Matemáticas para los Modelos Dinámicos

Vicente J. Bolós

Índice general

Tema 1

Introducción a los sistemas dinámicos

Los sistemas dinámicos estudian la evolución de una magnitud (que en general la representaremos como X) a lo largo del tiempo t. Dicha evolución ha de seguir una *ley* en forma de ecuación, y el objetivo es hallar el valor de X en cualquier tiempo t de un dominio temporal determinado, es decir $X(t)$. Si el dominio temporal es discreto, estamos trabajando en el ámbito de la *dinámica discreta*; si por el contrario, el dominio temporal no es discreto, como por ejemplo un intervalo real (ya sea acotado o no acotado), estamos trabajando en el ámbito de la *dinámica continua*.

Por ejemplo, la ecuación

$$X\left(t+2\right)=X\left(t+1\right)+X\left(t\right), \qquad t\in\mathbb{N} \tag{1.1}$$

determina la ley que marca la evolución de X (nos dice que el valor de X en un instante es la suma del valor de X en los dos instantes inmediatamente anteriores) dentro de un sistema dinámico discreto, ya que los valores que toma t son discretos. Por el contrario, la ecuación

$$X''(t)+2X'(t)+X(t)-t=0, \qquad t\in[0,+\infty[$$

determina una ley dentro de un sistema dinámico continuo, ya que t toma cualquier valor real no negativo.

La primera ecuación es una *ecuación en diferencias*, y la segunda es una *ecuación diferencial ordinaria*. Existen otros tipos de ecuaciones que determinan un sistema dinámico: las *ecuaciones integrales*, como por ejemplo

$$X(t)=\int_0^t (t-s)\sqrt{X(s)}\,\mathrm{d}s, \qquad t\geq 0,$$

las *ecuaciones diferenciales con retrasos*, como por ejemplo

$$X'(t+1)=X(t)\left(1-X(t)\right), \qquad t\in\mathbb{R},$$

en donde aparece X y sus derivadas pero evaluadas en distintos instantes de tiempo; o, si la magnitud X depende de otras variables además de t, las *ecuaciones en derivadas parciales*, como por ejemplo

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}, \qquad (t,x,y)\in\mathbb{R}^3,$$

en donde X es función de t, x, y. No obstante, nosotros solamente vamos a estudiar los dos primeros tipos de ecuaciones. Además, X será una magnitud real, es decir, sus valores serán números reales.

1.1. Dinámica discreta: ecuaciones en diferencias

En la dinámica discreta se estudia una magnitud X que toma valores en un conjunto discreto de instantes de tiempo $\{t_0, t_1, t_2, \ldots\}$ que supondremos ordenado de menor a mayor (es decir, dados $i, j \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ con $i < j$ se tiene que $t_i < t_j$), aunque normalmente se considera $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, etc... para simplificar. Utilizaremos la notación X_n para referirnos al valor de X en el instante t_n (con $n \in \mathbb{N}$), en vez de la notación usual $X(t_n)$. Además, la evolución de dicha magnitud está regida por una ley: una expresión en forma de ecuación en la que se relacionan los valores de X en diversos instantes, y en donde X hace el papel de incógnita.

Ejemplo 1 La ecuación (1.1) podemos expresarla como

$$X_{n+2} = X_{n+1} + X_n, \tag{1.2}$$

en donde $n \in \mathbb{N}$ hace el papel de parámetro aunque no quede explícitamente indicado. Así pues, si conocemos los dos primeros términos, $X_0 = 1$ y $X_1 = 1$, entonces podemos calcular X_2 haciendo $n = 0$:

$$X_2 = X_1 + X_0 = 1 + 1 = 2.$$

Utilizando el mismo procedimiento, dando valores naturales sucesivos a n, podemos calcular

$$\begin{aligned} X_3 &= X_2 + X_1 = 2 + 1 = 3 \qquad (n = 1) \\ X_4 &= X_3 + X_2 = 3 + 2 = 5 \qquad (n = 2) \\ X_5 &= X_4 + X_3 = 5 + 3 = 8 \qquad (n = 3) \\ &\cdots \end{aligned}$$

Así podremos obtener el valor de X en cualquier instante t_n con $n \in \mathbb{N}$. La ecuación (1.2) es conocida como la *ecuación de Fibonacci*, y la sucesión $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ recibe el nombre de *sucesión de Fibonacci*.

En general, cualquier expresión de la forma

$$F\left(X_{n+k}, X_{n+k-1}, \ldots, X_n, n\right) = 0, \tag{1.3}$$

en donde F es una función dada y k es un número natural positivo, conforma un *sistema dinámico discreto*. De este modo, (1.3) o cualquier expresión matemática equivalente recibe el nombre de *ecuación en diferencias* (ED). En este caso, k es el *orden* de la ED (nótese que obviamente, los términos X_{n+k} y X_n han de aparecer en la expresión). Así pues, por ejemplo, son ED de orden 1 (o de primer orden) las expresiones

$$X_{n+1} = X_n, \qquad X_{n+1} + X_n = 2n - 4, \qquad X_{n+1} + nX_n = X_n^2;$$

y son ED de orden 2 (o de segundo orden) las expresiones

$$X_{n+2} = X_n, \qquad X_{n+2} + X_{n+1} + X_n^2 = n, \qquad X_{n+2} + 4nX_n = 0.$$

Llegados a este punto, hay que recalcar que, según nuestra notación, el término de menor orden de una ED ha de ser X_n. Si no es así, se dice que la ED está *trasladada* en el tiempo y conviene re-escribirla haciendo un cambio en la variable n de forma que el término de menor orden sea X_n. Por ejemplo, al igual que la ED dada en (1.2), la ED

$$X_{n+1} = X_n + X_{n-1}$$

también nos dice que un término se calcula sumando los dos anteriores, pero conviene re-escribirla como $X_{n+2} = X_{n+1} + X_n$.

Si F no depende de n entonces la ley viene dada de una forma independiente del tiempo y se dice que la ED correspondiente es *autónoma*.

Nota 1 A partir de una ED no autónoma, en algunos casos (en los que se puede despejar n) se puede obtener una ED autónoma, aunque la nueva ecuación tiene un orden mayor y su conjunto de soluciones (cuyo concepto lo definiremos más adelante con mayor precisión) es también mayor. Por ejemplo, dada la ED

$$X_{n+1} = X_n + n,$$

se tiene que $n = X_{n+1} - X_n$; por otro lado, trasladando la ecuación se tiene

$$X_{n+2} = X_{n+1} + (n+1) = X_{n+1} + (X_{n+1} - X_n + 1) = 2X_{n+1} - X_n + 1,$$

que es una ED autónoma de orden 2. No obstante, estas ecuaciones no son del todo equivalentes, ya que en su forma no autónoma, X_1 viene completamente determinado por el valor que toma X_0, mientras que en su forma autónoma X_1 es independiente de X_0.

Por otro lado, si el término de mayor orden está despejado se dice que la ED viene dada en forma *explícita*. En general, una ED explícita es de la forma

$$X_{n+k} = f\left(X_{n+k-1}, \ldots, X_n, n\right),$$

en donde f es una función dada. En caso contrario, se dice que la ED viene dada en forma *implícita*.

Ejemplo 2 Tenemos 1 000 euros en un depósito a plazo fijo que nos ofrece un tipo de interés nominal $r = 10\,\% = 0.1$ mediante el sistema de capitalización compuesta anual y queremos conocer el saldo del que dispondremos cuando pasen 15 años.

Vamos a formular el problema de un modo más abstracto. Acordamos que el tiempo t lo medimos en años y llamamos $t_0 = 0$ al instante en el que realizamos el depósito. Además, como sólo nos interesa saber el saldo al principio de cada año (una vez capitalizados los intereses), llamamos $t_1 = 1, t_2 = 2, \ldots$ usando el año como unidad de tiempo. Denotamos por C el capital medido en miles de euros; así, C_n, es decir $C\left(t_n\right)$, representa el capital que tenemos cuando han pasado n años. Por lo tanto, nuestro objetivo es hallar C_{15}.

Si conocemos el capital en el año n, podemos calcular el capital en el año $n+1$ sumándole a C_n los intereses que dicha cantidad ha generado durante un año, que denotaremos por I_n; para ello usamos la fórmula $I_n = r \cdot C_n$, con lo que tenemos

$$C_{n+1} = C_n + I_n = C_n + rC_n = (1+r)\,C_n. \tag{1.4}$$

Puesto que $C_0 = 1$, podemos calcular $C_1 = 1.1$, y a partir de C_1 podemos calcular $C_2 = 1.1^2$, y así sucesivamente hasta llegar a $C_{15} = 1.1^{15} = 4.17725$, es decir, $4\,177.25$ euros.

Una vez modelizado este problema, se puede ir añadiendo complejidad. Por ejemplo, supongamos ahora que el periodo de capitalización (cada cuánto recibimos los intereses) es h. En este caso, nos interesa escoger los tiempos $t_1 = h, t_2 = 2h, \ldots$ que representan los inicios de cada periodo de capitalización. Entonces la ED que modeliza este nuevo problema viene dada por

$$C_{n+1} = (1 + rh)\, C_n. \tag{1.5}$$

Ejemplo 3 Queremos estudiar la evolución de una determinada población para predecir el número de individuos que habrá al cabo de 10 años. Para ello, denotamos por P_n la población al cabo de n años, siendo P_0 la población actual.

Realizamos el siguiente balance anual de la variación de la población:

$$P_{n+1} - P_n = [\text{nacidos durante el año } n] - [\text{fallecidos durante el año } n]\,.$$

Estamos suponiendo que no existen migraciones de la población. Además, suponemos que los *nacidos durante el año* n son un porcentaje de la población que comienza el año; es decir

$$[\text{nacidos durante el año } n] = f \cdot P_n,$$

en donde $f \geq 0$ recibe el nombre de *tasa de fecundidad* (que se considera inalterable a lo largo de los años). También suponemos que los *fallecidos durante el año* n son un porcentaje de la población que comienza el año; es decir

$$[\text{fallecidos durante el año } n] = m \cdot P_n,$$

en donde $0 \leq m \leq 1$ recibe el nombre de *tasa de mortalidad* (que también se considera inalterable a lo largo de los años).

Con estas hipótesis adicionales, el crecimiento de la población se rige por la ED

$$P_{n+1} - P_n = fP_n - mP_n = (f - m)\, P_n = \lambda P_n,$$

en donde $\lambda := f - m$ recibe el nombre de *tasa de crecimiento*. El modelo aquí descrito recibe el nombre de *modelo de Malthus* y se puede usar para describir la evolución de una población cuando no existen migraciones y la tasa de crecimiento permanece constante.

Nótese que la ecuación malthusiana

$$P_{n+1} - P_n = \lambda P_n \quad \Longleftrightarrow \quad P_{n+1} = (1 + \lambda)\, P_n$$

es similar a la ecuación (1.4) que se obtiene cuando se estudia el sistema de capitalización compuesta. En este caso, la tasa de crecimiento λ hace el papel del interés nominal r.

1.1.1. Solución de una ED

Llamaremos *solución* de (1.3) a toda sucesión $\mathcal{S} = \{S_n\}_{n \in J}$ que verifique

$$F\left(S_{n+k}, S_{n+k-1}, \ldots, S_n, n\right) = 0$$

para todo $n \in J$ para el que dicha expresión tenga sentido, en donde J es un intervalo de números naturales. Obviamente, hay que exigir además que

$$(S_{n+k}, S_{n+k-1}, \ldots, S_n, n) \in \mathrm{dom}\,(F)$$

para todo $n \in J$ para el que tenga sentido. En este caso, diremos que S_n es solución. Las soluciones que tienen mayor interés dinámico son aquéllas que están definidas en todo el conjunto de números naturales, es decir, $J = \mathbb{N}$.

Ejemplo 4 Dada la ED

$$X_{n+1} = 2X_n,$$

se puede comprobar que la sucesión

$$\{2^n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$$

es una solución. Efectivamente, considerando $S_n = 2^n$ se tiene

$$S_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2 \cdot S_n,$$

y esto es válido para toda $n \in \mathbb{N}$. En este caso se dice que $S_n = 2^n$ es una solución.

No obstante, no existe una única solución, ya que, por ejemplo, es fácil comprobar que la llamada *sucesión cero*, es decir

$$\{0\}_{n\in\mathbb{N}} = \{0, 0, 0, \ldots\},$$

también es solución. En general, es solución cualquier sucesión de la forma $\{A \cdot 2^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, es decir

$$S_n = A \cdot 2^n,$$

en donde A es constante y puede ser cualquier número real (es decir, hace el papel de parámetro).

1.1.2. Problema de valores iniciales

Normalmente las EDs tienen infinitas soluciones (véase el Ejemplo 4) y para distinguir a una de ellas hay que añadir algunas condiciones adicionales. En concreto, dada una ED de orden k, si precisamos cuál es el valor de la magnitud X en k instantes consecutivos, se formula el llamado *problema de valores iniciales* (PVI). En este caso, si la ecuación está en forma explícita, puede asegurarse que existe una única solución.

Ejemplo 5 Dado el PVI

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X_{n+1} & = & 2X_n \\ \\ X_0 & = & 3, \end{array} \right.$$

se tiene que $S_n = 3 \cdot 2^n$ es la única solución, ya que

- $S_{n+1} = 3 \cdot 2^{n+1} = 3 \cdot 2 \cdot 2^n = 3 \cdot S_n$, y esto es válido para todo $n \in \mathbb{N}$.
- $S_0 = 3 \cdot 2^0 = 3$.

Los primeros términos de esta solución son

$$\{3, 6, 12, 24, 48, 96, \ldots\}.$$

Ejemplo 6 Se considera el PVI asociado a la ecuación de Fibonacci

$$\begin{cases} X_{n+2} &= X_{n+1} + X_n \\ \\ X_0 &= 2 \\ X_1 &= 1. \end{cases}$$

Se pueden calcular todos los términos que deseemos de la solución correspondiente:

$$\{2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \ldots\}.$$

En algunas ocasiones es fácil calcular el término general S_n de la solución de un PVI (véase el Ejemplo 4). En tales casos se dice que el PVI se ha resuelto *de manera exacta*. En otros casos, la resolución exacta de un PVI no es tan trivial; por ejemplo, no resulta evidente deducir que la sucesión

$$S_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

es justamente el término general de la solución del PVI del Ejemplo 6 (compruébese).

Sin embargo, en otros casos (la mayoría), la tarea de resolver de manera exacta un PVI resulta del todo imposible. Por este motivo, su estudio debe ser de tipo cualitativo: intentaremos descubrir cómo se comportan las soluciones cuando avanza el tiempo. Este estudio cualitativo lo desarrollaremos en el tema siguiente.

1.1.3. Representación gráfica de soluciones

En general, la representación gráfica es el medio más eficaz para mostrar de un modo rápido y directo la relación entre magnitudes dependientes. En el caso de una solución S_n de una ED, el procedimiento más simple consiste en representar en el plano $\{t, X\}$ los primeros términos de la sucesión.

Ejemplo 7 Si consideramos el PVI

$$\begin{cases} X_{n+1} &= X_n^2 + \frac{1}{2} \\ \\ X_0 &= 0, \end{cases} \tag{1.6}$$

podemos representar la evolución de la solución S_n de alguna de las maneras que ilustran la Figura 1.1.

Es decir, se representan un número significativo de puntos de la forma (n, S_n) para $n = 0, 1, 2, \ldots$ (nótese que, salvo que se indique lo contrario, $t_n = n$). En la opción (b) se han unido los puntos usando segmentos para indicar que t es una variable continua y para dar mayor énfasis a la evolución de X a lo largo del tiempo t. Sin embargo, esta representación puede llevar a engaño, ya que el valor de la solución en un instante que no sea natural, en principio, no está definido.

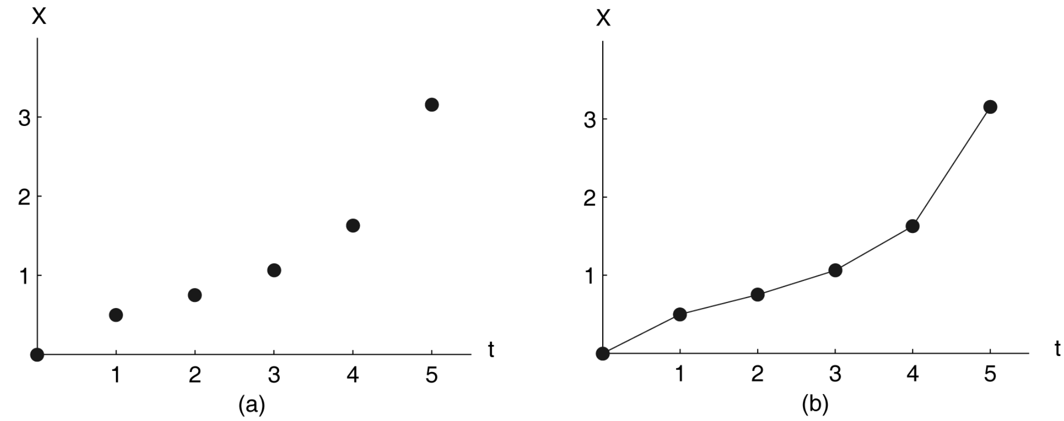

Figura 1.1: Representaciones de la solución del PVI (1.6).

