

# Matemáticas para los Modelos Dinámicos

Vicente J. Bolós

Curso 2025-2026



# Índice general

<b>1. Dinámica discreta: ecuaciones en diferencias</b>	<b>3</b>
1.1. Ecuaciones en diferencias . . . . .	4
1.1.1. Operador de diferencias . . . . .	6
1.2. Solución de una ED . . . . .	6
1.2.1. Soluciones constantes: puntos de equilibrio . . . . .	7
1.3. Problema de valores iniciales . . . . .	7
1.4. EDs de primer orden autónomas . . . . .	8
1.4.1. Resolución gráfica . . . . .	9
1.4.2. Teoría de estabilidad de puntos de equilibrio . . . . .	12
1.4.3. Ejemplos. Modelos discretos de oferta-demanda . . . . .	18
1.4.4. Atractores y diagramas de bifurcación . . . . .	22
1.5. Estabilidad en EDs de orden superior . . . . .	25
1.6. EDs lineales . . . . .	27
1.6.1. EDLs homogéneas . . . . .	27
1.6.2. Cálculo de la solución general de una EDLH . . . . .	28
1.6.3. EDLs completas . . . . .	35
1.6.4. Método de los coeficientes indeterminados . . . . .	36
<b>2. Dinámica continua: ecuaciones diferenciales ordinarias</b>	<b>39</b>
2.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias . . . . .	39
2.2. Solución de una EDO . . . . .	41
2.2.1. Soluciones constantes: puntos de equilibrio . . . . .	41
2.3. Problema de valores iniciales . . . . .	42
2.4. Discretización . . . . .	44
2.5. Métodos de resolución para EDOs de primer orden . . . . .	46
2.5.1. EDOs autónomas . . . . .	47
2.5.2. EDOs de variables separables . . . . .	49
2.5.3. EDOs homogéneas . . . . .	49
2.5.4. EDOs lineales . . . . .	50
2.5.5. Ecuaciones de Bernoulli . . . . .	51
2.5.6. Ecuaciones de Ricatti . . . . .	51
2.6. EDOs lineales de cualquier orden . . . . .	52
2.6.1. Resolución de EDOLs homogéneas . . . . .	52
2.6.2. Resolución de EDOLs completas . . . . .	56

<b>3. Dinámica estocástica</b>	<b>59</b>
3.1. Ecuaciones en diferencias estocásticas discretas . . . . .	59
3.1.1. Paseos aleatorios discretos . . . . .	62
3.1.2. Movimientos brownianos discretos . . . . .	63
3.2. Ecuaciones diferenciales estocásticas . . . . .	68
3.2.1. Movimientos brownianos continuos . . . . .	69
3.2.2. Procesos de difusión . . . . .	70
3.2.3. Integral estocástica . . . . .	70
3.2.4. Modelo de Black-Scholes . . . . .	72

# Introducción

Los modelos o sistemas dinámicos estudian la evolución de una magnitud (que en general la representaremos como  $X$ ) a lo largo del tiempo  $t$ . Dicha evolución ha de seguir una *ley* en forma de ecuación, y el objetivo es hallar el valor de  $X$  en cualquier tiempo  $t$  de un dominio temporal determinado, es decir  $X(t)$ . Si el dominio temporal es discreto, estamos trabajando en el ámbito de la *dinámica discreta*; si por el contrario, el dominio temporal no es discreto, como por ejemplo un intervalo real (ya sea acotado o no acotado), estamos trabajando en el ámbito de la *dinámica continua*.

Por ejemplo, la ecuación

$$X(t+2) = X(t+1) + X(t), \quad t \in \mathbb{N},$$

determina la ley que marca la evolución de  $X$  (nos dice que el valor de  $X$  en un instante es la suma del valor de  $X$  en los dos instantes inmediatamente anteriores) dentro de un sistema dinámico discreto, ya que los valores que toma  $t$  son discretos. Por el contrario, la ecuación

$$X''(t) + 2X'(t) + X(t) - t = 0, \quad t \in [0, +\infty[ ,$$

determina una ley dentro de un sistema dinámico continuo, ya que  $t$  toma cualquier valor real no negativo.

La primera ecuación es una *ecuación en diferencias*, y la segunda es una *ecuación diferencial ordinaria*. Existen otros tipos de ecuaciones que determinan un sistema dinámico: las *ecuaciones integrales*, como por ejemplo

$$X(t) = \int_0^t (t-s)\sqrt{X(s)} ds, \quad t \geq 0,$$

las *ecuaciones diferenciales con retrasos*, como por ejemplo

$$X'(t+1) = X(t)(1-X(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

en donde aparece  $X$  y sus derivadas pero evaluadas en distintos instantes de tiempo; o, si la magnitud  $X$  depende de otras variables además de  $t$ , las *ecuaciones en derivadas parciales*, como por ejemplo

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2}, \quad (t, x, y) \in \mathbb{R}^3,$$

en donde  $X$  es función de  $t, x, y$ . No obstante, nosotros solamente vamos a estudiar los dos primeros tipos de ecuaciones. Además,  $X$  será una magnitud real, es decir, sus valores serán números reales.

Todos estos sistemas dinámicos se consideran *deterministas* ya que dadas unas condiciones iniciales, la evolución de la magnitud  $X$  a lo largo del tiempo queda completamente determinada. No obstante, en los *sistemas dinámicos estocásticos* esto no ocurre. En este tipo de sistemas, tanto la magnitud como algunos parámetros de la ley de evolución pueden no estar completamente determinados, siguiendo alguna distribución de probabilidad. A su vez, los sistemas dinámicos estocásticos pueden ser *discretos* o *continuos*.

Por ejemplo, la siguiente *ecuación en diferencias estocástica*

$$X(t+1) = X(t) + \xi, \quad t \in \mathbb{N},$$

en donde  $\xi$  es una variable estocástica que sigue una distribución binomial con  $P(\xi = 1) = 1/2$  y  $P(\xi = -1) = 1/2$ , describe una ley discreta estocástica para la evolución de  $X$ .

Por otro lado, las ecuaciones que describen los procesos estocásticos continuos requieren de conceptos teóricos específicos como la *integral de Itô*, ya que las funciones resultantes de estos procesos, en general, no son derivables en (casi) ningún punto. Por ejemplo, la siguiente *ecuación diferencial ordinaria estocástica*

$$dX(t) = \mu(X(t), t) dt + \sigma(X(t), t) dW(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

en donde  $\mu$  es la media,  $\sigma$  es la desviación típica y  $W(t)$  es un *proceso de Wiener* dado, se puede expresar de forma más rigurosa en forma de la *ecuación integral estocástica*

$$X(t) - X(t_0) = \int_{t_0}^t \mu(X(u), u) du + \int_{t_0}^t \sigma(X(u), u) dW(u), \quad t_0, t \in \mathbb{R}, \quad t_0 < t,$$

en donde la primera integral es una integral de Riemann, mientras que la segunda es una *integral de Itô*.

# Tema 1

## Dinámica discreta: ecuaciones en diferencias

En la dinámica discreta se estudia una magnitud  $X$  que toma valores en un conjunto discreto de instantes de tiempo  $\{t_0, t_1, t_2, \dots\}$  que supondremos ordenado de menor a mayor (es decir, dados  $i, j \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  con  $i < j$  se tiene que  $t_i < t_j$ ), aunque normalmente se considera  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 1$ , etc... para simplificar. Utilizaremos la notación  $X_n$  para referirnos al valor de  $X$  en el instante  $t_n$  (con  $n \in \mathbb{N}$ ), en vez de la notación usual  $X(t_n)$ . Además, la evolución de dicha magnitud está regida por una ley: una expresión en forma de ecuación en la que se relacionan los valores de  $X$  en diversos instantes, y en donde  $X$  hace el papel de incógnita.

**Ejemplo 1.0.1** La ecuación de Fibonacci

$$X(t+2) = X(t+1) + X(t), \quad t \in \mathbb{N}, \quad (1.1)$$

podemos expresarla como

$$X_{n+2} = X_{n+1} + X_n, \quad (1.2)$$

en donde  $n \in \mathbb{N}$  hace el papel de parámetro aunque no quede explícitamente indicado. Así pues, si conocemos los dos primeros términos,  $X_0 = 1$  y  $X_1 = 1$ , entonces podemos calcular  $X_2$  haciendo  $n = 0$ :

$$X_2 = X_1 + X_0 = 1 + 1 = 2.$$

Utilizando el mismo procedimiento, dando valores naturales sucesivos a  $n$ , podemos calcular

$$X_3 = X_2 + X_1 = 2 + 1 = 3 \quad (n = 1)$$

$$X_4 = X_3 + X_2 = 3 + 2 = 5 \quad (n = 2)$$

$$X_5 = X_4 + X_3 = 5 + 3 = 8 \quad (n = 3)$$

...

Así podremos obtener el valor de  $X$  en cualquier instante  $t_n$  con  $n \in \mathbb{N}$ . La ecuación (1.2) es conocida como la *ecuación de Fibonacci*, y la sucesión  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  recibe el nombre de *sucesión de Fibonacci*.

## 1.1. Ecuaciones en diferencias

En general, cualquier expresión de la forma

$$F(X_{n+k}, X_{n+k-1}, \dots, X_n, n) = 0, \quad (1.3)$$

en donde  $F$  es una función dada y  $k$  es un número natural positivo, conforma un *sistema dinámico discreto*. De este modo, (1.3) o cualquier expresión matemática equivalente recibe el nombre de *ecuación en diferencias finitas* o simplemente *ecuación en diferencias* (ED). En este caso,  $k$  es el *orden* de la ED (nótese que obviamente, los términos  $X_{n+k}$  y  $X_n$  han de aparecer en la expresión). Así pues, por ejemplo, son ED de orden 1 (o de primer orden) las expresiones

$$X_{n+1} = X_n, \quad X_{n+1} + X_n = 2n - 4, \quad X_{n+1} + nX_n = X_n^2;$$

y son ED de orden 2 (o de segundo orden) las expresiones

$$X_{n+2} = X_n, \quad X_{n+2} + X_{n+1} + X_n^2 = n, \quad X_{n+2} + 4nX_n = 0.$$

Llegados a este punto, hay que recalcar que, según nuestra notación, el término de menor orden de una ED ha de ser  $X_n$ . Si no es así, se dice que la ED está *trasladada* en el tiempo y conviene re-escribirla haciendo un cambio en la variable  $n$  de forma que el término de menor orden sea  $X_n$ . Por ejemplo, al igual que la ED dada en (1.2), la ED

$$X_{n+1} = X_n + X_{n-1}$$

también nos dice que un término se calcula sumando los dos anteriores, pero conviene re-escribirla como  $X_{n+2} = X_{n+1} + X_n$ .

Si  $F$  no depende de  $n$  entonces la ley viene dada de una forma independiente del tiempo y se dice que la ED correspondiente es *autónoma*.

**Nota 1.1.1** A partir de una ED no autónoma, en algunos casos (en los que se puede despejar  $n$ ) se puede obtener una ED autónoma, aunque la nueva ecuación tiene un orden mayor y su conjunto de soluciones (cuyo concepto lo definiremos más adelante con mayor precisión) es también mayor. Por ejemplo, dada la ED

$$X_{n+1} = X_n + n,$$

se tiene que  $n = X_{n+1} - X_n$ ; por otro lado, trasladando la ecuación se tiene

$$X_{n+2} = X_{n+1} + (n+1) = X_{n+1} + (X_{n+1} - X_n + 1) = 2X_{n+1} - X_n + 1,$$

que es una ED autónoma de orden 2. No obstante, estas ecuaciones no son del todo equivalentes, ya que en su forma no autónoma,  $X_1$  viene completamente determinado por el valor que toma  $X_0$ , mientras que en su forma autónoma  $X_1$  es independiente de  $X_0$ .

Por otro lado, si el término de mayor orden está despejado se dice que la ED viene dada en forma *explícita*. En general, una ED explícita es de la forma

$$X_{n+k} = f(X_{n+k-1}, \dots, X_n, n),$$

en donde  $f$  es una función dada. En caso contrario, se dice que la ED viene dada en forma *implícita*.

**Ejemplo 1.1.1** Tenemos 1 000 euros en un depósito a plazo fijo que nos ofrece un tipo de interés nominal  $r = 10\% = 0.1$  mediante el sistema de capitalización compuesta anual y queremos conocer el saldo del que dispondremos cuando pasen 15 años.

Vamos a formular el problema de un modo más abstracto. Acordamos que el tiempo  $t$  lo medimos en años y llamamos  $t_0 = 0$  al instante en el que realizamos el depósito. Además, como sólo nos interesa saber el saldo al principio de cada año (una vez capitalizados los intereses), llamamos  $t_1 = 1, t_2 = 2, \dots$  usando el año como unidad de tiempo. Denotamos por  $C$  el capital medido en miles de euros; así,  $C_n$ , es decir  $C(t_n)$ , representa el capital que tenemos cuando han pasado  $n$  años. Por lo tanto, nuestro objetivo es hallar  $C_{15}$ .

Si conocemos el capital en el año  $n$ , podemos calcular el capital en el año  $n+1$  sumándole a  $C_n$  los intereses que dicha cantidad ha generado durante un año, que denotaremos por  $I_n$ ; para ello usamos la fórmula  $I_n = r \cdot C_n$ , con lo que tenemos

$$C_{n+1} = C_n + I_n = C_n + rC_n = (1 + r) C_n. \quad (1.4)$$

Puesto que  $C_0 = 1$ , podemos calcular  $C_1 = 1.1$ , y a partir de  $C_1$  podemos calcular  $C_2 = 1.1^2$ , y así sucesivamente hasta llegar a  $C_{15} = 1.1^{15} = 4.17725$ , es decir, 4 177.25 euros.

Una vez modelizado este problema, se puede ir añadiendo complejidad. Por ejemplo, supongamos ahora que el periodo de capitalización (cada cuánto recibimos los intereses) es  $h$ . En este caso, nos interesa escoger los tiempos  $t_1 = h, t_2 = 2h, \dots$  que representan los inicios de cada periodo de capitalización. Entonces la ED que modeliza este nuevo problema viene dada por

$$C_{n+1} = (1 + rh) C_n. \quad (1.5)$$

**Ejemplo 1.1.2** Queremos estudiar la evolución de una determinada población para predecir el número de individuos que habrá al cabo de 10 años. Para ello, denotamos por  $P_n$  la población al cabo de  $n$  años, siendo  $P_0$  la población actual.

Realizamos el siguiente balance anual de la variación de la población:

$$P_{n+1} - P_n = [\text{nacidos durante el año } n] - [\text{fallecidos durante el año } n].$$

Estamos suponiendo que no existen migraciones de la población. Además, suponemos que los *nacidos durante el año  $n$*  son un porcentaje de la población que comienza el año; es decir

$$[\text{nacidos durante el año } n] = f \cdot P_n,$$

en donde  $f \geq 0$  recibe el nombre de *tasa de fecundidad* (que se considera inalterable a lo largo de los años). También suponemos que los *fallecidos durante el año  $n$*  son un porcentaje de la población que comienza el año; es decir

$$[\text{fallecidos durante el año } n] = m \cdot P_n,$$

en donde  $0 \leq m \leq 1$  recibe el nombre de *tasa de mortalidad* (que también se considera inalterable a lo largo de los años).

Con estas hipótesis adicionales, el crecimiento de la población se rige por la ED

$$P_{n+1} - P_n = fP_n - mP_n = (f - m) P_n = \lambda P_n,$$

en donde  $\lambda := f - m$  recibe el nombre de *tasa de crecimiento*. El modelo aquí descrito recibe el nombre de *modelo de Malthus* y se puede usar para describir la evolución de una población cuando no existen migraciones y la tasa de crecimiento permanece constante.

Nótese que la ecuación malthusiana

$$P_{n+1} - P_n = \lambda P_n \iff P_{n+1} = (1 + \lambda) P_n$$

es similar a la ecuación (1.4) que se obtiene cuando se estudia el sistema de capitalización compuesta. En este caso, la tasa de crecimiento  $\lambda$  hace el papel del interés nominal  $r$ .

### 1.1.1. Operador de diferencias

Dada una sucesión  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , la *diferencia (de primer orden)* del término  $X_n$  se define mediante el operador de diferencias “ $\Delta$ ” como

$$\Delta X_n := X_{n+1} - X_n.$$

Aplicando de nuevo el operador, se obtiene la *diferencia de segundo orden*:

$$\begin{aligned} \Delta^2 X_n &:= \Delta(\Delta X_n) = \Delta X_{n+1} - \Delta X_n \\ &= (X_{n+2} - X_{n+1}) - (X_{n+1} - X_n) = X_{n+2} - 2X_{n+1} + X_n. \end{aligned}$$

En general, dado  $k$  un número natural positivo, la *diferencia de orden  $k$*  del término  $X_n$  se define a partir de la diferencia de orden  $k - 1$  como

$$\Delta^k X_n := \Delta(\Delta^{k-1} X_n) = \Delta^{k-1} X_{n+1} - \Delta^{k-1} X_n,$$

considerando que  $\Delta^0 X_n := X_n$ .

Dada una ED de la forma (1.3), siempre se puede expresar en términos de estos operadores, en la forma general

$$H(\Delta^k X_n, \Delta^{k-1} X_n, \dots, \Delta X_n, X_n, n) = 0,$$

y ésta es la razón del nombre “ecuación en diferencias”.

**Ejemplo 1.1.3** La ecuación de Fibonacci  $X_{n+2} = X_{n+1} + X_n$  se puede expresar en términos de las diferencias como

$$\Delta^2 X_n + \Delta X_n - X_n = 0.$$

## 1.2. Solución de una ED

Llamaremos *solución* de (1.3) a toda sucesión  $\mathcal{S} = \{S_n\}_{n \in J}$  que verifique

$$F(S_{n+k}, S_{n+k-1}, \dots, S_n, n) = 0$$

para todo  $n \in J$  para el que dicha expresión tenga sentido, en donde  $J$  es un intervalo de números naturales. Obviamente, hay que exigir además que

$$(S_{n+k}, S_{n+k-1}, \dots, S_n, n) \in \text{dom}(F)$$

para todo  $n \in J$  para el que tenga sentido. En este caso, diremos que  $S_n$  es solución. Las soluciones que tienen mayor interés dinámico son aquellas que están definidas en todo el conjunto de números naturales, es decir,  $J = \mathbb{N}$ .

**Ejemplo 1.2.1** Dada la ED

$$X_{n+1} = 2X_n,$$

se puede comprobar que la sucesión

$$\{2^n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$$

es una solución. Efectivamente, considerando  $S_n = 2^n$  se tiene

$$S_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2 \cdot S_n,$$

y esto es válido para toda  $n \in \mathbb{N}$ . En este caso se dice que  $S_n = 2^n$  es una solución.

No obstante, no existe una única solución, ya que, por ejemplo, es fácil comprobar que la llamada *sucesión cero*, es decir

$$\{0\}_{n \in \mathbb{N}} = \{0, 0, 0, \dots\},$$

también es solución. En general, es solución cualquier sucesión de la forma  $\{A \cdot 2^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , es decir

$$S_n = A \cdot 2^n,$$

en donde  $A$  es constante y puede ser cualquier número real (es decir, hace el papel de parámetro).

### 1.2.1. Soluciones constantes: puntos de equilibrio

Una solución  $S_n$  es *constante* si es de la forma  $S_n = p$ , es decir  $\{p, p, p, \dots\}$ , en donde  $p \in \mathbb{R}$  es constante. En este caso se dice que  $p$  es un *punto de equilibrio* o *punto fijo*.

Para hallar los puntos de equilibrio de una ED basta con sustituir todos los términos de la forma  $X_{n+j}$  (con  $j \in \mathbb{N}$ ) por  $p$  y resolver la ecuación resultante (cuya incógnita es  $p$ ).

Por ejemplo, para hallar los puntos de equilibrio de la ED

$$X_{n+2} = 6X_{n+1} - X_n^2 - 6,$$

debemos resolver la ecuación  $p = 6p - p^2 - 6$ , es decir

$$p^2 - 5p + 6 = 0,$$

que tiene un par de soluciones:  $p = 2$  y  $p = 3$ .

## 1.3. Problema de valores iniciales

Normalmente las EDs tienen infinitas soluciones (véase el Ejemplo 1.2.1) y para distinguir a una de ellas hay que añadir algunas condiciones adicionales. En concreto, dada una ED de orden  $k$ , si precisamos cuál es el valor de la magnitud  $X$  en  $k$  instantes consecutivos, se formula el llamado *problema de valores iniciales* (PVI). En este caso, si la ecuación está en forma explícita, puede asegurarse que existe una única solución.

**Ejemplo 1.3.1** Dado el PVI

$$\begin{cases} X_{n+1} = 2X_n \\ X_0 = 3, \end{cases}$$

se tiene que  $S_n = 3 \cdot 2^n$  es la única solución, ya que

- $S_{n+1} = 3 \cdot 2^{n+1} = 3 \cdot 2 \cdot 2^n = 3 \cdot S_n$ , y esto es válido para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- $S_0 = 3 \cdot 2^0 = 3$ .

Los primeros términos de esta solución son

$$\{3, 6, 12, 24, 48, 96, \dots\}.$$

**Ejemplo 1.3.2** Se considera el PVI asociado a la ecuación de Fibonacci

$$\begin{cases} X_{n+2} = X_{n+1} + X_n \\ X_0 = 2 \\ X_1 = 1. \end{cases}$$

Se pueden calcular todos los términos que deseemos de la solución correspondiente:

$$\{2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \dots\}.$$

En algunas ocasiones es fácil calcular el término general  $S_n$  de la solución de un PVI (véase el Ejemplo 1.2.1). En tales casos se dice que el PVI se ha resuelto *de manera exacta*. En otros casos, la resolución exacta de un PVI no es tan trivial; por ejemplo, no resulta evidente deducir que la sucesión

$$S_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

es justamente el término general de la solución del PVI del Ejemplo 1.3.2 (compruébese).

## 1.4. EDs de primer orden autónomas

En primer lugar, vamos a estudiar las EDs de primer orden autónomas en su forma explícita, es decir, de la forma

$$X_{n+1} = f(X_n), \tag{1.6}$$

en donde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función real dada. Recordemos que, dada una condición inicial  $X_0$ , el PVI asociado a la ecuación (1.6) tiene una única solución a la que denotaremos  $\mathcal{S}(X_0)$  o simplemente por su término general  $S_n$  (en donde  $S_0 = X_0$ ). La particularidad que tienen este tipo de ecuaciones es que cada término de una solución es la imagen por  $f$  del término precedente (salvo el primero, obviamente), siempre y cuando no haya problemas con el dominio de  $f$ . Es decir, si  $S_n$  es una solución, se tiene que

$$S_n = f(S_{n-1}) = f(f(S_{n-2})) = f(f(\dots f(S_0)\dots)),$$

y por lo tanto

$$S_n = (f \circ \dots \circ f)(S_0) = f^n(S_0).$$

No hay que confundir la composición de  $f$  consigo misma  $n$  veces, denotada por  $f^n$ , con la potencia  $n$ -ésima de  $f$  (es decir, el producto de  $f$  consigo misma  $n$  veces). Aunque se denoten de la misma forma, el contexto suele aclarar a qué nos estamos refiriendo. La razón de que se denoten igual es que la ley de composición de funciones “ $\circ$ ” suele considerarse como “un producto” para las funciones (aunque no sea el “producto usual” de los números reales). De hecho, el producto de matrices es el equivalente a la composición de funciones lineales.

**Ejemplo 1.4.1** Consideremos la ED de primer orden autónoma y explícita

$$X_{n+1} = X_n^2 + 1. \tag{1.7}$$

En este caso, la función que define la ecuación es  $f(x) := x^2 + 1$ . Los primeros cinco términos de la solución cuya condición inicial es 0 son

$$S(0) = \{0, 1, 2, 5, 26, \dots\},$$

ya que  $f(0) = 1$ ,  $f^2(0) = f(f(0)) = f(1) = 2$ ,  $f^3(0) = f(f(f(0))) = f(2) = 5$  y  $f^4(0) = f(f(f(f(0)))) = f(5) = 26$ .

### 1.4.1. Resolución gráfica

Vamos a describir un procedimiento sencillo que nos permitirá conocer el comportamiento de las soluciones de una ED si conocemos la gráfica de la función que define la ecuación.

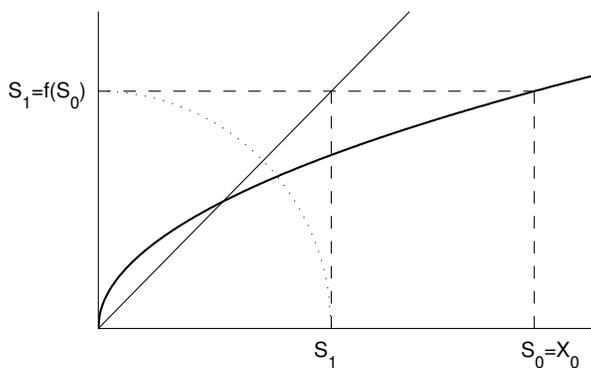


Figura 1.1: Procedimiento de resolución gráfica de una ED de primer orden autónoma y explícita con condición inicial  $X_0$ .

Sea  $S_n$  una solución de la ecuación (1.6). Supongamos que conocemos un término de la solución, por ejemplo el valor inicial  $S_0$ , y que tenemos representada la gráfica de la función  $f$  en el plano  $\{x, y\}$ , es decir, el conjunto de puntos  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  tales que  $y = f(x)$ . Entonces es posible hallar el siguiente término de la solución,  $S_1 = f(S_0)$ , calculando gráficamente el

valor de la ordenada  $y$  que se corresponde con la abscisa  $x = S_0$ . El procedimiento es bien conocido: se levanta una línea vertical (paralela al eje  $OY$ ) desde el punto  $(S_0, 0)$  hasta que corta a la gráfica de  $f$ ; desde este punto de corte se traza una línea horizontal (paralela al eje  $OX$ ) y se halla el punto de corte con el eje  $OY$  (véase Figura 1.1).

