exigir que una variable X sólo pueda tomar los valores 0 o 1. Estas variables se llaman *binarias* y la forma de introducir en LINGO esta restricción es escribiendo `@Bin(X);`

NOTA: Cuando exigimos que una o varias variables sean enteras (o en particular binarias) sólo podemos leer de la solución de LINGO los valores de las variables (principales y de holgura) y el valor de la función objetivo, pero los costes reducidos y precios duales no admiten la interpretación que hemos explicado antes.

Errores en LINGO Observemos cómo señala LINGO los errores que podemos cometer al introducir un problema. Por ejemplo, si en la restricción de la madera escribimos `0,4*F` en lugar de `0.4*F` (es decir, si expresamos la coma decimal mediante una coma en lugar de un punto), obtenemos el siguiente mensaje de error:



Notemos que LINGO indica la línea en la que ha encontrado el error y marca con un $\wedge$ el punto concreto donde encuentra el problema. En este ejemplo se trata del punto justo donde hemos cometido el error, pero en otros ejemplos el error puede estar en algún punto anterior del modelo. Por ejemplo, si nos olvidamos de terminar con punto y coma la restricción de la madera, LINGO señala que el error está al principio de la restricción del acero.

Observaciones finales

- Una forma alternativa de introducir restricciones de cota sobre una variable, como $3 \leq x \leq 10$, es

  ```
  @BND(3,x,10);
  ```

  La instruccion `@BND` anula las condiciones de no negatividad que LINGO supone por defecto para la variable a la que se aplica. Así, por ejemplo, una forma de introducir el problema

  $$\begin{array}{rl} \text{Min} & 2x+3y \\ \text{s.a} & 3x^2+2y^2 \leq 10 \\ & x \geq 0,\ y \leq 0 \end{array}$$

  es

  ```
  Min = 2*x+3*y;
  3*x^2+2*y^2<10;
  @BND(-10^9,y,0);
  ```

  Notemos que LINGO nos fuerza a escribir una cota inferior para la variable, pero una cota como $y \geq -10^9$ no supone ninguna restricción real.

- Podemos insertar comentarios en un modelo (es decir, escribir líneas que LINGO no leerá) empezándolas con una admiración y terminándolas siempre con `;` Por ejemplo, podíamos haber tecleado:

```
! Problema de los trofeos,
página 2 de los apuntes ;

[Ingresos]Max=7.20*F+4.50*B+4.80*C+6*T;
[Madera] 0.4*F+0.5*B+0.6*C+0.4*T<55;
[Acero] 0.6*F+0.3*B+0.3*C+0.45*T<39;
[Oro] 0.2*F+0.1*B+0.1*C+0.15*T<23;
[Mano_de_obra]2.2*F+1.7*B+1.2*C+1.3*T<175;
```

  Y el efecto sería el mismo.

- LINGO no diferencia entre mayúsculas y minúsculas. Si escribimos primero F y luego f el efecto es el mismo que si escribimos las dos veces F o las dos veces f.
- También es irrelevante que dejemos espacios en blanco. Da igual escribir `3*x+y` que `3 * x + y`.
- Al introducir un problema podemos usar paréntesis como al escribir normalmente. Por ejemplo, para introducir "Maximizar $(x+y)^2 + \sqrt[3]{y}$" escribimos `Max=(x+y)^2 + y^(1/3)`.

3 Problemas modelizados

1. Una empresa dispone de un presupuesto de 500€ para fabricar cuatro artículos A, B, C y D. La tabla siguiente contiene el coste unitario de producción y el precio unitario de venta:

Artículo	A	B	C	D
Coste	5	3	2	2
Precio	8	6	6	4

La empresa se ha comprometido con un distribuidor de su producto a suministrarle al menos 100 unidades de los artículos A y B, al menos 300 unidades de C y D y al menos 50 unidades de A y D. Calcula la producción que maximiza los beneficios de la empresa. El modelo es:

$$\begin{array}{rll} \text{Max.} & 3x+3y+4z+2w & \text{beneficio} \\ \text{s.a} & 5x+3y+2z+2w \leq 500 & \text{presupuesto} \\ & x+y \geq 100 & \text{compromisoAB} \\ & z+w \geq 300 & \text{compromisoCD} \\ & x+w \geq 50 & \text{compromisoAD} \\ & x,y,z,w \geq 0 & \end{array}$$

(a) Resuelve el problema con LINGO. Explica el resultado.

(b) ¿Le convendría a la empresa aumentar su presupuesto hasta 1 000€? Responde a las cuestiones siguentes considerando un presupuesto de 1 000€. 1600

(c) ¿Qué cantidad le conviene a la empresa fabricar de cada artículo?

(d) ¿Cuál es el beneficio máximo que puede conseguir?

(e) Interpreta el coste reducido del artículo A.

(f) Explica cómo se interpreta que el coste reducido del artículo B sea 0.

(g) ¿Cómo variaría el beneficio de la empresa si el distribuidor se conformara con 95 unidades entre los artículos A y B? ¿Y si pidiera 110?

(h) Interpreta el intervalo de sensibilidad de la variable y.

(i) Interpreta el precio dual y el intervalo de sensibilidad del compromiso AD.

(j) ¿Perjudicaría en algo a la empresa que el distribuidor exigiera 320 unidades entre los productos C y D?

(k) Indica si la solución que proporciona LINGO nos permite concluir lo siguiente o no: "Si la empresa aumentara en una unidad la producción conjunta de C y D, el beneficio obtenido no variaría".

(l) La empresa estudia la posibilidad de aumentar el precio de venta de alguno de sus productos. Si se decidiera por el producto C, ¿le convendría replantearse las cantidades a producir? ¿Y si aumentara 1.5€ el precio de venta del producto D?

(m) El distribuidor informa a la empresa de que sólo le comprará el producto B si se lo vende a un precio de 3.5€ /unidad. ¿Le convendrá a la empresa servirle las mismas cantidades? ¿Y si el distribuidor acepta un precio de 4.5€ /unidad?

(n) Si el presupuesto fuera de 2 000€, ¿convendría producir más de 100 unidades entre los artículos A y B?

(o) Modeliza el problema adecuado para determinar el presupuesto mínimo necesario para atender los compromisos con el distribuidor. ¿Cuál es dicho presupuesto mínimo?, ¿con qué producción se consigue? 900

2. Una empresa desea planificar la producción diaria de seis artículos para garantizar una producción mínima de 50 unidades de los tres de gama baja y de 20 unidades de los tres de gama alta sin exceder las 90 horas de trabajo disponibles. Además, por condiciones de mercado estima que venderá de uno de ellos el doble que de otro.

$$\begin{array}{rll} \text{Min.} & 5u + 8v + 5w + 3x + y + 2z & \text{coste} \\ \text{s.a} & u + v + w \geq 50 & \text{producción mínima gama baja} \\ & x + y + z \geq 20 & \text{producción mínima gama alta} \\ & x = 2z & \text{restricción de mercado} \\ & 3.2u + v + 3.3w + 1.7x + 2.1y + z \leq 90 & \text{horas empleadas} \leq \text{disponibles} \\ & u,\ v,\ w,\ x,\ y,\ z \text{ enteras} & \end{array}$$

(a) Determina las cantidades que le conviene producir de cada uno y el coste mínimo. 430

(b) ¿Agotará la empresa las horas disponibles?

Supón ahora que los productos no son contables y que, por lo tanto, tiene sentido considerar producciones fraccionarias. Vuelve a resolver el problema sin suponer que las variables sean enteras. Las preguntas siguientes se refieren a dicha solución.

(c) ¿Cuánto ha variado el coste mínimo?

(d) ¿Podríamos haber obtenido la solución óptima con variables enteras redondeando la solución sin variables enteras?

(e) ¿Agotará en este caso las horas de mano de obra disponibles?