Cuando un PVI se ha resuelto de manera exacta y los términos de la solución coinciden con los valores de una función, se suele utilizar la gráfica de esta función para unir los puntos representados.

Ejemplo 8 El término general del PVI

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X_{n+1} & = & \frac{1}{2} X_n + 1 \\ \\ X_0 & = & 5, \end{array} \right. \tag{1.7}$$

viene dado por

$$S_n = 2 + 3 \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

y se representa gráficamente como en la Figura 1.2.

1.1.4. Operador de diferencias

Dada una sucesión $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, la *diferencia (de primer orden)* del término X_n se define mediante el operador de diferencias "Δ" como

$$\Delta X_n := X_{n+1} - X_n.$$

Aplicando de nuevo el operador, se obtiene la *diferencia de segundo orden*:

$$\begin{array}{rcl} \Delta^2 X_n & := & \Delta\left(\Delta X_n\right) = \Delta X_{n+1} - \Delta X_n \\ & = & \left(X_{n+2} - X_{n+1}\right) - \left(X_{n+1} - X_n\right) = X_{n+2} - 2X_{n+1} + X_n. \end{array}$$

En general, dado k un número natural positivo, la *diferencia de orden k* del término X_n se define a partir de la diferencia de orden $k-1$ como

$$\Delta^k X_n := \Delta \left(\Delta^{k-1} X_n \right) = \Delta^{k-1} X_{n+1} - \Delta^{k-1} X_n,$$

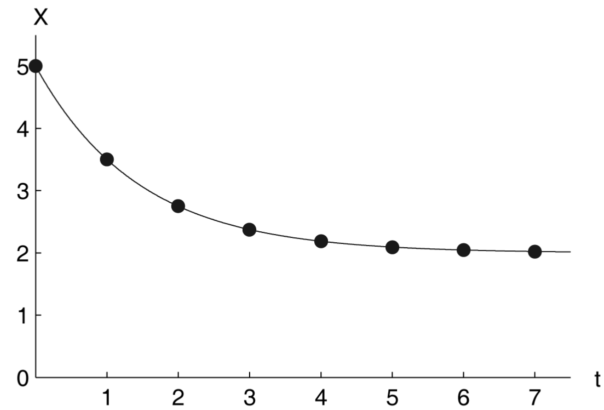

Figura 1.2: Representación de la solución del PVI (1.7). La curva que se ha usado para unir los puntos es la gráfica de la función $f(t) = 2 + 3(1/2)^t$.

considerando que $\Delta^0 X_n := X_n$.

Dada una ED de la forma (1.3), siempre se puede expresar en términos de estos operadores, en la forma general

$$H\left(\Delta^k X_n, \Delta^{k-1} X_n, \ldots, \Delta X_n, X_n, n\right) = 0,$$

y ésta es la razón del nombre "ecuación en diferencias".

Ejemplo 9 La ecuación de Fibonacci $X_{n+2} = X_{n+1} + X_n$ se puede expresar en términos de las diferencias como

$$\Delta^2 X_n + \Delta X_n - X_n = 0.$$

1.2. Dinámica continua: ecuaciones diferenciales ordinarias

Consideremos la ED (1.5) que modeliza la evolución de un capital C a lo largo del tiempo t (medido en años) en un depósito con un tipo de interés nominal anual r (en tanto por uno) y con periodos de capitalización constantes de longitud $h > 0$. Así pues

$$C_{n+1} = (1 + rh)\,C_n \quad \Longrightarrow \quad \frac{C_{n+1} - C_n}{h} = rC_n$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{C(t_n + h) - C(t_n)}{h} = rC(t_n).$$

Si hacemos tender h a cero y tomamos la variable t en vez de t_n (ya que al hacer tender h a cero, estamos "desdiscretizando" los tiempos correspondientes a los inicios de los periodos de capitalización), obtenemos

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{C(t+h) - C(t)}{h} = rC(t) \quad \Longrightarrow \quad C'(t) = rC(t),$$

que es una ecuación que modeliza el problema correspondiente al interés continuo. En esta ecuación interviene la función incógnita $C(t)$ y su derivada $C'(t)$.

En general, una *ecuación diferencial ordinaria* (EDO) es una expresión funcional que relaciona a una variable independiente $t \in \mathbb{R}$ con una función incógnita $X = X(t)$ y con algunas de sus derivadas. Es decir, si $X^{(i)}(t)$ denota a la derivada de orden i de la función $X(t)$, una EDO es una expresión equivalente a

$$F\left(X^{(k)}(t), X^{(k-1)}(t), \ldots, X'(t), X(t), t\right) = 0, \tag{1.8}$$

en donde F es una función continua dada y k es un número natural positivo. En este caso, k es el *orden* de la EDO (1.8), es decir, el mayor orden de derivación que aparece en la expresión.

Normalmente no se escribe explícitamente la dependencia de X y sus derivadas con respecto a la variable t, siempre y cuando esto no cause confusiones; así pues, por ejemplo, son EDOs de orden 1 (o de primer orden) las expresiones

$$X' = X, \qquad X' = 2t - 4, \qquad X' + tX = X^2;$$

y son EDOs de orden 2 (o de segundo orden) las expresiones

$$X'' = X, \qquad X'' + X' + X^2 = t, \qquad X'' + 4tX = 0.$$

Presentadas de este modo, las EDOs pueden parecer simples expresiones algebraicas (nuevas abstracciones matemáticas). Sin embargo, no se puede desposeer al estudio de las ecuaciones diferenciales de su profunda vinculación con la práctica totalidad de las disciplinas científicas (incluida la Economía). Y es que las ecuaciones diferenciales constituyen la herramienta más utilizada en la formulación de modelos matemáticos.

Los primeros estudios sobre EDOs se atribuyen a Newton y Leibniz en el siglo XVII. Las Leyes de Newton de la Mecánica Clásica se deben, en buena medida, al conocimiento que Newton tenía de las propiedades de las soluciones de las EDOs de segundo orden. Con el paso del tiempo, la teoría sobre ecuaciones diferenciales se ha ido enriqueciendo y adaptando a las exigencias de cada época. Tal vez resulte sorprendente, pero son muchos los problemas relacionados con las ecuaciones diferenciales que continúan abiertos en nuestros días.

La teoría sobre ecuaciones diferenciales ha sido desarrollada por diferentes escuelas matemáticas y en diferentes épocas históricas. Una consecuencia de ello es la existencia de terminologías y notaciones muy diversas. Por ejemplo, es común (y muy práctica en algunos casos) la notación diferencial $\frac{\mathrm{d}^n X}{\mathrm{d}t^n}$ para denotar a la derivada de orden n de la función X con respecto a t, en vez de la que utilizamos nosotros, $X^{(n)}$ (y es que a veces se confunde la notación $X^{(n)}$ con X^n, que representa la potencia n-ésima de X). También se puede encontrar la notación $\dot{X}$ en vez de X' y $\ddot{X}$ en vez de X'', especialmente en las ecuaciones de la Mecánica.

Al igual que con las EDs, si F no depende explícitamente de t entonces se dice que la EDO correspondiente es *autónoma*. Por otro lado, si la derivada de mayor orden está despejada se dice que la EDO viene dada en forma *explícita*. En general, una EDO explícita es de la forma

$$X^{(k)} = f\left(X^{(k-1)}, \ldots, X', X, t\right),$$

en donde f es una función continua dada. En caso contrario, se dice que la EDO viene dada en forma *implícita*.

Por ejemplo, las EDOs

$$X' = X^2 + X, \qquad X'' = 2X - 4, \qquad X''' = \operatorname{sen}\left(X'\right) - X^2$$

son autónomas y explícitas, mientras que la EDO

$$\left(X'\right)^2 + X^2 + 3 = 0$$

es autónoma e implícita.

La EDO que modeliza el problema del interés continuo

$$C' = rC, \tag{1.9}$$

es de primer orden, explícita y autónoma.

1.2.1. Solución de una EDO

Llamaremos *solución* de (1.8) a toda función $\varphi = \varphi(t)$ definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, de clase $\mathcal{C}^k(I)$ y que verifique

$$F\left(\varphi^{(k)}(t), \varphi^{(k-1)}(t), \ldots, \varphi'(t), \varphi(t), t\right) = 0$$

para todo $t \in I$. Obviamente, hay que exigir además que

$$\left(\varphi^{(k)}(t), \varphi^{(k-1)}(t), \ldots, \varphi'(t), \varphi(t), t\right) \in \operatorname{dom}(F)$$

para todo $t \in I$. La exigencia de que el dominio de la solución sea un intervalo y no cualquier conjunto de $\mathbb{R}$ viene motivada por las aplicaciones que de las ecuaciones diferenciales se suelen hacer en distintos ámbitos de la ciencia. En estas aplicaciones, la variable independiente t suele representar al tiempo y no tendría demasiado sentido considerar discontinuidades en la variable temporal.

Ejemplo 10 Cualquier función de la forma

$$C(t) = C_0 e^{rt}$$

con $C_0 \in \mathbb{R}$ es solución de la EDO (1.9) correspondiente al problema del interés continuo, ya que es de clase $\mathcal{C}^\infty$ y verifica

$$C'(t) = rC_0 e^{rt} = rC(t)$$

para todo $t \in \left]-\infty, +\infty\right[$. En este caso, el parámetro C_0 representa al capital inicial, ya que $C(0) = C_0$. Para el caso concreto del Ejemplo 2, se tiene que $C_0 = 1\,000$, $r = 10\,\% = 0.1$, y por lo tanto, al cabo de 15 años tendremos un capital de $C(15) = 1\,000\, e^{0.1 \cdot 15} \approx 4\,481.69$ euros, que es una cantidad superior a lo que se obtendría con el sistema de capitalización discreta anual.

Ejemplo 11 La función $\varphi(t) = 3 + t^2$ no es solución de la EDO $X' = X - 3$, ya que $\varphi'(t) = 2t$ y por lo tanto, la ecuación

$$\varphi'(t) = \varphi(t) - 3 \quad \Longrightarrow \quad 2t = \left(3 + t^2\right) - 3$$

sólo se cumple para $t = 0$ y $t = 2$, que es un conjunto finito de puntos y por lo tanto no es ningún intervalo real.

1.2.2. Problema de valores iniciales

Las EDOs suelen tener infinitas soluciones, como en el Ejemplo 10, y si se quiere distinguir a una de esas soluciones hay que imponer algunas condiciones adicionales. De esta forma, un *problema de valores iniciales* (PVI), o *problema de Cauchy*, está formado por una EDO explícita de orden k

$$X^{(k)} = f(X^{(k-1)}, \dots, X', X, t)$$

junto con k condiciones de la forma

$$X(t_0) = X_0, \quad X'(t_0) = X_0', \quad \dots, \quad X^{(k-1)}(t_0) = X_0^{(k-1)},$$

en donde $(X_0^{(k-1)}, \dots, X_0, t_0) \in \operatorname{dom}(f)$. En este caso, se dice que una función $\varphi(t)$ definida en un intervalo I que contiene a t_0, es solución del PVI si es solución de la EDO correspondiente y cumple las condiciones iniciales

$$\varphi(t_0) = X_0, \quad \varphi'(t_0) = X_0', \quad \dots, \quad \varphi^{(k-1)}(t_0) = X_0^{(k-1)},$$

considerando a t_0 como el "instante inicial".

Ejemplo 12 El PVI

$$\left\{ \begin{array}{rcl} C' & = & rC \\ \\ C(0) & = & C_0, \end{array} \right.$$

tiene como única solución a la función $C(t) = C_0 e^{rt}$, en donde se considera que $t_0 = 0$ es el instante inicial y C_0 representa el capital inicial.

No obstante, la definición de PVI puede extenderse a cualquier tipo de condición sobre el valor que toman la función incógnita y/o sus derivadas en varios tiempos distintos, siempre que el número de condiciones coincida con el orden de la EDO. Por ejemplo, si las condiciones sólo afectan a la función incógnita y no a sus derivadas

$$X(t_0) = X_0, \quad X(t_1) = X_1, \quad \dots, \quad X(t_{k-1}) = X_{k-1},$$

con $t_0, t_1, \dots, t_{k-1} \in \mathbb{R}$, se dice que el PVI correspondiente es un *problema de contorno*, aunque en realidad, este término sólo se aplicaría en su pleno significado a las EDOs de segundo orden.

Ejemplo 13 Dado el problema de contorno

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X'' & = & 4X' - 4X \\ \\ X(0) & = & 1 \\ X(1) & = & 2, \end{array} \right.$$

se puede comprobar que la única solución viene dada por la función

$$\varphi(t) = \left(1 + \left(2e^{-2} - 1\right) t\right) e^{2t}.$$

Con respecto a la unicidad de solución de un PVI, de momento no podemos asegurar nada. Este asunto será tratado en el tema dedicado a las EDOs.

1.2.3. Discretización

Dado el PVI

$$\left\{\begin{array}{rcl} X' & = & X+t \\ \\ X(1) & = & 2, \end{array}\right. \tag{1.10}$$

podemos plantearnos hallar el valor de la solución φ en $t=2$. En este caso, la EDO de (1.10) es relativamente sencilla y se podría resolver con técnicas que daremos posteriormente en el tema dedicado a las ecuaciones diferenciales. De hecho, se puede comprobar que la solución viene dada por la función

$$\varphi(t) = 4e^{t-1} - t - 1$$

y por lo tanto $\varphi(2) = 4e - 3 \approx 7.8731$. Sin embargo, en la mayoría de casos, no es posible hallar analíticamente la solución y son necesarias otras técnicas para estimarla. En concreto, vamos a ver la técnica de discretización de Euler.

Esta técnica consiste en crear una malla discreta de puntos equiespaciados de la forma $\{t_0, t_1 := t_0 + h, t_2 := t_0 + 2h, \ldots\}$ en donde t_0 es el punto en el que se da la condición inicial del PVI correspondiente; en nuestro caso, $t_0 = 1$. La distancia entre los puntos de la malla es un número real $h > 0$ que recibe el nombre de *paso*. Por lo tanto, se tiene que $t_{n+1} = t_n + h$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y se cumple que

$$t_n = t_0 + nh.$$

Una vez elegido el paso y construida esta malla, se exige que se cumpla la EDO del PVI pero solamente en los puntos de esta malla, y se realiza la aproximación

$$X'(t_n) \approx \frac{X(t_n + h) - X(t_n)}{h} = \frac{1}{h}(X_{n+1} - X_n),$$

teniendo en cuenta la notación usada en las EDs, en donde $X_n := X(t_n)$. Dicha aproximación está basada en la definición de derivada

$$X'(t) := \lim_{h \to 0^+} \frac{X(t+h) - X(t)}{h},$$

y por lo tanto, el error cometido es menor cuanto más pequeño sea el paso h. Así pues, la EDO del PVI original (1.10) se transforma en una ED:

$$\begin{array}{rcl} X'(t_n) = X(t_n) + t_n & \Longrightarrow & \frac{1}{h}(X_{n+1} - X_n) = X_n + (t_0 + nh) \\ \\ & \Longrightarrow & X_{n+1} = (1+h)X_n + (1+nh)h, \end{array}$$

y la condición inicial también se transforma:

$$X(1) = 2 \quad \Longrightarrow \quad X(t_0) = 2 \quad \Longrightarrow \quad X_0 = 2.$$

Así pues, el PVI (1.10) se transforma en el PVI

$$\left\{\begin{array}{rcl} X_{n+1} & = & (1+h)X_n + (1+nh)h \\ \\ X_0 & = & 2, \end{array}\right.$$

de cuya solución S_n podemos hallar el término que queramos simplemente iterando.