Pero, ¿qué podemos hacer si queremos hallar el término siguiente  $S_2$  y los términos posteriores? Es evidente que la evolución de la solución se puede apreciar mejor si los términos se representan en el mismo eje. Ello se puede lograr usando un compás y trazando un sector de circunferencia de radio  $S_1$  que vaya del eje  $OY$  al eje  $OX$ . Pero este procedimiento necesita de un utensilio mecánico adicional y además no es viable cuando se ha utilizado una escala distinta en cada eje.

El procedimiento alternativo (que también se ha ilustrado en la Figura 1.1) consiste en representar la bisectriz  $\{y = x\}$ , también llamada *diagonal principal*, y actuar del siguiente modo:

- Se levanta una línea vertical desde el punto  $(S_0, 0)$  hasta que corta a la gráfica de  $f$ .
- Desde ese punto de la gráfica, se traza una línea horizontal hasta que corta a la diagonal principal  $\{y = x\}$ .
- Se traza entonces una nueva línea vertical desde ese punto hasta que corta al eje  $OX$ . El valor de la abscisa del punto obtenido es justamente  $S_1$ .

Reiterando este procedimiento se observa la evolución de una determinada solución. El diagrama resultante se conoce con *diagrama Cobweb*.

Nótese que los puntos de equilibrio de la ED (1.6) se pueden determinar gráficamente con ayuda de los diagramas Cobweb, ya que se corresponden con los puntos de corte de la gráfica de  $f$  con la diagonal principal  $\{y = x\}$ . Por ejemplo, en la Figura 1.2 se representa la gráfica de la función  $f(x) = \frac{1}{5}(-10 + 2x + 6x^2 - x^3)$  y la diagonal principal, deduciendo que los puntos de equilibrio de la ED

$$X_{n+1} = \frac{1}{5}(-10 + 2X_n + 6X_n^2 - X_n^3) \quad (1.8)$$

son  $p_1 = -1$ ,  $p_2 = 2$  y  $p_3 = 5$ .

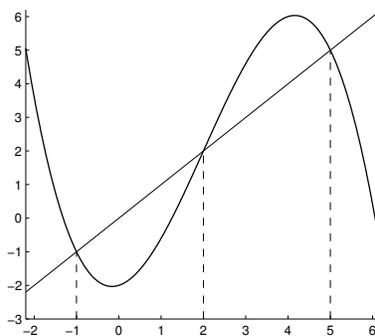


Figura 1.2: Puntos de equilibrio de la ED (1.8).

**Ejemplo 1.4.2** Vamos a hallar gráficamente los primeros términos de la solución  $S_n$  del PVI

$$\begin{cases} X_{n+1} = \frac{3}{2}\sqrt{|X_n|} \\ X_0 = \frac{1}{10}. \end{cases} \quad (1.9)$$

Para ello disponemos de la gráfica de la función  $f(x) := \frac{3}{2}\sqrt{|x|}$ . Teniendo en cuenta que la condición inicial es  $\frac{1}{10}$ , utilizando el procedimiento anteriormente descrito se obtienen los siguientes cuatro términos de la solución en la Figura 1.3.

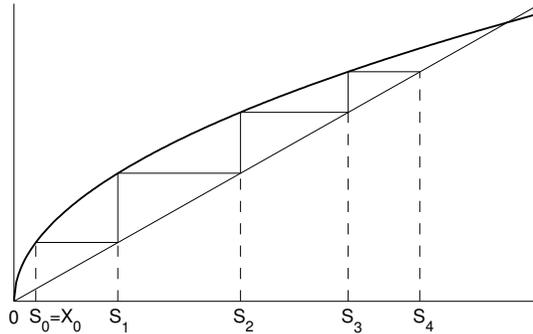


Figura 1.3: Resolución gráfica del PVI (1.9).

En general, si la función  $f$  es creciente, sus soluciones son monótonas crecientes o decrecientes. En este caso, la resolución gráfica da como resultado un dibujo “escalonado”. Si la gráfica de  $f$  en el punto  $(X_0, f(X_0))$  queda por encima de la diagonal principal (es decir, si  $f(X_0) > X_0$ ), la solución será creciente; por el contrario, si la gráfica de  $f$  en  $(X_0, f(X_0))$  queda por debajo de la diagonal principal, la solución será decreciente (ver Figura 1.4).

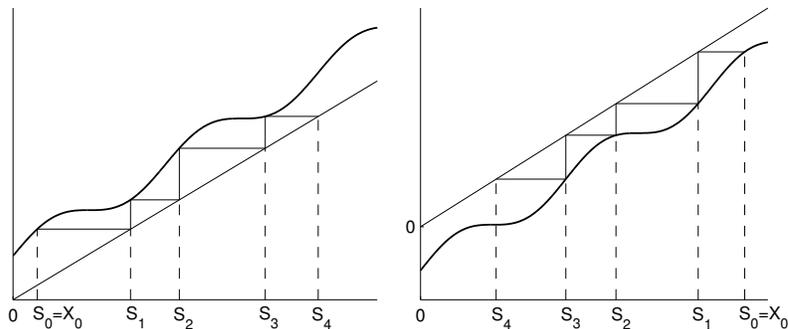


Figura 1.4: Resolución gráfica de PVI cuyas soluciones son crecientes (izquierda) o decrecientes (derecha), dependiendo de si la gráfica de la correspondiente  $f(x)$  está por encima o por debajo de la diagonal principal.

**Ejemplo 1.4.3** Vamos a hallar gráficamente los primeros términos de la solución  $S_n$  del PVI

$$\begin{cases} X_{n+1} = 1 - \frac{1}{3}X_n^2 \\ X_0 = \frac{1}{10}. \end{cases} \quad (1.10)$$

Para ello disponemos de la gráfica de la función  $f(x) := 1 - \frac{1}{3}x^2$ . Teniendo en cuenta que la condición inicial es  $\frac{1}{10}$ , utilizando el procedimiento anteriormente descrito se obtienen los siguientes cuatro términos de la solución en la Figura 1.5.

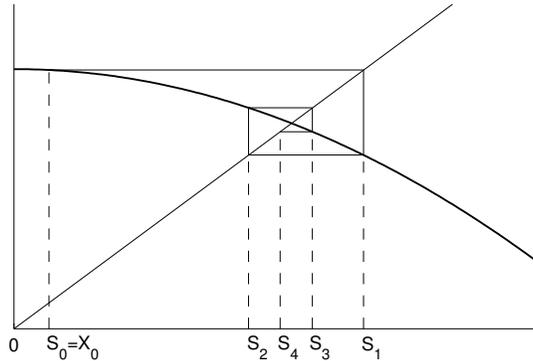


Figura 1.5: Resolución gráfica del PVI (1.10).

En general, si la función  $f$  es decreciente, sus soluciones son oscilantes y la resolución gráfica tiene un aspecto de “espiral” o “tela de araña”.

### 1.4.2. Teoría de estabilidad de puntos de equilibrio

Observando los diagramas Cobweb, nos damos cuenta de que hay puntos de equilibrio que “atraen” a las soluciones (si la derivada de  $f$  en ese punto es menor que 1) y puntos de equilibrio que “repelen” a las soluciones (si la derivada de  $f$  en ese punto es mayor que 1). Así pues, a lo largo de esta sección,  $p \in \mathbb{R}$  denotará un punto de equilibrio de la ED (1.6) y clasificaremos estos puntos de equilibrio dependiendo de cómo evolucionen las soluciones de (1.6) cuyas condiciones iniciales estén próximas a  $p$ .

#### Atractores

Diremos que  $X_0 \in \mathbb{R}$  es *atraído* por el punto de equilibrio  $p$  si la solución de (1.6) con condición inicial  $X_0$  es convergente a  $p$ . Teniendo esto en cuenta, se define la *región de atracción* del punto de equilibrio  $p$  como el conjunto

$$\mathcal{R}(p) := \{X_0 \in \mathbb{R} : X_0 \text{ es atraído por } p\}.$$

Nótese que el conjunto  $\mathcal{R}(p)$  nunca es vacío ya que  $p \in \mathcal{R}(p)$  siempre.

También se puede definir la región de atracción del punto de equilibrio  $p$  usando el concepto de conjunto  $\omega$ -límite:

$$\mathcal{R}(p) := \{X_0 \in \mathbb{R} : L_\omega(\mathcal{S}(X_0)) = \{p\}\},$$

en donde  $L_\omega(\mathcal{S}(X_0))$  es el conjunto  $\omega$ -límite de la única solución con condición inicial  $X_0$ , que ha de ser acotada. Esta definición alternativa y equivalente tiene la ventaja de que se puede usar para generalizar y definir el concepto de *región de atracción de un ciclo*, que abordaremos en la Sección 1.4.4.

**Ejemplo 1.4.4** Se considera la ED

$$X_{n+1} = \frac{1}{2}X_n,$$

de la que  $p = 0$  es un punto de equilibrio. La solución de esta ED con condición inicial  $X_0$  es la sucesión cuyo término general es

$$S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n X_0.$$

Puesto que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n X_0 = 0, \quad \forall X_0 \in \mathbb{R},$$

resulta que  $\mathcal{R}(0) = \mathbb{R}$ .

Diremos que un punto de equilibrio  $p$  es un *atractor* si  $p$  es un punto interior de su región de atracción; es decir, si existe  $\epsilon > 0$  tal que

$$[p - \epsilon, p + \epsilon] \cap \text{dom}(f) \subset \mathcal{R}(p).$$

Cuando  $\mathcal{R}(p) = \mathbb{R}$  se dice que  $p$  es un *atractor global*. No obstante, el concepto de atractor global también se aplica cuando  $\mathcal{R}(p)$  es todo el dominio (ya sea matemático o económico) de la función  $f$  de la ED (1.6). En caso contrario, se dice que  $p$  es un *atractor local*.

Así pues, en el ejemplo anterior,  $p = 0$  es un atractor global. Pero no todos los atractores son atractores globales. Obviamente, si la ED tiene más de un punto de equilibrio, entonces ninguno de ellos es un atractor global.

Por último, si nos fijamos en los diagramas Cobweb, podemos llegar a la siguiente conclusión:

Un punto de equilibrio $p$ es atractor si $ f'(p)  < 1$ .
---

**Ejemplo 1.4.5** La ED

$$X_{n+1} = X_n^2$$

tiene dos puntos de equilibrio:  $p_1 = 0$  y  $p_2 = 1$ . En este caso,  $f(x) := x^2$  verifica la siguiente propiedad:

$$\begin{cases} f(x) > x & \text{si } x > 1 \\ 0 < f(x) < x & \text{si } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Ello se observa muy bien en la gráfica de la función (ver Figura 1.6).

Razonando sobre la gráfica de la función, o utilizando la propiedad señalada, se observa que:

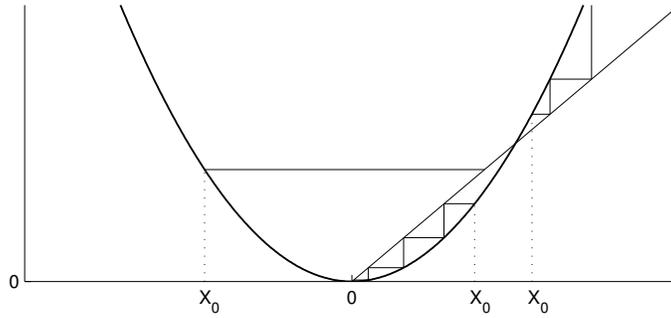


Figura 1.6: Diagrama Cobweb de  $X_{n+1} = X_n^2$  para diversas condiciones iniciales  $X_0$ .

- Si la condición inicial  $X_0 \in ]0, 1[$  entonces la correspondiente solución converge a 0.
- Si la condición inicial  $X_0 > 1$  entonces la correspondiente solución diverge a  $+\infty$ .
- Si la condición inicial  $X_0 \in ]-1, 0[$  entonces los siguientes términos de la correspondiente solución son positivos y dicha solución converge a 0.
- Si la condición inicial  $X_0 < -1$  entonces los siguientes términos de la correspondiente solución son positivos y dicha solución diverge a  $+\infty$ .

como consecuencia se obtiene que

$$\mathcal{R}(0) = ]-1, 1[, \quad \mathcal{R}(1) = \{-1, 1\}.$$

Por lo tanto,  $p_1 = 0$  es un atractor local, mientras que  $p_2 = 1$  no es un atractor. Nótese que  $|f'(0)| = 0 < 1$  y  $|f'(1)| = 2 > 1$ . Posteriormente, en el Ejemplo 1.4.13 veremos que  $p_2 = 1$  es un “repulsor”.

### Conjuntos invariantes

Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}$  es un *conjunto invariante* para la ED (1.6) si la imagen por  $f$  de cualquier punto de  $A$  pertenece al conjunto  $A$ , es decir, si se verifica

$$f(A) \subset A,$$

en donde  $f(A) := \{f(x) \in \mathbb{R} : x \in A\}$ .

Una definición equivalente se puede dar en términos de las soluciones de la ED (1.6): un conjunto  $A \subset \mathbb{R}$  es invariante si dada una condición inicial  $X_0 \in A$  se cumple que la solución  $\mathcal{S}(X_0)$  está contenida en  $A$ .

**Ejemplo 1.4.6** El intervalo  $[-4, 6]$  es invariante para la ED

$$X_{n+1} = \frac{1}{2}X_n.$$

En este caso,  $f(x) := x/2$  y se tiene que

$$x \in [-4, 6] \implies -4 \leq x \leq 6 \implies -2 \leq \frac{x}{2} \leq 3 \implies f(x) \in [-2, 3] \subset [-4, 6].$$

Sin embargo, el intervalo  $A = [2, 5]$  no es invariante para la misma ED ya que  $2 \in A$  pero  $f(2) = 1 \notin A$ .

**Ejemplo 1.4.7** El intervalo  $A = [-4, 6]$  no es invariante para la ED

$$X_{n+1} = -X_n.$$

En este caso,  $f(x) := -x$  y se tiene que  $6 \in A$  pero  $f(6) = -6 \notin A$ . Observamos que cualquier intervalo simétrico centrado en 0 sí es invariante para esta ED.

**Proposición 1.4.1** Dado un intervalo compacto  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , sean

$$M := \max \{f(x) : x \in [a, b]\}, \quad m := \min \{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Entonces  $[a, b]$  es un conjunto invariante para la ED (1.6) si y sólo si se cumple que  $M, m \in [a, b]$ .

**Ejemplo 1.4.8** Estudiemos cuándo el intervalo  $[0, 1]$  es invariante para la ED

$$X_{n+1} = rX_n(1 - X_n), \quad r > 0.$$

Para ello calculamos

$$M = \max \{rx(1 - x) : x \in [0, 1]\} = \frac{r}{4}, \quad m := \min \{rx(1 - x) : x \in [0, 1]\} = 0.$$

Así pues, el intervalo  $[0, 1]$  será invariante cuando  $r/4 \in [0, 1]$ ; es decir, cuando  $0 < r \leq 4$ .

## Estabilidad

Diremos que  $p$  es un punto de equilibrio *estable* para la ED (1.6) cuando existan dos sucesiones de números reales positivos  $\{\epsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{\delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergentes<sup>1</sup> a 0 y además todos los intervalos

$$I_n := [p - \epsilon_n, p + \delta_n]$$

sean invariantes.

En otras palabras, el punto de equilibrio  $p$  es estable si tiene una base de entornos invariantes, es decir, una familia de intervalos que contienen a  $p$  en su interior, que son invariantes y que existen elementos de la familia cuya longitud es tan pequeña como se quiera.

Otra definición alternativa (aunque no equivalente) puede hacerse utilizando el concepto de distancia:  $p$  es estable si

$$\lim_{X_0 \rightarrow p} \text{dist}(\mathcal{S}(X_0), p) = 0,$$

siendo  $\text{dist}(\mathcal{S}(X_0), p)$  el supremo del conjunto  $\{|S_n - p| \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$  y  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \mathcal{S}(X_0)$ , es decir, la solución con condición inicial  $X_0$ .

La idea subyacente de la estabilidad es que soluciones con condiciones iniciales cercanas a  $p$  se quedan cerca de  $p$ , pero no necesariamente son atraídas por  $p$ . Aunque ambas definiciones se rigen por esta directriz, a lo largo del curso usaremos la primera definición.

<sup>1</sup>Se suele usar la notación  $\{\epsilon_n\} \downarrow 0$  para indicar que la sucesión  $\{\epsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de números reales positivos, es decreciente y converge a 0.

**Ejemplo 1.4.9** Dada la ED

$$X_{n+1} = \frac{1}{2}X_n,$$

se tiene que  $p = 0$  es el único punto de equilibrio, y además es estable. Basta tomar las sucesiones con término general  $\epsilon_n = \delta_n = \frac{1}{n}$  (con  $n \geq 1$ ) y comprobar directamente (como se hizo en el Ejemplo 1.4.6) que los intervalos de la forma  $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$  son invariantes.

**Ejemplo 1.4.10** Exactamente lo mismo se puede decir de la ED

$$X_{n+1} = -X_n,$$

ya que  $p = 0$  es el único punto de equilibrio y además los intervalos de la forma  $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$  (con  $n \geq 1$ ) son invariantes. Podemos asegurar por tanto que el punto de equilibrio  $p = 0$  es estable, pero no es atractor.

Cuando un punto de equilibrio de (1.6) no sea estable, diremos que es *inestable*.

**Ejemplo 1.4.11** Dada la ED

$$X_{n+1} = 2X_n,$$

se tiene que  $p = 0$  es un punto de equilibrio inestable. Para comprobarlo, se puede razonar por reducción al absurdo. Supongamos que existen sucesiones  $\{\epsilon_n\} \downarrow 0$  y  $\{\delta_n\} \downarrow 0$  tales que  $I_n := [-\epsilon_n, \delta_n]$  es invariante para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Pero esta afirmación es falsa, ya que  $\epsilon_n \in I_n$  y sin embargo  $f(\epsilon_n) = 2\epsilon_n \notin I_n$ .

Aunque en los Ejemplos 1.4.9 y 1.4.10 el punto de equilibrio es estable, existe una diferencia notable en la evolución de las soluciones de una y otra ecuación. Mientras que en el primer caso el punto de equilibrio es un atractor, en el segundo caso no lo es. A la vista de los ejemplos anteriores, podría pensarse que todo atractor es un punto de equilibrio estable. Así ocurre habitualmente, pero no siempre. Por tanto, podemos introducir un nuevo concepto: diremos que  $p$  es un punto de equilibrio *asintóticamente estable* para la ED (1.6) si  $p$  es estable y atractor.

Todos los ejemplos de atractores que han aparecido son puntos de equilibrio asintóticamente estables. No obstante, a continuación veremos un contraejemplo de punto de equilibrio atractor no estable.

**Ejemplo 1.4.12** Si consideramos la función

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1000 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

entonces  $p = 0$  es un punto de equilibrio atractor no estable de la ED (1.6) correspondiente.

### ED inversa. Repulsión

Dada una ED de la forma (1.6), si la función  $f$  es biyectiva (es decir, estrictamente creciente o estrictamente decreciente) en un entorno de un punto  $p$ , nos podemos plantear la ED *inversa*

$$X_{n+1} = f^{-1}(X_n),$$

en donde  $f^{-1}$  es la función inversa de  $f$ . Esto se podrá asegurar, por ejemplo, si  $f$  es derivable en ese entorno y  $f'(p) \neq 0$ , aunque hay casos en los que  $f$  es biyectiva, derivable, y su derivada se anula en algún punto, como por ejemplo  $f(x) = x^3$ .

Si  $p$  es un punto de equilibrio de la ED original, también lo es de la ED inversa, ya que si  $f(p) = p$  entonces  $f^{-1}(p) = p$ . Teniendo esto en cuenta, diremos que  $p$  es un punto de equilibrio *repulsor* (de la ED original) si es un punto de equilibrio atractor de la ED inversa. Según esto, los atractores de la ED inversa son los repulsores de la ED original, y viceversa. La idea subyacente al concepto de “repulsor” es que soluciones que se acercan lo suficiente al correspondiente punto de equilibrio se alejan de él en sucesivas iteraciones (aunque luego pueda volver a acercarse).

Si nos fijamos en los diagramas Cobweb, podemos llegar a la siguiente conclusión:

$$\boxed{\text{Un punto de equilibrio } p \text{ es repulsor si } |f'(p)| > 1.}$$

En este caso,  $|(f^{-1})'(p)| = 1/|f'(p)| < 1$ , con lo que  $p$  es atractor de la ED inversa.

Finalmente, se define la *región de repulsión* de  $p$  como la región de atracción de este punto de equilibrio en la ED inversa, con lo que  $p$  se dice que es un repulsor *global* si su región de repulsión es todo  $\mathbb{R}$ .

**Ejemplo 1.4.13** Dada la ED

$$X_{n+1} = X_n^2, \tag{1.11}$$

se tiene que  $p = 1$  es un punto de equilibrio (véase Ejemplo 1.4.5). Además, la función  $f(x) := x^2$  es biyectiva alrededor de este punto, concretamente, es estrictamente creciente en  $]0, +\infty[$ , y su función inversa en este intervalo viene dada por  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ . Así pues, la ED inversa de (1.11) es

$$X_{n+1} = \sqrt{X_n}.$$

Esta ED tiene a  $p = 1$  como un punto de equilibrio atractor, ya que  $|(f^{-1})'(1)| = 1/2 < 1$  y además se puede comprobar fácilmente que su región de atracción es  $\mathcal{R}(1) = ]0, +\infty[$ . Por lo tanto,  $p = 1$  es un punto de equilibrio repulsor de la ED (1.11).

En resumen, dado  $p$  un punto de equilibrio de una ED autónoma de primer orden explícita, diremos que es atractor, repulsor o estable si soluciones con condiciones iniciales cercanas a  $p$

- tienden a  $p \implies$  atractor.
- se alejan de  $p \implies$  repulsor.
- no se alejan de  $p \implies$  estable.

El concepto de “alejarse” es un poco ambiguo y es relativo a lo cercana que está la condición inicial de  $p$ . Además, cabe señalar que una solución que se acerca a un repulsor y es “repelida” por éste, puede volver a acercarse en futuras iteraciones, como por ejemplo pasa en la ED (1.8), en donde hay tres puntos de equilibrio repulsores que se van “pasando” las sucesivas iteraciones de uno a otro. De este modo, todo punto de equilibrio repulsor no puede ser ni atractor ni estable, y normalmente, todo punto atractor es estable, pero un punto estable puede no ser atractor.

### 1.4.3. Ejemplos. Modelos discretos de oferta-demanda

Un modelo de oferta-demanda de un determinado producto tiene como elementos una función oferta, una función demanda (ambas dependientes del precio del producto) y una ley que dicta el comportamiento del precio del producto a lo largo del tiempo, dependiendo de las funciones oferta y demanda. Además, se han de cumplir las tres leyes de la oferta y la demanda:

1. Si la demanda supera a la oferta, el precio tiende a subir. Por el contrario, si la oferta supera a la demanda, el precio tiende a bajar.
2. Si el precio aumenta, la oferta aumenta y la demanda disminuye. Por el contrario, si el precio disminuye, la oferta disminuye y la demanda aumenta.
3. Existe un único *precio de equilibrio* en el que la oferta y la demanda se igualan. Además, los precios evolucionan con el paso del tiempo hacia a este precio de equilibrio.

Obviamente, aparte de estas tres leyes, las funciones oferta y demanda han de ser positivas en su dominio, que es el conjunto de precios positivos. También está permitido que se anulen para algunos precios. Por ejemplo, la función demanda podría anularse para precios superiores a un determinado “precio tope”, a partir del cual los consumidores no estarían dispuestos a adquirir el producto; y la función oferta podría anularse para precios inferiores a un determinado “precio base”, por debajo del cual la empresa no podría fabricar ninguna unidad del producto. Nótese que, en estos casos, no se cumpliría la segunda ley de la oferta y la demanda que nos dice que la función demanda es estrictamente decreciente y la función oferta es estrictamente creciente, considerando que el precio es la única variable de dichas funciones. Para solucionar este conflicto se podría relajar esta ley exigiendo una monotonía pero que no sea estricta, o bien solamente se tendrían en cuenta los precios comprendidos entre el “precio base” y el “precio tope”, que llamaremos *precios factibles*.

En los modelos discretos de oferta-demanda se considera que los precios solamente se actualizan cada cierto tiempo, y todos estos “tiempos de actualización” conforman la malla de tiempos del modelo. Así pues, nuestro objetivo será hallar y estudiar el comportamiento de la sucesión de precios, que será la solución de un PVI. Podemos suponer que las actualizaciones de precios se calculan a partir de los valores inmediatamente anteriores que toman la oferta, la demanda y el precio del producto, y así, la ED del PVI es explícita y de primer orden. Además, consideraremos que tanto las funciones oferta y demanda como la ley que rige el comportamiento de los precios no dependen del tiempo, y por lo tanto la ED será, además, autónoma:

$$\begin{cases} X_{n+1} = F(\mathcal{O}(X_n), \mathcal{D}(X_n), X_n) =: f(X_n) \\ X_0 = p_0, \end{cases}$$

en donde  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{D}$  son las funciones oferta<sup>2</sup> y demanda respectivamente,  $p_0 > 0$  es el precio inicial, y  $f$  es una función continua y positiva cuyo dominio es el conjunto de precios factibles.

---

<sup>2</sup>Normalmente, la función oferta se denota con la letra  $\mathcal{S}$ . No obstante, esta notación ya la hemos usado anteriormente para referirnos a la solución de una ED, con lo que podría causar problemas y hemos decidido denotar a la función oferta con la letra  $\mathcal{O}$ .

Dentro de este marco, la primera ley es equivalente a exigir que

$$\begin{cases} f(x) > x & \text{si } \mathcal{D}(x) > \mathcal{O}(x) \\ f(x) < x & \text{si } \mathcal{D}(x) < \mathcal{O}(x). \end{cases}$$

Además, la tercera ley nos dice que el precio de equilibrio, que denotaremos  $p_{\text{eq}}$ , es un punto de equilibrio atractor cuya región de atracción ha de ser el conjunto de todos los precios factibles. Así pues,  $f$  debe satisfacer

$$\begin{cases} f(p_{\text{eq}}) = p_{\text{eq}} \\ |f'(p_{\text{eq}})| \leq 1, \end{cases}$$

aunque esta última condición solamente nos asegura que  $p_{\text{eq}}$  no es un repulsor local y habrá que comprobar mediante otras herramientas (como por ejemplo, analizando la solución general si es posible hallarla) que el precio de equilibrio atrae a todos los precios factibles.