(f) Interpreta el coste reducido y el intervalo de sensibilidad de la variable u.

(g) Interpreta el precio dual y el intervalo de sensibilidad de la restricción sobre las horas de mano de obra.

(h) Si la empresa quisiera exigir más producción, ¿qué aumentaría menos el coste, aumentar la producción de los artículos de gama alta o de gama baja?

(i) Explica, teniendo en cuenta la intepretación anterior, por qué es falsa esta afirmación: *Si la mano de obra disponible se redujera en* 10 *horas la solución óptima seguiría siendo la misma.* Di cinco cosas que podríamos decir de la solución óptima en ese caso en virtud del análisis de sensibilidad.

(j) Si uno de los costes de producción subiera una unidad, ¿podría cambiar la solución óptima? ¿Si subiera cuál, concretamente?

(k) Si la empresa pudiera reducir el coste de producción del primer artículo, ¿cuánto tendría que reducirlo al menos para que su producción pudiera ser conveniente?

(l) Si la empresa deseara producir al menos 55 unidades de gama baja, ¿de cuál de los tres artículos le convendría producir las 5 unidades adicionales?

(m) Si, por exigencias del mercado, la empresa se viera obligada a producir algunas unidades de los artículos 1 o 3, ¿cuál de los dos sería preferible producir?

3. Una empresa quiere invertir exactamente 600 u.m. en producir un máximo de 500 unidades en total de tres artículos A, B y C de forma que consiga el máximo beneficio:

$$\begin{array}{rll} \text{Max.} & 3x+2y+10z & \text{beneficio} \\ \text{s.a} & x+y+z \leq 500 & \text{producción total} \leq \text{producción máxima} \\ & x+3y+z=600 & \text{coste} = \text{presupuesto} \\ & x,\, y,\, z \geq 0 & \end{array}$$

   (a) Indica cuánto le conviene producir de cada artículo y el beneficio máximo. 4600
   (b) Interpreta el coste reducido de la variable x.
   (c) ¿Cómo afectaría al beneficio que la empresa pudiera producir 2 unidades más en total?
   (d) Interpreta el intervalo de sensibilidad de la restricción de producción.
   (e) Explica por qué es falsa la afirmación siguiente: *si la empresa estuviera dispuesta a aumentar la producción de* 500 *a* 550 *unidades, la solución óptima sería la misma.* Indica dos características concretas que cumpliría seguro la nueva solución óptima si la empresa admitiera producir 550 unidades.
   (f) ¿Cuánto tendría que aumentar como mínimo el precio de venta del primer artículo (y, por consiguiente, el beneficio que proporciona) para que su producción pudiera pasar a ser rentable?
   (g) Explica por qué es falsa la afirmación siguiente: *el coste reducido del segundo artículo es* 0*, luego si la empresa decidiera producir una unidad más de dicho artículo el beneficio no variaría.*
   (h) La empresa ha decidido gastar todo su presupuesto, y por eso la restricción presupuestaria es de igualdad. Razona si tal decisión ha sido acertada. ¿Le convendría destinar menos presupuesto a la producción?
   (i) De acuerdo con la solución proporcionada por LINGO, ¿qué nivel de producción podemos asegurar que la empresa podría alcanzar al menos con su presupuesto actual?
   (j) Si el presupuesto de la empresa se redujera en 50 u.m., ¿le convendría mantener el nivel de producción actual de 500 unidades o le convendría reducirlo?

4. Una empresa desea agotar un excedente de 600 unidades de una materia prima M produciendo un mínimo de 500 unidades en total de tres artículos A, B y C con el coste mínimo:

$$\begin{array}{rll} \text{Min.} & 3x+2y+10z & \text{coste} \\ \text{s.a} & x+y+z \geq 500 & \text{producción total} \geq \text{producción mínima} \\ & x+3y+z=600 & \text{cantidad empleada } M = \text{cantidad disponible} \\ & x,\, y,\, z \geq 0 & \end{array}$$

   (a) Indica cuánto le conviene producir de cada artículo y el coste mínimo. 1450
   (b) ¿Qué ocurriría con el coste si quisiéramos fabricar dos unidades más en total? ¿Y si quisiéramos fabricar dos unidades del artículo C?
   (c) Si quisiéramos fabricar 90 unidades más en total, ¿podría ocurrir que conviniera que alguna de ellas fuera del artículo C?
   (d) Interpreta todos los intervalos de sensibilidad.
   (e) Si el coste de producir cada unidad del artículo B subiera 6 u.m., ¿podría ocurrir que conviniera reducir el número de unidades producidas de dicho artículo?
   (f) Explica por qué es falsa esta afirmación: *"Como el coste reducido de la variable y es* 0*, si aumentáramos en una unidad la cantidad producida del artículo B no se modificaría el coste".*
   (g) ¿Es buena idea pretender agotar la materia prima M con la producción de A, B y C?, es decir, ¿si la empresa decidiera emplear menos materia prima M, eso daría lugar a costes mayores o menores?

5. Una empresa desea agotar un excedente de 600 unidades de una materia prima M produciendo tres artículos A, B y C con el coste mínimo. Además quiere utilizar al menos las 500 horas de mano de obra que ya tiene contratadas:

$$\begin{array}{rll} \text{Min.} & 3x + 2y + 10z & \text{coste} \\ \text{s.a} & 2x + 5y + z \geq 500 & \text{horas de mano de obra} \geq \text{horas contratadas} \\ & 7x + 3y + z = 600 & \text{cantidad empleada } M = \text{cantidad disponible} \\ & x,\ y,\ z \text{ enteras} & \end{array}$$

(a) Indica cuánto le conviene producir de cada artículo y el coste mínimo. 315

(b) ¿Necesitará contratar más horas de mano de obra, aparte de las 500 ya contratadas?

(c) Vuelve a resolver el problema si las unidades disponibles de M fueran 200 y explica qué sucede en ese caso.

Supongamos ahora que la empresa puede dejar productos sin acabar, que serán completados más adelante. Vuelve a resolver el problema sin exigir que las variables sean enteras (con 600 unidades de M). Todas las preguntas que siguen se refieren a ese caso.

(d) ¿Conviene dejar algún artículo sin acabar? ¿Será necesaria más mano de obra?

(e) ¿Podríamos reducir costes si dispusiéramos de más materia prima M?

(f) Interpreta todos los intervalos de sensibilidad.

(g) Si la empresa hubiera contratado únicamente 200 horas, ¿podría procesar igualmente toda la materia prima M disponible, o le resultaría imposible?

(h) Si la empresa dispusiera de 1 000 unidades adicionales de M, ¿le convendría contratar más horas de mano de obra para procesarlas o le bastaría con las 500 que ya tiene?

(i) Interpreta el coste reducido de la variable z.

(j) Interpreta el intervalo de sensibilidad de la variable y.

(k) ¿Podría volverse infactible el problema si quisiéramos utilizar al menos 900 horas de mano de obra?

(l) Si en vez de disponer de 600 unidades de M dispusiéramos de 1 700, ¿convendría fabricar el producto C?

(m) ¿Convendría replantearse la producción si el coste del producto C se redujera de 10 u.m. a sólo 1 u.m.?

6. Una empresa fabrica tres artículos en cantidades x, y, z. El beneficio por cada unidad producida es de 3 u.m., 2 u.m. y 4 u.m. respectivamente. La producción de cada artículo se realiza en dos fases, y el número de horas de trabajo disponibles en cada fase está limitado. Por otra parte, la empresa se ha comprometido a fabricar al menos 30 unidades del primer artículo. Así pues, el beneficio máximo que puede obtener la empresa viene dado por el problema:

$$\begin{array}{rll} \text{Max.} & 3x + 2y + 4z & \text{función de beneficios} \\ \text{s.a.} & 2x + \ \ 5y + 3z \leq 800 & \text{horas empleadas en la fase 1} \\ & 5x + 10y + 4z \leq 1000 & \text{horas empleadas en la fase 2} \\ & x \geq 30 & \text{producción del primer artículo} \\ & x,\, y,\, z \geq 0 & \end{array}$$

(a) Indica la producción óptima y el beneficio máximo. ¿Cuántas horas empleará la empresa en cada fase? 940

(b) Interpreta el coste reducido y el intervalo de sensibilidad de la variable y.