Por ejemplo, si escogemos un paso $h = 0.1$, para estimar $\varphi(2)$ (cuyo valor es $4e - 3$, aproximadamente 7.8731) tendremos que hallar $X(2)$, que se corresponde con S_{10}, ya que en este caso $t_{10} = 2$. Y si escogemos $h = 0.01$, entonces tendremos que hallar S_{100}, ya que $t_{100} = 2$. A continuación se muestran las aproximaciones obtenidas para distintos pasos h:

$$\begin{array}{llllll} h = 0.1 & \Longrightarrow & X(2) = S_{10} & \approx & 7.3750 \\ h = 0.01 & \Longrightarrow & X(2) = S_{100} & \approx & 7.8193 \\ h = 0.001 & \Longrightarrow & X(2) = S_{1\,000} & \approx & 7.8677 \\ h = 0.0001 & \Longrightarrow & X(2) = S_{10\,000} & \approx & 7.8726. \end{array}$$

Para EDOs de mayor orden, siguiendo el mismo razonamiento de aproximación para pasos h pequeños, se tiene

$$\begin{aligned} X''(t) &= \lim_{h \to 0^+} \frac{X'(t+h) - X'(t)}{h} \approx \frac{X'(t+h) - X'(t)}{h} \\ &\approx \frac{1}{h}\left(\frac{X(t+2h) - X(t+h)}{h} - \frac{X(t+h) - X(t)}{h}\right) \\ &= \frac{1}{h^2}\left(X(t+2h) - 2X(t+h) + X(t)\right), \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$X''(t_n) \approx \frac{1}{h^2}\left(X_{n+2} - 2X_{n+1} + X_n\right) = \frac{\Delta^2 X_n}{h^2}.$$

De la misma forma, se demuestra que

$$X^{(k)}(t_n) \approx \frac{\Delta^k X_n}{h^k}$$

para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

En conclusión, una EDO de la forma (1.8) se puede discretizar por el método de Euler tomando un tiempo inicial t_0 y un paso h, obteniéndose la ED

$$F\left(\frac{\Delta^k X_n}{h^k}, \frac{\Delta^{k-1} X_n}{h^{k-1}}, \ldots, \frac{\Delta X_n}{h}, X_n, t_0 + nh\right) = 0.$$

Tema 2

Ecuaciones en diferencias

En el Tema 1 se introdujo el concepto de *ecuación en diferencias* (ED), como una expresión de la forma

$$F\left(X_{n+k}, X_{n+k-1}, \ldots, X_n, n\right) = 0, \tag{2.1}$$

o equivalente, en donde F es una función dada y $k \in \mathbb{N}^+$ es el *orden* de la ED. Además, se introdujo el concepto de *solución* como una sucesión que satisface dicha ecuación.

2.1. Soluciones especiales

Estudiemos ahora los distintos tipos de soluciones de una ED general (2.1) que tienen un mayor interés dinámico.

Soluciones constantes

Una solución S_n es *constante* si es de la forma $S_n = p$, es decir $\{p, p, p, \ldots\}$, en donde $p \in \mathbb{R}$ es constante. En este caso se dice que p es un *punto fijo* o *punto de equilibrio*.

Para hallar los puntos fijos de una ED basta con sustituir todos los términos de la forma X_{n+j} (con $j \in \mathbb{N}$) por p y resolver la ecuación resultante (cuya incógnita es p).

Por ejemplo, para hallar los puntos fijos de la ED

$$X_{n+2} = 6X_{n+1} - X_n^2 - 6,$$

debemos resolver la ecuación $p = 6p - p^2 - 6$, es decir

$$p^2 - 5p + 6 = 0,$$

que tiene un par de soluciones: $p = 2$ y $p = 3$.

Soluciones periódicas

Una solución S_n es *periódica* si existe un número $N \in \mathbb{N}$, $(N > 1)$ llamado *periodo*, tal que $S_{n+N} = S_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$; además, no existe ningún otro número natural positivo menor que N que cumpla esto. En este caso, dicha solución recibe el nombre de N-*ciclo* o simplemente *ciclo*. En el caso particular $N = 1$ obtenemos las soluciones constantes descritas anteriormente, que no se consideran ciclos.

Para hallar los 2-ciclos de la forma $\{p, q, p, q, \ldots\}$ de una ED hay que resolver un sistema formado por 2 ecuaciones, que se obtienen al realizar las sustituciones

$$X_n = p, \quad X_{n+1} = q, \quad X_{n+2} = p, \quad X_{n+3} = q, \quad \ldots$$

(que correspondería a los n pares) y

$$X_n = q, \quad X_{n+1} = p, \quad X_{n+2} = q, \quad X_{n+3} = p, \quad \ldots$$

(que correspondería a los n impares) respectivamente, y cuyas incógnitas son p, q. Si existe algún 2-ciclo, como mínimo se obtendrán dos, ya que si $\{p, q, p, q, \ldots\}$ es solución, entonces $\{q, p, q, p, \ldots\}$ también lo es; por esta razón, se considera que estas dos soluciones representan al mismo 2-ciclo. Además, si existen puntos fijos, también se obtendrán como solución en donde $p = q$, pero éstas no se consideran 2-ciclos.

Por ejemplo, para hallar los 2-ciclos de la ED

$$3X_{n+1} + 2X_n^2 - 9X_n - 8 = 0, \tag{2.2}$$

realizamos las sustituciones $X_n = p$, $X_{n+1} = q$ (para n par) y, a la inversa, $X_n = q$, $X_{n+1} = p$ (para n impar), con lo que obtenemos el sistema (no lineal) de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} 3q + 2p^2 - 9p & = & 8 \\ 3p + 2q^2 - 9q & = & 8. \end{array}\right\} \tag{2.3}$$

Despejando q de la primera ecuación y sustituyendo en la segunda, obtenemos

$$\frac{8}{9}\left(p^4 - 9p^3 + 19p^2 + 9p - 20\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad p^4 - 9p^3 + 19p^2 + 9p - 20 = 0. \tag{2.4}$$

Llegados a este punto, hemos de tener en cuenta que si la ED (2.2) tiene puntos fijos, éstos volverán a salir como solución de la ecuación (2.4). Así pues, para hallar los puntos fijos de (2.2) hemos de resolver la ecuación

$$3p + 2p^2 - 9p - 8 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2p^2 - 6p - 8 = 0,$$

que tiene como solución $p = -1$ y $p = 4$. Por lo tanto, sabemos que -1 y 4 son soluciones de (2.4) y aplicando Ruffini podemos reducir el grado:

	1	-9	19	9	-20
-1		-1	10	-29	20
	1	-10	29	-20	0
4		4	-24	20	
	1	-6	5	0.	

El polinomio resultante $p^2 - 6p + 5$ tiene como raíces $p = 1$ y $p = 5$, con las que podemos hallar los correspondientes q que conforman las soluciones de (2.3), obteniendo $q = 5$ y $q = 1$ respectivamente. En resumen, las soluciones del sistema (2.3) son

$$\begin{array}{ll} p = -1, & q = -1; \\ p = 4, & q = 4; \\ p = 1, & q = 5; \\ p = 5, & q = 1. \end{array}$$

Las dos primeras corresponden a puntos fijos y no se consideran 2-ciclos, mientras que las otras dos representan al mismo 2-ciclo.

Esta metodología puede generalizarse para calcular cualquier N-ciclo con $N > 2$.

Soluciones (estrictamente) monótonas

Una solución S_n es *creciente* si conserva el orden temporal, es decir, si $S_{n_1} \leq S_{n_2}$ para cualquier par de números naturales n_1, n_2 tales que $n_1 \leq n_2$. Por el contrario, es *decreciente* si invierte el orden temporal, es decir, si $S_{n_2} \leq S_{n_1}$. Tanto las soluciones crecientes como las decrecientes se denominan soluciones *monótonas*.

El término "*estrictamente*" se añade si las anteriores propiedades se cumplen para desigualdades estrictas. Como caso particular, los puntos fijos son soluciones monótonas, y son tanto crecientes como decrecientes; pero no son estrictamente monótonas.

Por ejemplo, todas las soluciones de la ED

$$X_{n+1} = X_n + 1$$

son estrictamente monótonas, en particular estrictamente crecientes, ya que su valor aumenta en cada iteración.

Soluciones oscilantes

Una solución S_n es *oscilante* si dado cualquier natural n_0, la subsucesión S_n con $n > n_0$ no es monótona.

Por ejemplo, los 2-ciclos son oscilantes. No obstante, las soluciones no constantes de la ED

$$X_{n+1} = -2X_n$$

son oscilantes y no son periódicas.

Soluciones acotadas

Una solución S_n es *acotada* si existe un número real $M > 0$ tal que $|S_n| \leq M$ para todo n natural. En particular, se dice que la solución es *acotada inferiormente* si existe un número real M tal que $M \leq S_n$, y se dice que es *acotada superiormente* si $S_n \leq M$, para todo n natural.

Por ejemplo, las soluciones de la ED

$$X_{n+1} = -X_n$$

son de la forma $\{p, -p, p, -p, \ldots\}$ con $p \in \mathbb{R}$, y por lo tanto son acotadas.

Además, toda solución creciente es acotada inferiormente, y toda solución decreciente es acotada superiormente.

Soluciones convergentes

Una solución S_n es *convergente* a un punto p si dado cualquier $\epsilon > 0$, existe un natural n_0 tal que $|S_n - p| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. En tal caso se escribe $\lim_{n\to\infty} S_n = p$, ó simplemente $S_n \to p$.

Teorema 1 *Toda solución monótona y acotada es convergente.*

Por ejemplo, las soluciones de la ED

$$X_{n+1} = \frac{1}{2} X_n$$

son monótonas y acotadas, y por lo tanto son convergentes; además, convergen a 0. Sin embargo, las soluciones no constantes de la ED

$$X_{n+1} = -\frac{1}{2} X_n,$$

pese a no ser monótonas (son oscilantes), también son convergentes a 0.

Soluciones densas

Antes de definir el concepto de "solución densa", introduciremos el concepto de "conjunto ω-límite", que generaliza el concepto de límite visto anteriormente: dada una solución acotada S_n, su *conjunto ω-límite* se define como el conjunto formado por todos aquellos puntos a los que la solución se acerca tanto y tantas veces como se desee, y se denota $L_\omega(S_n)$, o simplemente L_ω. Así pues, un punto $p \in L_\omega(S_n)$ si dados $\epsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ cualesquiera, existe un natural $n > n_0$ tal que $|S_n - p| < \epsilon$.

Por ejemplo, si $S_n \to p$ entonces $L_\omega(S_n) = \{p\}$. Por otro lado, dada la ED

$$2X_{n+2} + X_{n+1} - X_n = 0,$$

se puede comprobar que $S_n = (-1)^n + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ es una solución no convergente, pero los términos pares convergen a 1 y los impares a -1, con lo que

$$L_\omega(S_n) = \{-1, 1\}.$$

Una solución acotada S_n es *densa* en un intervalo real $I \subset \mathbb{R}$ si su conjunto ω-límite contiene a I, es decir, si dados $p \in I$, $\epsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ cualesquiera, existe un natural $n > n_0$ tal que $|S_n - p| < \epsilon$.

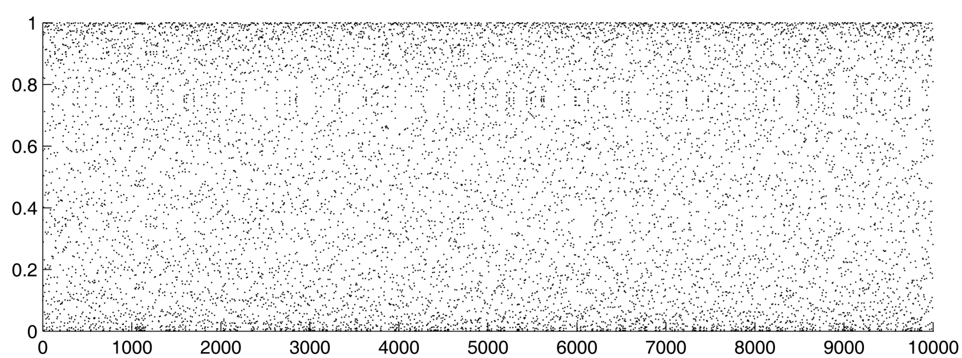

Figura 2.1: Representación de la solución del PVI (2.5). Dicha solución es densa en el intervalo $[0, 1]$.

Por ejemplo, dado el PVI

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X_{n+1} & = & 4X_n \left(1 - X_n\right) \\ \\ X_0 & = & \dfrac{1}{10}, \end{array} \right. \tag{2.5}$$

su única solución es densa en el intervalo $[0,1]$. Se puede comprobar gráficamente representando dicha solución para $n = 0, \ldots, 10\,000$ (ver Figura 2.1).

2.2. EDs de primer orden autónomas

En primer lugar, vamos a estudiar las EDs de primer orden autónomas en su forma explícita, es decir, de la forma

$$X_{n+1} = f\left(X_n\right), \tag{2.6}$$

en donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función real dada. Recordemos que, dada una condición inicial X_0, el PVI asociado a la ecuación (2.6) tiene una única solución a la que denotaremos $\mathcal{S}\left(X_0\right)$ o simplemente por su término general S_n (en donde $S_0 = X_0$). La particularidad que tienen este tipo de ecuaciones es que cada término de una solución es la imagen por f del término precedente (salvo el primero, obviamente), siempre y cuando no haya problemas con el dominio de f. Es decir, si S_n es una solución, se tiene que

$$S_n = f\left(S_{n-1}\right) = f\left(f\left(S_{n-2}\right)\right) = f\left(f\left(\cdots f\left(S_0\right)\cdots\right)\right),$$

y por lo tanto

$$S_n = \left(f \circ \overset{n}{\cdots} \circ f\right)\left(S_0\right) = f^n\left(S_0\right).$$

No hay que confundir la composición de f consigo misma n veces, denotada por f^n, con la potencia n-ésima de f (es decir, el producto de f consigo misma n veces). Aunque se denoten de la misma forma, el contexto suele aclarar a qué nos estamos refiriendo. La razón de que se denoten igual es que la ley de composición de funciones "$\circ$" suele considerarse como "un producto" para las funciones (aunque no sea el "producto usual" de los números reales). De hecho, el producto de matrices es el equivalente a la composición de funciones lineales.

Ejemplo 14 Consideremos la ED de primer orden autónoma y explícita

$$X_{n+1} = X_n^2 + 1. \tag{2.7}$$

En este caso, la función que define la ecuación es $f(x) := x^2 + 1$. Los primeros cinco términos de la solución cuya condición inicial es 0 son

$$\mathcal{S}(0) = \{0, 1, 2, 5, 26, \ldots\},$$

ya que $f(0) = 1$, $f^2(0) = f(f(0)) = f(1) = 2$, $f^3(0) = f(f(f(0))) = f(2) = 5$ y $f^4(0) = f(f(f(f(0)))) = f(5) = 26$.

Resolución numérica

Seguramente, en algún momento, con una calculadora en la mano y ante un número cualquiera en la pantalla, has pulsado repetidamente una tecla y has observado cómo evolucionaban las cifras que aparecían en la pantalla de la calculadora. Por ejemplo, ante un número cualquiera $X_0 > 0$, pulsando repetidamente la tecla correspondiente a la función $\sqrt{x}$ se observa cómo las cifras se van acercando cada vez más a 1; si después tomamos otra cifra cualquiera $\widetilde{X}_0 > 0$ y repetimos el experimento numérico, observamos el mismo comportamiento. Después de algún experimento más, variando la condición inicial, podemos llegar a la conclusión de que todas las soluciones de la ED $X_{n+1} = \sqrt{X_n}$ con condición inicial positiva convergen hacia 1 (y además, la que tiene condición inicial $X_0 = 1$ es constante).

El procedimiento aquí empleado es un *método numérico* y, en este caso, nos ha conducido a una conclusión verdadera, pero no siempre ocurre así. El mayor inconveniente de los métodos numéricos es que no podemos estar completamente seguros de las afirmaciones que realizamos. En ocasiones, al método numérico se le escapan algunos detalles importantes y no se puede usar (directamente) cuando la función depende de parámetros. Sin embargo, en ocasiones, es el último refugio cuando se estudia una ecuación para la que los métodos analíticos resultan ser extremadamente complejos.

En cualquier caso, para aplicar este método numérico de una manera sistemática hay que precisar los siguientes elementos:

- Intervalo de aplicación: un intervalo $[a, b]$ donde vamos a tomar las condiciones iniciales.

- Número de nodos: un número k de puntos del intervalo $[a, b]$ que vamos a tomar como condiciones iniciales. Si se define $h := (b - a)/k$, entonces vamos calculando las soluciones $\mathcal{S}(a + jh)$ para $j = 0, \ldots, k$.

- Número máximo de iteraciones: no podemos calcular infinitos términos de la solución $\mathcal{S}(a + jh)$, así que nos conformaremos con observar el comportamiento de los N primeros términos.