### Modelo discreto de ajuste de precios de Evans

En este modelo se toman las funciones oferta y demanda de la forma

$$\begin{cases} \mathcal{O}(x) = ax - b \\ \mathcal{D}(x) = -cx + d, \end{cases} \quad (1.12)$$

en donde  $a, c > 0$  y  $b, d \geq 0$ . En este caso, el “precio base” por debajo del cual la empresa no puede fabricar ninguna unidad del producto es  $b/a$ , y el “precio tope” a partir del cual ningún consumidor adquiere el producto es  $d/c$ , con lo que el conjunto de precios factibles es  $]b/a, d/c[$  (ver Figura 1.7). Además, el único precio de equilibrio es

$$p_{\text{eq}} = \frac{b + d}{a + c}. \quad (1.13)$$

Estas funciones cumplen la segunda ley de la oferta y la demanda, ya que  $\mathcal{O}(x)$  es estrictamente creciente y  $\mathcal{D}(x)$  es estrictamente decreciente en el conjunto de precios factibles, y además son positivas.

La evolución de los precios viene dada por la ED

$$X_{n+1} = k \cdot (\mathcal{D}(X_n) - \mathcal{O}(X_n)) + X_n, \quad (1.14)$$

en donde  $k > 0$ . Aplicando (1.12) y (1.13) en (1.14) se obtiene

$$X_{n+1} = p_{\text{eq}} \cdot (1 - r) + r \cdot X_n, \quad (1.15)$$

en donde  $r := 1 - k \cdot (a + c) < 1$ . Así pues

$$f(x) = k \cdot (\mathcal{D}(x) - \mathcal{O}(x)) + x = p_{\text{eq}} \cdot (1 - r) + r \cdot x.$$

Este modelo satisface la primera ley de la oferta y la demanda, ya que si  $\mathcal{D}(x) > \mathcal{O}(x)$  entonces  $k \cdot (\mathcal{D}(x) - \mathcal{O}(x)) > 0$  y por lo tanto  $f(x) > x$ ; análogamente se prueba la otra

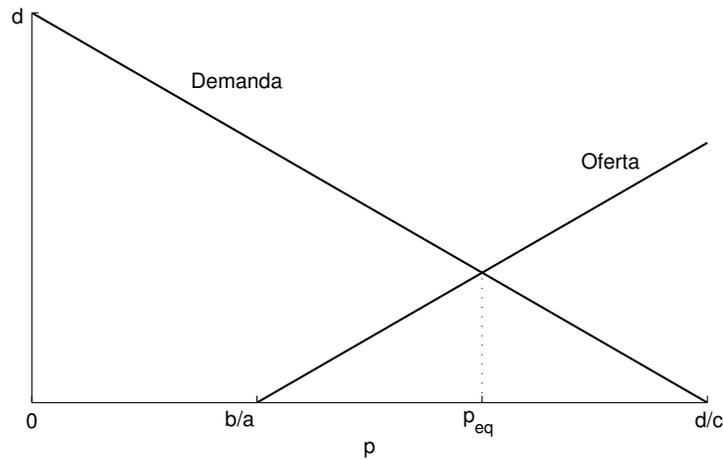


Figura 1.7: Funciones de oferta y demanda del modelo de Evans.

condición. Además, el precio de equilibrio  $p_{eq}$  es el único punto de equilibrio de la ED, pero no está asegurado que sea siempre atractor. De hecho, como  $f'(p_{eq}) = r$ , si  $|r| > 1$  entonces  $p_{eq}$  es repulsor local y no se cumpliría la tercera ley de la oferta y la demanda.

Es fácil deducir<sup>3</sup> y comprobar que la solución de la ED (1.15) con condición inicial  $p_0$  viene dada por

$$S_n = p_{eq} + (p_0 - p_{eq})r^n,$$

y por lo tanto,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = p_{eq}$  si y sólo si  $r \in ]-1, 1[$ . No obstante, como  $k, a, c > 0$  se tiene que  $r < 1$  siempre; así pues, para que el precio de equilibrio sea un atractor, cuya región de atracción sean todos los precios factibles sólo hay que exigir  $r > -1$ , o lo que es lo mismo,

$$k \cdot (a + c) < 2.$$

Como casos particulares,

- si  $k \cdot (a + c) < 1$ , entonces  $r > 0$  y la solución  $S_n$  tiende al precio de equilibrio de forma monótona.
- si  $k \cdot (a + c) = 1$ , entonces  $r = 0$  y la solución  $S_n$  llega directamente al precio de equilibrio en  $t = t_1$ .
- si  $1 < k \cdot (a + c) < 2$ , entonces  $-1 < r < 0$  y la solución  $S_n$  tiende al precio de equilibrio de forma oscilatoria. En este caso, el modelo recibe el nombre de *modelo de la telaraña*.

En el caso  $k \cdot (a + c) = 2$  se tiene que  $f'(p_{eq}) = r = -1$  y el precio de equilibrio es estable pero no atractor, ya que la solución  $S_n$  sería el 2-ciclo  $\{p_0, 2p_{eq} - p_0\}$ . Y en el caso  $k \cdot (a + c) > 2$  se tiene que  $f'(p_{eq}) = r < -1$  y el precio de equilibrio es repulsor. Así pues, en estos dos últimos casos se violaría la tercera ley de la oferta y la demanda, resultando un modelo no aceptable.

<sup>3</sup>En el proceso de deducción de la solución general hay que tener en cuenta la expresión de la serie geométrica:  $\sum_{n=n_0}^m r^n = \frac{r^{n_0} - r^{m+1}}{1-r}$ .

## Modelo no lineal

Consideremos las funciones oferta y demanda de la forma

$$\begin{cases} \mathcal{O}(x) = b \cdot x^a \\ \mathcal{D}(x) = \frac{d}{x^c}, \end{cases} \quad (1.16)$$

en donde  $a, b, c, d > 0$ . En este caso, el conjunto de precios factibles son todos los precios positivos (ver Figura 1.8). Además, el único precio de equilibrio es

$$p_{\text{eq}} = \left(\frac{d}{b}\right)^{\frac{1}{a+c}}. \quad (1.17)$$

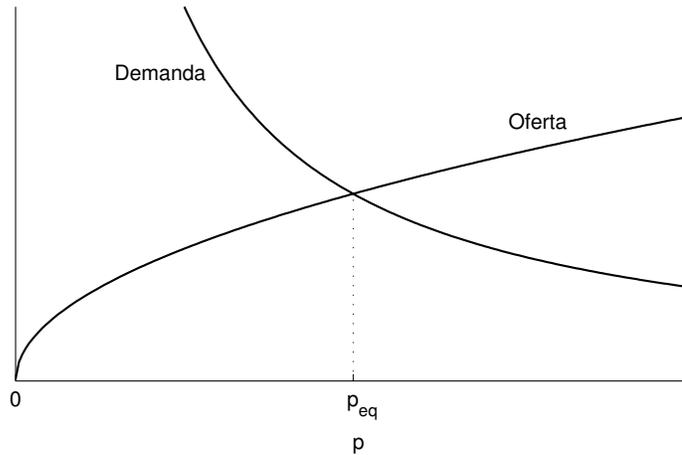


Figura 1.8: Funciones de oferta y demanda del modelo no lineal.

Estas funciones cumplen la segunda ley de la oferta y la demanda, ya que  $\mathcal{O}(x)$  es estrictamente creciente y  $\mathcal{D}(x)$  es estrictamente decreciente en el conjunto de precios factibles, y además son positivas.

La evolución de los precios viene dada por la ED

$$X_{n+1} = \left(\frac{\mathcal{D}(X_n)}{\mathcal{O}(X_n)}\right)^k \cdot X_n, \quad (1.18)$$

en donde  $k > 0$ . Aplicando (1.16) y (1.17) en (1.18) se obtiene

$$X_{n+1} = p_{\text{eq}}^{1-r} \cdot X_n^r, \quad (1.19)$$

en donde  $r := 1 - k \cdot (a + c) < 1$ . Así pues,

$$f(x) = \left(\frac{\mathcal{D}(x)}{\mathcal{O}(x)}\right)^k \cdot x = p_{\text{eq}}^{1-r} \cdot x^r.$$

Nótese que la expresión de  $r$  en este modelo no lineal es la misma que la expresión de  $r$  en el modelo lineal de Evans. De hecho, estos dos modelos guardan cierta analogía, como veremos a continuación.

Este modelo satisface la primera ley de la oferta y la demanda, ya que si  $\mathcal{D}(x) > \mathcal{O}(x)$  entonces  $\left(\frac{\mathcal{D}(x)}{\mathcal{O}(x)}\right)^k > 1$  y por lo tanto  $f(x) > x$ ; análogamente se prueba la otra condición. Además, el precio de equilibrio  $p_{\text{eq}}$  es el único punto de equilibrio de la ED, pero no está asegurado que sea siempre atractor. De hecho, como  $f'(p_{\text{eq}}) = r$ , si  $|r| > 1$  entonces  $p_{\text{eq}}$  es repulsor local y no se cumpliría la tercera ley de la oferta y la demanda.

Es fácil deducir y comprobar que la solución de la ED (1.19) con condición inicial  $p_0$  viene dada por

$$S_n = p_{\text{eq}} \cdot \left(\frac{p_0}{p_{\text{eq}}}\right)^{r^n},$$

y por lo tanto,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = p_{\text{eq}}$  si y sólo si  $r \in ]-1, 1[$ . No obstante, como  $k, a, c > 0$  se tiene que  $r < 1$  siempre; así pues, para que el precio de equilibrio sea un atractor cuya región de atracción sean todos los precios factibles sólo hay que exigir  $r > -1$ , o lo que es lo mismo,

$$k \cdot (a + c) < 2.$$

Como casos particulares,

- si  $k \cdot (a + c) < 1$ , entonces  $r > 0$  y la solución  $S_n$  tiende al precio de equilibrio de forma monótona.
- si  $k \cdot (a + c) = 1$ , entonces  $r = 0$  y la solución  $S_n$  llega directamente al precio de equilibrio en  $t = t_1$ .
- si  $1 < k \cdot (a + c) < 2$ , entonces  $-1 < r < 0$  y la solución  $S_n$  tiende al precio de equilibrio de forma oscilatoria.

En el caso  $k \cdot (a + c) = 2$  se tiene que  $f'(p_{\text{eq}}) = r = -1$  y el precio de equilibrio es estable pero no atractor, ya que la solución  $S_n$  sería el 2-ciclo  $\{p_0, p_{\text{eq}}^2/p_0\}$ . Y en el caso  $k \cdot (a + c) > 2$  se tiene que  $f'(p_{\text{eq}}) = r < -1$  y el precio de equilibrio es repulsor. Así pues, en estos dos últimos casos se violaría la tercera ley de la oferta y la demanda, resultando un modelo no aceptable.

#### 1.4.4. Atractores y diagramas de bifurcación

Hasta ahora hemos desarrollado la teoría de estabilidad para puntos de equilibrio. No obstante, esta teoría puede generalizarse para ciclos y conjuntos en general mediante el concepto de conjunto  $\omega$ -límite. Así pues, se puede definir la *región de atracción* de un conjunto cualquiera de puntos  $A$  como

$$\mathcal{R}(A) := \{X_0 \in \mathbb{R} : L_\omega(\mathcal{S}(X_0)) = A\},$$

en donde  $L_\omega(\mathcal{S}(X_0))$  es el conjunto  $\omega$ -límite de la única solución con condición inicial  $X_0$ , que ha de ser acotada. De esta forma se puede decir que un conjunto  $A$  es atractor si está en el interior de su región de atracción.

Veamos, mediante un ejemplo, otros conceptos como el de *diagrama de bifurcación*. Consideremos la ecuación logística

$$X_{n+1} = rX_n(1 - X_n), \quad (1.20)$$

dependiente del parámetro  $r \in [0, 4]$ . Esta ecuación se utiliza para modelizar la evolución de poblaciones en donde, al contrario que en el modelo exponencial, el número de individuos no puede crecer indefinidamente y tiene un tope máximo debido a que los recursos son limitados. La magnitud  $X \in [0, 1]$  representa en este caso el tamaño poblacional relativo a este tope. Por ejemplo, 0.5 representa la mitad de la población máxima, mientras que 1 es dicha población máxima. Por otro lado, el valor  $r - 1$  es una especie de tasa de crecimiento para valores bajos de población, ya que en cuanto la población se acerca a su máximo, el término  $(1 - X_n)$  se hace pequeño y contrarresta al crecimiento. El hecho de que  $r$  no pueda superar 4 es debido a que para  $r > 4$ , el posible conjunto de poblaciones  $[0, 1]$  no es invariante.

Esta ecuación posee un conjunto atractor  $A$  distinto para cada valor de  $r$ , que se puede representar en lo que se llama *diagrama de bifurcación* (ver Figura 1.9). La región de atracción de este atractor es el intervalo abierto  $]0, 1[$ .

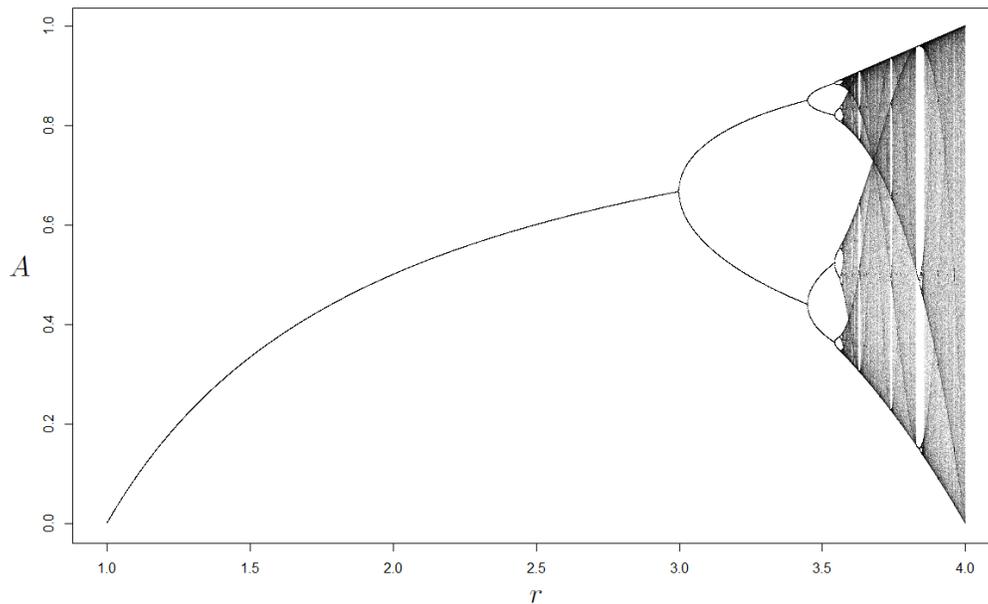


Figura 1.9: Diagrama de bifurcación de la ecuación logística (1.20) para valores de  $r$  entre 1 y 4.

En resumen, para una población inicial en  $]0, 1[$ , se tienen los siguientes casos:

- Para  $0 \leq r \leq 1$  la población se extinguirá, es decir  $A = \{0\}$ .
- Para  $1 < r \leq 3$  la población se estabilizará en el valor  $\frac{r-1}{r}$ , siendo éste un punto de equilibrio.

- Para  $3 < r \leq 1 + \sqrt{6}$  (en torno a 3.45), el atractor  $A$  se bifurca en un 2-ciclo. En este caso, la población acabará oscilando entre dos valores:  $\frac{r+1+\sqrt{(r+1)(r-3)}}{2r}$  y  $\frac{r+1-\sqrt{(r+1)(r-3)}}{2r}$ .
- Para  $1 + \sqrt{6} < r < 3.57$  (aproximadamente), el atractor  $A$  se va bifurcando progresivamente en 4-ciclos, 8-ciclos, etc. El límite de la relación entre las longitudes de dos intervalos sucesivos de bifurcación es lo que se llama *constante de Feigenbaum*, cuyo valor es 4.669 aproximadamente. Esta constante también aparece en otros modelos de crecimiento poblacional similares y se puede considerar una constante de la naturaleza, como el número áureo.
- Para  $3.57 \leq r \leq 4$  el atractor  $A$  tiene una apariencia caótica, aunque para algunos rangos aislados de  $r$  aparecen lo que se llaman *islas de estabilidad* (ver Figura 1.10).
- Para  $r > 4$ , los valores poblacionales se salen del intervalo  $[0, 1]$  y divergen.

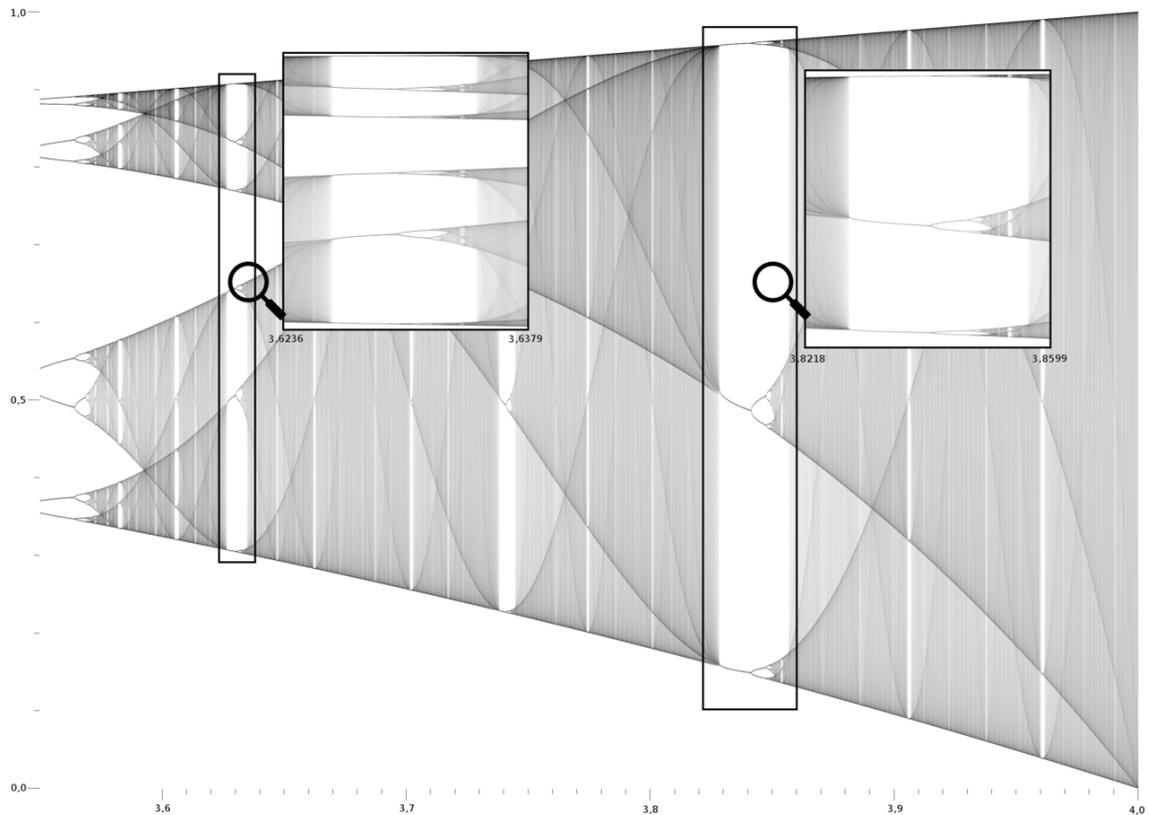


Figura 1.10: Detalle del diagrama de bifurcación de la ecuación logística (1.20) en donde se alternan zonas caóticas con islas de estabilidad.

Otro ejemplo más adecuado para modelizar de forma discreta la evolución de una población con recursos limitados es la ED

$$X_{n+1} = X_n + \lambda X_n(1 - X_n), \quad (1.21)$$

en donde  $0 < \lambda \leq 3$ . La magnitud  $X$  también representa el tamaño poblacional relativo, pero en este caso,  $X = 1$  no es el tope de población, sino el tamaño a partir del cual la población deja de crecer y empieza a decrecer por la falta de recursos. No obstante, en este modelo también hay un tope de población que viene dado por  $X = (\lambda + 1)/\lambda$ . Nótese que el parámetro  $\lambda$  ahora sí puede interpretarse como una tasa de crecimiento que se ve contrarrestada por el tamaño de la población. Para  $0 < \lambda \leq 2$  aparece un punto de equilibrio atractor en  $p = 1$ . Para valores de  $\lambda$  superiores a 2, el atractor se bifurca de forma análoga al de la ecuación logística, obteniéndose un diagrama de bifurcación muy parecido (ver Figura 1.11). La región de atracción de este atractor ahora depende del valor del parámetro  $\lambda$  y es el intervalo abierto  $]0, (\lambda + 1)/\lambda[$ .

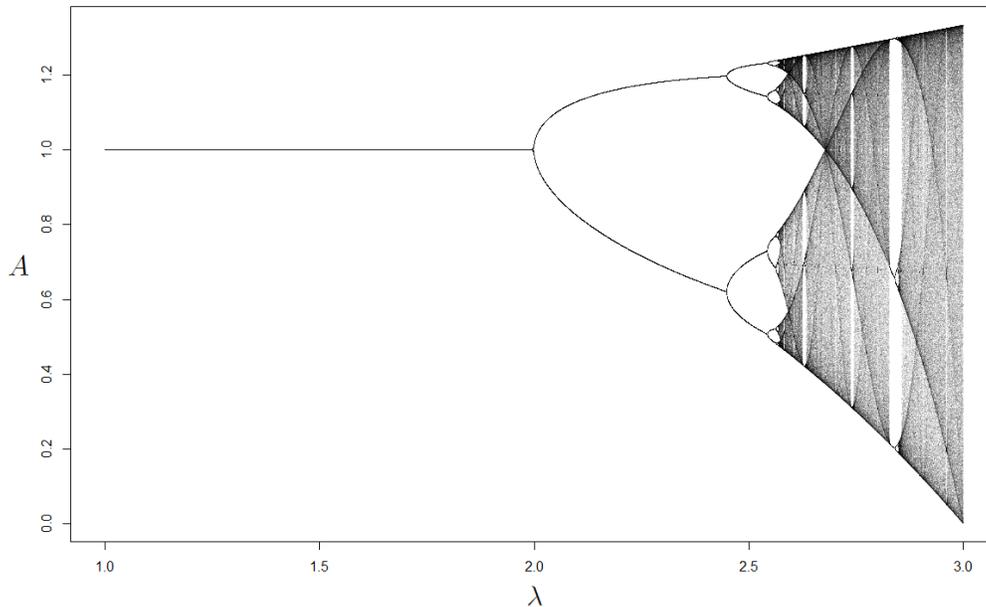


Figura 1.11: Diagrama de bifurcación de la ED (1.21) para valores de  $\lambda$  entre 1 y 3.

## 1.5. Estabilidad en EDs de orden superior

Como ejemplo introductorio, podemos servirnos de los modelos de oferta-demanda estudiados anteriormente. Supongamos que para actualizar un precio, no sólo se tiene en cuenta el precio inmediatamente anterior, sino la media aritmética de los dos precios más recientes. En este caso, la ED del modelo lineal de Evans sería

$$\begin{aligned} X_{n+2} &= k \cdot \left( \mathcal{D} \left( \frac{X_{n+1} + X_n}{2} \right) - \mathcal{O} \left( \frac{X_{n+1} + X_n}{2} \right) \right) + \frac{X_{n+1} + X_n}{2} \\ &= p_{\text{eq}} \cdot (1 - r) + r \cdot \frac{X_{n+1} + X_n}{2}. \end{aligned}$$

En esta ED aparece la incógnita (el precio, en este caso) evaluada en tres instantes diferentes, y la diferencia entre el instante más “reciente” y el más “antiguo” es de 2 unidades. Es decir, la ED del modelo oferta-demanda es de segundo orden. El productor podría usar datos más antiguos y originar de este modo EDs de orden mayor que 2.

En general, una ED autónoma y explícita de orden  $k$  vendría dada por

$$X_{n+k} = f(X_{n+k-1}, \dots, X_n), \quad (1.22)$$

en donde  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  es una función real dada.

Las soluciones de las ED de la forma (1.22) se pueden calcular por el método de sustitución directa, pero para ello se necesitan conocer  $k$  datos iniciales:  $X_0, X_1, \dots, X_{k-1}$ . Utilizaremos la notación  $\mathcal{S}(X_0, \dots, X_{k-1})$  para referirnos a la única solución de (1.22) cuyos primeros  $k$  términos son  $X_0, \dots, X_{k-1}$ .

Los puntos de equilibrio de las ED de la forma (1.22) se calculan con la misma facilidad que en el caso de EDs de primer orden: basta con resolver la ecuación

$$p = f(p, \dots, p).$$

Además, los conceptos relativos a la estabilidad de puntos de equilibrio son similares a los introducidos para EDs de primer orden. No obstante, para simplificar la notación y la exposición, vamos a ocuparnos sólo de EDs de segundo orden de la forma

$$X_{n+2} = f(X_{n+1}, X_n). \quad (1.23)$$

En las siguientes definiciones,  $p$  será un punto de equilibrio de la ED (1.23).

La *región de atracción* de  $p$  se define como el conjunto  $\mathcal{R}(p)$  de puntos  $(X_0, X_1) \in \mathbb{R}^2$  tales que la solución  $\mathcal{S}(X_0, X_1)$  converge a  $p$ .

Diremos que  $p$  es un *atractor* si  $(p, p)$  es un punto interior de  $\mathcal{R}(p)$ ; y diremos que  $p$  es un *atractor global* si  $\mathcal{R}(p)$  es todo  $\mathbb{R}^2$  (o todo el dominio de  $f$ ).

Diremos que un conjunto  $A \subset \mathbb{R}$  es *invariante* si  $f(X_0, X_1) \in A$  para todo  $X_0, X_1 \in A$ , con lo que la única solución  $\mathcal{S}(X_0, X_1)$  está contenida en  $A$ .