(c) Interpreta el intervalo de sensibilidad de restricción de la fase 1.

(d) Explica por qué la afirmación siguiente es falsa: *"El precio dual de la primera restricción es cero, y esto significa que si la empresa decide emplear una hora más en la primera fase de la producción el beneficio no cambiará, porque todavía quedan horas disponibles no utilizadas"*. Indica la interpretación correcta del precio dual.

(e) Si la empresa pudiera traspasar 10 horas de trabajo de la fase 1 a la fase 2 o viceversa, ¿cuál de los dos cambios le convendría más? ¿Qué beneficio adicional conseguiría con ello?

(f) Si la empresa pudiera destinar 100 horas más a la fase 2, ¿podría aprovecharlas todas o le sobrarían?

(g) Si la cantidad comprometida del primer producto hubiese sido 2 unidades menor, ¿sobrarían horas en la segunda fase?, ¿qué sucedería con el beneficio?

(h) Si ofrecieran a la empresa 5 u.m. por fabricar una unidad extra del primer artículo, ¿le convendría aceptar la oferta?

(i) Si la empresa pudiera conseguir un beneficio de 5 u.m. por cada unidad producida del primer artículo, ¿le convendría aumentar su producción de este artículo?

7. Una empresa fabrica un producto en dos fábricas F_1 y F_2 y lo vende en Madrid y en Valencia, donde hay una demanda de 150 y 250 kg de producto, respectivamente. Para llevarlo desde las fábricas hasta los destinos contrata a una empresa de transporte que sólo está dispuesta a hacer el servicio si la cantidad total transportada es de al menos 450 kg. El problema siguiente determina las cantidades de producto que conviene llevar desde cada fábrica a cada ciudad para minimizar el coste de transporte, teniendo en cuenta que cada fábrica tiene una capacidad máxima de producción.

$$
\begin{array}{rll}
\text{Min.} & 5x_{1M} + 8x_{1V} + 6x_{2M} + 7x_{2V} & \text{coste} \\
\text{s.a} & x_{1M} + x_{1V} \leq 100 & \text{kg servidos desde } F_1 \leq \text{capacidad de } F_1 \\
& x_{2M} + x_{2V} \leq 500 & \text{kg servidos desde } F_2 \leq \text{capacidad de } F_2 \\
& x_{1M} + x_{2M} \geq 150 & \text{kg servidos a Madrid} \geq \text{demanda en Madrid} \\
& x_{1V} + x_{2V} \geq 250 & \text{kg servidos a Valencia} \geq \text{demanda en Valencia} \\
& x_{1M} + x_{1V} + x_{2M} + x_{2V} \geq 450 & \text{cantidad total transportada} \geq \text{cantidad mínima} \\
& x_{1M},\, x_{1V},\, x_{2M},\, x_{2V} \geq 0 &
\end{array}
$$

(a) Indica el coste mínimo. ¿Cuántos kg de producto hay que transportar desde la fábrica F_1 a Madrid?, ¿y desde F_2 a Valencia? 2850

(b) Interpreta los costes reducidos de las variables x_{1V} y x_{2M}.

(c) Interpreta el intervalo de sensibilidad de la variable x_{2V}.

(d) Interpreta el intervalo de sensibilidad de la capacidad de F_2.

(e) Si el coste de transportar cada kg de producto desde F_2 hasta Madrid aumentara 0.5 u.m., ¿convendría entonces reducir la cantidad transportada en ese trayecto?

(f) ¿Cuánto tendría que disminuir el coste de transporte desde F_1 hasta Valencia para que pudiera interesar ese recorrido?

(g) Razona si la afirmación siguiente es verdadera o falsa y corrígela en el segundo caso: *"El precio dual correspondiente a la restricción sobre la capacidad de F_2 vale 0, y esto significa que podríamos aumentar la cantidad servida desde F_2 sin que por ello se vieran afectados los costes, ya que aún no se ha agotado toda la capacidad de producción de F_2."*

(h) Razona si la afirmación siguiente es verdadera o falsa y corrígela en el segundo caso: *"El precio dual correspondiente a la restricción sobre la demanda de Madrid vale 0, y esto significa que si la demanda de Madrid aumentara una unidad el coste no se vería afectado, ya que la cantidad servida actualmente en Madrid ya cubre esa posible demanda adicional.*

(i) Si la empresa de transporte aumentara a 452 kg la cantidad mínima a transportar, ¿sería conveniente servir producto desde F_1 a Valencia?, ¿cuál sería aproximadamente el nuevo coste?

(j) Si disminuyera la demanda en Valencia un 20%, ¿la nueva solución óptima daría lugar a un excedente de producto en esta ciudad?

8. Una empresa dispone de 5 000 u.m. para invertir en la fabricación de dos productos A y B. Para ello puede hacer uso de dos plantas de producción P_1 y P_2, con unas capacidades máximas de 400 y 175 unidades, respectivamente. El problema siguiente determina las cantidades de cada producto que deben fabricarse en cada planta para maximizar el beneficio de la empresa, teniendo en cuenta que ya se ha hecho un encargo de 100 unidades de A y 200 de B.

$$\begin{array}{rll}
\text{Max.} & 60x_{A1} + 80x_{A2} + 40x_{B1} + 45x_{B2} & \text{beneficio} \\
\text{s.a} & x_{A1} + x_{B1} \leq 400 & \text{cantidad producida en } P_1 \leq \text{capacidad de } P_1 \\
& x_{A2} + x_{B2} \leq 175 & \text{cantidad producida en } P_2 \leq \text{capacidad de } P_2 \\
& x_{A1} + x_{A2} \geq 100 & \text{cantidad producida de } A \geq \text{cantidad encargada} \\
& x_{B1} + x_{B2} \geq 200 & \text{cantidad producida de } B \geq \text{cantidad encargada} \\
& 40x_{A1} + 20x_{A2} + 10x_{B1} + 5x_{B2} \leq 5\,000 & \text{coste de fabricación} \leq \text{presupuesto} \\
& x_{A1},\ x_{A2},\ x_{B1},\ x_{B2} \geq 0 &
\end{array}$$

(a) ¿Cuál es el beneficio máximo? ¿Qué cantidad del producto A debe fabricarse en la planta P_2?, ¿y de B en la planta P_1? 21875

(b) Interpreta los costes reducidos de las variables x_{A1} y x_{B2}.

(c) Interpreta el intervalo de sensibilidad de la variable x_{A2}.

(d) Indica cuatro características de la solución actual que seguirían siendo ciertas si la cantidad encargada del producto A aumentara en 10 unidades. ¿El beneficio aumentaría o disminuiría en tal caso?

(e) Si se duplicara el beneficio generado por cada unidad de B fabricada en P_1, ¿esto haría conveniente aumentar su producción en dicha planta?

(f) ¿Cuánto tendría que aumentar como mínimo el beneficio generado por cada unidad de A fabricada en P_1 para que pudiera interesar su fabricación en dicha planta?

(g) Explica por qué la interpretación siguiente sería incorrecta y corrígela: *"El precio dual correspondiente a la restricción sobre la cantidad encargada de B vale 0, y esto significa que podríamos reducir la cantidad producida de B sin que por ello se viera afectado el beneficio, ya que estamos produciendo bastante más cantidad de la encargada".*

(h) Si la empresa pudiera aumentar su presupuesto en 2 u.m., ¿interesaría la fabricación de A en P_1?, ¿cuál sería el nuevo beneficio, aproximadamente?