Comenzamos a estudiar la ED (2.6) con condición inicial $X_0 = a$ y calculamos los N primeros términos. Dependiendo del comportamiento de estos términos de la sucesión llegamos a una conclusión sobre la solución $\mathcal{S}(a)$. Consideramos entonces la condición inicial $X_0 = a+h$, calculamos sus N primeros términos y en base a ellos llegamos a una conclusión sobre la solución $\mathcal{S}(a+h)$. Consideramos después la condición inicial $X_0 = a+2h$, calculamos sus N primeros términos y en base a ellos llegamos a una conclusión sobre la solución $\mathcal{S}(a + 2h)$. Y así hasta llegar a la condición inicial $X_0 = a + kh = b$, calcularemos sus N primeros términos y en base a ellos llegaremos a una conclusión sobre la solución $\mathcal{S}(b)$.

2.2.1. Resolución gráfica

Vamos a describir un procedimiento sencillo que nos permitirá conocer el comportamiento de las soluciones de una ED si conocemos la gráfica de la función que define la ecuación.

Sea S_n una solución de la ecuación (2.6). Supongamos que conocemos un término de la solución, por ejemplo el valor inicial S_0, y que tenemos representada la gráfica de la función

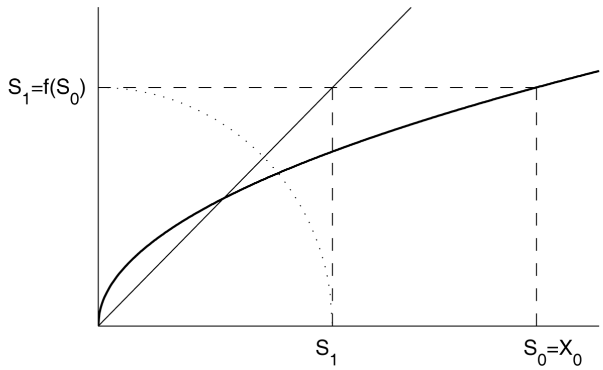

Figura 2.2: Procedimiento de resolución gráfica de una ED de primer orden autónoma y explícita con condición inicial X_0.

f en el plano $\{x, y\}$, es decir, el conjunto de puntos (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tales que $y = f(x)$. Entonces es posible hallar el siguiente término de la solución, $S_1 = f(S_0)$, calculando gráficamente el valor de la ordenada y que se corresponde con la abscisa $x = S_0$. El procedimiento es bien conocido: se levanta una línea vertical (paralela al eje OY) desde el punto $(S_0, 0)$ hasta que corta a la gráfica de f; desde este punto de corte se traza una línea horizontal (paralela al eje OX) y se halla el punto de corte con el eje OY (véase Figura 2.2).

Pero, ¿qué podemos hacer si queremos hallar el término siguiente S_2 y los términos posteriores? Es evidente que la evolución de la solución se puede apreciar mejor si los términos se representan en el mismo eje. Ello se puede lograr usando un compás y trazando un sector de circunferencia de radio S_1 que vaya del eje OY al eje OX. Pero este procedimiento necesita de un utensilio mecánico adicional y además no es viable cuando se ha utilizado una escala distinta en cada eje.

El procedimiento alternativo (que también se ha ilustrado en la Figura 2.2) consiste en representar la bisectriz $\{y = x\}$, también llamada *diagonal principal*, y actuar del siguiente modo:

- Se levanta una línea vertical desde el punto $(S_0, 0)$ hasta que corta a la gráfica de f.
- Desde ese punto de la gráfica, se traza una línea horizontal hasta que corta a la diagonal principal $\{y = x\}$.
- Se traza entonces una nueva línea vertical desde ese punto hasta que corta al eje OX. El valor de la abscisa del punto obtenido es justamente S_1.

Reiterando este procedimiento se observa la evolución de una determinada solución.

Ejemplo 15 Vamos a hallar gráficamente los primeros términos de la solución S_n del PVI

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X_{n+1} & = & \dfrac{3}{2}\sqrt{|X_n|} \\ \\ X_0 & = & \dfrac{1}{10}. \end{array} \right. \tag{2.8}$$

Para ello disponemos de la gráfica de la función $f(x) := \frac{3}{2}\sqrt{|x|}$. Teniendo en cuenta que la condición inicial es $\frac{1}{10}$, utilizando el procedimiento anteriormente descrito se obtienen los siguientes cuatro términos de la solución en la Figura 2.3.

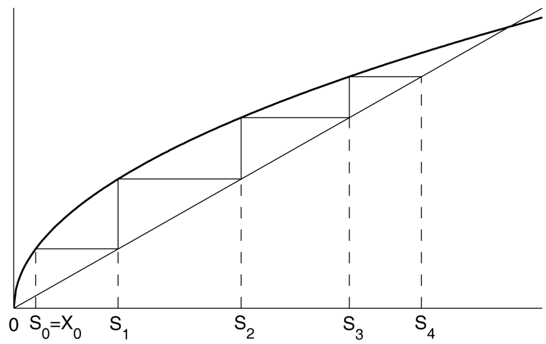

Figura 2.3: Resolución gráfica del PVI (2.8).

Nótese que la solución S_n es monótona (en concreto, estrictamente creciente) y converge al punto de corte de la gráfica de $f(x)$ con la diagonal principal.

Ejemplo 16 Vamos a hallar gráficamente los primeros términos de la solución S_n del PVI

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X_{n+1} & = & 1 - \dfrac{1}{3}X_n^2 \\ \\ X_0 & = & \dfrac{1}{10}. \end{array} \right. \tag{2.9}$$

Para ello disponemos de la gráfica de la función $f(x) := 1 - \frac{1}{3}x^2$. Teniendo en cuenta que la condición inicial es $\frac{1}{10}$, utilizando el procedimiento anteriormente descrito se obtienen los siguientes cuatro términos de la solución en la Figura 2.4.

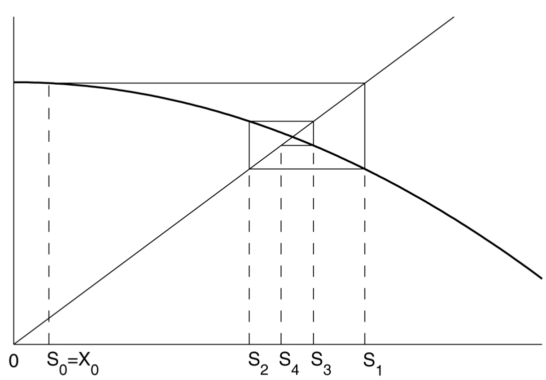

Figura 2.4: Resolución gráfica del PVI (2.9).

Nótese que en este caso la solución S_n es oscilante y también converge al punto de corte de la gráfica de $f(x)$ con la diagonal principal.

Repasemos a continuación los tipos de soluciones especiales citados anteriormente en el caso particular de una ED de primer orden autónoma y explícita, y qué aspecto tiene la correspondiente resolución gráfica.

Los puntos de equilibrio de la ED (2.6) se pueden determinar gráficamente, ya que se corresponden con los puntos de corte de la gráfica de f con la diagonal principal $\{y = x\}$. Por ejemplo, en la Figura 2.5 se representa la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{5}\left(-10 + 2x + 6x^2 - x^3\right)$ y la diagonal principal, deduciendo que los puntos de equilibrio de la ED

$$X_{n+1} = \frac{1}{5}\left(-10 + 2X_n + 6X_n^2 - X_n^3\right) \tag{2.10}$$

son $p_1 = -1$, $p_2 = 2$ y $p_3 = 5$.

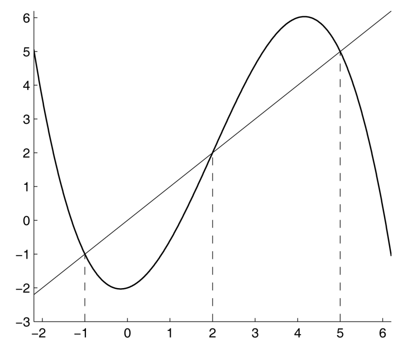

Figura 2.5: Puntos de equilibrio de la ED (2.10).

Por otro lado, dado un 2-ciclo $\{p, q\}$, se cumple que $f(p) = q$ y $f(q) = p$, con lo que $f^2(p) = f(f(p)) = f(q) = p$ y $f^2(q) = f(f(q)) = f(p) = q$. Así pues, los 2-ciclos de (2.6) se pueden determinar hallando los puntos de equilibrio de

$$X_{n+1} = f\left(f\left(X_n\right)\right) = f^2\left(X_n\right),$$

que se corresponden con los puntos de corte de la gráfica de la función compuesta $f^2 = f \circ f$ con la diagonal principal. En este caso, si representamos la gráfica de la función f original, un 2-ciclo aparece representado por un rectángulo, como en la Figura 2.6.

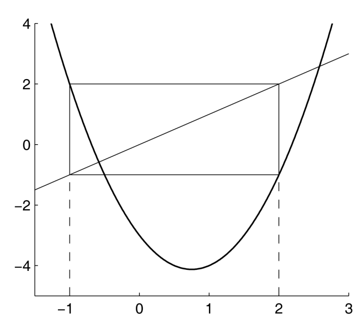

Figura 2.6: Representación del 2-ciclo $\{-1, 2\}$ en la ED $X_{n+1} = 2X_n^2 - 3X_n - 3$.

Además, el procedimiento utilizado para hallar 2-ciclos se puede generalizar para hallar N-ciclos mediante los puntos de corte de la gráfica de $f^N = f \circ \overset{N}{\ldots} \circ f$ con la diagonal principal. Por ejemplo, en la Figura 2.7 se representan los cortes de la diagonal principal con la llamada "función tienda"

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \in [0, 1/2] \\ 2\,(1-x) & \text{si} \quad x \in \,]1/2, 1]\,, \end{cases}$$

junto con las funciones compuestas f^2 y f^3, hallándose de esta forma puntos fijos, 2-ciclos y 3-ciclos respectivamente.

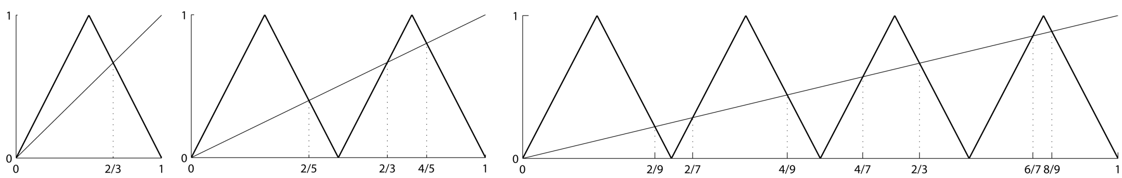

Figura 2.7: Función tienda f (izquierda) y sus funciones compuestas f^2 (centro) y f^3 (derecha). Los cortes de estas funciones con la diagonal principal se corresponden con dos puntos fijos (0 y 2/3), un 2-ciclo ($\{2/5, 4/5\}$) y dos 3-ciclos ($\{2/9, 4/9, 8/9\}$ y $\{2/7, 4/7, 6/7\}$).

Si la función f es creciente, sus soluciones son monótonas. En este caso, la resolución gráfica da como resultado un dibujo "escalonado". Si la gráfica de f en el punto $(X_0, f\,(X_0))$ queda por encima de la diagonal principal (es decir, si $f\,(X_0) > X_0$), la solución será creciente; por el contrario, si la gráfica de f en $(X_0, f\,(X_0))$ queda por debajo de la diagonal principal, la solución será decreciente (ver Figura 2.8).

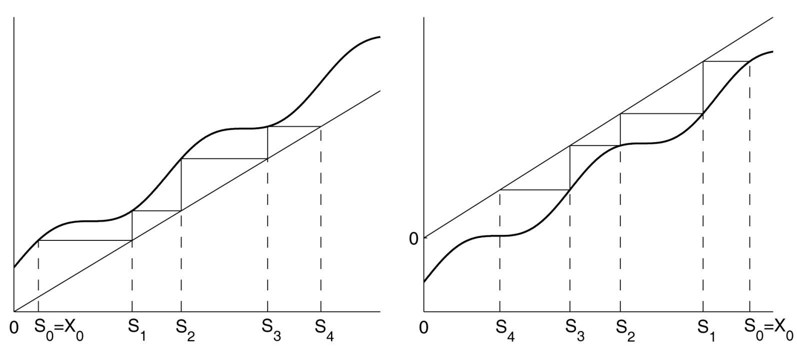

Figura 2.8: Resolución gráfica de PVIs cuyas soluciones son crecientes (izquierda) o decrecientes (derecha), dependiendo de si la gráfica de la correspondiente $f(x)$ está por encima o por debajo de la diagonal principal.

Si la función f es decreciente, sus soluciones son oscilantes y la resolución gráfica tiene un aspecto de "espiral" o "tela de araña", como en la Figura 2.4.

Finalmente, si la función f es continua, parece ser que las soluciones convergentes siempre tienen como límite a un punto fijo, es decir, convergen a un corte de la gráfica de f

con la diagonal principal (ver Figuras 2.3 y 2.4). De hecho, se puede enunciar el siguiente resultado, que posteriormente nos resultará útil:

Proposición 1 *Las soluciones convergentes de una ED de la forma* (2.6) *con f continua, convergen a un punto de equilibrio de dicha ED.*

Demostración. Sea S_n una solución de (2.6) convergente a un punto p. Veamos que p es un punto de equilibrio, es decir, que $f(p) = p$.

Como f es continua, se tiene que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - p| < \delta$ entonces $|f(x) - f(p)| < \epsilon$. Por otro lado, como S_n converge a p, se tiene que dado un $\delta > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ entonces $|S_n - p| < \delta$. Combinando estas dos propiedades, se tiene que para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ entonces $|f(S_n) - f(p)| < \epsilon$, con lo que la sucesión cuyo término general es $f(S_n)$ converge a $f(p)$. Ahora bien, como S_n es solución, $f(S_n) = S_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto la sucesión $\{f(S_n)\}_{n=0}^{+\infty}$ coincide con la sucesión $\{S_n\}_{n=1}^{+\infty}$ que es convergente a p. Por la unicidad del límite, se concluye que $f(p) = p$.

$\square$

Por último, en la Figura 2.9 se hallan gráficamente los 10 primeros términos de la solución del PVI (2.5), que es densa en $[0, 1]$.

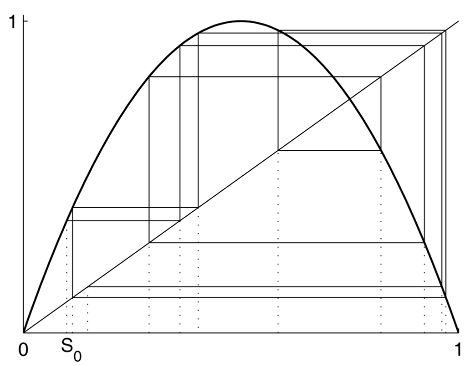

Figura 2.9: Resolución gráfica del PVI (2.5) (10 primeros términos).

2.2.2. EDs monótonas

Una ED de la forma (2.6) es *monótona* si dadas dos soluciones cualesquiera S_n y $\tilde{S}_n$ tales que $S_0 < \tilde{S}_0$, se verifica $S_n < \tilde{S}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se puede comprobar a partir de la definición que para que la ED (2.6) sea monótona es necesario y suficiente que f sea una función estrictamente creciente. A continuación vamos a describir las propiedades más significativas de las soluciones de esta clase de ecuaciones.

Proposición 2 *Las soluciones no constantes de una ED monótona son estrictamente monótonas (estrictamente crecientes o estrictamente decrecientes).*

Demostración. Sea S_n una solución no constante de una ED monótona de la forma (2.6). Se dan los siguientes casos:

- si $S_0 < S_1$ entonces $S_1 = f(S_0) < f(S_1) = S_2$;
- si $S_0 > S_1$ entonces $S_1 = f(S_0) > f(S_1) = S_2$,

ya que f es estrictamente creciente. Repitiendo este razonamiento se llega a que S_n es estrictamente creciente o estrictamente decreciente, respectivamente.

□

Nótese que una misma ED puede tener unas soluciones que sean estrictamente crecientes y otras soluciones que sean estrictamente decrecientes.

A continuación veremos una propiedad que nos asegura que los puntos de equilibrio de una ED monótona son barreras infranqueables para sus soluciones.

Proposición 3 *Sea S_n una solución de una ED monótona y sea p un punto de equilibrio de dicha ED.*

- *Si $S_0 < p$ entonces $S_n < p$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*
- *Si $p < S_0$ entonces $p < S_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Considerando la ED monótona de la forma (2.6), se tiene:

- si $S_0 < p$ entonces $S_1 = f(S_0) < f(p) = p$;
- si $S_0 > p$ entonces $S_1 = f(S_0) > f(p) = p$,

ya que f es estrictamente creciente. Repitiendo este razonamiento se llega a que $S_n < p$ ó $S_n > p$ para todo $n \in \mathbb{N}$, respectivamente.