La definición de estabilidad no sufre cambios: diremos que  $p$  es *estable* si existe una sucesión de intervalos encajados que contienen a  $p$ , tan pequeños como sea necesario e invariantes. La definición alternativa quedaría de la siguiente forma: diremos que  $p$  es *estable* si

$$\lim_{(X_0, X_1) \rightarrow (p, p)} \text{dist}(\mathcal{S}(X_0, X_1), p) = 0,$$

siendo  $\text{dist}(\mathcal{S}(X_0, X_1), p)$  el supremo del conjunto  $\{|S_n - p| \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$  y  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \mathcal{S}(X_0, X_1)$ .

El concepto de *repulsión* también puede generalizarse, aunque resulta más complicado ya que no disponemos de la función inversa  $f^{-1}$ . Para ello, necesitamos escribir la ED alrededor de  $p$  en la forma

$$X_n = g(X_{n+1}, X_{n+2}),$$

y así poder definir la ED *inversa* como

$$X_{n+2} = g(X_{n+1}, X_n). \quad (1.24)$$

En este caso, diremos que  $p$  es *repulsor* si es atractor para la ED (1.24) (nótese que  $p$  también es punto de equilibrio de (1.24)). Además, aparecen nuevos conceptos como *puntos de silla*, que son atractores en una dirección y repulsores en otra.

## 1.6. EDs lineales

En esta sección nos ocuparemos únicamente de EDs de la forma

$$a_k X_{n+k} + a_{k-1} X_{n+k-1} + \cdots + a_1 X_{n+1} + a_0 X_n = q(n), \quad (1.25)$$

en donde los coeficientes  $a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$  son constantes (con  $a_k$  y  $a_0$  no nulos) y  $q(n)$  es una función de  $n$  (que recibe el nombre de *término externo*). Las EDs de esta forma se conocen como *Ecuaciones en Diferencias Lineales* (abreviadamente EDLs) de coeficientes constantes y se dice que  $k$  es el *orden* de dicha EDL.

**Ejemplo 1.6.1** Son EDLs las siguientes expresiones:

$$X_{n+1} - 3X_n = 18 \quad (\text{orden } 1)$$

$$2X_{n+2} + 3X_{n+1} - 7X_n = 25n \quad (\text{orden } 2)$$

$$6X_{n+3} - 2X_{n+2} + 3X_{n+1} - 7X_n = n^2 + 4 \quad (\text{orden } 3).$$

No son EDLs las siguientes expresiones:

$$2X_{n+2} + \sqrt{X_{n+1}} + \frac{1}{X_n} = 5$$

$$\cos(X_{n+1}) - 3X_n = 8n$$

$$6X_{n+2} - 2X_{n+1}X_n = 6n^2 - 1.$$

### 1.6.1. EDLs homogéneas

Dada una EDL de la forma (1.25), si  $q(n) = 0$  para todo  $n$  se dice que la EDL es *homogénea* (abreviadamente EDLH):

$$a_k X_{n+k} + a_{k-1} X_{n+k-1} + \cdots + a_1 X_{n+1} + a_0 X_n = 0. \quad (1.26)$$

Se trata de las EDLs más sencillas y de ellas nos vamos a ocupar en primer lugar. La ley que determina esta ecuación,

$$f(x_0, x_1, \dots, x_k) := a_k x_k + \cdots + a_1 x_1 + a_0 x_0,$$

es una *aplicación lineal*. De esta observación se derivan tres propiedades que caracterizan a este tipo de ecuaciones:

**Propiedad 1.6.1** *La sucesión trivial  $\{0, 0, \dots\}$  es solución de (1.26).*

Observa que esta afirmación equivale a decir que  $p = 0$  es un punto de equilibrio de (1.26), lo cual es evidente, pues  $f(0, 0, \dots, 0) = 0$ , como le ocurre a todas las aplicaciones lineales.

**Propiedad 1.6.2** *Dadas dos soluciones  $S_n$  y  $S'_n$  de (1.26), entonces  $S_n + S'_n$  también es solución de (1.26).*

Lo que asegura la propiedad anterior equivale a decir que

$$f(S_n + S'_n, S_{n+1} + S'_{n+1}, \dots, S_{n+k} + S'_{n+k}) = 0,$$

lo cual es una consecuencia de la linealidad de la aplicación  $f$ :

$$f(S_n + S'_n, \dots, S_{n+k} + S'_{n+k}) = f(S_n, \dots, S_{n+k}) + f(S'_n, \dots, S'_{n+k}) = 0 + 0 = 0.$$

**Propiedad 1.6.3** Dada una solución cualquiera  $S_n$  de (1.26) y dado un número real cualquiera  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces  $\lambda S_n$  también es solución de (1.26).

De nuevo, la propiedad anterior es consecuencia de la linealidad de la aplicación  $f$ :

$$f(\lambda S_n, \dots, \lambda S_{n+k}) = \lambda f(S_n, \dots, S_{n+k}) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Todas estas propiedades permiten asegurar que el conjunto de todas las soluciones de una EDLH tiene estructura de espacio vectorial. Así pues, para hallar dicho conjunto bastará calcular una *base* de soluciones (también llamado *sistema fundamental*), es decir, unas cuantas soluciones que sean linealmente independientes, con lo que todas las soluciones se expresarán como combinación lineal de éstas. El número de elementos que tiene una base se denomina *dimensión* y en este caso coincide con el orden de la EDLH.

Por ejemplo, si tenemos una EDLH de orden 1, el conjunto de soluciones tiene dimensión 1 y, por lo tanto, si conocemos una solución no trivial (no nula)  $S_n$  de la EDLH, entonces todas las soluciones son proporcionales a ella, es decir, de la forma

$$A \cdot S_n, \quad A \in \mathbb{R},$$

en donde  $A$  hace el papel de parámetro.

Si tenemos una EDLH de orden 2 y conocemos dos soluciones linealmente independientes,  $S_n$  y  $S'_n$ , entonces todas las soluciones son de la forma

$$A \cdot S_n + B \cdot S'_n, \quad A, B \in \mathbb{R},$$

en donde  $A, B$  hacen el papel de parámetros.

Cada una de las expresiones anteriores recibe el nombre de *solución general* de su respectiva EDLH.

### 1.6.2. Cálculo de la solución general de una EDLH

Estamos interesados en calcular explícitamente soluciones de la EDLH (1.26). Nos preguntamos cuándo una progresión geométrica es solución; es decir, cuándo la sucesión con término general  $\lambda^n$  (con  $\lambda \neq 0$ ) es solución de (1.26).

Sustituyendo  $X_{n+j}$  por  $\lambda^{n+j}$  (para  $j = 0, 1, \dots, k$ ) obtenemos

$$a_k \lambda^{n+k} + a_{k-1} \lambda^{n+k-1} + \dots + a_1 \lambda^{n+1} + a_0 \lambda^n = 0$$

$$\implies \lambda^n (a_k \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0) = 0.$$

Como  $\lambda \neq 0$  llegamos a la siguiente conclusión:

**Propiedad 1.6.4** La sucesión  $\{\lambda^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es solución de (1.26) si y sólo si  $\lambda$  verifica la ecuación

$$a_k \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

La ecuación anterior recibe el nombre de *ecuación característica* de la EDLH (1.26), y está formada por el correspondiente *polinomio característico* igualado a cero.

La Propiedad 1.6.4 es suficiente para calcular la solución general de la mayoría de EDLHs. Lo que debemos hacer es calcular las raíces del polinomio característico y cada una de estas raíces proporciona una solución de la EDLH. Veamos algunos ejemplos en los que se usa este resultado.

**Ejemplo 1.6.2** Supongamos que queremos resolver un PVI asociado a una EDLH de orden 1:

$$\begin{cases} 2X_{n+1} - 6X_n = 0 \\ X_0 = 5. \end{cases}$$

La ecuación característica correspondiente es

$$2\lambda - 6 = 0,$$

cuya única solución es  $\lambda = 3$ . Por lo tanto, la sucesión cuyo término general es  $3^n$  es solución de la EDLH, y como el espacio de soluciones es de dimensión 1, la solución general viene dada por

$$A \cdot 3^n, \quad A \in \mathbb{R}.$$

Ahora basta ajustar el parámetro  $A$  para conseguir que se cumpla la condición inicial:

$$X_0 = 5 \implies A \cdot 3^0 = 5 \implies A = 5.$$

Así pues, la única solución del PVI es la sucesión cuyo término general es  $5 \cdot 3^n$ .

**Ejemplo 1.6.3** Consideremos el PVI

$$\begin{cases} X_{n+2} + X_{n+1} - 6X_n = 0 \\ X_0 = 3, X_1 = 1. \end{cases}$$

La ecuación característica correspondiente es

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0,$$

cuyas soluciones son  $\lambda_1 = 2$  y  $\lambda_2 = -3$ . Por lo tanto, un sistema fundamental de soluciones lo forman las sucesiones cuyos términos generales son

$$2^n, \quad (-3)^n.$$

En este caso, la solución general de la EDLH viene dada por

$$A \cdot 2^n + B \cdot (-3)^n, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Ahora hay que calcular  $A$  y  $B$  para que se cumplan las condiciones iniciales:

$$\left. \begin{aligned} X_0 = 3 &\implies A + B = 3 \\ X_1 = 1 &\implies 2A - 3B = 1. \end{aligned} \right\}$$

La solución de este sistema es  $A = 2$ ,  $B = 1$ , con lo que la única solución del PVI es la sucesión cuyo término general es

$$2 \cdot 2^n + (-3)^n = 2^{n+1} + (-3)^n.$$

**Ejemplo 1.6.4** En este ejemplo vamos a estudiar la ecuación de Fibonacci

$$X_{n+2} = X_{n+1} + X_n, \tag{1.27}$$

que es una EDLH de grado 2. Su ecuación característica tiene como soluciones  $\phi$  y  $1 - \phi$ , en donde  $\phi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.618$  es la llamada *razón áurea*. Por lo tanto, la solución general de (1.27) viene dada por

$$A \cdot \phi^n + B \cdot (1 - \phi)^n, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Ahora bien, el sumando  $B \cdot (1 - \phi)^n$  puede considerarse prácticamente despreciable para  $n$  suficientemente grande, ya que  $1 - \phi \approx -0.618$  y por lo tanto  $(1 - \phi)^n$  converge a 0 muy rápido cuando  $n$  crece. Así pues, si

$$S_n = A \cdot \phi^n + B \cdot (1 - \phi)^n \approx A \cdot \phi^n,$$

es una solución de (1.27), entonces

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} \approx \frac{A \cdot \phi^{n+1}}{A \cdot \phi^n} = \phi,$$

para  $n$  suficientemente grande. Por lo tanto, podemos concluir que, para tiempos suficientemente avanzados, la relación entre dos valores consecutivos de una solución de la ecuación de Fibonacci es aproximadamente la razón áurea. Además, esto es cierto independientemente de las condiciones iniciales.

**Ejemplo 1.6.5** Consideremos el PVI

$$\left\{ \begin{aligned} X_{n+2} - 4X_{n+1} + 8X_n &= 0 \\ X_0 = 4, X_1 &= 10. \end{aligned} \right.$$

La ecuación característica correspondiente es

$$\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0,$$

que no tiene soluciones reales, pero sí complejas:  $\lambda_1 = 2 + 2i$  y  $\lambda_2 = 2 - 2i$ . Siguiendo el esquema que estamos utilizando llegamos a que  $\{(2 + 2i)^n, (2 - 2i)^n\}$  forman un sistema fundamental de soluciones de la EDLH. Aunque esto es cierto, lo deseable es conseguir otro que sea real. Para obtenerlo, vamos a realizar un *cambio de base*, para lo que necesitamos

calcular el *módulo* y un *argumento* de una de las soluciones (que son *conjugadas*). Dado un número complejo cualquiera,  $a + bi$ , si lo representamos como un vector  $(a, b)$  en el plano complejo (en donde el eje horizontal es el de las partes reales y el eje vertical es el de las partes imaginarias), el módulo  $r$  representa lo que mide dicho vector y el argumento  $\theta$  es el ángulo que forma con el eje real; de este modo,  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  y  $\tan \theta = \frac{b}{a}$ . En nuestro caso, el módulo y argumento de  $\lambda_1$  vienen dados respectivamente por  $r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$  y  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , ya que gráficamente  $\lambda_1$  se sitúa en la diagonal principal del primer cuadrante, con lo que forma un ángulo de  $\frac{\pi}{4}$  (es decir,  $45^\circ$ ) con el eje real. Por lo tanto, debe verificarse

$$2 \pm 2i = 2\sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{4} \right) \pm i \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4} \right) \right).$$

Aplicando la *fórmula de Moivre*<sup>4</sup> obtenemos

$$(2 \pm 2i)^n = \left( 2\sqrt{2} \right)^n \left( \cos \left( \frac{\pi}{4}n \right) \pm i \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4}n \right) \right).$$

Así pues, otro sistema fundamental de soluciones estaría formado por

$$\frac{(2 + 2i)^n + (2 - 2i)^n}{2} = \left( 2\sqrt{2} \right)^n \cos \left( \frac{\pi}{4}n \right)$$

$$\frac{(2 + 2i)^n - (2 - 2i)^n}{2i} = \left( 2\sqrt{2} \right)^n \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4}n \right),$$

con lo que la solución general de la EDLH será de la forma

$$A \cdot \left( 2\sqrt{2} \right)^n \cos \left( \frac{\pi}{4}n \right) + B \cdot \left( 2\sqrt{2} \right)^n \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4}n \right), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Imponiendo que se cumplan las condiciones iniciales

$$\left. \begin{array}{l} X_0 = 4 \implies A \cdot \cos 0 + B \cdot \operatorname{sen} 0 = 4 \implies A = 4 \\ X_1 = 10 \implies A \cdot \left( 2\sqrt{2} \right) \cos \left( \frac{\pi}{4} \right) + B \cdot \left( 2\sqrt{2} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4} \right) = 10 \implies 2A + 2B = 10 \end{array} \right\}$$

cuya solución es  $A = 4$ ,  $B = 1$ . Por lo tanto, la solución del PVI es la sucesión cuyo término general es

$$4 \cdot \left( 2\sqrt{2} \right)^n \cos \left( \frac{\pi}{4}n \right) + \left( 2\sqrt{2} \right)^n \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4}n \right).$$

**Ejemplo 1.6.6** Consideremos el PVI

$$\begin{cases} X_{n+2} - 3X_{n+1} + 9X_n = 0 \\ X_0 = 4, X_1 = 10. \end{cases}$$

La ecuación característica correspondiente es

$$\lambda^2 - 3\lambda + 9 = 0,$$

---

<sup>4</sup>La fórmula de Moivre establece que si  $\lambda = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ , entonces  $\lambda^n = r^n(\cos(\theta n) + i \operatorname{sen}(\theta n))$ , ya que si multiplicamos dos números complejos, sus módulos se multiplican y sus argumentos se suman.

cuyas soluciones son complejas:  $\lambda_1 = \frac{3+3\sqrt{3}i}{2}$  y  $\lambda_2 = \frac{3-3\sqrt{3}i}{2}$ . El módulo de estas soluciones es

$$r = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 3.$$

Para calcular el argumento de  $\lambda_1$  observamos que se ubica en el primer cuadrante (tanto su parte real como su parte imaginaria son positivas) y por lo tanto

$$\theta = \arctan\left(\frac{3\sqrt{3}/2}{3/2}\right) = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}.$$

Así pues, un sistema fundamental de soluciones lo forman las sucesiones cuyos términos generales son

$$3^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right), \quad 3^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}n\right),$$

y la solución general de la EDLH será de la forma

$$A \cdot 3^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + B \cdot 3^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}n\right), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Imponiendo que se cumplan las condiciones iniciales

$$\left. \begin{aligned} X_0 = 4 &\implies A \cdot \cos 0 + B \cdot \operatorname{sen} 0 = 4 \implies A = 4 \\ X_1 = 10 &\implies A \cdot 3 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + B \cdot 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 10 \implies \frac{3}{2}A + \frac{3\sqrt{3}}{2}B = 10 \end{aligned} \right\}$$

cuya solución es  $A = 4$ ,  $B = \frac{8\sqrt{3}}{9}$ . Por lo tanto, la solución del PVI es la sucesión cuyo término general es

$$4 \cdot 3^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + 8\sqrt{3} \cdot 3^{n-2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}n\right).$$

Veamos cómo calcular un sistema fundamental de soluciones cuando el polinomio característico tiene soluciones múltiples:

**Ejemplo 1.6.7** Consideremos el PVI

$$\begin{cases} X_{n+2} - 4X_{n+1} + 4X_n = 0 \\ X_0 = 3, X_1 = 10. \end{cases}$$

La ecuación característica correspondiente es

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0,$$

cuya única solución es  $\lambda = 2$ . No obstante, esta solución es una raíz doble del polinomio característico y, en este caso, se puede comprobar que un sistema fundamental de soluciones lo forman las sucesiones cuyos términos generales son

$$2^n, \quad n2^n.$$

Por lo tanto, la solución general de la EDLH viene dada por

$$A \cdot 2^n + B \cdot n2^n, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Exigiendo que se cumplan las condiciones iniciales:

$$\left. \begin{array}{l} X_0 = 3 \implies A = 3 \\ X_1 = 10 \implies 2A + 2B = 10. \end{array} \right\}$$

La solución de este sistema es  $A = 3$ ,  $B = 2$ , con lo que la única solución del PVI es la sucesión cuyo término general es

$$3 \cdot 2^n + 2 \cdot n2^n = (3 + 2n) \cdot 2^n.$$

En general, para calcular un sistema fundamental de soluciones de una EDLH, debemos calcular todas las raíces del polinomio característico correspondiente junto con sus multiplicidades, y cada una de las raíces (contadas con su multiplicidad) da lugar a una solución de acuerdo al siguiente esquema:

- Si  $\lambda$  es una raíz real con multiplicidad  $m$ , entonces las sucesiones cuyos términos generales son

$$\lambda^n, n\lambda^n, \dots, n^{m-1}\lambda^n,$$

son  $m$  soluciones linealmente independientes de la EDLH.

- Si  $\lambda = r(\cos \theta \pm i \sin \theta)$  es una raíz compleja (junto con su conjugada) con multiplicidad  $m$ , entonces las sucesiones cuyos términos generales son

$$\begin{aligned} & r^n \cos(\theta n), r^n \sin(\theta n), \\ & nr^n \cos(\theta n), nr^n \sin(\theta n), \\ & \dots \\ & n^{m-1}r^n \cos(\theta n), n^{m-1}r^n \sin(\theta n), \end{aligned}$$

son  $2m$  soluciones linealmente independientes de la EDLH.

**Ejemplo 1.6.8** Dada la EDLH de orden 6

$$X_{n+6} - 13X_{n+5} + 69X_{n+4} - 193X_{n+3} + 306X_{n+2} - 270X_{n+1} + 108X_n = 0,$$

el polinomio característico correspondiente

$$\lambda^6 - 13\lambda^5 + 69\lambda^4 - 193\lambda^3 + 306\lambda^2 - 270\lambda + 108$$

se puede factorizar como

$$(\lambda - 2)(\lambda - 3)^3(\lambda^2 - 2\lambda + 2),$$

con lo que sus raíces (contadas con su multiplicidad) son

$$2, 3, 3, 3, 1 + i, 1 - i.$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que  $1 \pm i = \sqrt{2} \cdot (\cos(\frac{\pi}{4}) \pm i \sin(\frac{\pi}{4}))$  y que  $(\sqrt{2})^n = 2^{n/2}$ , un sistema fundamental de soluciones lo forman las sucesiones cuyos términos generales son

$$2^n, \quad 3^n, \quad n3^n, \quad n^23^n, \quad 2^{n/2} \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right), \quad 2^{n/2} \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right).$$

Para acabar con el estudio de las EDLH, veamos un ejemplo en el que se plantea el modelo francés de hipoteca.

**Ejemplo 1.6.9** Consideremos una hipoteca según el *modelo francés* (cuota mensual constante) en donde  $T$  representa el capital total,  $i$  es el porcentaje de interés anual (en este caso conviene definir  $I$  como el interés mensual correspondiente en tanto por uno, es decir,  $I := i/1200$ ),  $C$  es la cuota mensual, y  $N$  el número de cuotas. Para facilitar los cálculos, supondremos que el interés es constante y que la unidad monetaria es infinitamente divisible. Si consideramos la malla de tiempos  $t_0 = 0, t_1, \dots, t_N$  en donde  $t_n$  es el mes  $n$ -ésimo (para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq n \leq N$ ), definimos  $A_n$  como la parte de la cuota  $n$ -ésima destinada a amortización, y  $B_n$  la parte destinada a los intereses. Por lo tanto, como la cuota  $C$  es constante, se tiene

$$C = A_n + B_n. \quad (1.28)$$

Si llamamos  $X_n$  al capital amortizado en las  $n$  primeras cuotas, se tiene  $X_n = A_1 + \dots + A_n$ , o lo que es lo mismo,

$$A_n = X_n - X_{n-1}, \quad (1.29)$$

considerando  $X_0 = 0$ . Así pues, el capital pendiente antes de pagar la cuota  $n$ -ésima será  $T - X_{n-1}$ , con lo que los intereses correspondientes a dicha cuota serán

$$B_n = I \cdot (T - X_{n-1}). \quad (1.30)$$

Aplicando (1.29) y (1.30) en (1.28) se tiene

$$\begin{aligned} C &= A_n + B_n = X_n - X_{n-1} + I \cdot (T - X_{n-1}) \\ \implies C &= X_n - (1 + I) \cdot X_{n-1} + I \cdot T, \end{aligned} \quad (1.31)$$

para  $1 \leq n \leq N$ . De la misma forma se tiene

$$C = X_{n+1} - (1 + I) \cdot X_n + I \cdot T, \quad (1.32)$$

para  $0 \leq n \leq N - 1$ . Combinando (1.31) y (1.32) se obtiene

$$\begin{aligned} X_{n+1} - (1 + I) \cdot X_n + I \cdot T &= X_n - (1 + I) \cdot X_{n-1} + I \cdot T \\ \implies X_{n+1} - (2 + I) \cdot X_n + (1 + I) \cdot X_{n-1} &= 0, \end{aligned}$$

para  $1 \leq n \leq N - 1$ , con lo que, haciendo una traslación temporal y considerando las condiciones de frontera se tiene el PVI

$$\begin{cases} X_{n+2} - (2 + I) \cdot X_{n+1} + (1 + I) \cdot X_n = 0 \\ X_0 = 0, \quad X_N = T \end{cases} \quad (1.33)$$

para  $0 \leq n \leq N - 2$ . La ecuación característica asociada a la EDLH de (1.33) es

$$\lambda^2 - (2 + I)\lambda + (1 + I) = 0,$$

cuyas soluciones son  $\lambda_1 = 1$  y  $\lambda_2 = 1 + I$ , con lo que la solución general de la EDLH viene dada por

$$K_1 \cdot 1^n + K_2 \cdot (1 + I)^n = K_1 + K_2 \cdot (1 + I)^n, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}.$$

Exigiendo que se cumplan las condiciones frontera

$$\left. \begin{aligned} X_0 = 0 &\implies K_1 + K_2 = 0 \\ X_N = T &\implies K_1 + K_2 \cdot (1 + I)^N = T \end{aligned} \right\}$$

se tiene que  $K_1 = -K_2$  y  $K_2 = \frac{T}{(1 + I)^N - 1}$ . Así pues, la única solución del PVI (1.33) es

$$X_n = \frac{-T}{(1 + I)^N - 1} + \frac{T}{(1 + I)^N - 1} \cdot (1 + I)^n = \frac{(1 + I)^n - 1}{(1 + I)^N - 1} \cdot T. \quad (1.34)$$

Finalmente, aplicando (1.34) en (1.29) y (1.30) se obtiene

$$\begin{aligned} A_n &= X_n - X_{n-1} = \frac{(1 + I)^{n-1}}{(1 + I)^N - 1} \cdot IT \\ B_n &= I \cdot (T - X_{n-1}) = \frac{(1 + I)^N - (1 + I)^{n-1}}{(1 + I)^N - 1} \cdot IT, \end{aligned}$$

de donde, teniendo en cuenta (1.28), se concluye

$$C = A_n + B_n = \frac{(1 + I)^N}{(1 + I)^N - 1} \cdot IT = \frac{I}{1 - (1 + I)^{-N}} \cdot T.$$

### 1.6.3. EDLs completas

Dada una EDL de la forma (1.25), si  $q(n) \neq 0$  se dice que la EDL es *no homogénea* o *completa*:

$$a_k X_{n+k} + a_{k-1} X_{n+k-1} + \cdots + a_1 X_{n+1} + a_0 X_n = q(n). \quad (1.35)$$

En este caso, se puede construir una EDLH simplemente sustituyendo  $q(n)$  por 0; esta nueva ecuación recibe el calificativo de *homogénea asociada* a (1.35) y se cumple la siguiente propiedad cuya demostración se puede obtener por simple comprobación:

**Propiedad 1.6.5** *Dadas soluciones cualesquiera  $S_n$  de la EDL completa (1.35) y  $\bar{S}_n$  de la correspondiente EDLH asociada, se cumple que  $S_n + \bar{S}_n$  es también solución de (1.35).*

De esta propiedad se deduce que la solución general de una EDL completa se puede construir mediante la suma de una solución particular de dicha EDL y la solución general de la EDLH asociada. En forma esquemática:

$$\left[ \begin{array}{c} \text{solución general} \\ \text{de la EDL completa} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \text{solución particular} \\ \text{de la EDL completa} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \text{solución general} \\ \text{de la EDLH asociada} \end{array} \right].$$

Como ya sabemos calcular la solución general de cualquier EDLH, basta calcular ahora una solución particular de la EDL completa y sumarla a la solución general de la EDLH asociada para obtener la solución general de la EDL completa. Así pues, nuestro objetivo es calcular una solución particular de la EDL completa, y para ello vamos a utilizar el *método de los coeficientes indeterminados*.