(i) Si aumentara la capacidad de P_2 en un 90%, ¿la nueva solución óptima agotaría la capacidad de dicha planta?

(j) ¿Podemos asegurar que con su presupuesto actual la empresa podría cubrir un aumento de 100 unidades en la demanda del producto B?, ¿y de 200 unidades?

9. Una empresa produce tres tipos de zumo. El problema siguiente determina las cantidades x, y y z (en hectolitros) que debe producir la empresa de cada uno de los tres tipos de zumo para maximimizar su beneficio, teniendo en cuenta que la producción total deber ser de al menos 100 hl y que la empresa sólo dispone de 8000 kg de uva, 3000 kg de pera y 5000 kg de manzana.

Max.	$90x + 3y + z - 0.5x^2 - 7y^2 - 3z^2 + xy - 100$	Beneficio en euros
s.a	$80x + 50y + 120z \leq 8000$	kg empleados de uva $\leq$ kg disponibles
	$20x \leq 3000$	kg empleados de pera $\leq$ kg disponibles
	$30x + 40z \leq 5000$	kg empleados de manzana $\leq$ kg disponibles
	$x + y + z \geq 100$	Producción total $\geq$ producción mínima (en hl)
	$x,\, y,\, z \geq 0$	

(a) Resuelve el problema comprobando que la solución óptima es global. 4281.5

(b) Indica la cantidad que se debe producir de cada tipo de zumo y el beneficio máximo.

(c) ¿Cuántos hl de zumo le conviene producir a la empresa?

(d) Interpreta el precio dual de la restricción sobre la cantidad de uva.

(e) Si la empresa decidiera subir 5 céntimos el precio del litro de zumo de tipo 3, ¿le convendría producir 1hl (100 litros) de este zumo?

(f) Interpreta el coste reducido de la variable y.

(g) ¿Le convendría a la empresa vender parte de sus existencias de frutas? ¿De cuáles, concretamente?

(h) Vuelve a resolver el problema con LINGO exigiendo una producción mínima de 200 hl de zumo y explica lo que sucede en este caso.

10. Una empresa produce tres tipos de chocolate. El problema siguiente determina las cantidades x, y y z (en toneladas) que debe producir la empresa de cada uno de los tres tipos de chocolate para maximimizar su beneficio, teniendo en cuenta que la producción total deber ser de al menos 110 toneladas y que la empresa sólo dispone de 62 t de cacao en polvo, 40 t de avellana y 80 hl de leche.

Max.	$300x + 400y + 350z - 2x^2 - 2y^2 - z^2 + 2xy$	Beneficio en euros
s.a	$0.7x + 0.6y + 0.5z \leq 62$	t empleadas de cacao $\leq$ t disponibles
	$0.3y \leq 40$	t empleadas de avellana $\leq$ t disponibles
	$3x + z \leq 80$	hl empleados de leche $\leq$ hl disponibles
	$x + y + z \geq 110$	Producción total $\geq$ producción mínima (en t)
	$x,\, y,\, z \geq 0$	

(a) Resuelve el problema y comprueba que la solución óptima que obtienes es global. 33996.5

(b) Indica la cantidad que se debe producir de cada tipo de chocolate y el beneficio máximo.

(c) ¿Cuántos hl de leche serán necesarios?

(d) ¿Se satura la segunda restricción (la restricción correspondiente la cantidad de avellana)? Interpreta el precio dual correspondiente a esta restricción.

(e) ¿Cómo se vería afectado el beneficio si dispusiéramos de una tonelada más de cacao?

(f) La solución óptima, ¿es interior o de frontera?

(g) Explica por qué la interpretación siguiente sería incorrecta y corrígela:

"El precio dual de la restricción correspondiente a la producción total vale 0 y esto significa que un aumento en la producción total no afectaría al beneficio."

(h) ¿Qué podría aprovechar mejor la empresa, 1 t más de cacao o 1 hl más de leche?

11. Una empresa de productos para el desayuno fabrica tres tipos de muesli. El problema siguiente determina las cantidades x, y y z (en toneladas) que debe producir la empresa de cada uno de los tres tipos de muesli para minimizar los costes, teniendo en cuenta que la producción total debe ser de al menos 100 t y que la empresa sólo dispone de 58 t de avena, 7 t de chocolate y 50 t de pasas.

$$\begin{array}{rll} \text{Min.} & 5x^2+6y^2+3z^2-4xy & \text{Coste en euros} \\ \text{s.a} & 0.5x+0.7y+0.6z \leq 58 & \text{t empleadas de avena} \leq \text{t disponibles} \\ & 0.1x+0.3y \leq 7 & \text{t empleados de chocolate} \leq \text{t disponibles} \\ & 0.3z \leq 50 & \text{t empleadas de pasas} \leq \text{t disponibles} \\ & x+y+z \geq 100 & \text{Producción total} \geq \text{producción mínima (en t)} \\ & x,\ y,\ z \geq 0 & \end{array}$$

(a) Indica la cantidad que se debe producir de cada tipo de muesli y el coste mínimo. Justifica que la solución es un óptimo global. 13668.75

(b) ¿Cuántas toneladas de avena serán necesarias? ¿Y de pasas? Interpreta el precio dual correspondiente a la restricción sobre las pasas.

(c) ¿Cómo se verían afectados los costes si la producción mínima pasara a ser de 101 t?

(d) La solución óptima, ¿es interior o de frontera?

(e) Explica por qué la interpretación siguiente sería incorrecta y corrígela:
"El coste reducido de la variable y vale 0 y esto significa que un aumento en la producción del segundo tipo de muesli no afectaría a los costes."

(f) ¿Qué podría aprovechar mejor la empresa, 1 t más de avena o 1 t más de chocolate?

12. Una empresa explota dos minas, con las cuales sirve la demanda de mineral de dos ciudades, que asciende a 300 toneladas diarias en cada una de ellas. La primera mina puede producir hasta 250 toneladas diarias de mineral, y la segunda hasta 400. El coste de extracción de cada tonelada de mineral es de 30 u.m. para la primera mina y de 50 para la segunda. Además, el coste de transportar cada tonelada de mineral de cada mina a cada ciudad viene dado por la tabla siguiente:

	Mina 1	Mina 2
Ciudad 1	20	25
Ciudad 2	30	30

El problema siguiente determina la cantidad de mineral que le conviene servir desde cada mina a cada ciudad para minimizar el coste:

$$\begin{array}{rll} \text{Min.} & 30x_{11}+30x_{12}+50x_{21}+50x_{22}+20x_{11}+30x_{12}+25x_{21}+30x_{22} & \text{Coste} \\ \text{s.a.} & x_{11}+x_{12} \leq 250 & \text{Producción mina 1} \leq \text{capacidad} \\ & x_{21}+x_{22} \leq 400 & \text{Producción mina 2} \leq \text{capacidad} \\ & x_{11}+x_{21} \geq 300 & \text{Toneladas enviadas a C1} \geq \text{demanda} \\ & x_{12}+x_{22} \geq 300 & \text{Toneladas enviadas a C2} \geq \text{demanda} \\ & x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \geq 0 & \end{array}$$

(a) Haz un plano que indique las toneladas transportadas de cada mina a cada ciudad.

(b) ¿Cuál es el coste mínimo? 40250

(c) ¿Cómo variaría el coste si la ciudad 1 demandara tres toneladas más de mineral?

(d) Si pudieras aumentar la capacidad de producción de una de las minas, ¿cuál sería preferible? ¿Qué disminución de coste conseguirías por cada tonelada adicional?

(e) Interpreta el coste reducido de la variable x_{12}.