□

Proposición 4 *Si S_n es una solución no constante y acotada de una ED monótona de la forma* (2.6)*, entonces es convergente. Además, si f es continua, la solución converge a un punto de equilibrio de dicha ED.*

Demostración. Si S_n es una solución no constante de una ED monótona, por la Proposición 2 es estrictamente monótona. Además, si es acotada, por el Teorema 1 es convergente. Finalmente, si f es continua, por la Proposición 1 la solución S_n converge a un punto de equilibrio de dicha ED.

□

Nótese que la hipótesis "f es continua" es necesaria para que el límite de la solución sea un punto de equilibrio. Por ejemplo, dada la función estrictamente creciente

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x < 0 \\[2ex] x+1 & \text{si} \quad x \geq 0, \end{cases}$$

entonces la sucesión cuyo término general es $S_n = -\frac{1}{2^n}$ es solución de la ED monótona asociada $X_{n+1} = f(X_n)$, está acotada, converge a 0, pero 0 no es un punto de equilibrio.

Proposición 5 *Sean S_n y $\tilde{S}_n$ dos soluciones (estrictamente creciente y estrictamente decreciente respectivamente) de una ED monótona con f continua.*

- *Si $S_0 < \tilde{S}_0$ entonces existe un punto de equilibrio p tal que $S_n < p < \tilde{S}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*
- *Si $\tilde{S}_0 < S_0$ entonces existe un punto de equilibrio p tal que $\tilde{S}_n < p < S_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Consideremos el primer caso en el que $S_0 < \tilde{S}_0$. Como S_n es estrictamente creciente, se tiene que $f(S_0) = S_1 > S_0$, con lo que $f(S_0) - S_0 > 0$. Por otro lado, como $\tilde{S}_n$ es estrictamente decreciente, se tiene que $f(\tilde{S}_0) = \tilde{S}_1 < \tilde{S}_0$, con lo que $f(\tilde{S}_0) - \tilde{S}_0 < 0$. Como f es continua, la función $f(x) - x$ también es continua, y por el Teorema de Bolzano existe un punto $p \in]S_0, \tilde{S}_0[$ en el que la función $f(x) - x$ se anula; es decir, $f(p) = p$, con lo que p es un punto de equilibrio. Por la Proposición 3 se concluye que $S_n < p < \tilde{S}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Análogamente, se demuestra para el segundo caso.

□

Diagramas de monotonía

El hecho de que las soluciones de las ED monótonas tengan un comportamiento estrictamente monótono hace que el estudio dinámico de estas ecuaciones sea especialmente sencillo y que se pueda describir mediante un simple dibujo: el llamado *diagrama de monotonía*. Se trata de representar la recta real indicando en ella los puntos de equilibrio y el tipo de monotonía de las soluciones no constantes. Los puntos de equilibrio se representan mediante pequeños puntos, las soluciones estrictamente crecientes se indican mediante una flecha que apunta hacia la derecha y las soluciones estrictamente decrecientes se representan mediante una flecha que apunta hacia la izquierda. En general, es fácil representar el diagrama de monotonía de una ED monótona a partir de la gráfica de la función f y la diagonal principal: los puntos de equilibrio son los puntos de corte entre ambas gráficas, las soluciones son estrictamente crecientes cuando la gráfica de f queda por encima de la diagonal principal, y las soluciones son estrictamente decrecientes cuando la gráfica de f queda por debajo de la diagonal principal.

De este modo, los puntos de equilibrio dividen a la recta real en varios "tramos", y si f es continua, por la Proposición 5 se tiene que en cada tramo todas las soluciones se comportan de la misma forma (es decir, o bien son estrictamente crecientes o estrictamente decrecientes).

Además, si f es continua, por la Proposición 4 se tiene que si S_n es una solución estrictamente creciente acotada superiormente por uno o varios puntos de equilibrio, entonces S_n converge al mínimo de los puntos de equilibrio que sean cota superior. Análogamente, si S_n es una solución estrictamente decreciente acotada inferiormente por uno o varios puntos de equilibrio, entonces S_n converge al máximo de los puntos de equilibrio que conformen una cota inferior.

Ejemplo 17 Consideremos la ED

$$X_{n+1} = X_n + e^{X_n}. \tag{2.11}$$

La función $f(x) := x+e^x$ es estrictamente creciente ya que la derivada es siempre positiva[1]:

$$f'(x) = 1 + e^x > 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Además, la ED carece de puntos de equilibrio ya que

$$f(x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad e^x = 0,$$

y esta ecuación no tiene solución. Por último, observamos que dada una condición inicial X_0, se tiene

$$X_1 = X_0 + e^{X_0} > X_0,$$

y por tanto todas las soluciones de la ED van a ser estrictamente crecientes. Esto último también se puede deducir tomando un caso particular, por ejemplo $X_0 = 0$, y viendo que $X_1 = f(0) = 0 + e^0 = 1 > 0$; en virtud de la Proposición 5 se concluye también que todas las soluciones serán estrictamente crecientes.

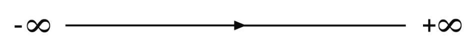

Figura 2.10: Diagrama de monotonía de la ED (2.11).

Las observaciones anteriores nos permiten asegurar que el diagrama de monotonía de esta ED tiene un único tramo (ya que no hay puntos de equilibrio) con todas las soluciones estrictamente crecientes (ver Figura 2.10), que divergen a $+\infty$.

Ejemplo 18 Consideremos la ED

$$X_{n+1} = X_n^3 + X_n. \tag{2.12}$$

La función $f(x) := x^3 + x$ es estrictamente creciente ya que la derivada es siempre positiva:

$$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como

$$f(x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad x^3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0,$$

se tiene que $p = 0$ es el único punto de equilibrio de la ED (2.12). Observamos que si $X_0 > 0$,

$$X_1 = X_0^3 + X_0 > X_0,$$

y por lo tanto la solución con condición inicial X_0 será estrictamente creciente. En cambio, si $X_0 < 0$,

$$X_1 = X_0^3 + X_0 < X_0,$$

y la solución correspondiente será estrictamente decreciente. Utilizando la Proposición 5, esto también se puede deducir escogiendo una condición inicial particular en cada tramo del diagrama de monotonía, y estudiando el siguiente término de la solución correspondiente. Por ejemplo, si escogemos $X_0 = 1$, entonces $X_1 = f(1) = 2 > X_0$, con lo que las soluciones con condición inicial en el tramo $]0, +\infty[$ serán estrictamente crecientes y divergentes a $+\infty$; por otro lado, si escogemos $X_0 = -1$, entonces $X_1 = f(-1) = -2 < X_0$ y las soluciones

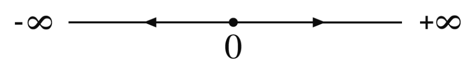

Figura 2.11: Diagrama de monotonía de la ED (2.12).

con condición inicial en el tramo $]-\infty, 0[$ serán estrictamente decrecientes y divergentes a $-\infty$. El diagrama de monotonía correspondiente se representa en la Figura 2.11.

Ejemplo 19 Consideremos la ED

$$X_{n+1} = X_n^3 + X_n^2 + X_n. \tag{2.13}$$

La función $f(x) := x^3 + x^2 + x$ es estrictamente creciente ya que la derivada es siempre positiva:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + (x+1)^2 > 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como

$$f(x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad x^3 + x^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = 0, \end{cases}$$

se tiene que los puntos de equilibrio de la ED (2.13) son $p_1 = -1$ y $p_2 = 0$. Utilizando la Proposición 5, si escogemos $X_0 = 1$, entonces $X_1 = f(1) = 3 > X_0$, con lo que las soluciones con condición inicial en el tramo $]0, +\infty[$ serán estrictamente crecientes y divergentes a $+\infty$; por otro lado, si escogemos $X_0 = -0.5$, entonces $X_1 = f(-0.5) = -0.375 > X_0$, con lo que las soluciones con condición inicial en el tramo $]-1, 0[$ también serán estrictamente crecientes pero convergentes a 0; finalmente, si escogemos $X_0 = -2$, entonces $X_1 = f(-2) = -6 < X_0$, con lo que las soluciones con condición inicial en el tramo $]-\infty, -1[$ serán estrictamente decrecientes y divergentes a $-\infty$. El diagrama de monotonía correspondiente se representa en la Figura 2.12.

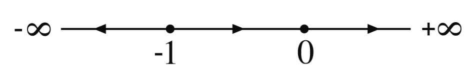

Figura 2.12: Diagrama de monotonía de la ED (2.13).

Ejemplo 20 Consideremos la ED

$$X_{n+1} = \frac{1}{10}X_n^3 - \frac{1}{2}X_n^2 + \frac{6}{5}X_n + \frac{4}{5}. \tag{2.14}$$

La función $f(x) := \frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{6}{5}x + \frac{4}{5}$ es estrictamente creciente ya que la derivada es siempre positiva:

$$f'(x) = \frac{3}{10}x^2 - x + \frac{6}{5} = \frac{3}{10}\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{11}{30} > 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

[1] Para demostrar que una función derivable en un intervalo es estrictamente creciente en dicho intervalo basta con comprobar que la derivada nunca es negativa, y sólo se anula en un conjunto discreto de puntos.

Como

$$f(x) = x \iff \frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{4}{5} = 0 \iff \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \\ x = 4, \end{cases}$$

se tiene que los puntos de equilibrio de la ED (2.14) son $p_1 = -1$, $p_2 = 2$ y $p_3 = 4$. Utilizando la Proposición 5, si escogemos $X_0 = 5$, entonces $X_1 = f(5) = 6.8 > X_0$, con lo que las soluciones con condición inicial en el tramo $]4, +\infty[$ serán estrictamente crecientes y divergentes a $+\infty$; si escogemos $X_0 = 3$, entonces $X_1 = f(3) = 2.6 < X_0$, con lo que las soluciones con condición inicial en el tramo $]2, 4[$ serán estrictamente decrecientes y convergentes a 2; si escogemos $X_0 = 0$, entonces $X_1 = f(0) = 0.8 > X_0$, con lo que las soluciones con condición inicial en el tramo $]-1, 2[$ serán estrictamente crecientes y convergentes a 2; finalmente, si escogemos $X_0 = -2$, entonces $X_1 = f(-2) = -4.4 < X_0$, con lo que las soluciones con condición inicial en el tramo $[-\infty, -1[$ serán estrictamente decrecientes y divergentes a $-\infty$. El diagrama de monotonía correspondiente se representa en la Figura 2.13.

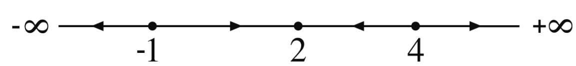

Figura 2.13: Diagrama de monotonía de la ED (2.14).

Ejemplo 21 Veamos ahora un caso en donde la ED no está definida en todo $\mathbb{R}$, sino en $[0, +\infty[$:

$$X_{n+1} = \frac{2X_n}{X_n + 1}, \qquad X_n \geq 0. \tag{2.15}$$

En este caso, se puede comprobar que la función $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ definida en $[0, +\infty[$ tiene sus imágenes también en $[0, +\infty[$, con lo que no habrá problemas de dominio al intentar calcular imágenes sucesivas. Por lo tanto, dada una condición inicial $X_0 \geq 0$, siempre se podrá calcular la solución correspondiente para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para ver si $f(x)$ es estrictamente creciente en $[0, +\infty[$, como es continua y derivable en su interior $]0, +\infty[$, basta con estudiar su derivada, $f'(x) = \dfrac{2}{(1+x)^2}$, que es estrictamente positiva para todo $x > 0$. Nótese que si consideramos el dominio de definición $]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$, aunque la derivada sigue siendo estrictamente positiva, el dominio no es un intervalo conexo (se podría decir que hay una discontinuidad en -1, aunque en realidad f no está definida en -1) y no se puede asegurar que f sea estrictamente creciente. De hecho, no lo es (compruébese dibujando la gráfica de f).

Una vez comprobado que $f(x)$ es estrictamente creciente en $[0, +\infty[$, se procede a hallar los puntos de equilibrio, que son $p_1 = 0$ y $p_2 = 1$ (compruébese). Escogiendo condiciones iniciales en los tramos $]0, 1[$ y $]1, +\infty[$, se comprueba que el diagrama de monotonía correspondiente viene dado por la Figura 2.14.

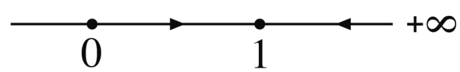

Figura 2.14: Diagrama de monotonía de la ED (2.15).

2.2.3. Teoría de estabilidad de puntos de equilibrio

Observando los diagramas de monotonía de las EDs monótonas, nos damos cuenta de que hay puntos de equilibrio que "atraen" a las soluciones (si la derivada de f en ese punto es menor que 1) y puntos de equilibrio que "repelen" a las soluciones (si la derivada de f en ese punto es mayor que 1). Esto se puede generalizar a EDs no necesariamente monótonas de la forma (2.6). Así pues, a lo largo de esta sección, $p \in \mathbb{R}$ denotará un punto de equilibrio de la ED (2.6) y clasificaremos estos puntos de equilibrio dependiendo de cómo evolucionen las soluciones de (2.6) cuyas condiciones iniciales estén próximas a p.

Atractores

Diremos que $X_0 \in \mathbb{R}$ es *atraído* por el punto de equilibrio p si la solución de (2.6) con condición inicial X_0 es convergente a p. Teniendo esto en cuenta, se define la *región de atracción* del punto de equilibrio p como el conjunto

$$\mathcal{R}(p) := \{X_0 \in \mathbb{R} \,:\, X_0 \text{ es atraído por } p\}\,.$$

Nótese que el conjunto $\mathcal{R}(p)$ nunca es vacío ya que $p \in \mathcal{R}(p)$ siempre.

También se puede definir la región de atracción del punto de equilibrio p usando el concepto de conjunto ω-límite:

$$\mathcal{R}(p) := \{X_0 \in \mathbb{R} \,:\, L_\omega\left(\mathcal{S}\left(X_0\right)\right) = \{p\}\}\,,$$

en donde $L_\omega\left(\mathcal{S}\left(X_0\right)\right)$ es el conjunto ω-límite de la única solución con condición inicial X_0, que ha de ser acotada. Esta definición alternativa y equivalente tiene la ventaja de que se puede usar para generalizar y definir el concepto de *región de atracción de un ciclo*, que abordaremos en la Sección 2.2.5.

Ejemplo 22 Se considera la ED

$$X_{n+1} = \frac{1}{2} X_n,$$

de la que $p = 0$ es un punto de equilibrio. La solución de esta ED con condición inicial X_0 es la sucesión cuyo término general es

$$S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n X_0.$$

Puesto que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n X_0 = 0, \qquad \forall X_0 \in \mathbb{R},$$

resulta que $\mathcal{R}(0) = \mathbb{R}$.

Diremos que un punto de equilibrio p es un *atractor* si p es un punto interior de su región de atracción; es decir, si existe $\epsilon > 0$ tal que

$$[p - \epsilon, p + \epsilon] \cap \mathrm{dom}(f) \subset \mathcal{R}(p).$$

Cuando $\mathcal{R}(p) = \mathbb{R}$ se dice que p es un *atractor global*. No obstante, el concepto de atractor global también se aplica cuando $\mathcal{R}(p)$ es todo el dominio (ya sea matemático o económico) de la función f de la ED (2.6). En caso contrario, se dice que p es un *atractor local*.

Así pues, en el ejemplo anterior, $p = 0$ es un atractor global. Pero no todos los atractores son atractores globales. Obviamente, si la ED tiene más de un punto de equilibrio, entonces ninguno de ellos es un atractor global.

Por último, si nos fijamos en los ejemplos anteriores resueltos gráficamente, podemos llegar a la conclusión de que un punto de equilibrio p es atractor si $|f'(p)| < 1$. Este resultado será posteriormente enunciado con más rigor dentro del *criterio de la primera aproximación* en la Sección 2.5.

Ejemplo 23 La ED

$$X_{n+1} = X_n^2$$

tiene dos puntos de equilibrio: $p_1 = 0$ y $p_2 = 1$. En este caso, $f(x) := x^2$ verifica la siguiente propiedad:

$$\begin{cases} f(x) > x & \text{si } x > 1 \\ 0 < f(x) < x & \text{si } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Ello se observa muy bien en la gráfica de la función (ver Figura 2.15).