#### 1.6.4. Método de los coeficientes indeterminados

Este método se utiliza para hallar una solución particular de la EDL completa (1.35) y consiste en buscar una solución que sea “del mismo tipo” que el término externo  $q(n)$ . No obstante, este método funciona sólo para algunos tipos de funciones  $q(n)$ , como por ejemplo constantes, exponenciales, polinómicas, sinusoidales, o productos de las anteriores. Veamos algunos casos:

- $q(n) = c$  con  $c \in \mathbb{R} \Rightarrow$  se busca solución particular del tipo  $S_n = C$  con  $C \in \mathbb{R}$  a determinar.
- $q(n) = c \cdot r^n$  con  $c, r \in \mathbb{R} \Rightarrow$  se busca solución particular del tipo  $S_n = C \cdot r^n$  con  $C \in \mathbb{R}$  a determinar.
- $q(n) = c_j n^j + \dots + c_1 n + c_0$  con  $j \in \mathbb{N}$ ,  $c_0, c_1, \dots, c_j \in \mathbb{R} \Rightarrow$  se busca solución particular del tipo  $S_n = C_j n^j + \dots + C_1 n + C_0$  con  $C_0, C_1, \dots, C_j \in \mathbb{R}$  a determinar.

En realidad, el caso  $q(n)$  constante es un caso particular de  $q(n)$  exponencial (con base  $r = 1$ ) o  $q(n)$  polinómica (de grado 0). En este caso, lo que estamos buscando son puntos de equilibrio, ya que éstos son soluciones particulares constantes.

Sin embargo, cuando  $q(n)$  es solución de la EDLH asociada se dice que hay *resonancia* y el método no funciona. En este caso, hay que multiplicar sucesivamente la función candidata a ser solución particular por  $n$ ,  $n^2$ , etc... hasta que encontremos alguna solución particular. No obstante, en los casos que estamos estudiando, se puede averiguar a priori el exponente de dicha  $n$ :

- $q(n) = c$  con  $c \in \mathbb{R}$  y resonancia  $\Rightarrow$  se busca solución particular del tipo  $S_n = C \cdot n^m$  con  $C \in \mathbb{R}$  a determinar y  $m$  la multiplicidad de 1 como raíz del correspondiente polinomio característico.
- $q(n) = c \cdot r^n$  con  $c, r \in \mathbb{R}$  y resonancia  $\Rightarrow$  se busca solución particular del tipo  $S_n = C \cdot r^n \cdot n^m$  con  $C \in \mathbb{R}$  a determinar y  $m$  la multiplicidad de  $r$  como raíz del correspondiente polinomio característico.
- $q(n) = c_j n^j + \dots + c_1 n + c_0$  con  $j \in \mathbb{N}$ ,  $c_0, c_1, \dots, c_j \in \mathbb{R}$  y resonancia  $\Rightarrow$  se busca solución particular del tipo  $S_n = (C_j n^j + \dots + C_1 n + C_0) \cdot n^{m-j}$  con  $C_0, C_1, \dots, C_j \in \mathbb{R}$  a determinar y  $m$  la multiplicidad de 1 como raíz del correspondiente polinomio característico.

Veamos algunos ejemplos de cómo hallar soluciones particulares.

**Ejemplo 1.6.10** Dada la EDL

$$X_{n+2} + 4X_{n+1} + 4X_n = 27,$$

buscamos una solución particular de la forma  $S_n = C$  con  $C \in \mathbb{R}$  a determinar, es decir, buscamos puntos de equilibrio. Sustituyendo en la EDL:

$$C + 4C + 4C = 27 \implies 9C = 27 \implies C = 3.$$

**Ejemplo 1.6.11** Dada la EDL

$$X_{n+2} - 4X_{n+1} + 3X_n = 10,$$

se puede comprobar que no existen puntos de equilibrio y por lo tanto no existen soluciones particulares de la forma  $S_n = C$  con  $C \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto, hay resonancia, y en su lugar buscamos una solución particular de la forma  $S_n = C \cdot n$  con  $C \in \mathbb{R}$  a determinar. Sustituyendo en la EDL:

$$C \cdot (n + 2) - 4C \cdot (n + 1) + 3C \cdot n = 10 \implies -2C = 10 \implies C = -5.$$

**Ejemplo 1.6.12** Dada la EDL

$$X_{n+2} - 2X_{n+1} + 3X_n = 22 \cdot 4^n,$$

buscamos una solución particular de la forma  $S_n = C \cdot 4^n$  con  $C \in \mathbb{R}$  a determinar. Sustituyendo en la EDL:

$$\begin{aligned} C \cdot 4^{n+2} - 2C \cdot 4^{n+1} + 3C \cdot 4^n &= 22 \cdot 4^n \implies 16C \cdot 4^n - 8C \cdot 4^n + 3C \cdot 4^n = 22 \cdot 4^n \\ \implies 11C \cdot 4^n &= 22 \cdot 4^n \implies 11C = 22 \implies C = 2. \end{aligned}$$

**Ejemplo 1.6.13** Dada la EDL

$$X_{n+1} - 2X_n = 2^n,$$

se puede comprobar que no existen soluciones particulares de la forma  $S_n = C \cdot 2^n$  con  $C \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto, hay resonancia, y en su lugar buscamos una solución particular de la forma  $S_n = C \cdot n \cdot 2^n$  con  $C \in \mathbb{R}$  a determinar. Sustituyendo en la EDL:

$$\begin{aligned} C \cdot (n + 1) \cdot 2^{n+1} - 2C \cdot n \cdot 2^n &= 2^n \implies 2C \cdot n \cdot 2^n + 2C \cdot 2^n - 2C \cdot n \cdot 2^n = 2^n \\ 2C &= 1 \implies C = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 1.6.14** Dada la EDL

$$X_{n+1} + X_n = n^2,$$

buscamos una solución particular de la forma  $S_n = an^2 + bn + c$  con  $a, b, c \in \mathbb{R}$  a determinar. Sustituyendo en la EDL:

$$\begin{aligned} a(n + 1)^2 + b(n + 1) + c + an^2 + bn + c &= n^2 \implies 2an^2 + 2(a + b)n + a + b + 2c = n^2 \\ \implies \begin{cases} 2a &= 1 \\ 2(a + b) &= 0 \\ a + b + 2c &= 0, \end{cases} \end{aligned}$$

con lo que  $a = 1/2$ ,  $b = -1/2$ ,  $c = 0$ .

Para finalizar, veremos un ejemplo práctico:

**Ejemplo 1.6.15** En un plan de pensiones, en cada periodo de capitalización el cliente recibe los intereses correspondientes a la cantidad que hay en ese momento en el plan de pensiones a la vez que hace una aportación de capital  $c$  que vamos a considerar constante. Por lo tanto, la ED que modeliza la evolución del capital en el periodo de capitalización  $(n + 1)$ -ésimo viene dada por

$$X_{n+1} = (1 + rh)X_n + c, \quad (1.36)$$

en donde, al igual que en el caso de la capitalización discreta,  $r$  es el tipo de interés nominal anual (en tanto por 1) y  $h$  es el periodo de capitalización medido en años (por ejemplo,  $1/12$  si es mensual). La ED (1.36) es lineal no homogénea y por lo tanto, para resolverla hallamos primero la solución general de la EDL homogénea asociada

$$X_{n+1} - (1 + rh)X_n = 0. \quad (1.37)$$

El polinomio característico es en este caso  $\lambda - (1 + rh)$ , cuya única raíz es  $1 + rh$ . Así pues, la solución general de (1.37) es

$$A(1 + rh)^n, \quad A \in \mathbb{R}. \quad (1.38)$$

Por otro lado, si buscamos en (1.36) una solución particular constante  $S_n = p$  con  $p \in \mathbb{R}$  a determinar, se tiene que

$$p - (1 + rh)p = c \implies p = -\frac{c}{rh}. \quad (1.39)$$

Así pues, teniendo en cuenta (1.38) y (1.39), la solución general de (1.36) es

$$A(1 + rh)^n - \frac{c}{rh}, \quad A \in \mathbb{R}. \quad (1.40)$$

Si  $X_0$  es la cantidad aportada inicialmente, entonces, teniendo en cuenta (1.40) se tiene

$$X_0 = A(1 + rh)^0 - \frac{c}{rh} \implies A = X_0 + \frac{c}{rh},$$

y por lo tanto, la única solución del PVI formado por la EDL (1.36) y la condición inicial  $X_0$  es

$$X_n = \left(X_0 + \frac{c}{rh}\right)(1 + rh)^n - \frac{c}{rh}. \quad (1.41)$$

En el caso particular  $X_0 = c$ , la expresión (1.41) se puede simplificar, obteniendo

$$X_n = \frac{(1 + rh)^{n+1} - 1}{rh}c.$$

Además, si un cliente quisiera recibir  $T$  u.m. al cabo de  $N$  periodos de capitalización (es decir,  $X_N = T$ , incluyendo la última cuota), entonces

$$X_N = \frac{(1 + rh)^{N+1} - 1}{rh}c = T,$$

con lo que debería realizar aportaciones de

$$c = \frac{rh}{(1 + rh)^{N+1} - 1}T.$$

Por ejemplo, si un cliente de 30 años quisiera recibir 100 000 u.m. a los 65 años con periodos de capitalización mensuales al 6% de interés nominal anual, entonces  $c \approx 69.79$  u.m.

## Tema 2

# Dinámica continua: ecuaciones diferenciales ordinarias

Las ecuaciones diferenciales ordinarias surgen de forma natural a partir de las ED cuando el incremento temporal que separa los tiempos discretos tiende a cero. Por ejemplo, consideremos la ED (1.5) que modeliza la evolución de un capital  $C$  a lo largo del tiempo  $t$  (medido en años) en un depósito con un tipo de interés nominal anual  $r$  (en tanto por uno) y con periodos de capitalización constantes de longitud  $h > 0$ . Así pues

$$\begin{aligned} C_{n+1} = (1 + rh) C_n &\implies \frac{C_{n+1} - C_n}{h} = rC_n \\ &\implies \frac{C(t_n + h) - C(t_n)}{h} = rC(t_n), \end{aligned}$$

en donde  $t_{n+1} = t_n + h$ . Si hacemos tender  $h$  a cero y tomamos la variable  $t$  en vez de  $t_n$  (ya que al hacer tender  $h$  a cero, estamos “desdiscretizando” los tiempos correspondientes a los inicios de los periodos de capitalización), obtenemos

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{C(t+h) - C(t)}{h} = rC(t) \implies C'(t) = rC(t),$$

que es una ecuación que modeliza el problema correspondiente al interés continuo. En esta ecuación interviene la función incógnita  $C(t)$  y su derivada  $C'(t)$ .

### 2.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias

En general, una *ecuación diferencial ordinaria* (EDO) es una expresión funcional que relaciona a una variable independiente  $t \in \mathbb{R}$  con una función incógnita  $X = X(t)$  y con algunas de sus derivadas. Es decir, si  $X^{(i)}(t)$  denota a la derivada de orden  $i$  de la función  $X(t)$ , una EDO es una expresión equivalente a

$$F\left(X^{(k)}(t), X^{(k-1)}(t), \dots, X'(t), X(t), t\right) = 0, \quad (2.1)$$

en donde  $F$  es una función continua dada y  $k$  es un número natural positivo. En este caso,  $k$  es el *orden* de la EDO (2.1), es decir, el mayor orden de derivación que aparece en la expresión.

Normalmente no se escribe explícitamente la dependencia de  $X$  y sus derivadas con respecto a la variable  $t$ , siempre y cuando esto no cause confusiones; así pues, por ejemplo, son EDOs de orden 1 (o de primer orden) las expresiones

$$X' = X, \quad X' = 2t - 4, \quad X' + tX = X^2;$$

y son EDOs de orden 2 (o de segundo orden) las expresiones

$$X'' = X, \quad X'' + X' + X^2 = t, \quad X'' + 4tX = 0.$$

Presentadas de este modo, las EDOs pueden parecer simples expresiones algebraicas (nuevas abstracciones matemáticas). Sin embargo, no se puede desposeer al estudio de las ecuaciones diferenciales de su profunda vinculación con la práctica totalidad de las disciplinas científicas (incluida la Economía). Y es que las ecuaciones diferenciales constituyen la herramienta más utilizada en la formulación de modelos matemáticos.

Los primeros estudios sobre EDOs se atribuyen a Newton y Leibniz en el siglo XVII. Las Leyes de Newton de la Mecánica Clásica se deben, en buena medida, al conocimiento que Newton tenía de las propiedades de las soluciones de las EDOs de segundo orden. Con el paso del tiempo, la teoría sobre ecuaciones diferenciales se ha ido enriqueciendo y adaptando a las exigencias de cada época. Tal vez resulte sorprendente, pero son muchos los problemas relacionados con las ecuaciones diferenciales que continúan abiertos en nuestros días.

La teoría sobre ecuaciones diferenciales ha sido desarrollada por diferentes escuelas matemáticas y en diferentes épocas históricas. Una consecuencia de ello es la existencia de terminologías y notaciones muy diversas. Por ejemplo, es común (y muy práctica en algunos casos) la notación diferencial  $\frac{d^n X}{dt^n}$  para denotar a la derivada de orden  $n$  de la función  $X$  con respecto a  $t$ , en vez de la que utilizamos nosotros,  $X^{(n)}$  (y es que a veces se confunde la notación  $X^{(n)}$  con  $X^n$ , que representa la potencia  $n$ -ésima de  $X$ ). También se puede encontrar la notación  $\dot{X}$  en vez de  $X'$  y  $\ddot{X}$  en vez de  $X''$ , especialmente en las ecuaciones de la Mecánica.

Al igual que con las EDs, si  $F$  no depende explícitamente de  $t$  entonces se dice que la EDO correspondiente es *autónoma*. Por otro lado, si la derivada de mayor orden está despejada se dice que la EDO viene dada en forma *explícita*. En general, una EDO explícita es de la forma

$$X^{(k)} = f\left(X^{(k-1)}, \dots, X', X, t\right),$$

en donde  $f$  es una función continua dada. En caso contrario, se dice que la EDO viene dada en forma *implícita*.

Por ejemplo, las EDOs

$$X' = X^2 + X, \quad X'' = 2X - 4, \quad X''' = \text{sen}(X') - X^2$$

son autónomas y explícitas, mientras que la EDO

$$(X')^2 + X^2 + 3 = 0$$

es autónoma e implícita.

La EDO que modeliza el problema del interés continuo

$$C' = rC, \tag{2.2}$$

es de primer orden, explícita y autónoma.

## 2.2. Solución de una EDO

Llamaremos *solución* de (2.1) a toda función  $\varphi = \varphi(t)$  definida en un intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ , de clase  $\mathcal{C}^k(I)$  y que verifique

$$F\left(\varphi^{(k)}(t), \varphi^{(k-1)}(t), \dots, \varphi'(t), \varphi(t), t\right) = 0$$

para todo  $t \in I$ . Obviamente, hay que exigir además que

$$\left(\varphi^{(k)}(t), \varphi^{(k-1)}(t), \dots, \varphi'(t), \varphi(t), t\right) \in \text{dom}(F)$$

para todo  $t \in I$ . La exigencia de que el dominio de la solución sea un intervalo y no cualquier conjunto de  $\mathbb{R}$  viene motivada por las aplicaciones que de las ecuaciones diferenciales se suelen hacer en distintos ámbitos de la ciencia. En estas aplicaciones, la variable independiente  $t$  suele representar al tiempo y no tendría demasiado sentido considerar discontinuidades en la variable temporal.

**Ejemplo 2.2.1** Cualquier función de la forma

$$C(t) = C_0 e^{rt}$$

con  $C_0 \in \mathbb{R}$  es solución de la EDO (2.2) correspondiente al problema del interés continuo, ya que es de clase  $\mathcal{C}^\infty$  y verifica

$$C'(t) = rC_0 e^{rt} = rC(t)$$

para todo  $t \in ]-\infty, +\infty[$ . En este caso, el parámetro  $C_0$  representa al capital inicial, ya que  $C(0) = C_0$ . Para el caso concreto del Ejemplo 1.1.1, se tiene que  $C_0 = 1000$ ,  $r = 10\% = 0.1$ , y por lo tanto, al cabo de 15 años tendremos un capital de  $C(15) = 1000 e^{0.1 \cdot 15} \approx 4481.69$  euros, que es una cantidad superior a lo que se obtendría con el sistema de capitalización discreta anual.

**Ejemplo 2.2.2** La función  $\varphi(t) = 3 + t^2$  no es solución de la EDO  $X' = X - 3$ , ya que  $\varphi'(t) = 2t$  y por lo tanto, la ecuación

$$\varphi'(t) = \varphi(t) - 3 \implies 2t = (3 + t^2) - 3$$

sólo se cumple para  $t = 0$  y  $t = 2$ , que es un conjunto finito de puntos y por lo tanto no es ningún intervalo real.

### 2.2.1. Soluciones constantes: puntos de equilibrio

Una solución constante  $\varphi(t) = p \in \mathbb{R}$  se dice que es un *punto de equilibrio* o *punto fijo*, al igual que pasaba con las soluciones constantes de las EDs. Como las derivadas sucesivas de una función constante son cero,  $p$  deberá satisfacer la ecuación algebraica

$$F(0, 0, \dots, 0, p, t) = 0$$

para todo  $t \in I$ .

**Ejemplo 2.2.3** Dada la EDO

$$X'' = tX' + X^2 - 1,$$

los puntos de equilibrio deben satisfacer la ecuación  $0 = p^2 - 1$  y por lo tanto existen dos puntos de equilibrio: 1 y  $-1$ .

**Ejemplo 2.2.4** Dada la EDO

$$X'' = X' + X^2 - t,$$

los puntos de equilibrio deben satisfacer la ecuación  $0 = p^2 - t$ , es decir  $p^2 = t$ , para todo  $t$  de algún intervalo. Así pues, como  $p$  ha de ser constante, no existen puntos de equilibrio.

## 2.3. Problema de valores iniciales

Las EDOs suelen tener infinitas soluciones, como en el Ejemplo 2.2.1, y si se quiere distinguir a una de esas soluciones hay que imponer algunas condiciones adicionales. De esta forma, un *problema de valores iniciales* (PVI), o *problema de Cauchy*, está formado por una EDO explícita de orden  $k$

$$X^{(k)} = f(X^{(k-1)}, \dots, X', X, t)$$

junto con  $k$  condiciones de la forma

$$X(t_0) = X_0, \quad X'(t_0) = X'_0, \quad \dots, \quad X^{(k-1)}(t_0) = X_0^{(k-1)},$$

en donde  $(X_0^{(k-1)}, \dots, X_0, t_0) \in \text{dom}(f)$ . En este caso, se dice que una función  $\varphi(t)$  definida en un intervalo  $I$  que contiene a  $t_0$ , es solución del PVI si es solución de la EDO correspondiente y cumple las condiciones iniciales

$$\varphi(t_0) = X_0, \quad \varphi'(t_0) = X'_0, \quad \dots, \quad \varphi^{(k-1)}(t_0) = X_0^{(k-1)},$$

considerando a  $t_0$  como el “instante inicial”.

**Ejemplo 2.3.1** El PVI

$$\begin{cases} C' &= rC \\ C(0) &= C_0, \end{cases}$$

tiene como única solución a la función  $C(t) = C_0 e^{rt}$ , en donde se considera que  $t_0 = 0$  es el instante inicial y  $C_0$  representa el capital inicial.

No obstante, la definición de PVI puede extenderse a cualquier tipo de condición sobre el valor que toman la función incógnita y/o sus derivadas en varios tiempos distintos, siempre que el número de condiciones coincida con el orden de la EDO. Por ejemplo, si las condiciones sólo afectan a la función incógnita y no a sus derivadas

$$X(t_0) = X_0, \quad X(t_1) = X_1, \quad \dots, \quad X(t_{k-1}) = X_{k-1},$$

con  $t_0, t_1, \dots, t_{k-1} \in \mathbb{R}$ , se dice que el PVI correspondiente es un *problema de contorno*, aunque en realidad, este término sólo se aplicaría en su pleno significado a las EDOs de segundo orden.

**Ejemplo 2.3.2** Dado el problema de contorno

$$\begin{cases} X'' = 4X' - 4X \\ X(0) = 1 \\ X(1) = 2, \end{cases}$$

se puede comprobar que la única solución viene dada por la función

$$\varphi(t) = (1 + (2e^{-2} - 1)t) e^{2t}.$$

Con respecto a la unicidad de solución de un PVI, de momento no podemos asegurar nada. Este asunto será tratado en el tema dedicado a las EDOs.

**Definición 2.3.1** Un problema de Cauchy está bien planteado si

- Existe una única solución.
- Al variar un poco las condiciones iniciales, las soluciones correspondientes son únicas y dependen de forma continua de dichas condiciones iniciales.

No todo problema de Cauchy está bien planteado, como veremos en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.3.3** El problema de Cauchy

$$\begin{cases} X' = 2\sqrt{|X|} \\ X(0) = 0, \end{cases}$$

no está bien planteado, ya que las funciones

$$\varphi(t) = 0, \quad \psi(t) = t|t|$$

son dos soluciones distintas (compruébese).

**Teorema 2.3.1 (Teorema de Picard de orden 1)** Dada  $f(x, t)$  una función continua, si existe  $\frac{\partial f}{\partial x}$  en el dominio de  $f$  y es continua, entonces el problema de Cauchy

$$\begin{cases} X' = f(X, t) \\ X(t_0) = X_0, \end{cases}$$

está bien planteado, en donde  $(X_0, t_0)$  es un punto cualquiera del dominio de  $f$ .

**Ejemplo 2.3.4** Dado un problema de Cauchy con una EDO de la forma

$$X' = h(t)$$

en donde  $h$  es continua, aplicando el Teorema de Picard obtenemos que siempre está bien planteado, ya que, considerando  $f(x, t) := h(t)$ , se tiene que  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ , que es continua.

**Ejemplo 2.3.5** Dado un problema de Cauchy con una EDO de la forma

$$X' = g(X)$$

en donde  $g$  es de clase  $C^1$ , considerando  $f(x, t) := g(x)$  se tiene que  $\frac{\partial f}{\partial x} = g'(x)$  es continua. Por lo tanto, aplicando el Teorema de Picard, el problema de Cauchy está bien planteado.

**Ejemplo 2.3.6** La función  $g(x) := 2\sqrt{|x|}$  del Ejemplo 2.3.3 no es derivable en 0 y por lo tanto no satisface las hipótesis del Teorema de Picard. Así pues, no está asegurado que un problema de Cauchy que tenga como EDO  $X' = g(X)$  esté bien planteado. De hecho, en el Ejemplo 2.3.3 se vio que dicha EDO junto con la condición inicial  $X(0) = 0$  es un problema de Cauchy con varias soluciones.

**Ejemplo 2.3.7** El problema de Cauchy

$$\begin{cases} X' = X^2 \\ X(0) = 1, \end{cases}$$

cumple las hipótesis del Teorema de Picard y por lo tanto está bien planteado. De hecho, la única solución viene dada por

$$\varphi(t) = \frac{1}{1-t},$$

pero solamente está definida en  $I = ]-\infty, 1[$ .

El Teorema de Picard de orden 1 se puede generalizar para problemas de Cauchy de orden superior.

**Teorema 2.3.2 (Teorema de Picard)** *Dada  $f(x_{k-1}, \dots, x_1, x_0, t)$  una función continua, si existen  $\frac{\partial f}{\partial x_{k-1}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_0}$  en el dominio de  $f$  y son continuas, entonces el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} X^{(k)} = f(X^{(k-1)}, \dots, X', X, t) \\ X(t_0) = X_0, \quad X'(t_0) = X'_0, \quad \dots, \quad X^{(k-1)}(t_0) = X_0^{(k-1)} \end{cases}$$

*está bien planteado, en donde  $(X_0^{(k-1)}, \dots, X'_0, X_0, t_0)$  es un punto cualquiera del dominio de  $f$ .*

## 2.4. Discretización

Dado el PVI

$$\begin{cases} X' = X + t \\ X(1) = 2, \end{cases} \tag{2.3}$$

podemos plantearnos hallar el valor de la solución  $\varphi$  en  $t = 2$ . En este caso, la EDO de (2.3) es relativamente sencilla y se podría resolver con técnicas que daremos posteriormente

en el tema dedicado a las ecuaciones diferenciales. De hecho, se puede comprobar que la solución viene dada por la función

$$\varphi(t) = 4e^{t-1} - t - 1$$

y por lo tanto  $\varphi(2) = 4e - 3 \approx 7.8731$ . Sin embargo, en la mayoría de casos, no es posible hallar analíticamente la solución y son necesarias otras técnicas para estimarla. En concreto, vamos a ver la técnica de discretización de Euler.

Esta técnica consiste en crear una malla discreta de puntos equiespaciados de la forma  $\{t_0, t_1 := t_0 + h, t_2 := t_0 + 2h, \dots\}$  en donde  $t_0$  es el punto en el que se da la condición inicial del PVI correspondiente; en nuestro caso,  $t_0 = 1$ . La distancia entre los puntos de la malla es un número real  $h > 0$  que recibe el nombre de *paso*. Por lo tanto, se tiene que  $t_{n+1} = t_n + h$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , y se cumple que

$$t_n = t_0 + nh.$$

Una vez elegido el paso y construida esta malla, se exige que se cumpla la EDO del PVI pero solamente en los puntos de esta malla, y se realiza la aproximación

$$X'(t_n) \approx \frac{X(t_n + h) - X(t_n)}{h} = \frac{1}{h}(X_{n+1} - X_n),$$

teniendo en cuenta la notación usada en las EDs, en donde  $X_n := X(t_n)$ . Dicha aproximación está basada en la definición de derivada

$$X'(t) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{X(t+h) - X(t)}{h},$$

y por lo tanto, el error cometido es menor cuanto más pequeño sea el paso  $h$ . Así pues, la EDO del PVI original (2.3) se transforma en una ED:

$$\begin{aligned} X'(t_n) = X(t_n) + t_n &\implies \frac{1}{h}(X_{n+1} - X_n) = X_n + (t_0 + nh) \\ &\implies X_{n+1} = (1+h)X_n + (1+nh)h, \end{aligned}$$

y la condición inicial también se transforma:

$$X(1) = 2 \implies X(t_0) = 2 \implies X_0 = 2.$$

Así pues, el PVI (2.3) se transforma en el PVI

$$\begin{cases} X_{n+1} = (1+h)X_n + (1+nh)h \\ X_0 = 2, \end{cases}$$

de cuya solución  $S_n$  podemos hallar el término que queramos simplemente iterando.