(f) Si la demanda de la ciudad 2 aumentara hasta 340 toneladas, ¿haría eso rentable transportar mineral desde la mina 1 hasta la ciudad 2?

(g) ¿Cambiaría la solución óptima si el coste de transporte de la ciudad 1 a la mina 1 bajara en 3 u.m./tonelada?

13. Un comerciante quiere producir 160 litros de aceite mezclando aceite de girasol, de oliva y de maíz. El aceite de girasol tiene un precio de 3€ por litro, el de oliva cuesta 6€ por litro y el de maíz vale 1€ por litro. Hay que tener en cuenta que el comerciante sólo dispone de 128 litros de aceite de girasol y 40 litros de aceite de maíz. Además, se debe cumplir una condición impuesta por el Ministerio de Sanidad y Consumo. El siguiente problema determina las proporciones en que deben ser mezclados los tres tipos de aceites, es decir, las cantidades x_1, x_2 y x_3 de cada clase de aceite que deberá llevar cada litro de la mezcla para minimizar el precio por litro del producto final:

Min.	$3x_1 + 6x_2 + x_3$	Precio por litro de la mezcla
s.a	$x_1 + x_2 + x_3 = 1$	
	$160x_1 \leq 128$	Cantidad empleada de aceite de girasol $\leq$ cantidad disponible
	$160x_3 \leq 40$	Cantidad empleada de aceite de maíz $\leq$ cantidad disponible
	$x_1 - 2x_3 \geq 0$	Condición Sanidad
	$x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0$	

(a) Indica la composición óptima de un litro de mezcla. ¿Cuál será su precio por litro? 2.5

(b) ¿Es una solución interior o de frontera? Interpreta el precio dual correspondiente a la restricción sobre la cantidad disponible de aceite de maíz.

(c) ¿Cómo se vería afectado el precio por litro de la mezcla si el comerciante dispusiera de un litro más de aceite de girasol?

(d) Indica si el comerciante debería preocuparse por la aplicación de una nueva normativa que obligara a que el porcentaje de aceite de oliva en la mezcla fuera como mínimo de un 10%. ¿Cómo afectaría este cambio al precio por litro de la mezcla?

(e) Si el precio por litro del aceite de girasol bajara a 2€, ¿esto haría conveniente aumentar su proporción en la mezcla? ¿Afectaría este cambio al precio por litro del producto final?

(f) ¿Cuánto tendría que aumentar el precio por litro del aceite de maíz para que pudiera interesar modificar su proporción en la mezcla?

(g) Si el comerciante dispusiera sólo de 35 litros de aceite de maíz, ¿le convendría incorporar el de oliva a la mezcla?

4 Problemas para modelizar

1. La función de utilidad de un consumidor es

$$U = 100\,000 - (x - 100)^2 - (y - 100)^2 - (z - 100)^2,$$

donde x, y, z son las cantidades que adquiere de tres bienes sustitutivos A, B, C cuyos precios son, respectivamente, 3, 6 y 2 €. Determina el presupuesto mínimo necesario para conseguir una utilidad de 80 000 unidades. 139.4

   (a) Interpreta los costes reducidos de las variables.

   (b) Calcula el aumento de presupuesto que sería necesario si el consumidor quisiera 1 000 unidades más de utilidad. Haz el cálculo aproximado a partir de la solución obtenida y de forma exacta (volviendo a resolver el problema). Compara los resultados.

   (c) (Manteniendo el nivel de utilidad en 80 000) si los productos A y C sólo se pudieran comprar en paquetes de una unidad, mientras que B se pudiera comprar a granel, ¿convendría entonces comprar algo del producto B? ¿Subiría mucho el coste?

2. La función de utilidad de un consumidor es

$$U = 100\,000 - (x - 100)^2 - (y - 100)^2 - (z - 100)^2 - (w - 100)^2,$$

donde x, y, z, w son las cantidades que adquiere de cuatro bienes A, B, C, D. Los bienes A y B son sustitutivos, y el consumidor decide que necesita al menos 30 unidades de uno u otro indistintamente. El bien C es complementario de A y B, de modo que cada unidad de A requiere 2 de C y cada unidad de B requiere 3 de C (y cualquier unidad adicional de C resulta inútil). El bien D es escaso, y el consumidor no puede encontrar en el mercado más de 5 unidades. Los precios de los bienes son 20, 25, 2 y 1 unidad monetaria, respectivamente. Calcula las cantidades a adquirir de cada producto para maximizar la utilidad con un presupuesto de 1 000 unidades monetarias. 77605.2

   (a) ¿Podría el consumidor conseguir más utilidad si se conformara con algo menos de 30 unidades de los bienes A y B?

   (b) ¿Qué aumentaría más la utilidad del consumidor, disponer de 10 unidades más de presupuesto o encontrar en el mercado una sexta unidad del producto D?

3. Una empresa de aviación dispone de un total de 20 aviones que puede destinar a tres rutas turísticas diferentes. Cada ruta debe contar al menos con tres aviones. La tabla siguiente recoge los ingresos que proporciona cada avión según en la ruta en la que se emplee y los costes que requiere.

	Ruta 1	Ruta 2	Ruta 3
Ingresos	5	8	11
Costes	2	3	5

Los costes totales no pueden exceder el presupuesto máximo que la empresa pretende dedicar a estas rutas, que es de 70 u.m.

Calcula el número de aviones que la empresa debe destinar a cada ruta para maximizar sus beneficios. 100

   (a) ¿Agotará la empresa su presupuesto?

   (b) ¿Empleará todos sus aviones?

4. Una empresa tiene que planificar su producción mensual de cuatro productos A, B, C, D, de tal modo que la producción total no sea inferior a 1000 unidades. De éstas, al menos 100 han de ser del producto B, debido a un compromiso con los distribuidores. La elaboración de los productos A y B requiere de una materia prima M de la que la empresa dispone en cantidad limitada: las existencias para el mes son de 900 kg, cada unidad de A requiere 2 kg de M y cada unidad de B requiere 4. Por otra parte, cada unidad de A, B, C y D requiere, respectivamente, 2, 3, 2 y 4 horas de mano de obra, y la plantilla de la empresa puede trabajar 2500 horas al mes. La función de costes de la empresa es $C(x, y, z, w) = 2000 + 2x^2 + 3y^2 + z^2 + w - x - y$, donde x, y, z, w son las cantidades producidas de cada artículo. Calcula la producción que minimiza los costes, así como el coste óptimo. 358533.2

   (a) ¿Es un inconveniente para la empresa la limitación en la cantidad disponible de M?

   (b) Si ello fuera posible, ¿le convendría a la empresa cancelar su compromiso sobre el producto B?

   (c) ¿Sería rentable para la empresa pagar horas extra a sus trabajadores a 400 u.m.?

   (d) ¿Podemos deducir del precio dual de la producción que a la empresa le convendría reducir su producción?

5. La función de producción de una empresa es

$$P(x, y, z) = \sqrt[10]{x^2y^3z^5},$$

   donde x, y, z son las cantidades empleadas de tres factores de producción. El coste unitario de cada factor es, respectivamente, de 4, 6 y 5 unidades monetarias. Además, el proceso de producción exige emplear, como mínimo, el doble de unidades del primer factor que del segundo. Determina la cantidad óptima que hay que emplear de cada factor para conseguir una producción de 1 000 unidades de producto con el coste mínimo. 14567.1

   Interpreta el precio dual de la producción.

6. Una empresa utiliza tres inputs en la producción de su producto, en cantidades x, y, z, con los cuales consigue una producción dada por $P(x, y, z) = 3x + \ln(y + 2z)$ kg de producto. Los precios de los inputs son 2€/kg, 5€/kg y 3€/kg, respectivamente. La producción requiere al menos 30 kg de cada input, y la cantidad empleada del tercero ha de ser al menos tanta como la de los dos primeros juntos. La empresa dispone de un presupuesto de 10 000€ para la producción. Determina las cantidades que ha de comprar de cada input para maximizar su producción. 5864.2

   (a) ¿Le convendría a la empresa reducir la cantidad empleada de alguno de los ínputs, en caso de que fuera posible?