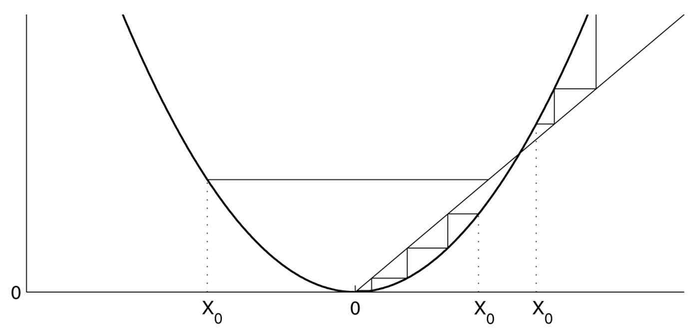

Figura 2.15: Resolución gráfica de $X_{n+1} = X_n^2$ para diversas condiciones iniciales X_0.

Razonando sobre la gráfica de la función, o utilizando la propiedad señalada, se observa que:

- Si la condición inicial $X_0 \in \,]0, 1[$ entonces la correspondiente solución converge a 0.
- Si la condición inicial $X_0 > 1$ entonces la correspondiente solución diverge a $+\infty$.
- Si la condición inicial $X_0 \in \,]-1, 0[$ entonces los siguientes términos de la correspondiente solución son positivos y dicha solución converge a 0.
- Si la condición inicial $X_0 < -1$ entonces los siguientes términos de la correspondiente solución son positivos y dicha solución diverge a $+\infty$.

como consecuencia se obtiene que

$$\mathcal{R}(0) =]-1, 1[\,, \qquad \mathcal{R}(1) = \{-1, 1\}\,.$$

Por lo tanto, $p_1 = 0$ es un atractor local, mientras que $p_2 = 1$ no es un atractor. Nótese que $|f'(0)| = 0 < 1$ y $|f'(1)| = 2 > 1$. Posteriormente, en el Ejemplo 32 veremos que $p_2 = 1$ es un "repulsor".

Ejemplo 24 Consideremos una ED monótona cuyo diagrama de monotonía viene dado por la Figura 2.16.

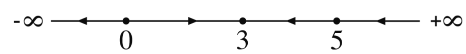

Figura 2.16: Diagrama de monotonía del Ejemplo 24.

Las regiones de atracción de los puntos de equilibrio son

$$\mathcal{R}(0) = \{0\}\,, \qquad \mathcal{R}(3) =]0, 5[\,, \qquad \mathcal{R}(5) = [5, +\infty[\,.$$

Así pues, el único atractor es el punto de equilibrio 3, ya que ni 0 ni 5 están en el interior de su región de atracción.

Conjuntos invariantes

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es un *conjunto invariante* para la ED (2.6) si la imagen por f de cualquier punto de A pertenece al conjunto A, es decir, si se verifica

$$f(A) \subset A,$$

en donde $f(A) := \{f(x) \in \mathbb{R} \, : \, x \in A\}$.

Una definición equivalente se puede dar en términos de las soluciones de la ED (2.6): un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es invariante si dada una condición inicial $X_0 \in A$ se cumple que la solución $\mathcal{S}(X_0)$ está contenida en A.

Ejemplo 25 El intervalo $[-4, 6]$ es invariante para la ED

$$X_{n+1} = \frac{1}{2} X_n.$$

En este caso, $f(x) := x/2$ y se tiene que

$$x \in [-4, 6] \implies -4 \leq x \leq 6 \implies -2 \leq \frac{x}{2} \leq 3 \implies f(x) \in [-2, 3] \subset [-4, 6]\,.$$

Sin embargo, el intervalo $A = [2, 5]$ no es invariante para la misma ED ya que $2 \in A$ pero $f(2) = 1 \notin A$.

Ejemplo 26 El intervalo $A = [-4, 6]$ no es invariante para la ED

$$X_{n+1} = -X_n.$$

En este caso, $f(x) := -x$ y se tiene que $6 \in A$ pero $f(6) = -6 \notin A$. Observamos que cualquier intervalo simétrico centrado en 0 sí es invariante para esta ED.

Proposición 6 *Dado un intervalo compacto* $[a, b] \subset \mathbb{R}$*, sean*

$$M := \max \{f(x) : x \in [a, b]\}, \qquad m := \min \{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Entonces $[a, b]$ *es un conjunto invariante para la ED* (2.6) *si y sólo si se cumple que* $M, m \in [a, b]$.

Ejemplo 27 Estudiemos cuándo el intervalo $[0, 1]$ es invariante para la ED

$$X_{n+1} = rX_n (1 - X_n), \qquad r > 0.$$

Para ello calculamos

$$M = \max \{rx (1 - x) : x \in [0, 1]\} = \frac{r}{4}, \qquad m := \min \{rx (1 - x) : x \in [0, 1]\} = 0.$$

Así pues, el intervalo $[0, 1]$ será invariante cuando $r/4 \in [0, 1]$; es decir, cuando $0 < r \leq 4$.

Estabilidad

Diremos que p es un punto de equilibrio *estable* para la ED (2.6) cuando existan dos sucesiones de números reales positivos $\{\epsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes[2] a 0 y además todos los intervalos

$$I_n := [p - \epsilon_n, p + \delta_n]$$

sean invariantes.

En otras palabras, el punto de equilibrio p es estable si tiene una base de entornos invariantes, es decir, una familia de intervalos que contienen a p en su interior, que son invariantes y que existen elementos de la familia cuya longitud es tan pequeña como se quiera.

Otra definición alternativa (aunque no equivalente) puede hacerse utilizando el concepto de distancia: p es estable si

$$\lim_{X_0 \to p} \operatorname{dist} (\mathcal{S}(X_0), p) = 0,$$

siendo $\operatorname{dist} (\mathcal{S}(X_0), p)$ el supremo del conjunto $\{|S_n - p| \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \mathcal{S}(X_0)$, es decir, la solución con condición inicial X_0.

La idea subyacente de la estabilidad es que soluciones con condiciones iniciales cercanas a p se quedan cerca de p, pero no necesariamente son atraídas por p. Aunque ambas definiciones se rigen por esta directriz, a lo largo del curso usaremos la primera definición.

Ejemplo 28 Dada la ED

$$X_{n+1} = \frac{1}{2} X_n,$$

se tiene que $p = 0$ es el único punto de equilibrio, y además es estable. Basta tomar las sucesiones con término general $\epsilon_n = \delta_n = \frac{1}{n}$ (con $n \geq 1$) y comprobar directamente (como se hizo en el Ejemplo 25) que los intervalos de la forma $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ son invariantes.

[2] Se suele usar la notación $\{\epsilon_n\} \downarrow 0$ para indicar que la sucesión $\{\epsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de números reales positivos, es decreciente y converge a 0.

Ejemplo 29 Exactamente lo mismo se puede decir de la ED

$$X_{n+1} = -X_n,$$

ya que $p = 0$ es el único punto de equilibrio y además los intervalos de la forma $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ (con $n \geq 1$) son invariantes. Podemos asegurar por tanto que el punto de equilibrio $p = 0$ es estable, pero no es atractor.

Cuando un punto de equilibrio de (2.6) no sea estable, diremos que es *inestable*.

Ejemplo 30 Dada la ED

$$X_{n+1} = 2X_n,$$

se tiene que $p = 0$ es un punto de equilibrio inestable. Para comprobarlo, se puede razonar por reducción al absurdo. Supongamos que existen sucesiones $\{\epsilon_n\} \downarrow 0$ y $\{\delta_n\} \downarrow 0$ tales que $I_n := [-\epsilon_n, \delta_n]$ es invariante para cada $n \in \mathbb{N}$. Pero esta afirmación es falsa, ya que $\epsilon_n \in I_n$ y sin embargo $f(\epsilon_n) = 2\epsilon_n \notin I_n$.

Aunque en los Ejemplos 28 y 29 el punto de equilibrio es estable, existe una diferencia notable en la evolución de las soluciones de una y otra ecuación. Mientras que en el primer caso el punto de equilibrio es un atractor, en el segundo caso no lo es. A la vista de los ejemplos anteriores, podría pensarse que todo atractor es un punto de equilibrio estable. Así ocurre habitualmente, pero no siempre. Por tanto, podemos introducir un nuevo concepto: diremos que p es un punto de equilibrio *asintóticamente estable* para la ED (2.6) si p es estable y atractor.

Todos los ejemplos de atractores que han aparecido son puntos de equilibrio asintóticamente estables. De hecho, todos los atractores de EDs monótonas o lineales (véase la Sección 2.4) son asintóticamente estables. No obstante, a continuación veremos un contraejemplo de punto fijo atractor no estable.

Ejemplo 31 Si consideramos la función

$$f(x) = \begin{cases} x/2 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 1000 \text{ si } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

entonces $p = 0$ es un punto fijo atractor no estable de la ED correspondiente (2.6).

ED inversa. Repulsión

Dada una ED de la forma (2.6), si la función f es biyectiva (es decir, estrictamente creciente o estrictamente decreciente) en un entorno de un punto p, nos podemos plantear la ED *inversa*

$$X_{n+1} = f^{-1}(X_n),$$

en donde f^{-1} es la función inversa de f. Esto se podrá asegurar, por ejemplo, si f es derivable en ese entorno y $f'(p) \neq 0$, aunque hay casos en los que f es biyectiva, derivable, y su derivada se anula en algún punto, como por ejemplo $f(x) = x^3$.

Si p es un punto de equilibrio de la ED original, también lo es de la ED inversa, ya que si $f(p) = p$ entonces $f^{-1}(p) = p$. Teniendo esto en cuenta, diremos que p es un punto de equilibrio *repulsor* (de la ED original) si es un punto de equilibrio atractor de la ED inversa. Según esto, los atractores de la ED inversa son los repulsores de la ED original, y viceversa. La idea subyacente al concepto de "repulsor" es que soluciones que se acercan lo suficiente al correspondiente punto de equilibrio se alejan de él en sucesivas iteraciones (aunque luego pueda volver a acercarse).

Si nos fijamos en los ejemplos anteriores resueltos gráficamente, podemos llegar a la conclusión de que un punto de equilibrio p es repulsor si $|f'(p)| > 1$. En este caso, $|\left(f^{-1}\right)'(p)| = 1/|f'(p)| < 1$, con lo que p es atractor de la ED inversa. Este resultado será posteriormente enunciado con más rigor dentro del *criterio de la primera aproximación* en la Sección 2.5.

Finalmente, se define la *región de repulsión* de p como la región de atracción de este punto de equilibrio en la ED inversa, con lo que p se dice que es un repulsor *global* si su región de repulsión es todo $\mathbb{R}$.

Ejemplo 32 Dada la ED

$$X_{n+1} = X_n^2, \tag{2.16}$$

se tiene que $p = 1$ es un punto de equilibrio (véase Ejemplo 23). Además, la función $f(x) := x^2$ es biyectiva alrededor de este punto, concretamente, es estrictamente creciente en $]0, +\infty[$, y su función inversa en este intervalo viene dada por $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Así pues, la ED inversa de (2.16) es

$$X_{n+1} = \sqrt{X_n}.$$

Esta ED tiene a $p = 1$ como un punto de equilibrio atractor, ya que $|(f^{-1})'(1)| = 1/2 < 1$ y además se puede comprobar fácilmente que su región de atracción es $\mathcal{R}(1) =]0, +\infty[$. Por lo tanto, $p = 1$ es un punto de equilibrio repulsor de la ED (2.16).

En resumen, dado p un punto de equilibrio de una ED autónoma de primer orden explícita, diremos que es atractor, repulsor o estable si soluciones con condiciones iniciales cercanas a p

- tienden a $p \Longrightarrow$ atractor.
- se alejan de $p \Longrightarrow$ repulsor.
- no se alejan de $p \Longrightarrow$ estable.

El concepto de "alejarse" es un poco ambiguo y es relativo a lo cercana que está la condición inicial de p. Además, cabe señalar que una solución que se acerca a un repulsor y es "repelida" por éste, puede volver a acercarse en futuras iteraciones, como por ejemplo pasa en la ED 2.10, en donde hay tres puntos fijos repulsores que se van "pasando" las sucesivas iteraciones de uno a otro. De este modo, todo punto de equilibrio repulsor no puede ser ni atractor ni estable, y normalmente, todo punto atractor es estable, pero un punto estable puede no ser atractor.

2.2.4. Ejemplos. Modelos discretos de oferta-demanda

Un modelo de oferta-demanda de un determinado producto tiene como elementos una función oferta, una función demanda (ambas dependientes del precio del producto) y una ley que dicta el comportamiento del precio del producto a lo largo del tiempo, dependiendo de las funciones oferta y demanda. Además, se han de cumplir las tres leyes de la oferta y la demanda:

1. Si la demanda supera a la oferta, el precio tiende a subir. Por el contrario, si la oferta supera a la demanda, el precio tiende a bajar.

2. Si el precio aumenta, la oferta aumenta y la demanda disminuye. Por el contrario, si el precio disminuye, la oferta disminuye y la demanda aumenta.

3. Existe un único *precio de equilibrio* en el que la oferta y la demanda se igualan. Además, los precios evolucionan con el paso del tiempo hacia a este precio de equilibrio.

Obviamente, aparte de estas tres leyes, las funciones oferta y demanda han de ser positivas en su dominio, que es el conjunto de precios positivos. También está permitido que se anulen para algunos precios. Por ejemplo, la función demanda podría anularse para precios superiores a un determinado "precio tope", a partir del cual los consumidores no estarían dispuestos a adquirir el producto; y la función oferta podría anularse para precios inferiores a un determinado "precio base", por debajo del cual la empresa no podría fabricar ninguna unidad del producto. Nótese que, en estos casos, no se cumpliría la segunda ley de la oferta y la demanda que nos dice que la función demanda es estrictamente decreciente y la función oferta es estrictamente creciente, considerando que el precio es la única variable de dichas funciones. Para solucionar este conflicto se podría relajar esta ley exigiendo una monotonía pero que no sea estricta, o bien solamente se tendrían en cuenta los precios comprendidos entre el "precio base" y el "precio tope", que llamaremos *precios factibles.*

En los modelos discretos de oferta-demanda se considera que los precios solamente se actualizan cada cierto tiempo, y todos estos "tiempos de actualización" conforman la malla de tiempos del modelo. Así pues, nuestro objetivo será hallar y estudiar el comportamiento de la sucesión de precios, que será la solución de un PVI. Podemos suponer que las actualizaciones de precios se calculan a partir de los valores inmediatamente anteriores que toman la oferta, la demanda y el precio del producto, y así, la ED del PVI es explícita y de primer orden. Además, consideraremos que tanto las funciones oferta y demanda como la ley que rige el comportamiento de los precios no dependen del tiempo, y por lo tanto la ED será, además, autónoma:

$$\left\{\begin{array}{rcl} X_{n+1} & = & F\left(\mathcal{O}\left(X_n\right), \mathcal{D}\left(X_n\right), X_n\right) =: f\left(X_n\right) \\ \\ X_0 & = & p_0, \end{array}\right.$$

en donde $\mathcal{O}$ y $\mathcal{D}$ son las funciones oferta[3] y demanda respectivamente, $p_0 > 0$ es el precio inicial, y f es una función continua y positiva cuyo dominio es el conjunto de precios factibles.

Dentro de este marco, la primera ley es equivalente a exigir que

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(x) > x & \text{si} & \mathcal{D}(x) > \mathcal{O}(x) \\ \\ f(x) < x & \text{si} & \mathcal{D}(x) < \mathcal{O}(x). \end{array}\right.$$

[3]Normalmente, la función oferta se denota con la letra $\mathcal{S}$. No obstante, esta notación ya la hemos usado anteriormente para referirnos a la solución de una ED, con lo que podría causar problemas y hemos decidido denotar a la función oferta con la letra $\mathcal{O}$.

Además, la tercera ley nos dice que el precio de equilibrio, que denotaremos p_{eq}, es un punto fijo atractor cuya región de atracción ha de ser el conjunto de todos los precios factibles. Así pues, f debe satisfacer

$$\begin{cases} f(p_{\mathrm{eq}}) = p_{\mathrm{eq}} \\ \\ |f'(p_{\mathrm{eq}})| \leq 1, \end{cases}$$

aunque esta última condición solamente nos asegura que p_{eq} no es un repulsor local y habrá que comprobar mediante otras herramientas (como por ejemplo, analizando la solución general si es posible hallarla) que el precio de equilibrio atrae a todos los precios factibles.