Por ejemplo, si escogemos un paso  $h = 0.1$ , para estimar  $\varphi(2)$  (cuyo valor es  $4e - 3$ , aproximadamente 7.8731) tendremos que hallar  $X(2)$ , que se corresponde con  $S_{10}$ , ya que

en este caso  $t_{10} = 2$ . Y si escogemos  $h = 0.01$ , entonces tendremos que hallar  $S_{100}$ , ya que  $t_{100} = 2$ . A continuación se muestran las aproximaciones obtenidas para distintos pasos  $h$ :

$$\begin{aligned} h = 0.1 & \implies X(2) = S_{10} \approx 7.3750 \\ h = 0.01 & \implies X(2) = S_{100} \approx 7.8193 \\ h = 0.001 & \implies X(2) = S_{1000} \approx 7.8677 \\ h = 0.0001 & \implies X(2) = S_{10000} \approx 7.8726. \end{aligned}$$

Para EDOs de mayor orden, siguiendo el mismo razonamiento de aproximación para pasos  $h$  pequeños, se tiene

$$\begin{aligned} X''(t) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{X'(t+h) - X'(t)}{h} \approx \frac{X'(t+h) - X'(t)}{h} \\ &\approx \frac{1}{h} \left( \frac{X(t+2h) - X(t+h)}{h} - \frac{X(t+h) - X(t)}{h} \right) \\ &= \frac{1}{h^2} (X(t+2h) - 2X(t+h) + X(t)), \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$X''(t_n) \approx \frac{1}{h^2} (X_{n+2} - 2X_{n+1} + X_n) = \frac{\Delta^2 X_n}{h^2}.$$

De la misma forma, se demuestra que

$$X^{(k)}(t_n) \approx \frac{\Delta^k X_n}{h^k}$$

para cualquier  $k \in \mathbb{N}$ .

En conclusión, una EDO de la forma (2.1) se puede discretizar por el método de Euler tomando un tiempo inicial  $t_0$  y un paso  $h$ , obteniéndose la ED

$$F \left( \frac{\Delta^k X_n}{h^k}, \frac{\Delta^{k-1} X_n}{h^{k-1}}, \dots, \frac{\Delta X_n}{h}, X_n, t_0 + nh \right) = 0.$$

El método de Euler es el método de discretización más sencillo, pero existen otros métodos más sofisticados que proporcionan mejores aproximaciones con menos iteraciones, como por ejemplo los métodos de Runge-Kutta.

## 2.5. Métodos de resolución para EDOs de primer orden

Dada una EDO, es conveniente hallar todas las posibles soluciones. El conjunto de todas las soluciones de una EDO se denomina *solución general* y se representa por  $X(t)$ .

En esta sección consideraremos EDOs explícitas, aunque no quede explícitamente indicado. Las EDOs más sencillas son las de la forma

$$X' = h(t),$$

en donde  $h$  es una función continua. En este caso, la solución general es el conjunto de primitivas de  $h$ :

$$X(t) = \int h(t) dt.$$

Así pues, dada una condición inicial  $X(t_0) = X_0$ , el problema de Cauchy correspondiente está bien planteado (ver Ejemplo 2.3.4) y la única solución viene dada por

$$\int_{t_0}^t h(\tau) d\tau + X_0.$$

Veamos a continuación cómo resolver otros tipos de EDOs de primer orden.

### 2.5.1. EDOs autónomas

Las EDOs autónomas de primer orden son de la forma

$$X' = g(X),$$

en donde supondremos que  $g$  es de clase  $C^1$  (ver Ejemplo 2.3.5). Nótese que, en este caso, los puntos de equilibrio son los ceros de la función  $g$ , es decir, aquellos  $p \in \mathbb{R}$  tales que  $g(p) = 0$ .

Para hallar todas las soluciones, expresamos la EDO en notación diferencial:

$$\frac{dX}{dt} = g(X) \implies \int \frac{1}{g(X)} dX = \int dt = t + C,$$

en donde  $C \in \mathbb{R}$  es una constante de integración. De esta expresión obtenemos las funciones inversas de las soluciones en forma de primitiva:

$$t(X) = \int \frac{1}{g(X)} dX.$$

De este modo se da la solución general en forma *implícita*, aunque preferiblemente es aconsejable despejar  $X$  (siempre y cuando sea posible) para darla en forma *explícita*.

**Ejemplo 2.5.1** Dada la EDO

$$X' = X$$

se tiene que

$$t(X) = \int \frac{1}{X} dX = \ln |X| + C,$$

en donde  $C \in \mathbb{R}$  y suponiendo  $X \neq 0$ . Por lo tanto

$$|X(t)| = e^{t-C}.$$

En este caso, se puede redefinir  $C$  como  $e^{-C}$  obteniéndose

$$|X(t)| = Ce^t,$$

con  $C$  un parámetro estrictamente positivo. Así pues, la solución general en forma explícita viene dada por

$$X(t) = Ce^t,$$

con  $C \in \mathbb{R}$  un parámetro (no solamente positivo), ya que  $X = 0$  es también solución.

**Ejemplo 2.5.2** Dada la EDO

$$X' = X^2 + 1,$$

se tiene que

$$t(X) = \int \frac{1}{X^2 + 1} dX = \arctan X + C,$$

en donde  $C \in \mathbb{R}$ . Así pues, la solución general en forma explícita viene dada por

$$X(t) = \tan(t + C),$$

en donde  $C$  ha sido redefinida y hace el papel de parámetro.

**Ejemplo 2.5.3** Dada la EDO

$$X' = \frac{e^X}{X^2 + 1}$$

se tiene que, integrando por partes

$$t(X) = \int (X^2 + 1)e^{-X} dX = -(X^2 + 2X + 3)e^{-X} + C,$$

en donde  $C \in \mathbb{R}$ . De dicha expresión no se puede despejar  $X$  y por lo tanto no se puede hallar la solución general en forma explícita.

**Ejemplo 2.5.4 (Modelo de deuda de Domar)** Considerando que las funciones  $I(t)$ ,  $D(t)$  representan el *ingreso* y la *deuda* nacionales<sup>1</sup> respectivamente de una determinada economía, el modelo de deuda de Domar supone que estas dos funciones crecen de forma proporcional al ingreso, es decir, existen dos constantes  $c_1, c_2 > 0$  tales que

$$\begin{cases} I' &= c_1 I \\ D' &= c_2 I. \end{cases}$$

Por ejemplo, si suponemos que el ingreso crece a una razón igual al 8% de su tamaño, se tiene que

$$I' = 0.08I,$$

que es una EDO autónoma. Por lo tanto

$$I(t) = I_0 e^{0.08t},$$

en donde  $I_0$  es el ingreso inicial en  $t = 0$ . Por otro lado, si suponemos que la deuda crece a una razón igual al 1% del ingreso, se tiene que

$$D' = 0.01I_0 e^{0.08t} \quad \implies \quad D(t) = \frac{1}{8}I_0 e^{0.08t} + C,$$

en donde  $C := D_0 - \frac{1}{8}I_0$  con  $D_0$  la deuda inicial. Para ver cómo evoluciona la deuda en comparación con el ingreso, es interesante definir la función

$$\frac{D(t)}{I(t)} = \frac{1}{8} + \frac{C}{I(t)}.$$

---

<sup>1</sup>Han de considerarse el ingreso y la deuda acumuladas en el último año.

Como  $I(t)$  crece exponencialmente con el tiempo, se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{D(t)}{I(t)} = \frac{1}{8},$$

es decir, la deuda tiende a estabilizarse en el 12.5 % del valor del ingreso, independientemente de las condiciones iniciales.

### 2.5.2. EDOs de variables separables

Las EDOs que hemos visto hasta ahora son casos particulares de un tipo más general de EDOs llamadas *de variables separables*, que son de la forma

$$X' = g(X)h(t),$$

en donde  $h$  es una función continua y  $g$  es de clase  $\mathcal{C}^1$ . Al igual que pasaba con las EDOs autónomas, los puntos de equilibrio son los ceros de la función  $g$ .

Para hallar la solución general, se procede de igual forma que con las EDOs autónomas, usando la notación diferencial:

$$\frac{dX}{dt} = g(X)h(t) \implies \int \frac{1}{g(X)} dX = \int h(t) dt,$$

de donde se obtiene la solución general en forma *implícita*.

**Ejemplo 2.5.5** Dada la EDO

$$X' = X^2 t^2,$$

suponiendo  $X \neq 0$  se tiene que

$$\int \frac{1}{X^2} dX = \int t^2 dt \implies -\frac{1}{X} = \frac{t^3}{3} + C,$$

Así pues, la solución general en forma explícita viene dada por

$$X(t) = \frac{3}{C - t^3},$$

en donde  $C$  ha sido redefinida y hace el papel de parámetro. Además, como  $X(t) = 0$  también satisface la EDO, hay que añadirla.

### 2.5.3. EDOs homogéneas

Las EDOs homogéneas son de la forma

$$X' = f(X, t),$$

en donde  $f$  es homogénea de grado 0, es decir,  $f(\lambda X, \lambda t) = f(X, t)$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  que tenga sentido (teniendo en cuenta el dominio de  $f$ ). Haciendo el cambio de variable

$$U(t) = \frac{X(t)}{t}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} U' &= \frac{X't - X}{t^2} = \frac{1}{t} \left( X' - \frac{X}{t} \right) = \frac{1}{t} (f(X, t) - U) \\ &= \frac{1}{t} (f(\frac{1}{t}X, 1) - U) = \frac{1}{t} (f(U, 1) - U), \end{aligned}$$

que es una EDO de variables separables. Resolviéndola y deshaciendo el cambio obtenemos la solución general.

**Ejemplo 2.5.6** Dada la EDO

$$X' = \frac{X(X+t)}{t^2},$$

se tiene que  $f(x, t) = \frac{x(x+t)}{t^2}$  es homogénea de grado cero y por lo tanto, haciendo el cambio  $U = X/t$  se tiene que

$$U' = \frac{1}{t} (f(U, 1) - U) = \frac{U^2}{t},$$

que es una EDO es de variables separables. Resolviéndola, llegamos a

$$U(t) = \frac{-1}{\ln t + C} \quad \implies \quad X(t) = \frac{-t}{\ln t + C}.$$

#### 2.5.4. EDOs lineales

Las EDOs lineales de primer orden son de la forma

$$X' = a(t)X + b(t),$$

en donde  $a, b$  son funciones continuas. Haciendo el cambio de variable

$$U(t) = e^{-A(t)}X(t)$$

con  $A$  una primitiva de  $a$  (es decir  $A' = a$ ), se tiene que

$$U' = -A'e^{-A}X + e^{-A}X' = e^{-A}(-A'X + aX + b) = be^{-A}$$

y por lo tanto

$$U(t) = \int b(t)e^{-A(t)}dt.$$

Deshaciendo el cambio, obtenemos que la solución general viene dada por

$$X(t) = e^{A(t)} \int b(t)e^{-A(t)}dt. \tag{2.4}$$

**Ejemplo 2.5.7** Dada la EDO

$$X' = X - 2t,$$

es lineal con  $a(t) = 1$  y  $b(t) = -2t$ . Eligiendo  $A(t) = t$  como primitiva de  $a(t)$ , aplicando la fórmula (2.4) e integrando por partes se tiene que

$$X(t) = e^t \int (-2t)e^{-t}dt = 2(t+1) + Ce^t.$$

### 2.5.5. Ecuaciones de Bernoulli

Las ecuaciones de Bernoulli son de la forma

$$X' = a(t)X + b(t)X^n,$$

en donde  $a, b$  son funciones continuas y  $n \neq 0, 1$ . Haciendo el cambio de variable

$$U(t) = (X(t))^{1-n}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} U' &= (1-n)X^{-n}X' = (1-n)(aX + bX^n)X^{-n} = (1-n)(aX^{1-n} + b) \\ &= (1-n)(aU + b), \end{aligned}$$

que es una EDO lineal. Resolviéndola y deshaciendo el cambio obtenemos la solución general.

**Ejemplo 2.5.8** Dada la EDO

$$X' = X(2tX - 1),$$

es de Bernoulli con  $n = 2$ . Haciendo el cambio  $U = X^{-1}$  se tiene que

$$U' = U - 2t,$$

que es la EDO lineal del Ejemplo 2.5.7. Así pues

$$U(t) = 2(t+1) + Ce^t \quad \Longrightarrow \quad X(t) = \frac{1}{2(t+1) + Ce^t}.$$

### 2.5.6. Ecuaciones de Ricatti

Las ecuaciones de Ricatti son de la forma

$$X' = a(t)X + b(t)X^2 + c(t),$$

en donde  $a, b, c$  son funciones continuas. Haciendo el cambio de variable

$$U(t) = X(t) - \varphi(t)$$

con  $\varphi$  una solución particular, se tiene que

$$\begin{aligned} U' &= X' - \varphi' = (aX + bX^2 + c) - (a\varphi + b\varphi^2 + c) = a(X - \varphi) + b(X^2 - \varphi^2) \\ &= aU + b(X^2 - 2X\varphi + \varphi^2) + b(2X\varphi - 2\varphi^2) = aU + bU^2 + 2b\varphi U \\ &= (a + 2b\varphi)U + bU^2, \end{aligned}$$

que es una ecuación de Bernoulli con  $n = 2$ . Resolviéndola y deshaciendo el cambio obtenemos la solución general.

**Ejemplo 2.5.9** Dada la EDO

$$X' = (4t - 1)X + 2t(X^2 + 1) - 1,$$

se puede comprobar que  $-1$  es un punto de equilibrio, es decir,  $\varphi(t) = -1$  es una solución particular constante. Como la EDO es de Ricatti, haciendo el cambio  $U = X + 1$  se tiene que

$$U' = -U + 2tU^2 = U(2tU - 1),$$

que es la EDO de Bernoulli del Ejemplo 2.5.8. Así pues

$$U(t) = \frac{1}{2(t+1) + Ce^t} \quad \implies \quad X(t) = \frac{1}{2(t+1) + Ce^t} - 1.$$

## 2.6. EDOs lineales de cualquier orden

Las EDOs lineales (de coeficientes constantes), abreviadamente EDOLs, son de la forma

$$a_k X^{(k)} + a_{k-1} X^{(k-1)} + \cdots + a_1 X' + a_0 X = q(t), \quad (2.5)$$

en donde  $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R}$  y el término externo  $q(t)$  es una función continua. También se exige que  $a_k \neq 0$ , y en este caso,  $k$  es el orden de la EDOL. Además, por el Teorema de Picard, se puede demostrar que todo problema de Cauchy con una EDOL de la forma (2.5) está bien planteado.

### 2.6.1. Resolución de EDOLs homogéneas

Si  $q(t) = 0$  se dice que la EDOL (2.5) es homogénea, abreviadamente EDOLH:

$$a_k X^{(k)} + a_{k-1} X^{(k-1)} + \cdots + a_1 X' + a_0 X = 0, \quad (2.6)$$

Al igual que pasaba con las EDLHs, la solución general (es decir, el conjunto de soluciones) de una EDOLH tiene estructura de espacio vectorial de dimensión  $k$  y por lo tanto, para hallarla basta con encontrar una base (llamada *sistema fundamental*) formada por  $k$  soluciones particulares linealmente independientes.

La siguiente propiedad nos ayudará a calcular dicha base.

**Propiedad 2.6.1** *La función  $e^{\lambda t}$  es solución de (2.6) si y sólo si  $\lambda$  verifica la ecuación*

$$a_k \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

La ecuación anterior recibe el nombre de *ecuación característica* de la EDOLH (2.6), y está formada por el correspondiente *polinomio característico* igualado a cero. Así pues, el cálculo de la solución general de una EDOLH es análogo al caso discreto. Veamos algunos ejemplos basados en los ejemplos de resolución de EDLHs ya vistos en el Tema 2:

**Ejemplo 2.6.1** Supongamos que queremos resolver el PVI:

$$\begin{cases} 2X' - 6X = 0 \\ X(0) = 5. \end{cases}$$

La ecuación característica correspondiente es

$$2\lambda - 6 = 0,$$

cuya única solución es  $\lambda = 3$ . Por lo tanto, la función  $e^{3t}$  es solución de la EDOLH, y como el espacio de soluciones es de dimensión 1, la solución general viene dada por

$$A \cdot e^{3t}, \quad A \in \mathbb{R}.$$

Ahora basta ajustar el parámetro  $A$  para conseguir que se cumpla la condición inicial:

$$X(0) = 5 \implies A \cdot e^0 = 5 \implies A = 5.$$

Así pues, la única solución del PVI es la función  $5 \cdot e^{3t}$ .

**Ejemplo 2.6.2** Consideremos el PVI

$$\begin{cases} X'' + X' - 6X' = 0 \\ X(0) = 3, \quad X'(0) = 1. \end{cases}$$

La ecuación característica correspondiente es

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0,$$

cuyas soluciones son  $\lambda_1 = 2$  y  $\lambda_2 = -3$ . Por lo tanto, un sistema fundamental de soluciones lo forman las funciones

$$e^{2t}, \quad e^{-3t}.$$

En este caso, la solución general de la EDOLH viene dada por

$$A \cdot e^{2t} + B \cdot e^{-3t}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Ahora hay que calcular  $A$  y  $B$  para que se cumplan las condiciones iniciales:

$$\left. \begin{aligned} X(0) = 3 &\implies A + B = 3 \\ X'(0) = 1 &\implies 2A - 3B = 1. \end{aligned} \right\}$$

La solución de este sistema es  $A = 2$ ,  $B = 1$ , con lo que la única solución del PVI es la sucesión cuyo término general es

$$2 \cdot e^{2t} + e^{-3t}.$$

**Ejemplo 2.6.3** Consideremos el PVI

$$\begin{cases} X'' - 4X' + 8X' = 0 \\ X(0) = 4, \quad X'(0) = 10. \end{cases}$$

La ecuación característica correspondiente es

$$\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0,$$

que no tiene soluciones reales, pero sí complejas:  $\lambda_1 = 2 + 2i$  y  $\lambda_2 = 2 - 2i$ . Siguiendo el esquema que estamos utilizando llegamos a que  $\{e^{(2+2i)t}, e^{(2-2i)t}\}$  forman un sistema fundamental de soluciones de la EDOLH. Aunque esto es cierto, lo deseable es conseguir otro que sea real. Para obtenerlo, vamos a realizar un *cambio de base*:

$$\frac{e^{(2+2i)t} + e^{(2-2i)t}}{2} = e^{2t} \cos(2t)$$

$$\frac{e^{(2+2i)t} - e^{(2-2i)t}}{2i} = e^{2t} \operatorname{sen}(2t),$$

con lo que la solución general de la EDOLH será de la forma

$$A \cdot e^{2t} \cos(2t) + B \cdot e^{2t} \operatorname{sen}(2t), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Imponiendo que se cumplan las condiciones iniciales

$$\left. \begin{aligned} X(0) = 4 &\implies A \cdot e^0 \cos 0 + B \cdot e^0 \operatorname{sen} 0 = 4 \implies A = 4 \\ X'(0) = 10 &\implies A \cdot (2e^0 \cos 0 - 2e^0 \operatorname{sen} 0) + B \cdot (2e^0 \operatorname{sen} 0 + 2e^0 \cos 0) = 10 \\ &\implies 2A + 2B = 10 \end{aligned} \right\}$$

cuya solución es  $A = 4$ ,  $B = 1$ . Por lo tanto, la solución del PVI es la función

$$4 \cdot e^{2t} \cos(2t) + e^{2t} \operatorname{sen}(2t).$$

**Ejemplo 2.6.4** Consideremos el PVI

$$\left\{ \begin{aligned} X'' - 3X' + 9X &= 0 \\ X(0) = 4, \quad X'(0) &= 10. \end{aligned} \right.$$

La ecuación característica correspondiente es

$$\lambda^2 - 3\lambda + 9 = 0,$$

cuyas soluciones son complejas:  $\lambda_1 = \frac{3+3\sqrt{3}i}{2}$  y  $\lambda_2 = \frac{3-3\sqrt{3}i}{2}$ . Así pues, un sistema fundamental de soluciones lo forman las funciones

$$e^{\frac{3}{2}t} \cos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}t\right), \quad e^{\frac{3}{2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}t\right),$$

y la solución general de la EDOLH será de la forma

$$A \cdot e^{\frac{3}{2}t} \cos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}t\right) + B \cdot e^{\frac{3}{2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}t\right), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Imponiendo que se cumplan las condiciones iniciales

$$\left\{ \begin{aligned} X(0) = 4 &\implies A \cdot e^0 \cos 0 + B \cdot e^0 \operatorname{sen} 0 = 4 \implies A = 4 \\ X'(0) = 10 &\implies A \cdot \left(\frac{3}{2}e^0 \cos 0 - \frac{3}{2}e^0 \operatorname{sen} 0\right) + B \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}e^0 \operatorname{sen} 0 + \frac{3\sqrt{3}}{2}e^0 \cos 0\right) = 10 \\ &\implies \frac{3}{2}A + \frac{3\sqrt{3}}{2}B = 10 \end{aligned} \right\}$$

cuya solución es  $A = 4$ ,  $B = \frac{8\sqrt{3}}{9}$ . Por lo tanto, la solución del PVI es la función

$$4 \cdot e^{\frac{3}{2}t} \cos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{8\sqrt{3}}{9} \cdot e^{\frac{3}{2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}t\right).$$

**Ejemplo 2.6.5** Consideremos el PVI

$$\begin{cases} X'' - 4X' + 4X = 0 \\ X(0) = 3, \quad X'(0) = 10. \end{cases}$$

La ecuación característica correspondiente es

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0,$$

cuya única solución es  $\lambda = 2$ . No obstante, esta solución es una raíz doble del polinomio característico y, en este caso, se puede comprobar que un sistema fundamental de soluciones lo forman las funciones

$$e^{2t}, \quad te^{2t}.$$

Por lo tanto, la solución general de la EDOLH viene dada por

$$A \cdot e^{2t} + B \cdot te^{2t}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Exigiendo que se cumplan las condiciones iniciales:

$$\left. \begin{aligned} X(0) = 3 &\implies A = 3 \\ X'(0) = 10 &\implies 2A + B = 10. \end{aligned} \right\}$$

La solución de este sistema es  $A = 3$ ,  $B = 4$ , con lo que la única solución del PVI es la función

$$3 \cdot e^{2t} + 4 \cdot te^{2t} = (3 + 4t) \cdot e^{2t}.$$

En general, para calcular un sistema fundamental de soluciones de una EDOLH, debemos calcular todas las raíces del polinomio característico correspondiente junto con sus multiplicidades, y cada una de las raíces (contadas con su multiplicidad) da lugar a una solución de acuerdo al siguiente esquema:

- Si  $\lambda$  es una raíz real con multiplicidad  $m$ , entonces las funciones

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{m-1}e^{\lambda t},$$

son  $m$  soluciones linealmente independientes de la EDOLH.

- Si  $\lambda = a \pm ib$  es una raíz compleja (junto con su conjugada) con multiplicidad  $m$ , entonces las funciones

$$\begin{aligned} &e^{at} \cos(bt), e^{at} \operatorname{sen}(bt), \\ &te^{at} \cos(bt), te^{at} \operatorname{sen}(bt), \\ &\dots \\ &t^{m-1}e^{at} \cos(bt), t^{m-1}e^{at} \operatorname{sen}(bt), \end{aligned}$$

son  $2m$  soluciones linealmente independientes de la EDOLH.

### 2.6.2. Resolución de EDOLs completas

Dada una EDOL de la forma (2.5), si  $q(t) \neq 0$  se dice que la EDOL es *no homogénea o completa*:

$$a_k X^{(k)} + a_{k-1} X^{(k-1)} + \cdots + a_1 X' + a_0 X = q(t). \quad (2.7)$$

En este caso, se puede construir una EDOLH simplemente sustituyendo  $q(t)$  por 0; esta nueva ecuación recibe el calificativo de *homogénea asociada* a (2.7) y se cumple la siguiente propiedad cuya demostración se puede obtener por simple comprobación:

**Propiedad 2.6.2** *Dadas soluciones cualesquiera  $\varphi$  de la EDOL completa (2.7) y  $\bar{\varphi}$  de la correspondiente EDOLH asociada, se cumple que  $\varphi + \bar{\varphi}$  es también solución de (2.7).*

De esta propiedad se deduce que la solución general de una EDOL completa se puede construir mediante la suma de una solución particular de dicha EDOL y la solución general de la EDOLH asociada. En forma esquemática:

$$\left[ \begin{array}{c} \text{solución general} \\ \text{de la EDOL completa} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \text{solución particular} \\ \text{de la EDOL completa} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \text{solución general} \\ \text{de la EDOLH asociada} \end{array} \right].$$

Como ya sabemos calcular la solución general de cualquier EDOLH, basta calcular ahora una solución particular de la EDOL completa y sumarla a la solución general de la EDOLH asociada para obtener la solución general de la EDOL completa.

Al igual que con las EDLs, buscaremos una solución particular que sea “del mismo tipo” que el término externo  $q(t)$ . No obstante, este método no funciona siempre. Veamos algunos casos:

- $q(t) = c$  con  $c \in \mathbb{R} \Rightarrow$  se busca solución particular del tipo  $\varphi(t) = C$  con  $C \in \mathbb{R}$  a determinar.
- $q(t) = c \cdot r^t$  con  $c, r \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0 \Rightarrow$  se busca solución particular del tipo  $\varphi(t) = C \cdot r^t$  con  $C \in \mathbb{R}$  a determinar.
- $q(t) = c_j t^j + \cdots + c_1 t + c_0$  con  $j \in \mathbb{N}$ ,  $c_0, c_1, \dots, c_j \in \mathbb{R} \Rightarrow$  se busca solución particular del tipo  $\varphi(t) = C_j t^j + \cdots + C_1 t + C_0$  con  $C_0, C_1, \dots, C_j \in \mathbb{R}$  a determinar.