   (b) ¿Qué aumento de producción podría conseguir con 500 unidades adicionales de presupuesto?

7. Una editorial quiere lanzar al mercado dos nuevos productos, una enciclopedia y un diccionario, que quiere distribuir mediante un equipo de 50 vendedores a domicilio. Se plantea hacer el lanzamiento en tres ciudades A, B y C. Los estudios de mercado prevén que cada vendedor puede vender como mínimo 8 diccionarios y 3 enciclopedias diarias en la ciudad A, 9 diccionarios y 7 enciclopedias diarias en la ciudad B y 7 diccionarios y 5 enciclopedias diarias en la ciudad C. Por otra parte, no se considera conveniente enviar más de 20 vendedores diarios a cada ciudad. Cada vendedor le cuesta a la empresa 200€ diarios. Los enviados a la ciudad B cobran además 300€ diarios por el desplazamiento y los enviados a la ciudad C cobran además 100€ por el mismo concepto. Determina cuántos vendedores conviene enviar a cada ciudad para vender como mínimo 300 diccionarios y 200 enciclopedias diarias minimizando el coste del equipo de vendedores. 12900

   (a) ¿Cuántos vendedores se enviarán?

   (b) ¿Cuántos diccionarios y cuántas enciclopedias se venderán?

8. Una empresa pretende lanzar un nuevo producto en tres mercados diferentes y quiere determinar los precios p_1, p_2 y p_3 a los que le conviene vender cada kg en cada uno de ellos. Para que la producción resulte rentable ninguno de los precios puede ser inferior a los 80 €, que es el coste de producir un kg de producto, y el segundo mercado no aceptaría un precio superior al del primero. Se estima que la demanda de cada mercado viene dada por las funciones

$$D_1(p_1) = 400 - p_1, \qquad D_2(p_2) = 1000 - 3p_2, \qquad D_3(p_3) = 900 - 5p_3.$$

Determina los precios que maximizan los beneficios garantizando una demanda de 1 000 kg de producto. 81333.3

Si la empresa redujera su producción, ¿su beneficio aumentaría o disminuiría?

9. Un inversor quiere distribuir un capital de 1 u.m. entre tres activos financieros. El riesgo de la inversión viene dada por la función

$$R(x, y, z) = 0.01x^2 + 0.02y^2 + 0.03z^2 + 0.01xy + 0.002yz + 0.03xz,$$

donde x, y, z son las cantidades invertidas en cada activo. La rentabilidad esperada del primer activo es de un 2%, la del segundo de un 3% y la del tercero de un 4%. Determina qué capital le conviene invertir en cada activo para maximizar la rentabilidad sin que el riesgo de la inversión supere un nivel de 0.02. 0.037

(a) Interpreta el precio dual de la restrición del riesgo.

(b) ¿Qué sucedería si el inversor quisiera invertir al menos la décima parte del capital en el primer activo?

10. Una empresa fabrica dos artículos A y B en tres fábricas F_1, F_2 y F_3. Con el personal de que dispone, no puede cubrir la demanda prevista para el mes próximo, sino que le faltarían por cubrir 20 000 unidades de A y 30 000 unidades de B. Por eso se plantea contratar trabajadores temporales. La tabla siguiente contiene los artículos que puede fabricar cada trabajador en cada fábrica según que se dedique a la producción de A o a la producción de B:

	A	B
F_1	150	210
F_2	200	190
F_3	190	130

La fábrica F_1 tiene capacidad para acoger hasta 90 nuevos trabajadores, la fábrica F_2 hasta 80 y F_3 hasta 100. El coste de producción de cada unidad de A es de 30 u.m., y el de cada unidad de B de 50 u.m. Por otra parte, cada trabajador cobrará un sueldo de 800 € por su trabajo. Determina cuántos trabajadores conviene destinar a cada fábrica a la producción de cada artículo para cubrir las unidades demandadas de A y B con coste mínimo. 2 303 200

(a) ¿Estarán todas las fábricas a máxima capacidad?

(b) ¿Le conviene a la empresa producir más cantidad de la que necesita de alguno de los artículos?

(c) ¿Qué sucedería con el coste mínimo si la empresa no quisiera excedentes?

11. Una empresa explota dos minas, con las que sirve la demanda de mineral de dos ciudades. Ésta asciende a 300 toneladas diarias en cada una de las ciudades. La primera mina puede producir hasta 250 toneladas diarias de mineral, y la segunda hasta 400. El coste de la extracción de cada tonelada de mineral es de 30 u.m. para la primera mina y de 50 para la segunda. Además, el

coste de transportar cada tonelada de mineral de cada mina a cada ciudad viene dada por la tabla siguiente:

	Mina 1	Mina 2
Ciudad 1	20	25
Ciudad 2	30	30

La empresa fija el precio de venta en $p = 200 - 0.01T$, donde T es la producción diaria total. Calcula la cantidad de mineral que le conviene servir a cada ciudad desde cada mina para maximizar los beneficios. 76150

(a) ¿Conviene extraer de cada mina la máxima cantidad posible?

(b) Interpreta el precio dual de la capacidad de la primera mina.

(c) Si la empresa pudiera concertar un pedido adicional en una de las dos ciudades, ¿cuál le convendría más?

(d) Interpreta los costes reducidos.

12. Una empresa multinacional de transportes se plantea las alternativas siguientes para invertir un capital de 1 millón de euros:

    (a) Incrementar su stock de combustible, a un precio de 2 € /litro.

    (b) Incrementar su flota de camiones, a un precio de 1 100 € /vehículo.

    (c) Comprar un edificio para oficinas que le ofrece una constructora por 100 000 €.

    (d) Comprar acciones de otra compañía, a un precio de 10 € cada una.

    El rendimiento unitario esperado para cada inversión es el siguiente:

Combustible	10 €
Camiones	9 000 €
Edificio	850 000 €
Acciones	15 €

Determina la inversión que maximiza el rendimiento. 8213000

13. Un fabricante de juguetes se plantea la posibilidad de lanzar al mercado 8 nuevos productos con las características siguientes:

Juguete	Edad recomendada	Coste	Beneficio esperado
Muñeca I	0–6 años	10	15
Coche	0–6 años	8	12
Piano	0–6 años	8	14
Juego de construcción	6–12 años	12	10
Juego de mesa	6–12 años	15	21
Coche teledirigido	6–12 años	18	27
Miniordenador	6–12 años	18	-2
Muñeca II	6–12 años	10	-3

El fabricante quiere lanzar al menos un producto para niños pequeños y, como máximo tres para mayores. El miniordenador y la muñeca II no son rentables, pero quiere promocionar como mínimo uno de los dos y compensar la pérdida con la venta de accesorios. Por problemas de producción no puede lanzar al mismo tiempo los dos modelos de coche. Determina los artículos que conviene lanzar para maximizar el beneficio con un presupuesto de 62 u.m. 74

¿Conviene agotar el presupuesto?

14. Una empresa fabrica un artículo a partir de tres factores de producción, que utiliza en cantidades x, y, z. La producción que consigue viene dada por la función $Q(x, y, z) = xyz$. Los precios de los factores de producción son, respectivamente, 3, 5 y 2 € /kg, y cada unidad producida tiene un coste de elaboración de 2 € . Además, el proceso de producción requiere que el primero se emplee al menos en doble cantidad que los otros dos juntos, así como que se empleen al menos 100 kg del tercero. Determina la cantidad que debe emplear la empresa de cada factor de producción para conseguir 3.000 unidades de producto con coste mínimo. 6801.6

    (a) ¿Qué coste tendría para la empresa producir 100 unidades más de producto?