Modelo discreto de ajuste de precios de Evans

En este modelo se toman las funciones oferta y demanda de la forma

$$\begin{cases} \mathcal{O}(x) &= ax - b \\ \\ \mathcal{D}(x) &= -cx + d, \end{cases} \tag{2.17}$$

en donde $a, c > 0$ y $b, d \geq 0$. En este caso, el "precio base" por debajo del cual la empresa no puede fabricar ninguna unidad del producto es b/a, y el "precio tope" a partir del cual ningún consumidor adquiere el producto es d/c, con lo que el conjunto de precios factibles es $]b/a, d/c[$ (ver Figura 2.17). Además, el único precio de equilibrio es

$$p_{\mathrm{eq}} = \frac{b+d}{a+c}. \tag{2.18}$$

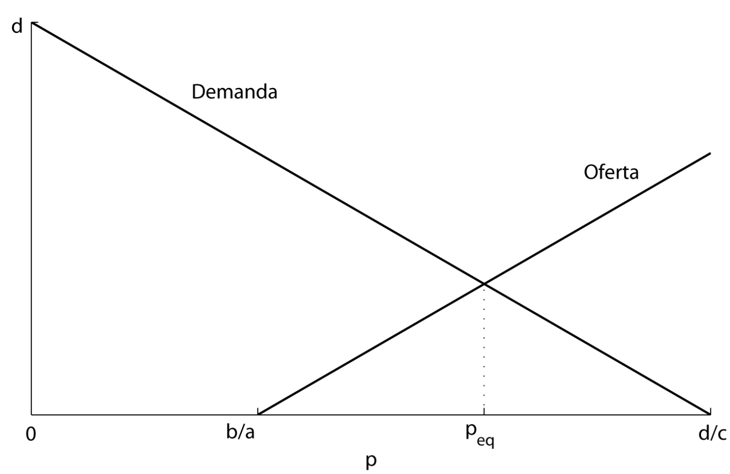

Figura 2.17: Funciones de oferta y demanda del modelo de Evans.

Estas funciones cumplen la segunda ley de la oferta y la demanda, ya que $\mathcal{O}(x)$ es estrictamente creciente y $\mathcal{D}(x)$ es estrictamente decreciente en el conjunto de precios factibles, y además son positivas.

La evolución de los precios viene dada por la ED

$$X_{n+1} = k \cdot (\mathcal{D}(X_n) - \mathcal{O}(X_n)) + X_n, \tag{2.19}$$

en donde $k > 0$. Aplicando (2.17) y (2.18) en (2.19) se obtiene

$$X_{n+1} = p_{\text{eq}} \cdot (1 - r) + r \cdot X_n, \tag{2.20}$$

en donde $r := 1 - k \cdot (a + c) < 1$. Así pues

$$f(x) = k \cdot (\mathcal{D}(x) - \mathcal{O}(x)) + x = p_{\text{eq}} \cdot (1 - r) + r \cdot x.$$

Este modelo satisface la primera ley de la oferta y la demanda, ya que si $\mathcal{D}(x) > \mathcal{O}(x)$ entonces $k \cdot (\mathcal{D}(x) - \mathcal{O}(x)) > 0$ y por lo tanto $f(x) > x$; análogamente se prueba la otra condición. Además, el precio de equilibrio p_{eq} es el único punto fijo de la ED, pero no está asegurado que sea siempre atractor. De hecho, como $f'(p_{\text{eq}}) = r$, si $|r| > 1$ entonces p_{eq} es repulsor local y no se cumpliría la tercera ley de la oferta y la demanda.

Es fácil deducir[4] y comprobar que la solución de la ED (2.20) con condición inicial p_0 viene dada por

$$S_n = p_{\text{eq}} + (p_0 - p_{\text{eq}})\, r^n,$$

y por lo tanto, $\lim_{n\to+\infty} S_n = p_{\text{eq}}$ si y sólo si $r \in \,]-1, 1[$. No obstante, como $k, a, c > 0$ se tiene que $r < 1$ siempre; así pues, para que el precio de equilibrio sea un atractor cuya región de atracción sean todos los precios factibles sólo hay que exigir $r > -1$, o lo que es lo mismo,

$$k \cdot (a + c) < 2.$$

Como casos particulares,

- si $k \cdot (a + c) < 1$, entonces $r > 0$ y la solución S_n tiende al precio de equilibrio de forma monótona.
- si $k \cdot (a + c) = 1$, entonces $r = 0$ y la solución S_n llega directamente al precio de equilibrio en $t = t_1$.
- si $1 < k \cdot (a + c) < 2$, entonces $-1 < r < 0$ y la solución S_n tiende al precio de equilibrio de forma oscilatoria. En este caso, el modelo recibe el nombre de *modelo de la telaraña*.

En el caso $k \cdot (a + c) = 2$ se tiene que $f'(p_{\text{eq}}) = r = -1$ y el precio de equilibrio es estable pero no atractor, ya que la solución S_n sería el 2-ciclo $\{p_0, 2p_{\text{eq}} - p_0\}$. Y en el caso $k \cdot (a + c) > 2$ se tiene que $f'(p_{\text{eq}}) = r < -1$ y el precio de equilibrio es repulsor. Así pues, en estos dos últimos casos se violaría la tercera ley de la oferta y la demanda, resultando un modelo no aceptable.

Modelo no lineal

Consideremos las funciones oferta y demanda de la forma

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{O}(x) & = & b \cdot x^a \\ \\ \mathcal{D}(x) & = & \dfrac{d}{x^c}, \end{array} \right. \tag{2.21}$$

[4] En el proceso de deducción de la solución general hay que tener en cuenta la expresión de la serie geométrica: $\sum_{n=n_0}^{m} r^n = \frac{r^{n_0} - r^{m+1}}{1-r}$.

en donde $a, b, c, d > 0$. En este caso, el conjunto de precios factibles son todos los precios positivos (ver Figura 2.18). Además, el único precio de equilibrio es

$$p_{\mathrm{eq}} = \left(\frac{d}{b}\right)^{\frac{1}{a+c}}. \tag{2.22}$$

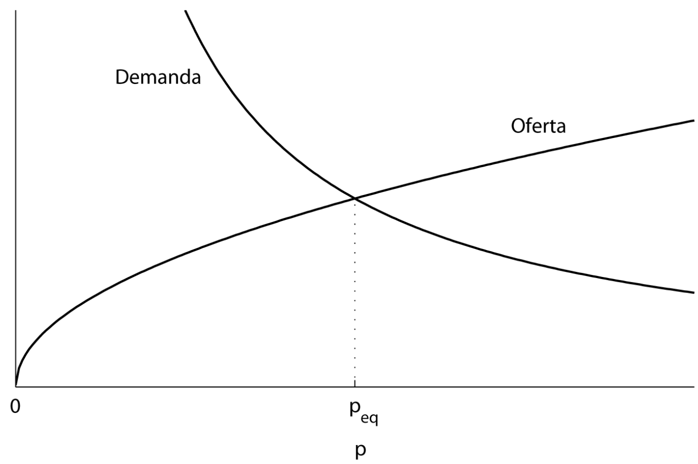

Figura 2.18: Funciones de oferta y demanda del modelo no lineal.

Estas funciones cumplen la segunda ley de la oferta y la demanda, ya que $\mathcal{O}(x)$ es estrictamente creciente y $\mathcal{D}(x)$ es estrictamente decreciente en el conjunto de precios factibles, y además son positivas.

La evolución de los precios viene dada por la ED

$$X_{n+1} = \left(\frac{\mathcal{D}(X_n)}{\mathcal{O}(X_n)}\right)^k \cdot X_n, \tag{2.23}$$

en donde $k > 0$. Aplicando (2.21) y (2.22) en (2.23) se obtiene

$$X_{n+1} = p_{\mathrm{eq}}^{1-r} \cdot X_n^r, \tag{2.24}$$

en donde $r := 1 - k \cdot (a + c) < 1$. Así pues,

$$f(x) = \left(\frac{\mathcal{D}(x)}{\mathcal{O}(x)}\right)^k \cdot x = p_{\mathrm{eq}}^{1-r} \cdot x^r.$$

Nótese que la expresión de r en este modelo no lineal es la misma que la expresión de r en el modelo lineal de Evans. De hecho, estos dos modelos guardan cierta analogía, como veremos a continuación.

Este modelo satisface la primera ley de la oferta y la demanda, ya que si $\mathcal{D}(x) > \mathcal{O}(x)$ entonces $\left(\frac{\mathcal{D}(x)}{\mathcal{O}(x)}\right)^k > 1$ y por lo tanto $f(x) > x$; análogamente se prueba la otra condición. Además, el precio de equilibrio p_{eq} es el único punto fijo de la ED, pero no está asegurado que sea siempre atractor. De hecho, como $f'(p_{\mathrm{eq}}) = r$, si $|r| > 1$ entonces p_{eq} es repulsor local y no se cumpliría la tercera ley de la oferta y la demanda.

Es fácil deducir y comprobar que la solución de la ED (2.24) con condición inicial p_0 viene dada por

$$S_n = p_{\text{eq}} \cdot \left(\frac{p_0}{p_{\text{eq}}} \right)^{r^n},$$

y por lo tanto, $\lim_{n\to+\infty} S_n = p_{\text{eq}}$ si y sólo si $r \in \left]-1,1\right[$. No obstante, como $k, a, c > 0$ se tiene que $r < 1$ siempre; así pues, para que el precio de equilibrio sea un atractor cuya región de atracción sean todos los precios factibles sólo hay que exigir $r > -1$, o lo que es lo mismo,

$$k \cdot (a + c) < 2.$$

Como casos particulares,

- si $k \cdot (a + c) < 1$, entonces $r > 0$ y la solución S_n tiende al precio de equilibrio de forma monótona.
- si $k \cdot (a + c) = 1$, entonces $r = 0$ y la solución S_n llega directamente al precio de equilibrio en $t = t_1$.
- si $1 < k \cdot (a + c) < 2$, entonces $-1 < r < 0$ y la solución S_n tiende al precio de equilibrio de forma oscilatoria.

En el caso $k \cdot (a + c) = 2$ se tiene que $f'(p_{\text{eq}}) = r = -1$ y el precio de equilibrio es estable pero no atractor, ya que la solución S_n sería el 2-ciclo $\left\{p_0, p_{\text{eq}}^2/p_0\right\}$. Y en el caso $k \cdot (a + c) > 2$ se tiene que $f'(p_{\text{eq}}) = r < -1$ y el precio de equilibrio es repulsor. Así pues, en estos dos últimos casos se violaría la tercera ley de la oferta y la demanda, resultando un modelo no aceptable.

2.2.5. Atractores y diagramas de bifurcación

Hasta ahora hemos desarrollado la teoría de estabilidad para puntos de equilibrio. No obstante, esta teoría puede generalizarse para ciclos y conjuntos en general mediante el concepto de conjunto ω-límite. Así pues, se puede definir la *región de atracción* de un conjunto cualquiera de puntos A como

$$\mathcal{R}(A) := \left\{ X_0 \in \mathbb{R} \,:\, L_\omega\left(\mathcal{S}\left(X_0\right)\right) = A \right\},$$

en donde $L_\omega\left(\mathcal{S}\left(X_0\right)\right)$ es el conjunto ω-límite de la única solución con condición inicial X_0, que ha de ser acotada. De esta forma se puede decir que un conjunto A es atractor si está en el interior de su región de atracción.

Veamos, mediante un ejemplo, otros conceptos como el de *diagrama de bifurcación*. Consideremos la ecuación logística

$$X_{n+1} = rX_n\left(1 - X_n\right), \tag{2.25}$$

dependiente del parámetro $r \in [0, 4]$. Esta ecuación se utiliza para modelizar la evolución de poblaciones en donde, al contrario que en el modelo exponencial, el número de individuos no puede crecer indefinidamente y tiene un tope máximo debido a que los recursos son limitados. La magnitud $X \in [0, 1]$ representa en este caso el tamaño poblacional relativo a este tope. Por ejemplo, 0.5 representa la mitad de la población máxima, mientras que 1 es dicha población máxima. Por otro lado, el valor $r-1$ es una especie de tasa de crecimiento para valores bajos de población, ya que en cuanto la población se acerca a su máximo, el término $(1-X_n)$ se hace pequeño y contrarresta al crecimiento. El hecho de que r no pueda superar 4 es debido a que para $r>4$, el posible conjunto de poblaciones $[0,1]$ no es invariante.

Esta ecuación posee un conjunto atractor A distinto para cada valor de r, que se puede representar en lo que se llama *diagrama de bifurcación* (ver Figura 2.19). La región de atracción de este atractor es el intervalo abierto $]0,1[$.

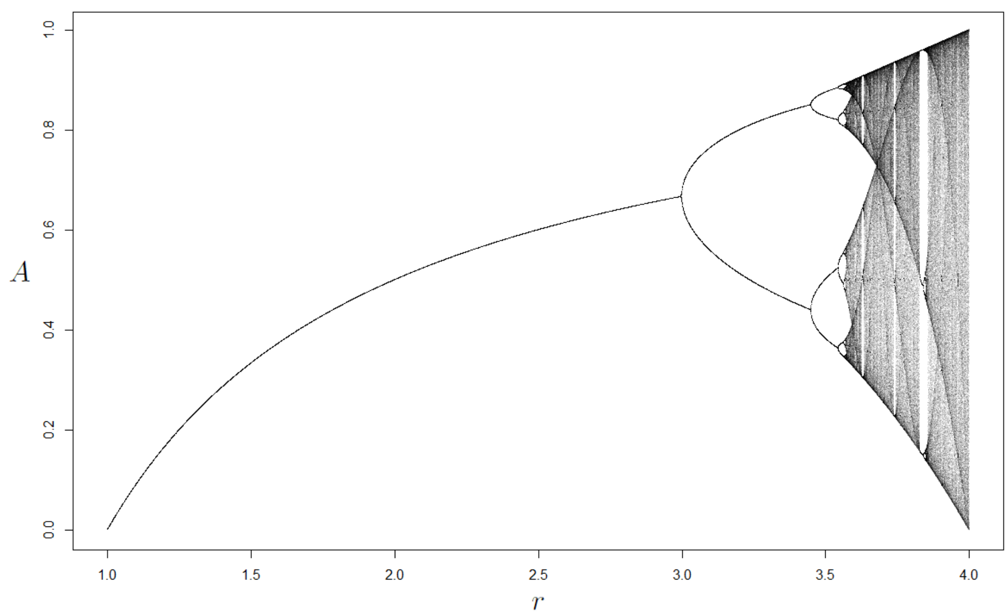

Figura 2.19: Diagrama de bifurcación de la ecuación logística (2.25) para valores de r entre 1 y 4.

En resumen, para una población inicial en $]0,1[$, se tienen los siguientes casos:

- Para $0 \leq r \leq 1$ la población se extinguirá, es decir $A=\{0\}$.
- Para $1<r\leq 3$ la población se estabilizará en el valor $\frac{r-1}{r}$, siendo éste un punto de equilibrio.
- Para $3<r\leq 1+\sqrt{6}$ (en torno a 3.45), el atractor A se bifurca en un 2-ciclo. En este caso, la población acabará oscilando entre dos valores: $\frac{r+1+\sqrt{(r+1)(r-3)}}{2r}$ y $\frac{r+1-\sqrt{(r+1)(r-3)}}{2r}$.
- Para $1+\sqrt{6}<r<3.57$ (aproximadamente), el atractor A se va bifurcando progresivamente en 4-ciclos, 8-ciclos, etc. El límite de la relación entre las longitudes de dos intervalos sucesivos de bifurcación es lo que se llama *constante de Feigenbaum*,

cuyo valor es 4.669 aproximadamente. Esta constante también aparece en otros modelos de crecimiento poblacional similares y se puede considerar una constante de la naturaleza, como el número áureo.

- Para $3.57 \leq r \leq 4$ el atractor A tiene una apariencia caótica, aunque para algunos rangos aislados de r aparecen lo que se llaman *islas de estabilidad* (ver Figura 2.20).
- Para $r > 4$, los valores poblacionales se salen del intervalo $[0, 1]$ y divergen.