En realidad, el caso  $q(t)$  constante es un caso particular de  $q(t)$  exponencial (con base  $r = 1$ ) o  $q(t)$  polinómica (de grado 0). En este caso, lo que estamos buscando son puntos de equilibrio, ya que éstos son soluciones particulares constantes.

Sin embargo, cuando  $q(t)$  es solución de la EDOLH asociada se dice que hay *resonancia* y el método no funciona. En este caso, hay que multiplicar sucesivamente la función candidata a ser solución particular por  $t$ ,  $t^2$ , etc... hasta que encontremos alguna solución particular. Análogamente al caso discreto, se puede averiguar a priori el exponente de dicha  $t$  en los casos que estamos estudiando:

- $q(n) = c$  con  $c \in \mathbb{R}$  y resonancia  $\Rightarrow$  se busca solución particular del tipo  $\varphi(t) = C \cdot t^m$  con  $C \in \mathbb{R}$  a determinar y  $m$  la multiplicidad de 0 como raíz del correspondiente polinomio característico.

- $q(n) = c \cdot r^t$  con  $c, r \in \mathbb{R}$  y resonancia  $\Rightarrow$  se busca solución particular del tipo  $\varphi(t) = C \cdot r^t \cdot t^m$  con  $C \in \mathbb{R}$  a determinar y  $m$  la multiplicidad de  $\ln(r)$  como raíz del correspondiente polinomio característico.
- $q(n) = c_j t^j + \dots + c_1 t + c_0$  con  $j \in \mathbb{N}$ ,  $c_0, c_1, \dots, c_j \in \mathbb{R}$  y resonancia  $\Rightarrow$  se busca solución particular del tipo  $\varphi(t) = (C_j t^j + \dots + C_1 t + C_0) \cdot t^{m-j}$  con  $C_0, C_1, \dots, C_j \in \mathbb{R}$  a determinar y  $m$  la multiplicidad de  $\ln(r)$  como raíz del correspondiente polinomio característico.

Veamos algunos ejemplos de cómo hallar soluciones particulares, análogos a los vistos en el Tema 2:

**Ejemplo 2.6.6** Dada la EDOL

$$X'' + 4X' + 4X = 27,$$

buscamos una solución particular de la forma  $\varphi(t) = C$  con  $C \in \mathbb{R}$  a determinar, es decir, buscamos puntos de equilibrio. Sustituyendo en la EDOL:

$$4C = 27 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{27}{4}.$$

**Ejemplo 2.6.7** Dada la EDOL

$$X'' - 4X' = 10,$$

se puede comprobar que no existen puntos de equilibrio y por lo tanto no existen soluciones particulares de la forma  $\varphi(t) = C$  con  $C \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto, hay resonancia, y en su lugar buscamos una solución particular de la forma  $\varphi(t) = C \cdot t$  con  $C \in \mathbb{R}$  a determinar. Sustituyendo en la EDOL:

$$-4C = 10 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{5}{2}.$$

**Ejemplo 2.6.8** Dada la EDOL

$$X'' - 2X' + 3X = 22 \cdot 4^t,$$

buscamos una solución particular de la forma  $\varphi(t) = C \cdot 4^t$  con  $C \in \mathbb{R}$  a determinar. Sustituyendo en la EDOL:

$$\begin{aligned} C \cdot 4^t \ln^2(4) - 2C \cdot 4^t \ln(4) + 3C \cdot 4^t &= 22 \cdot 4^t \\ \Rightarrow (\ln^2(4) - 2\ln(4) + 3)C \cdot 4^t &= 22 \cdot 4^t \quad \Rightarrow \quad C = \frac{22}{\ln^2(4) - 2\ln(4) + 3}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.6.9** Dada la EDOL

$$X' - \ln(2)X = 2^t,$$

se puede comprobar que no existen soluciones particulares de la forma  $\varphi(t) = C \cdot 2^t$  con  $C \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto, hay resonancia, y en su lugar buscamos una solución particular de la forma  $\varphi(t) = C \cdot t \cdot 2^t$  con  $C \in \mathbb{R}$  a determinar. Sustituyendo en la EDOL:

$$C \cdot (2^t + t2^t \ln(2)) - \ln(2)C \cdot t2^t = 2^t \quad \Rightarrow \quad C = 1.$$

**Ejemplo 2.6.10** Dada la EDOL

$$X' + X = t^2,$$

buscamos una solución particular de la forma  $\varphi(t) = at^2 + bt + c$  con  $a, b, c \in \mathbb{R}$  a determinar. Sustituyendo en la EDOL:

$$2at + b + at^2 + bt + c = t^2 \implies at^2 + (2a + b)t + b + c = t^2$$

$$\implies \begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \\ b + c = 0, \end{cases}$$

con lo que  $a = 1$ ,  $b = -2$ ,  $c = 2$ .

## Tema 3

# Dinámica estocástica

En este tema, continuaremos usando la notación  $X_n$  para referirnos al valor de la magnitud  $X$  en el instante  $t_n$  (con  $n \in \mathbb{N}$ ), en vez de la notación usual  $X(t_n)$ . Además, en el caso continuo, tampoco escribiremos explícitamente la dependencia de  $X$  y sus derivadas con respecto a la variable temporal  $t$ , siempre y cuando no existan ambigüedades.

En los temas anteriores, la ley de evolución que describía la evolución temporal de una magnitud  $X$  determinaba completamente, a partir de ciertas condiciones iniciales, la evolución de dicha magnitud. En este tema vamos a estudiar los *procesos estocásticos* como magnitudes  $X$  que siguen una ley de evolución que no determina su valor exacto en cada tiempo, sino que aparecen ciertos parámetros indeterminados siguiendo alguna distribución de probabilidad.

Por ejemplo, retomando la ED (1.5) que modeliza la evolución de un capital  $C$  a lo largo del tiempo  $t$  (medido en años) en un depósito con un tipo de interés nominal anual  $r$  (en tanto por uno) y con periodos de capitalización constantes de longitud  $h > 0$ , vamos a modelizar el “depósito cara o cruz”. Para ello, vamos a introducir unos parámetros aleatorios  $\xi_n$  que siguen una distribución binomial  $B(1, 1/2)$ , y lo denotaremos  $\xi_n \sim B(1, 1/2)$ , tal que  $P(\xi_n = 1) = P(\xi_n = 0) = 1/2$ :

$$C_{n+1} = (1 + \xi_n r h) C_n, \quad (3.1)$$

en donde  $t_{n+1} = t_n + h$  para  $n \in \mathbb{N}$ . De esta forma, en cada periodo de capitalización pueden pagarse o no los intereses correspondientes con la misma probabilidad. Esto equivale a echar una moneda al aire: si sale cara se pagan los intereses pero si sale cruz no se pagan. Por lo tanto, aunque conozcamos el capital inicial, es imposible determinar con exactitud el capital al cabo de un cierto tiempo, pero sí podemos averiguar qué distribución de probabilidad sigue  $C$  a lo largo del tiempo.

En general, diremos que una ecuación es *estocástica* si en ella intervienen parámetros no determinados que siguen alguna distribución de probabilidad conocida. Estas ecuaciones pueden ser, en el caso discreto, en diferencias o, en el caso continuo, diferenciales o integrales.

### 3.1. Ecuaciones en diferencias estocásticas discretas

Una ecuación en diferencias estocástica discreta (EDED) es una ED en donde intervienen parámetros que siguen alguna distribución de probabilidad conocida y pueden depender o

no del tiempo. Usualmente, las EDEds se escriben en forma trasladada, en donde el término de mayor orden es  $X_n$ . No obstante, de forma análoga al Tema 1, nosotros trabajaremos con EDEds no trasladadas, considerando por defecto que  $n \in \mathbb{N}$  aunque no quede explícitamente indicado.

El *orden* de las EDEds, al igual que en las EDs, viene determinado por la diferencia entre el término de mayor orden y el de menor orden. Las EDEds de orden 1 modelizan los *procesos de Markov* discretos, en donde únicamente el estado actual del proceso es relevante a la hora de predecir el estado futuro. Es decir, la historia pasada del proceso y la forma en que el presente ha emergido del pasado son irrelevantes. Los procesos de Markov discretos se pueden generalizar a la dinámica continua, como por ejemplo en el caso de los precios de las acciones. En este caso, la denominada *eficiencia débil del mercado* asegura que el precio actual de la acción encierra toda la información contenida en el registro de los precios del pasado. Si esta propiedad no fuese cierta, los analistas técnicos podrían obtener beneficios por encima de la media interpretando las bases de datos de la historia pasada de las acciones, y existe poca evidencia de que sean capaces de hacerlo.

Una *solución* de una EDEd viene dada por alguna expresión para la magnitud incógnita en cada tiempo en donde se pueda inferir la distribución de probabilidad que sigue  $X_n$  con  $n \in \mathbb{N}$ . No obstante, el método más utilizado para resolver ecuaciones estocásticas es el numérico, mediante realizaciones simuladas del proceso a partir de la propia ecuación. Con un número suficientemente grande de simulaciones se puede obtener una aproximación suficientemente buena de la distribución de probabilidad que sigue  $X_n$  para cualquier tiempo  $t_n$ .

Algunos resultados relativos a la distribución normal que conviene tener en cuenta a lo largo del tema son:

**Proposición 3.1.1** *Dada una variable aleatoria  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$  se cumple que*

$$\lambda X \sim N(\lambda\mu, \lambda^2\sigma^2).$$

**Proposición 3.1.2** *Dadas dos variables aleatorias independientes  $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$  y  $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  se cumple que*

$$(X + Y) \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2).$$

**Ejemplo 3.1.1** Una solución de la EDEd (3.1) viene dada por

$$C_n = (1 + rh)^{\xi(n)} C_0, \tag{3.2}$$

en donde  $C_0 > 0$  se interpreta como el capital inicial y  $\xi(n) \sim B(n, 1/2)$  modeliza el número de caras obtenidas en  $n$  tiradas de moneda.

Algunas realizaciones simuladas siguiendo la EDEd (3.1) pueden verse en la Figura 3.1, con  $C_0 = 1\,000$  euros,  $r = 10\% = 0.1$  y  $h = 1/12$  (periodos de capitalización mensuales). De esta forma, realizando un número suficientemente grande de simulaciones que sigan la ley de evolución (3.1) podemos dar una aproximación numérica de la función de densidad de probabilidad que sigue el capital final al cabo de un cierto número de meses. Por ejemplo, en la Figura 3.2 está representado el histograma correspondiente a 10\,000 simulaciones del capital final al cabo de 60 meses, aproximando de esta forma la función de densidad de probabilidad de  $C_{60}$ .

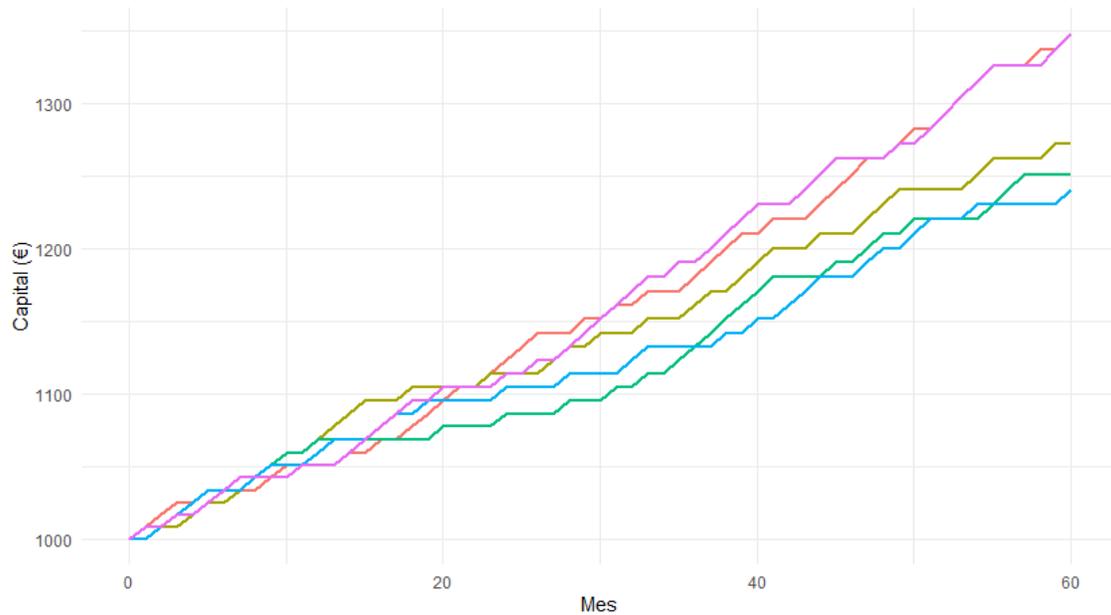


Figura 3.1: Diferentes realizaciones simuladas de la evolución del capital  $C_n$  dado por la EDEd (3.1), con  $C_0 = 1000$  euros,  $r = 10\% = 0.1$  y  $h = 1/12$  (periodos de capitalización mensuales) durante los primeros 60 meses.

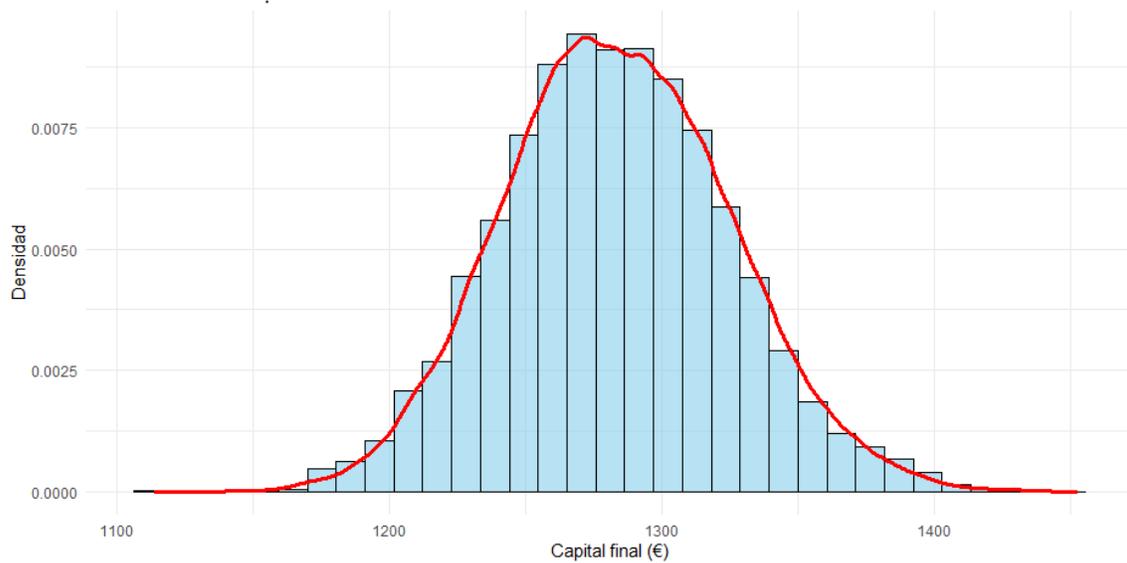


Figura 3.2: Histograma de 10000 simulaciones del capital final dado por la EDEd (3.1) o su solución (3.2) con  $C_0 = 1000$  euros,  $r = 10\% = 0.1$  y  $h = 1/12$  al cabo de 60 meses, es decir  $n = 60$ . De esta forma se obtiene una aproximación de la función de densidad de probabilidad que sigue  $C_{60}$ , parecida a una gaussiana.

### 3.1.1. Paseos aleatorios discretos

Un *paseo aleatorio* discreto viene dado por la EDEd

$$X_{n+1} = X_n + \xi_n, \quad (3.3)$$

en donde  $\xi_n$  son variables aleatorias independientes para  $n \in \mathbb{N}$  con  $P(\xi_n = 1) = P(\xi_n = -1) = 1/2$ . En la Figura 3.4 (arriba) se simulan los 1000 primeros términos de un paseo aleatorio.

Las soluciones de (3.3) pueden inferirse mediante el *triángulo de Pascal*, o de *Tartaglia*, en el cual se cuenta el número de posibles caminos que conducen a un determinado valor  $k \in \mathbb{Z}$ , tal y como se muestra en la siguiente tabla:

$k$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$P(X_0 = k)$						1					
$2P(X_1 = k)$					1		1				
$2^2P(X_2 = k)$				1		2		1			
$2^3P(X_3 = k)$			1		3		3		1		
$2^4P(X_4 = k)$		1		4		6		4		1	
$2^5P(X_5 = k)$	1		5		10		10		5		1

Así pues, se tiene que

$$P(X_n = k) = 2^{-n} \binom{n}{(n+k)/2} = 2^{-n} \frac{n!}{((n+k)/2)!((n-k)/2)!},$$

para  $n \in \mathbb{N}$  y  $k \in \mathbb{Z}$  con  $|k| \leq n$ . Nótese que  $n+k$  ha de ser par, con lo que si  $n$  es par entonces necesariamente  $k$  ha de ser par, y análogamente, si  $n$  es impar entonces necesariamente  $k$  ha de ser impar.

La función de distribución de probabilidad de la solución tiende a una forma de gaussiana al aumentar  $n$ , de acuerdo con el *Teorema del Límite Central*, que asegura que si  $S_n$  es una suma de  $n$  variables aleatorias independientes entonces la función de distribución de  $S_n$  se aproxima a una gaussiana con  $n$  suficientemente grande. En la Figura 3.3 puede observarse que, efectivamente, la distribución de los coeficientes de la línea 20 del triángulo de Pascal, que determinan la distribución de probabilidad de  $X_{20}$ , tiene forma de gaussiana.

Los *procesos autorregresivos de orden  $p$* , o  $AR(p)$ , siguen una ley de evolución que suele venir dada por la EDEd de orden  $p$

$$X_{n+p} = c + \sum_{i=0}^{p-1} \varphi_i X_{n+i} + \varepsilon_n,$$

en donde  $c \in \mathbb{R}$  es una constante,  $\varphi_0, \dots, \varphi_{p-1} \in \mathbb{R}$  son los parámetros del modelo, y  $\varepsilon_n$  es el *ruido blanco* en el tiempo  $t_{n+p}$ , representado por una variable aleatoria independiente para cada  $n \in \mathbb{N}$  que sigue una distribución de probabilidad normal con varianza constante, es decir  $\varepsilon_n \sim N(0, \sigma^2)$ .

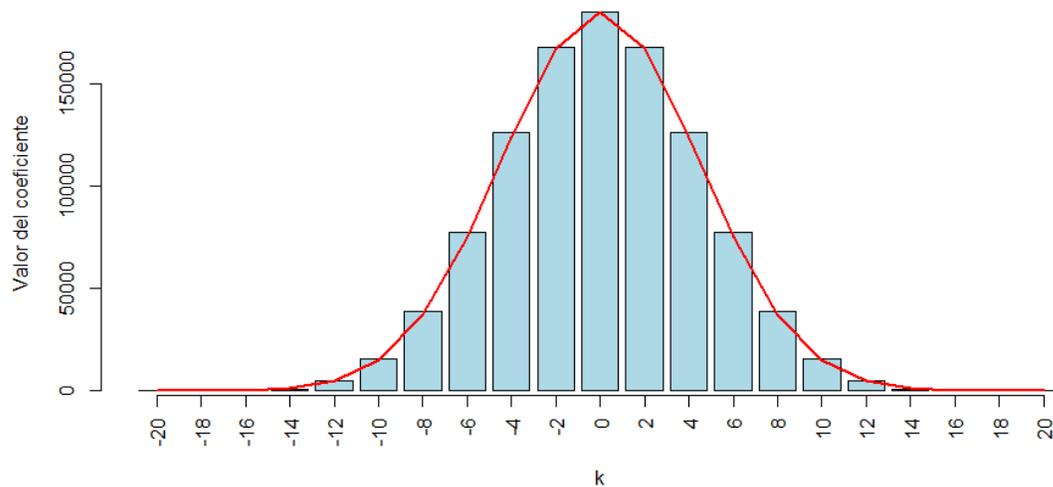


Figura 3.3: Representación de los coeficientes de la línea 20 del triángulo de Pascal, con forma de gaussiana.

El caso particular de orden 1

$$X_{n+1} = X_n + \varepsilon_n, \quad (3.4)$$

se conoce como *paseo aleatorio gaussiano*. En la Figura 3.4 (abajo) se simulan los 1000 primeros términos de un paseo aleatorio gaussiano.

Teniendo en cuenta la Proposición 3.1.2, se puede demostrar por inducción que una solución de (3.4) viene dada por

$$X_n \sim N(X_0, n\sigma^2),$$

con  $X_0 \in \mathbb{R}$  la condición inicial.

### 3.1.2. Movimientos brownianos discretos

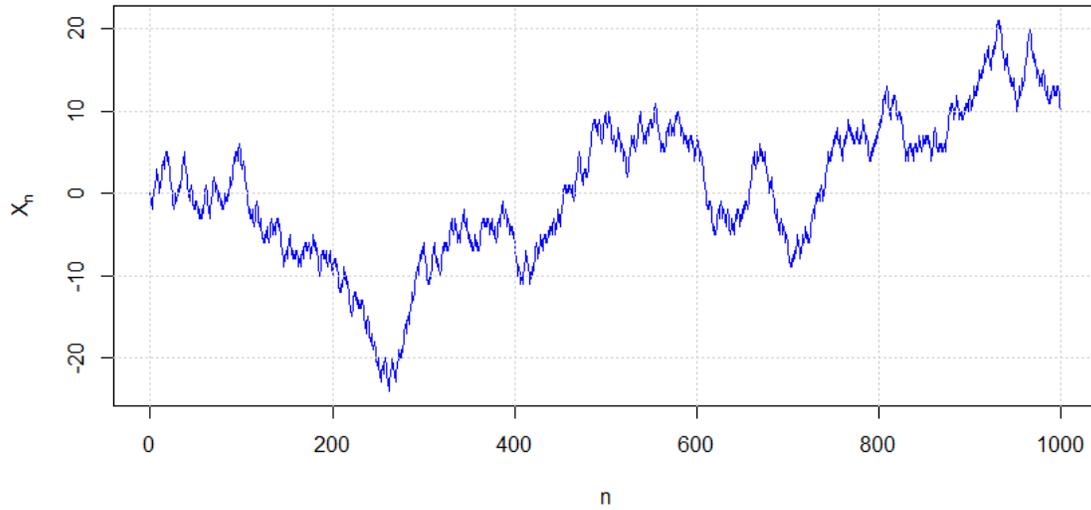
Aunque los procesos de Wiener y los movimientos brownianos se consideran procesos estocásticos continuos, en esta sección vamos a estudiar aproximaciones discretas. De hecho, el estudio numérico de procesos estocásticos continuos solo es posible si primero se discretizan. Para ello, consideramos una malla de tiempos equiespaciada con paso  $h$ , en donde  $t_{n+1} = t_n + h$  para  $n \in \mathbb{N}$ . Los correspondientes procesos continuos se obtendrán en el límite cuando el paso  $h$  tiende a 0.

#### Procesos de Wiener

Un *proceso de Wiener* discreto, también conocido como *movimiento browniano estándar*, es un proceso de Markov que viene dado por la EDEd

$$W_{n+1} = W_n + \xi_n \sqrt{h}, \quad (3.5)$$

Paseo aleatorio



Paseo aleatorio gaussiano

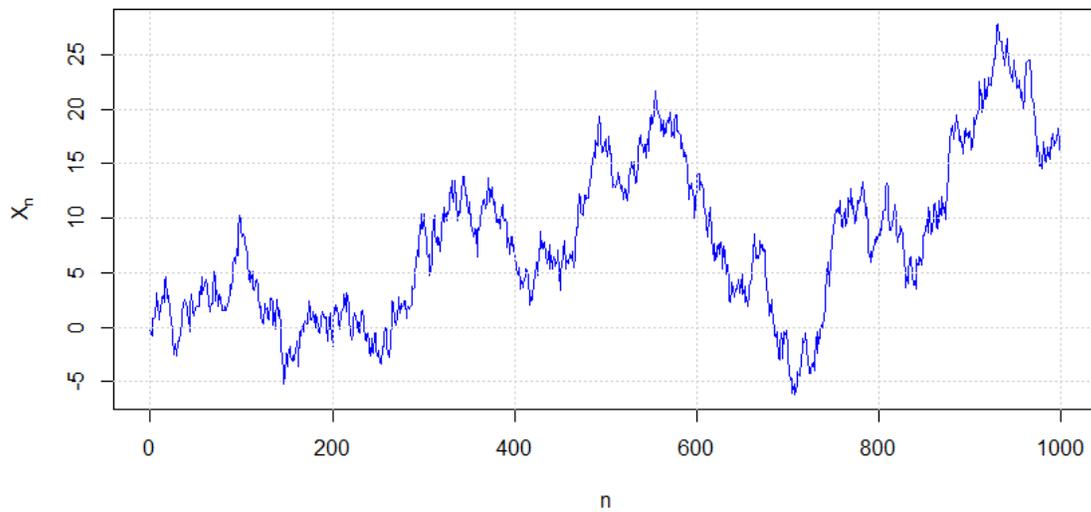


Figura 3.4: Simulación de los 1000 primeros términos de un paseo aleatorio (arriba) a partir de la EDEd (3.3), y un paseo aleatorio gaussiano (abajo) a partir de la EDEd (3.4) con condición inicial  $X_0 = 0$  y varianza  $\sigma^2 = 1$ . Para construir el paseo aleatorio se ha considerado  $\xi_n = 1$  si  $\varepsilon_n \geq 0$  y  $\xi_n = -1$  si  $\varepsilon_n < 0$ .

en donde  $\xi_n \sim N(0, 1)$  son variables aleatorias independientes para  $n \in \mathbb{N}$ . Si definimos  $\varepsilon_n := \xi_n \sqrt{h}$ , por la Proposición 3.1.1 se tiene que  $\varepsilon_n \sim N(0, h)$  y por lo tanto (3.5) modeliza un paseo aleatorio gaussiano con varianza  $h$ . Además, para simplificar su estudio, en los procesos de Wiener siempre se considera que la condición inicial es  $W_0 = 0$ . Por ejemplo, en la Figura 3.6 se simulan los 1 000 primeros términos de un proceso de Wiener discreto.