    (b) ¿Le convendría a la empresa encontrar la forma de necesitar menos cantidad del tercer factor de producción?

15. Un jefe de personal ha de distribuir cuatro trabajadores para hacer dos trabajos, de forma que dos trabajadores hagan uno de ellos y los otros dos el otro. La tabla siguiente contiene las horas que necesita cada trabajador para hacer su parte de cada trabajo. Determina cuál es la asignación que minimiza el tiempo necesario. 12

	Trabajador 1	Trabajador 2	Trabajador 3	Trabajador 4
Trabajo 1	3	4	2	6
Trabajo 2	2	3	1	4

16. A un hotel sólo le quedan dos habitaciones libres: una individual y otra doble, pero tiene ofertas de cuatro posibles huéspedes muy interesados en ocuparlas. La tabla siguiente recoge la cantidad en € que ofrece cada cliente por ocupar cada habitación. Determina a qué clientes debe asignar el hotel cada habitación y a cuál de ellos debe rechazar para maximizar los ingresos. 950

	I	D
Cliente 1	550	50
Cliente 2	600	200
Cliente 3	500	0
Cliente 4	200	200

17. Una empresa produce diariamente tres artículos en cantidades x, y, z, y fija su precio de venta p (el mismo para los tres) en función del nivel de producción: $p = 100 - x - y - z$. El coste unitario de producción es de 3, 5 y 7 unidades monetarias, respectivamente, y además hay un coste fijo de 400 u.m. Un estudio de mercado recomienda que la producción de ninguno de los artículos supere las 10 unidades diarias, y se prevé que se pueden vender como mínimo tantas unidades del tercer artículo como de los otros dos juntos. Determina la producción que minimiza el coste garantizando un beneficio de 900 u.m. diarias. 482.8

18. Un empresario dispone de 500 u.m. para hacer diversas inversiones en su negocio. Las posibilidades que se plantea son las siguientes:

    (a) Invertir 100 u.m. en renovación de máquinas. La utilidad de esta inversión se valora en 2 unidades.

    (b) Invertir 300 u.m. en abrir un nuevo mercado de distribuición, con una utilidad valorada en 3 unidades.

    (c) Invertir 80 u.m. en cursillos de formación para los trabajadores, con una utilidad de 1 unidad.

    (d) Invertir 85 u.m. en una rebaja promocional de los precios de sus productos, con una utilidad de 1 unidad.

    (e) Invertir cualquier cantidad en publicidad. Cada u.m. destinada a este fin proporcionaría 0.01 unidades de utilidad.

De las cuatro primeras posibilidades, se quiere llevar a término un máximo de tres, y conviene llevar adelante al menos una de las dos primeras. Determina las inversiones que conviene hacer y la cantidad del presupuesto que conviene invertir en publicidad para maximizar la utilidad. 6.35

19. Un empresario textil quiere comprar pantalones vaqueros de hombre y de mujer a dos fabricantes para venderlos en dos tiendas. El primer fabricante le vende cada pantalón por 30 €, y puede servirle un máximo de 1 000 unidades, mientras que el segundo puede servirle hasta 800 a un precio de 41 €. El empresario los venderá por 50 € (los de hombre) y 60 € (los de mujer) en la primera tienda, y por 45 € y 55 € en la segunda. El empresario quiere comprar el mismo número de pantalones de hombre que de mujer para cada tienda, en total, un máximo de 600 unidades para la tienda 1 y 900 para la tienda 2. Determina cuántas unidades le conviene comprar a cada fabricante de cada tipo para cada tienda para maximizar sus beneficios con un presupuesto de 50 000 €. 27374

20. La función de producción de una empresa es $Q(K, L) = KL^{1/2}$, donde K y L son las cantidades empleadas de dos factores de producción. El precio unitario de los factores es, respectivamente, de 3 y 5 u.m., y el precio de venta del artículo es de 10 u.m. Calcula la cantidad que hay que emplear de cada factor de producción para maximizar los beneficios si la empresa dispone de un presupuesto de 1 000 u.m. 17144.3

    ¿Qué beneficio podría obtener la empresa por cada unidad adicional invertida en la producción?

21. Una empresa explota dos minas, una de hierro y otra de cobre. La primera produce 150 t de hierro semanales y la segunda 200 t de cobre semanales. El mineral puede transportarse a tres fábricas, la primera puede procesar hasta 100 t de hierro semanales, la segunda hasta 200 t de hierro o cobre indistintamente, y la tercera hasta 100 t de cobre semanales. El coste de transportar cada t de mineral es de 0.1 u.m. por km. La tabla contiene las distancias entre las minas y las fábricas. Por otra parte, cada t de mineral procesada produce un beneficio bruto de 10, 5 y 15 u.m. respectivamente, según la fábrica. Determina las cantidades de mineral que conviene transportar desde cada mina hasta cada fábrica para maximizar los beneficios. 2400

	Fábrica 1	Fábrica 2	Fábrica 3
Mina de hierro	20	10	30
Mina de cobre	30	20	40

    (a) Si se pudiera aumentar la producción semanal de una de las minas, ¿de cuál convendría más?
    (b) ¿Y si se pudiera aumentar la capacidad de procesado de una de las fábricas?
    (c) Interpreta el precio dual de la restricción correspondiente a la fábrica 2.
    (d) Si se pudiera duplicar la capacidad de procesado de la fábrica 3, ¿podríamos aprovechar totalmente su nueva capacidad?
    (e) Si la producción de la mina 1 descendiera en 40 t semanales, ¿le faltaría suministro de hierro a la fábrica 1?
    (f) Si el beneficio que proporciona la fábrica 3 disminuyera en 5 u.m./t, ¿le convendría a la empresa rehacer su plan de transporte?

22. Santi se va de excursión y debe decidir qué mete en la mochila, por lo que ha elaborado la siguiente tabla, que recoge el peso de cada uno de los objetos que podría llevarse, así como la utilidad que cada uno de ellos le proporcionaría:

	Peso (kg)	Utilidad		Peso (kg)	Utilidad
Bocadillo	0.5	9	Bolsa de frutos secos	0.2	6
Agua	1 (por litro)	10 (por litro)	Chubasquero	0.1	7
Paraguas	0.7	8	Cámara de fotos	0.6	7
Apuntes de Matemáticas II	1	0.5	Batería extra para la cámara de fotos	0.3	2

Santi tiene algunas ideas claras:

- Es imprescindible llevar algo para comer.
- Necesitará al menos un litro y medio de agua. Hay que tener en cuenta que su cantimplora tiene una capacidad de 3 litros y pesa 0.4 kg.
- No tiene sentido coger dos objetos para protegerse de la lluvia.
- Sería poco práctico cargar con una batería extra si no se lleva la cámara.

¿Qué le conviene a Santi meter en la mochila para maximizar la utilidad si el contenido de la mochila no debe pesar más de 4 kg? Ten en cuenta que Santi también debe decidir qué cantidad de agua se lleva. 51

23. Una empresa dispone de dos fábricas F_1 y F_2 en las que planea producir dos artículos A y B para distribuirlos en dos ciudades C_1 y C_2. La fábrica 1 tiene capacidad para producir hasta 1000 unidades diarias, mientras que F_2 puede producir hasta 800 unidades diarias. El coste de transportar cada artículo de cada fábrica a cada ciudad viene dado por la tabla siguiente

	C_1	C_2
F_1	10	15
F_2	8	14

El coste de producción del artículo A es de 3 u.m y se vende a 50 u.m. en C_1 y a 60 u.m. en C_2, el artículo B tiene un coste de 4 u.m. y se vende a 40 u.m. en C_1 y a 75 u.m. en C_2. Determina las cantidades que debe servir la empresa de cada producto a cada ciudad desde cada fábrica para maximizar sus beneficios, teniendo en cuenta que la demanda esperada del producto B en la ciudad C_2 no será en ningún caso superior a 800 unidades. 87600

(a) Si fuera necesario servir unas pocas unidades de cada producto a la ciudad 1, ¿desde qué fábrica sería preferible hacerlo?

(b) ¿Qué beneficio obtendría la empresa si lograra que la producción de la fábrica 2 alcanzara las 810 unidades diarias? ¿Cuál de los dos artículos le convendría producir?

(c) ¿Cuánto tendría que aumentar como mínimo el beneficio de servir cada unidad del producto A en la ciudad 1 desde la fábrica 2 para que pudiera hacerse rentable?

(d) Si fuera posible servir 100 unidades más de producto B en la ciudad 2, ¿convendría atender dicha demanda adicional? ¿Desde qué fábrica?

24. Un restaurante quiere contratar camareros temporales para reforzar los turnos de fin de semana (viernes, sábado y domingo) mediante dos tipos de contratos: para camareros con y sin experiencia. Los camareros sin experiencia cobran 400 € por turno y los que sí tienen 700 € por turno. Además, los camareros con experiencia tienen un suplemento de 70 € en los turnos de domingo. Se calcula que van a hacer falta 5 camareros para los viernes, 10 para los sábados y otros 10 para los domingos. Por otra parte, se quiere contratar como mínimo a un camarero con experiencia en cada turno, y el número de camareros con experiencia ha de ser al menos el 55% de los contratados. Determina cuántos camareros conviene contratar de cada tipo en cada turno para minimizar su coste. 14270

25. Carlos entra a un restaurante en el que se ofrece un menú de 20 € que incluye un primero, un segundo y un postre. Si quiere tomar café, debe pagar 1 € más. En la tabla siguiente se muestra el menú, indicándose las calorías de cada plato y la utilidad que cada uno de ellos proporcionaría a Carlos. Cada ítem marcado con un $*$ supone 2 € de suplemento. ¿Qué platos debe elegir Carlos para maximizar la utilidad conseguida con la comida si no puede tomar más de 1 100 calorías y sólo lleva 24 € ? ¿Incluiría su elección el café? 14

		Utilidad	Calorías
Primeros	Ensalada de langostinos*	2	200
	Croquetas	1	300
Segundos	Lubina	2	300
	Solomillo*	6	600
Postres	Brownie	5	500
	Fruta de temporada	3	100
	Café	4	100

26. Una empresa ha de comprar 5 000 kg de una materia prima y 4 000 kg de otra, y dispone de tres proveedores que se los ofrecen a los precios dados por la tabla siguiente (en € /kg):

	Prov. 1	Prov. 2	Prov. 3
Mat. 1	12	11	11
Mat. 2	22	25	23

Para mantener unas relaciones comerciales, a la empresa le interesa que la facturación (en euros) del proveedor 1 sea, como mínimo, igual a la de los otros dos conjuntamente. Por otra parte, el proveedor 3 no puede servirle más de 800 kg de cada materia prima y el proveedor 2 puede servir un máximo de 2 200 kg entre ambas. Determina las cantidades que ha de comprar de cada materia prima a cada proveedor para minimizar el coste. 145 000

27. Una empresa tiene fábricas en tres ciudades C_1, C_2 y C_3. La ciudad C_1 dispone de una refinería de petróleo en la que la empresa puede comprar hasta un máximo de 800 barriles de gasóleo semanales a 8 u.m. el barril. En la ciudad C_2 hay unas minas en las que la empresa puede comprar hasta 700 t de carbón semanales a 10 u.m. la t. Cada barril de gasóleo proporciona la energía equivalente a una t de carbón. El coste de transportar un barril de gasóleo es de 2 u.m. por km., mientras que el de una t de carbón es de 1 u.m. por km. Las distancias en km. entre las tres ciudades vienen dadas por la tabla siguiente:

	C_1	C_2	C_3
C_1	0	20	15
C_2		0	30
C_3			0

Si las fábricas de C_1 y C_3 requieren 500 unidades de energía semanales cada una (entre gasóleo y carbón) y la fábrica de C_2 requiere 300, determina qué cantidad de cada fuente de energía debe consumir cada fábrica para minimizar los costes de abastecimiento. 21800

(a) ¿Podría volverse infactible el problema si el suministro de carbón disminuyera en 200 t?

(b) Si la empresa tuviera que aumentar el consumo de energía de una de sus fábricas, ¿en cuál de ellas le resultaría más barato hacerlo?

(c) ¿Cuánto tendría que disminuir como mínimo el coste de suministrar gasóleo a C_3 para que la empresa pudiera replantearse el uso de gasóleo en dicha ciudad?

(d) Si el coste de suministrar gasóleo a la ciudad C_1 aumentara en 20 u.m./t, ¿convendría sustituir parte del gasóleo por carbón?

(e) Interpreta los precios duales de las cantidades máximas de carbón y gasóleo que la empresa puede comprar.

(f) ¿Podría la empresa aumentar el consumo de la fábrica de C_1 en 200 unidades con sus posibilidades de suministro actuales?

(g) Interpreta el intervalo de sensibilidad de las 500 unidades de energía que consume la fábrica de C_3. Indica qué seis características de la solución actual se seguirán cumpliendo mientras dicho número se mantenga dentro del intervalo.

28. Tina, Mar y Flora son tres hermanas peluqueras. Esta tarde van a una boda, por lo que deben organizarse para tener las tres el recogido del pelo listo llegado el momento. Indica quién debe peinar a quién para minimizar el tiempo total que dedican a ello, teniendo en cuenta lo siguiente: 4

- Tina tarda 2 horas en hacer un peinado, mientras que Mar tarda 3/4 de hora y Flora 1 hora.
- Tina y Mar saben peinarse a sí mismas, pero esto les lleva algo más de tiempo. Concretamente, Tina necesita media hora más de lo normal y Mar un cuarto de hora.
- Como Flora tiene dolores de espalda, sólo podría peinar a una de sus hermanas.
- Tina y Mar no se llevan bien, así que ninguna de ellas quiere peinar a la otra.
- Mar tiene otras cosas que hacer y no puede emplear más de 1 hora y media entre su propio peinado (se lo haga ella o no) y peinar a sus hermanas.

29. La cadena de gimnasios BF ha abierto dos centros en Valencia. En el gimnasio número 1 hay 100 personas matriculadas, mientras que en el gimnasio número 2 hay 200. En cada uno de los gimnasios se van a impartir 6 clases diarias de una hora, para lo que la cadena puede contratar a 3 monitores (Pablo, Lilia y Diana). Calcula cuántas horas de clase diarias debe asignar BF a cada monitor en cada gimnasio para minimizar los costes, teniendo en cuenta lo siguiente: 200

    - Pablo cobra 20€ por hora. Además, exige que el gimnasio le proporcione 1/3 de litro de bebida isotónica por cada hora de clase. Cada litro de esta bebida le cuesta al gimnasio 1.20€.
    - BF debe pagar a Lilia $2x$€ por hora, donde x es el número total de horas que la monitora trabaja para la empresa. Como Lilia también estudia, sólo puede dedicar 5 horas al día a su trabajo.
    - Diana pide por cada clase de una hora una cantidad base de 22€ más 2 céntimos de euro por cada persona matriculada en el gimnasio donde se da la clase.
    - BF quiere que, en cada gimnasio, 3 de las clases se dediquen a una actividad llamada Body-pump. Hay que tener en cuenta que Pablo y Lilia están cualificados para dirigir esta actividad, mientras que Diana no ha recibido la formación correspondiente.
    - Por exigencia de los clientes, Pablo debe impartir en total 3 clases más al día que Diana.