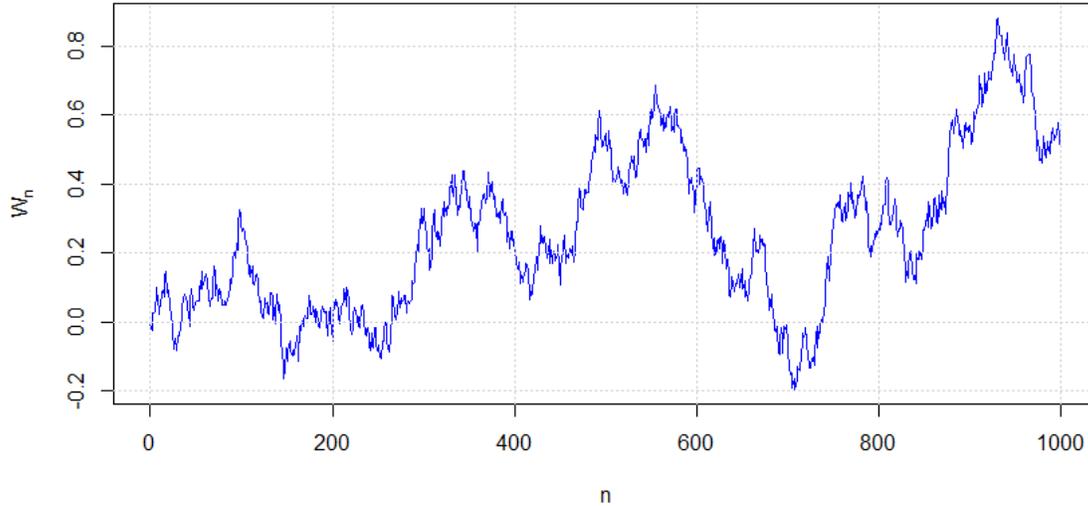


Figura 3.5: Simulación de los 1 000 primeros términos de un proceso de Wiener discreto a partir de la EDEd (3.5) con paso  $h = 1/1\,000$ . Nótese que es proporcional al paseo aleatorio gaussiano de la Figura 3.4 (abajo), con factor de proporcionalidad  $\sqrt{h}$ .

En un proceso de Wiener dado por (3.5), teniendo en cuenta la Proposición 3.1.1, se tiene que

$$W_{n+1} - W_n = \Delta W_n \sim N(0, h). \quad (3.6)$$

Además, a partir de (3.5), teniendo en cuenta que  $W_0 = 0$  se obtiene

$$W_n = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \sqrt{h}.$$

Así pues, considerando las Proposiciones 3.1.1 y 3.1.2, se puede demostrar

$$W_n \sim N(0, nh). \quad (3.7)$$

### Movimientos brownianos aritméticos

Un *movimiento browniano aritmético* (MBA) discreto, también llamado *proceso de Wiener con deriva*, es un proceso de Markov que viene dado por la EDEd

$$X_{n+1} = X_n + \mu h + \sigma \Delta W_n, \quad (3.8)$$

en donde los parámetros  $\mu, \sigma$  son constantes, y  $\Delta W_n \sim N(0, h)$ , es decir,  $W$  es un proceso de Wiener dado por la EDEd (3.5). La constante  $\mu$ , llamada *deriva*, representa la tasa esperada de cambio de la magnitud  $X$  por unidad de tiempo, mientras que el término  $\sigma \Delta W_n$  “perturba” la tendencia marcada por  $\mu h$ . La constante  $\sigma$  se conoce como *volatilidad*. Por ejemplo, en la Figura 3.6 se simulan los 1000 primeros términos de un MBA discreto.

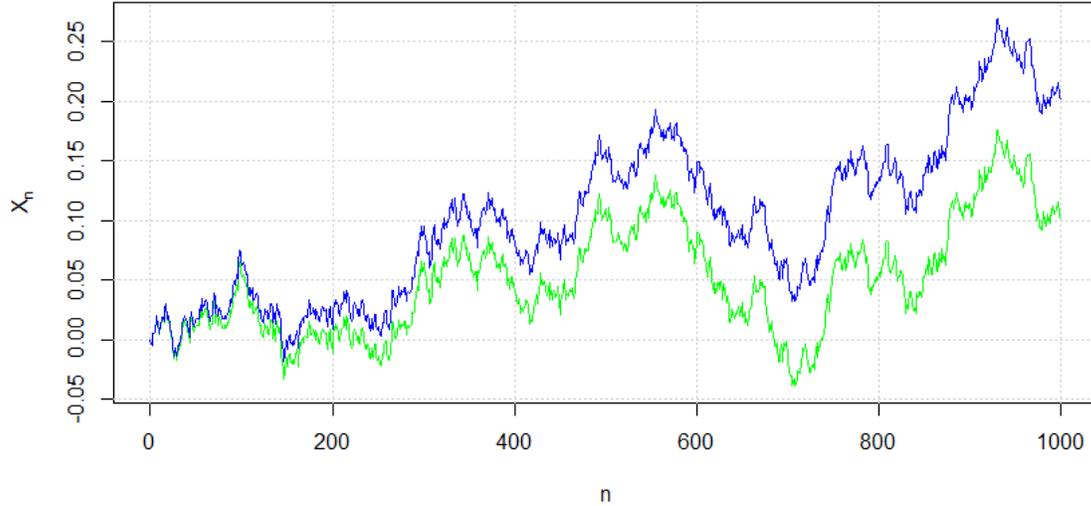


Figura 3.6: En azul, simulación de los 1000 primeros pasos de un MBA discreto a partir de la EDEd (3.8) con condición inicial  $X_0 = 0$ , paso  $h = 1/1000$ , deriva  $\mu = 0.1$  y volatilidad  $\sigma = 0.2$ . En verde se ha simulado el mismo proceso con deriva  $\mu = 0$ .

En un MBA dado por (3.8), teniendo en cuenta (3.6) y la Proposición 3.1.1, se tiene que

$$X_{n+1} - X_n = \Delta X_n \sim N(\mu h, \sigma^2 h).$$

Además, a partir de (3.8) se obtiene

$$X_n = X_0 + \mu n h + \sigma W_n, \quad (3.9)$$

con  $X_0 \in \mathbb{R}$  la condición inicial. Teniendo en cuenta (3.7), (3.9) y la Proposición 3.1.1, se puede demostrar

$$X_n \sim N(X_0 + \mu n h, \sigma^2 n h). \quad (3.10)$$

### Movimientos brownianos geométricos

Un *movimiento browniano geométrico* (MBG) discreto, también conocido como *proceso de Black-Scholes*, es un proceso de Markov que viene dado por la EDEd

$$S_{n+1} = S_n (1 + \mu h + \sigma \Delta W_n), \quad (3.11)$$

en donde los parámetros  $\mu, \sigma$  son constantes, y  $\Delta W_n \sim N(0, h)$ , es decir,  $W$  es un proceso de Wiener dado por la EDEd (3.5). La constante  $\mu$  se suele llamar *tasa de crecimiento*, aunque también se le llama *deriva* como en los MBA, mientras que  $\sigma$  sigue llamándose *volatilidad*. Por ejemplo, en la Figura 3.7 se simulan los 1000 primeros términos de un MBG discreto a partir de la EDEd (3.11).

Nótese que de (3.11) se sigue que

$$\frac{\Delta S_n}{S_n} = \mu h + \sigma \Delta W_n,$$

y por lo tanto  $\Delta S_n/S_n \sim N(\mu h, \sigma^2 h)$ . Si  $S$  representa el precio de una acción,  $\Delta S_n/S_n$  es el *rendimiento* de dicha acción en el periodo  $[t_n, t_{n+1}]$ .

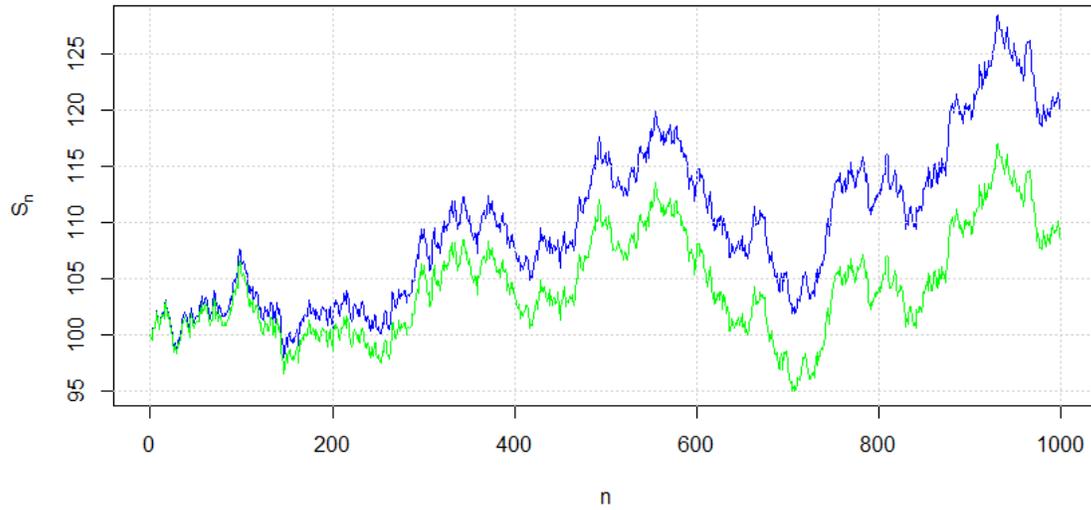


Figura 3.7: En azul, simulación de los 1000 primeros términos de un MBG discreto a partir de la EDEd (3.11) con condición inicial  $S_0 = 100$ , paso  $h = 1/1000$ , tasa de crecimiento  $\mu = 0.1$  y volatilidad  $\sigma = 0.2$ . En verde se ha simulado el mismo proceso con deriva  $\mu = 0$ .

Para modelizar un MBG discreto, también se puede considerar de forma alternativa la EDEd

$$S_{n+1} = S_n \cdot \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)h + \sigma\Delta W_n\right), \quad (3.12)$$

como deduciremos en el Ejemplo 3.2.1. Aunque las EDEd (3.11) y (3.12) no son equivalentes, ambas son aproximaciones discretas de la misma ley de evolución que determina un MBG continuo (véase el Ejemplo 3.2.1) y suelen dar resultados muy similares, como puede comprobarse en las Figuras 3.7 y 3.8. No obstante, solamente (3.12) asegura que los valores de  $S_n$  son positivos para todo  $n \in \mathbb{N}$ , siempre y cuando la condición inicial  $S_0$  sea positiva.

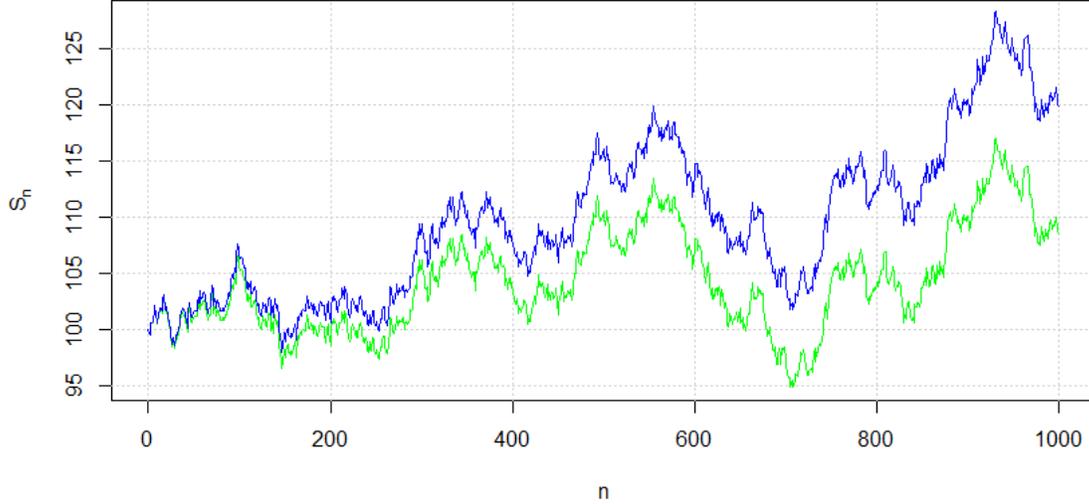


Figura 3.8: En azul, simulación de los 1000 primeros términos de un MBG discreto a partir de la EDEd (3.12) con condición inicial  $S_0 = 100$ , paso  $h = 1/1000$ , tasa de crecimiento  $\mu = 0.1$  y volatilidad  $\sigma = 0.2$ . En verde se ha simulado el mismo proceso con deriva  $\mu = 0$ .

Efectivamente, en un MBG dado por (3.12), se tiene que

$$S_n = S_0 \cdot \exp \left( \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) nh + \sigma W_n \right).$$

Así pues,

$$\ln(S_n) = \ln(S_0) + \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) nh + \sigma W_n, \quad (3.13)$$

por lo tanto, teniendo en cuenta (3.7), (3.13) y la Proposición 3.1.1, se puede demostrar

$$\ln(S_n) \sim N \left( \ln(S_0) + \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) nh, \sigma^2 nh \right), \quad (3.14)$$

es decir,  $S_n$  sigue una distribución de probabilidad *log-normal*. Además, considerando (3.10) y (3.14), se tiene que  $\ln(S_n)$  es un MBA discreto con deriva  $\mu - \frac{1}{2} \sigma^2$  y volatilidad  $\sigma$ , de acuerdo con lo que veremos en el Ejemplo 3.2.1.

De (3.14) y de algunas propiedades de la distribución de probabilidad log-normal se puede deducir lo siguiente:

$$E(S_n) = S_0 e^{\mu nh}, \quad \text{Var}(S_n) = S_0^2 e^{2\mu nh} \left( e^{\sigma^2 nh} - 1 \right). \quad (3.15)$$

## 3.2. Ecuaciones diferenciales estocásticas

Una *ecuación diferencial estocástica* (EDE) es una ecuación diferencial en la cual aparecen parámetros que siguen algún proceso estocástico y cuya solución también sigue un

proceso estocástico. Las realizaciones de una solución suelen ser funciones continuas pero no derivables y, en la mayoría de los casos, la parte no derivable se puede aislar e interpretar como un ruido blanco que sigue un movimiento browniano.

En esta sección vamos a estudiar unos procesos estocásticos llamados procesos de difusión, que generalizan a los movimientos brownianos. La forma de describirlos será mediante límites de procesos estocásticos discretos haciendo tender el paso  $h$  a 0. No obstante, la transformación de una ley de evolución de un proceso estocástico de tiempo discreto a otra ley de evolución de tiempo continuo no es inmediato, sino que requiere de la construcción de una nueva herramienta matemática: la integral estocástica. De esta forma, podremos transformar EDEs en EDEs para poder describir la evolución de los procesos de difusión.

### 3.2.1. Movimientos brownianos continuos

Un *proceso de Wiener* continuo, o *movimiento browniano estándar*, es un proceso estocástico continuo con condición inicial nula que se caracteriza por tener incrementos normales e independientes. Es decir, un proceso estocástico  $W$  es un proceso de Wiener si y solo si es continuo a partir de un tiempo inicial  $t_0$ , y satisface

- $W(t_0) = 0$ .
- $W(t + \Delta t) - W(t) \sim N(0, \Delta t)$  para  $t \geq t_0$  y  $\Delta t > 0$ .
- Si  $t_0 \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2$  entonces  $W(t_1) - W(s_1)$  y  $W(t_2) - W(s_2)$  son variables aleatorias independientes.

Los procesos de Wiener continuos se pueden obtener como límites de procesos de Wiener discretos haciendo tender el paso  $h$  a 0. De esta forma, se puede asegurar que

$$W(t) \sim N(0, t - t_0),$$

para  $t > t_0$ . Aunque los procesos de Wiener son continuos, no son diferenciables y no tienen derivada en ningún punto.

De la misma forma, se pueden obtener las versiones continuas del resto de movimientos brownianos discretos vistos en la sección anterior, MBA y MBG, tomando límites cuando el paso  $h$  tiende a 0. Como consecuencia, algunas propiedades de las versiones discretas se mantienen en las versiones continuas. Por ejemplo, si  $X$  es un MBA con deriva  $\mu$  y volatilidad  $\sigma$ , entonces

$$X(t) \sim N(X(t_0) + \mu(t - t_0), \sigma^2(t - t_0)),$$

con  $t > t_0$ . Por otro lado, si  $S$  es un MBG con tasa de crecimiento  $\mu$  y volatilidad  $\sigma$ , entonces

$$\ln(S(t)) \sim N\left(\ln(S(t_0)) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t - t_0), \sigma^2(t - t_0)\right).$$

Teniendo en cuenta propiedades de la distribución log-normal, se puede generalizar (3.15) al caso continuo:

$$E(S(t)) = S(t_0)e^{\mu(t-t_0)}, \quad \text{Var}(S(t)) = S(t_0)^2 e^{2\mu(t-t_0)} \left(e^{\sigma^2(t-t_0)} - 1\right).$$

### 3.2.2. Procesos de difusión

Un *proceso de difusión* o *proceso de Itô* es un proceso estocástico continuo que puede interpretarse como el límite cuando el paso  $h$  tiende a 0 de un MBA discreto con deriva y volatilidad que pueden depender del tiempo y de la propia magnitud  $X$ :

$$X_{n+1} = X_n + f(X_n, n)h + g(X_n, n)\Delta W_n. \quad (3.16)$$

Si hacemos  $h = dt$  tender a 0 en (3.16), podemos usar notación diferencial y escribir

$$dX = f(X, t)dt + g(X, t)dW, \quad (3.17)$$

en donde, como ya hicimos al principio del Tema 2, tomamos la variable  $t$  en vez de  $t_n$ , con  $X = X(t)$  y  $W = W(t)$  un proceso de Wiener continuo. La expresión (3.17) es la EDE (en notación diferencial) que sigue el proceso de difusión continuo  $X$  y es equivalente a escribir

$$X' = f(X, t) + g(X, t)W',$$

aunque esta expresión no es formalmente correcta ya que en realidad  $W$  no es derivable al ser un proceso de Wiener. Para ser formalmente más correctos, podemos escribir la EDE (3.17) en forma de ecuación integral:

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t f(X(u), u) du + \int_{t_0}^t g(X(u), u) dW(u), \quad (3.18)$$

en donde la primera integral es de Riemann y la segunda integral es lo que vamos a definir en la siguiente sección como una integral estocástica, ya que  $W$  no es diferenciable.

Como casos particulares de la EDE (3.17), podemos obtener las EDEs que modelizan a los MBA continuos,

$$dX = \mu dt + \sigma dW,$$

y los MBG continuos,

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW. \quad (3.19)$$

### 3.2.3. Integral estocástica

Dado un proceso estocástico  $H$  y un proceso de Wiener  $W$ , la *integral estocástica* o *integral de Itô* de  $H$  con respecto a  $W$  entre dos tiempos  $t_0 < t$  se define como el siguiente proceso estocástico:

$$\int_{t_0}^t H dW := \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} H_i \Delta W_i, \quad (3.20)$$

en donde  $t_0, \dots, t_n = t$  es una malla equiespaciada de tiempos con paso  $h$ . Nótese que si  $h \rightarrow 0$  entonces  $n \rightarrow +\infty$ .

Para que exista la integral estocástica (3.20), el límite ha de converger en probabilidad. Sin entrar en mucho detalle, esto se puede asegurar si  $H$  es un proceso continuo por la derecha, adaptado y localmente acotado, propiedades que no son demasiado fuertes.

En la práctica, la integral estocástica suele calcularse numéricamente a partir de la expresión (3.20), tomando un paso  $h$  lo suficientemente pequeño. Por ejemplo, en la Figura 3.9 se ha calculado numéricamente la integral estocástica de un proceso de Wiener con

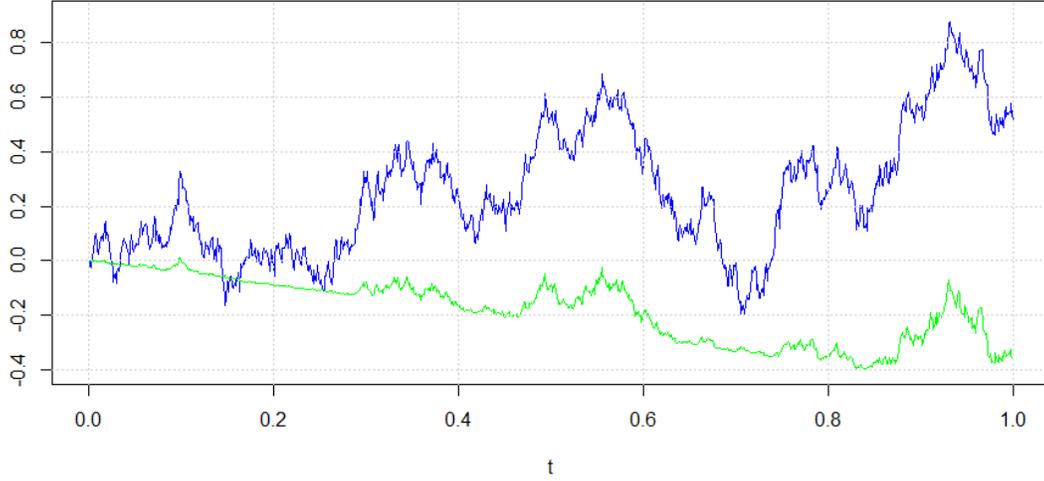


Figura 3.9: En azul, un proceso de Wiener  $W$  con  $t_0 = 0$ . En verde, aproximación numérica de la integral estocástica  $\int_{t_0}^t W dW$  calculada con un paso  $h = 1/1000$ .

respecto a sí mismo, es decir,  $\int_{t_0}^t W dW$ . En este caso se puede comprobar teóricamente que el resultado de esta integral es  $(W^2 - t + t_0) / 2$ .

A continuación, vamos a enunciar el Lema de Itô, que es una regla de la cadena para procesos de difusión.

**Proposición 3.2.1 (Lema de Itô)** *Dado un proceso de difusión  $X$  con EDE (3.17), se tiene que  $Y = F(X, t)$ , con  $F$  de clase  $C^2$ , es también un proceso de difusión con EDE dada por*

$$dY = \left( \frac{\partial F}{\partial t} + f(X, t) \frac{\partial F}{\partial X} + \frac{1}{2} (g(X, t))^2 \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \right) dt + g(X, t) \frac{\partial F}{\partial X} dW.$$

**Ejemplo 3.2.1** Sea  $S$  un MBG dado por la EDE (3.19). Si consideramos el proceso  $Y = \ln(S)$ , aplicando el Lema de Itô obtenemos

$$dY = \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dW. \quad (3.21)$$

Por lo tanto, a partir de (3.21), deducimos que  $\ln(S)$  es un MBA con deriva  $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$  y volatilidad  $\sigma$ . Así pues, considerando una malla de tiempos equiespaciada con paso  $h$ , podemos definir una aproximación discreta de  $\ln(S)$  mediante la siguiente EDEd:

$$\ln(S_{n+1}) = \ln(S_n) + \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) h + \sigma \Delta W_n, \quad (3.22)$$

que modeliza a  $\ln(S)$  como un MBA discreto. A partir de (3.22), tomando exponenciales, se deduce la EDEd alternativa (3.12) que también modeliza a  $S$  como un MBG discreto.

En el ámbito de las finanzas, la EDEd (3.12) se prefiere frente a la EDEd (3.11) ya que la primera asegura que los valores de  $S$  a lo largo del tiempo son siempre positivos.

### 3.2.4. Modelo de Black-Scholes

Sea  $S$  un MBG dado por la EDE (3.19), representando el valor de un activo subyacente a lo largo del tiempo. Si el valor de una opción de dicho subyacente en el tiempo  $t$  viene dado por  $V(S, t)$ , por el Lema de Itô obtenemos

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW. \quad (3.23)$$

Así pues, se tiene que  $V$  es un proceso de difusión dado por la EDE (3.23), en donde hay una parte determinista (la correspondiente a  $dt$ ) y otra parte estocástica (la correspondiente a  $dW$ ).

Para contrarrestar la parte aleatoria y tratar de eliminarla, consideraremos una cartera  $\Pi$  consistente en la opción  $V$  (que supondremos en una posición en largo) y una cantidad  $\delta$  del subyacente  $S$  (que supondremos en una posición en corto). Usualmente, esta cantidad se denota  $\Delta$ , pero como ya usamos este símbolo para el operador diferencias, la denotaremos  $\delta$  para no crear confusión. Es decir, el valor de nuestra cartera será

$$\Pi = V - \delta S. \quad (3.24)$$

Diferenciando (3.24) y aplicando (3.23) y (3.19) obtenemos

$$\begin{aligned} d\Pi &= dV - \delta dS \\ &= \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW - \delta (\mu S dt + \sigma S dW) \\ &= \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \delta \mu S \right) dt + \left( \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} - \delta \sigma S \right) dW. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Para eliminar la parte estocástica deberemos tomar

$$\delta = \frac{\partial V}{\partial S}. \quad (3.26)$$

De esta forma, aplicando (3.26) en (3.25) obtenemos

$$d\Pi = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt. \quad (3.27)$$

Esta estrategia se llama *cobertura Delta* y con ello se logra que que la variación del valor de la cartera, dado por (3.27), sea determinista y, por lo tanto, no esté expuesto al riesgo dado por el proceso estocástico  $W$ .

Ahora bien, si el valor de la cartera evoluciona de una forma determinista, entonces su variación debería ser igual a la de un depósito con un tipo de interés  $r$ , es decir

$$d\Pi = r\Pi dt = r(V - \delta S) dt = r \left( V - \frac{\partial V}{\partial S} S \right) dt. \quad (3.28)$$

Teniendo en cuenta (3.27) y (3.28) obtenemos

$$\left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt = r \left( V - \frac{\partial V}{\partial S} S \right) dt,$$

de donde se obtiene la *ecuación de Black-Scholes*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0,$$

que es una ecuación en derivadas parciales determinista para el valor de la opción  $V$ .