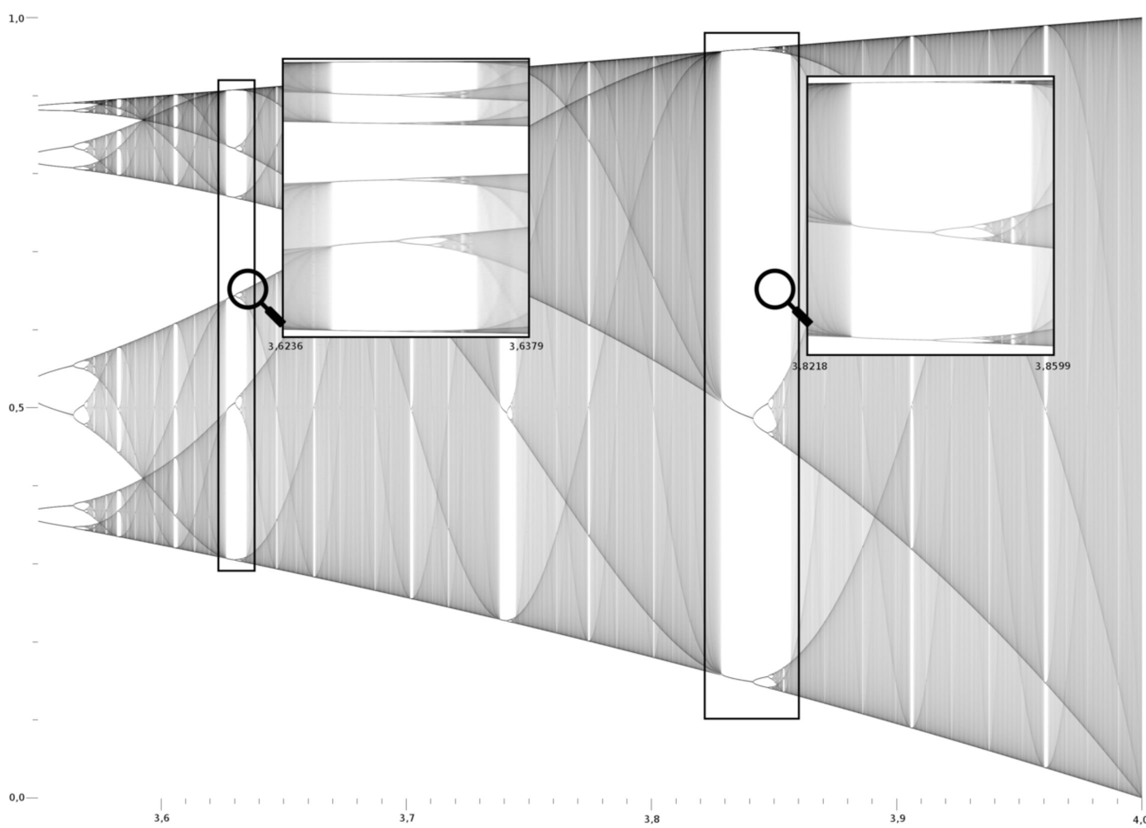

Figura 2.20: Detalle del diagrama de bifurcación de la ecuación logística (2.25) en donde se alternan zonas caóticas con islas de estabilidad.

Otro ejemplo más adecuado para modelizar de forma discreta la evolución de una población con recursos limitados es la ED

$$X_{n+1} = X_n + \lambda X_n(1 - X_n), \tag{2.26}$$

en donde $0 < \lambda \leq 3$. La magnitud X también representa el tamaño poblacional relativo, pero en este caso, $X = 1$ no es el tope de población, sino el tamaño a partir del cual la población deja de crecer y empieza a decrecer por la falta de recursos. No obstante, en este modelo también hay un tope de población que viene dado por $X = (\lambda + 1)/\lambda$. Nótese que el parámetro λ ahora sí puede interpretarse como una tasa de crecimiento que se ve contrarrestada por el tamaño de la población. Para $0 < \lambda \leq 2$ aparece un punto de equilibrio atractor en $p = 1$. Para valores de λ superiores a 2, el atractor se bifurca de forma análoga al de la ecuación logística, obteniéndose un diagrama de bifurcación muy parecido (ver Figura 2.21). La región de atracción de este atractor ahora depende del valor del parámetro λ y es el intervalo abierto $]0, (\lambda + 1)/\lambda[$.

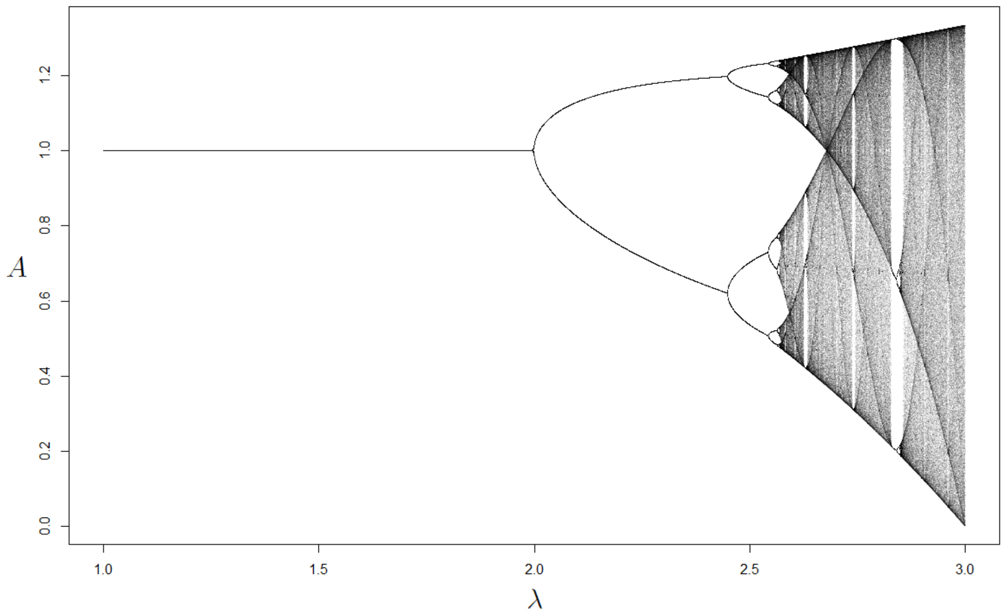

Figura 2.21: Diagrama de bifurcación de la ED (2.26) para valores de λ entre 1 y 3.

2.3. Estabilidad en EDs de orden superior

Como ejemplo introductorio, podemos servirnos de los modelos de oferta-demanda estudiados anteriormente. Supongamos que para actualizar un precio, no sólo se tiene en cuenta el precio inmediatamente anterior, sino la media aritmética de los dos precios más recientes. En este caso, la ED del modelo lineal de Evans sería

$$\begin{aligned} X_{n+2} &= k \cdot \left(\mathcal{D}\left(\frac{X_{n+1} + X_n}{2} \right) - \mathcal{O}\left(\frac{X_{n+1} + X_n}{2} \right) \right) + \frac{X_{n+1} + X_n}{2} \\ &= p_{\mathrm{eq}} \cdot (1 - r) + r \cdot \frac{X_{n+1} + X_n}{2}. \end{aligned}$$

En esta ED aparece la incógnita (el precio, en este caso) evaluada en tres instantes diferentes, y la diferencia entre el instante más "reciente" y el más "antiguo" es de 2 unidades. Es decir, la ED del modelo oferta-demanda es de segundo orden. El productor podría usar datos más antiguos y originar de este modo EDs de orden mayor que 2.

En general, una ED autónoma y explícita de orden k vendría dada por

$$X_{n+k} = f\left(X_{n+k-1}, \ldots, X_n\right), \tag{2.27}$$

en donde $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ es una función real dada.

Las soluciones de las ED de la forma (2.27) se pueden calcular por el método de sustitución directa, pero para ello se necesitan conocer k datos iniciales: $X_0, X_1, \ldots, X_{k-1}$. Utilizaremos la notación $\mathcal{S}(X_0, \ldots, X_{k-1})$ para referirnos a la única solución de (2.27) cuyos primeros k términos son $X_0, \ldots, X_{k-1}$.

Los puntos de equilibrio de las ED de la forma (2.27) se calculan con la misma facilidad que en el caso de EDs de primer orden: basta con resolver la ecuación

$$p = f(p, \ldots p).$$

Además, los conceptos relativos a la estabilidad de puntos de equilibrio son similares a los introducidos para EDs de primer orden. No obstante, para simplificar la notación y la exposición, vamos a ocuparnos sólo de EDs de segundo orden de la forma

$$X_{n+2} = f\left(X_{n+1}, X_n\right). \tag{2.28}$$

En las siguientes definiciones, p será un punto de equilibrio de la ED (2.28).

La *región de atracción* de p se define como el conjunto $\mathcal{R}(p)$ de puntos $(X_0, X_1) \in \mathbb{R}^2$ tales que la solución $\mathcal{S}(X_0, X_1)$ converge a p.

Diremos que p es un *atractor* si (p, p) es un punto interior de $\mathcal{R}(p)$; y diremos que p es un *atractor global* si $\mathcal{R}(p)$ es todo $\mathbb{R}^2$ (o todo el dominio de f).

Diremos que un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es *invariante* si $f(X_0, X_1) \in A$ para todo $X_0, X_1 \in A$, con lo que la única solución $\mathcal{S}(X_0, X_1)$ está contenida en A.

La definición de estabilidad no sufre cambios: diremos que p es *estable* si existe una sucesión de intervalos encajados que contienen a p, tan pequeños como sea necesario e invariantes. La definición alternativa quedaría de la siguiente forma: diremos que p es *estable* si

$$\lim_{(X_0,X_1)\to(p,p)} \operatorname{dist}\left(\mathcal{S}(X_0, X_1), p\right) = 0,$$

siendo $\operatorname{dist}\left(\mathcal{S}(X_0, X_1), p\right)$ el supremo del conjunto $\{|S_n - p| \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \mathcal{S}(X_0, X_1)$.

El concepto de *repulsión* también puede generalizarse, aunque resulta más complicado ya que no disponemos de la función inversa f^{-1}. Para ello, necesitamos escribir la ED alrededor de p en la forma

$$X_n = g(X_{n+1}, X_{n+2}),$$

y así poder definir la ED *inversa* como

$$X_{n+2} = g(X_{n+1}, X_n). \tag{2.29}$$

En este caso, diremos que p es *repulsor* si es atractor para la ED (2.29) (nótese que p también es punto fijo de (2.29)). Además, aparecen nuevos conceptos como *puntos de silla*, que son atractores en una dirección y repulsores en otra.

2.4. EDs lineales

En esta sección nos ocuparemos únicamente de EDs de la forma

$$a_k X_{n+k} + a_{k-1} X_{n+k-1} + \cdots + a_1 X_{n+1} + a_0 X_n = q(n), \tag{2.30}$$

en donde los coeficientes $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ son constantes (con a_k y a_0 no nulos) y $q(n)$ es una función de n (que recibe el nombre de *término externo*). Las EDs de esta forma se conocen como *Ecuaciones en Diferencias Lineales* (abreviadamente EDLs) de coeficientes constantes y se dice que k es el *orden* de dicha EDL.

Ejemplo 33 Son EDLs las siguientes expresiones:

$$\begin{array}{ll} X_{n+1} - 3X_n = 18 & \text{(orden 1)} \\ \\ 2X_{n+2} + 3X_{n+1} - 7X_n = 25n & \text{(orden 2)} \\ \\ 6X_{n+3} - 2X_{n+2} + 3X_{n+1} - 7X_n = n^2 + 4 & \text{(orden 3).} \end{array}$$

No son EDLs las siguientes expresiones:

$$2X_{n+2} + \sqrt{X_{n+1}} + \frac{1}{X_n} = 5$$

$$\cos(X_{n+1}) - 3X_n = 8n$$

$$6X_{n+2} - 2X_{n+1}X_n = 6n^2 - 1.$$

2.4.1. Resolución de EDLs homogéneas

Dada una EDL de la forma (2.30), si $q(n) = 0$ para todo n se dice que la EDL es *homogénea* (abreviadamente EDLH):

$$a_k X_{n+k} + a_{k-1} X_{n+k-1} + \cdots + a_1 X_{n+1} + a_0 X_n = 0. \tag{2.31}$$

Se trata de las EDLs más sencillas y de ellas nos vamos a ocupar en primer lugar. La ley que determina esta ecuación,

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_k) := a_k x_k + \cdots + a_1 x_1 + a_0 x_0,$$

es una *aplicación lineal*. De esta observación se derivan tres propiedades que caracterizan a este tipo de ecuaciones:

Propiedad 1 *La sucesión trivial* $\{0, 0, \ldots\}$ *es solución de* (2.31)*.*

Observa que esta afirmación equivale a decir que $p = 0$ es un punto de equilibrio de (2.31), lo cual es evidente, pues $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$, como le ocurre a todas las aplicaciones lineales.

Propiedad 2 *Dadas dos soluciones* S_n *y* S'_n *de* (2.31)*, entonces* $S_n + S'_n$ *también es solución de* (2.31)*.*

Lo que asegura la propiedad anterior equivale a decir que

$$f\left(S_n + S'_n, S_{n+1} + S'_{n+1}, \ldots, S_{n+k} + S'_{n+k}\right) = 0,$$

lo cual es una consecuencia de la linealidad de la aplicación f:

$$f\left(S_n + S'_n, \ldots, S_{n+k} + S'_{n+k}\right) = f(S_n, \ldots, S_{n+k}) + f\left(S'_n, \ldots, S'_{n+k}\right) = 0 + 0 = 0.$$

Propiedad 3 *Dada una solución cualquiera* S_n *de* (2.31) *y dado un número real cualquiera* $\lambda \in \mathbb{R}$, *entonces* λS_n *también es solución de* (2.31).

De nuevo, la propiedad anterior es consecuencia de la linealidad de la aplicación f:

$$f(\lambda S_n, \ldots, \lambda S_{n+k}) = \lambda f(S_n, \ldots, S_{n+k}) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Todas estas propiedades permiten asegurar que el conjunto de todas las soluciones de una EDLH tiene estructura de espacio vectorial. Así pues, para hallar dicho conjunto bastará calcular una *base* de soluciones (también llamado *sistema fundamental*), es decir, unas cuantas soluciones que sean linealmente independientes, con lo que todas las soluciones se expresarán como combinación lineal de éstas. El número de elementos que tiene una base se denomina *dimensión* y en este caso coincide con el orden de la EDLH.

Por ejemplo, si tenemos una EDLH de orden 1, el conjunto de soluciones tiene dimensión 1 y, por lo tanto, si conocemos una solución no trivial (no nula) S_n de la EDLH, entonces todas las soluciones son proporcionales a ella, es decir, de la forma

$$A \cdot S_n, \qquad A \in \mathbb{R},$$

en donde A hace el papel de parámetro.

Si tenemos una EDLH de orden 2 y conocemos dos soluciones linealmente independientes, S_n y S'_n, entonces todas las soluciones son de la forma

$$A \cdot S_n + B \cdot S'_n, \qquad A, B \in \mathbb{R},$$

en donde A, B hacen el papel de parámetros.

Cada una de las expresiones anteriores recibe el nombre de *solución general* de su respectiva EDLH.

Cálculo de la solución general de una EDLH

Estamos interesados en calcular explícitamente soluciones de la EDLH (2.31). Nos preguntamos cuándo una progresión geométrica es solución; es decir, cuándo la sucesión con término general λ^n (con $\lambda \neq 0$) es solución de (2.31).

Sustituyendo X_{n+j} por λ^{n+j} (para $j = 0, 1, \ldots, k$) obtenemos

$$a_k \lambda^{n+k} + a_{k-1} \lambda^{n+k-1} + \cdots + a_1 \lambda^{n+1} + a_0 \lambda^n = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda^n \left(a_k \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 \right) = 0.$$

Como $\lambda \neq 0$ llegamos a la siguiente conclusión:

Propiedad 4 *La sucesión* $\{\lambda^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *es solución de* (2.31) *si y sólo si* λ *verifica la ecuación*

$$a_k \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

La ecuación anterior recibe el nombre de *ecuación característica* de la EDLH (2.31), y está formada por el correspondiente *polinomio característico* igualado a cero.

La Propiedad 4 es suficiente para calcular la solución general de la mayoría de EDLHs. Lo que debemos hacer es calcular las raíces del polinomio característico y cada una de estas raíces porporciona una solución de la EDLH. Veamos algunos ejemplos en los que se usa este resultado.

Ejemplo 34 Supongamos que queremos resolver un PVI asociado a una EDLH de orden 1:

$$\begin{cases} 2X_{n+1} - 6X_n = 0 \\ \\ X_0 = 5. \end{cases}$$

La ecuación característica correspondiente es

$$2\lambda - 6 = 0,$$

cuya única solución es $\lambda = 3$. Por lo tanto, la sucesión cuyo término general es 3^n es solución de la EDLH, y como el espacio de soluciones es de dimensión 1, la solución general viene dada por

$$A \cdot 3^n, \qquad A \in \mathbb{R}.$$

Ahora basta ajustar el parámetro A para conseguir que se cumpla la condición inicial:

$$X_0 = 5 \quad \Longrightarrow \quad A \cdot 3^0 = 5 \quad \Longrightarrow \quad A = 5.$$

Así pues, la única solución del PVI es la sucesión cuyo término general es $5 \cdot 3^n$.

Ejemplo 35 Consideremos el PVI

$$\begin{cases} X_{n+2} + X_{n+1} - 6X_n = 0 \\ \\ X_0 = 3, X_1 = 1. \end{cases}$$

La ecuación característica correspondiente es

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0,$$

cuyas soluciones son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -3$. Por lo tanto, un sistema fundamental de soluciones lo forman las sucesiones cuyos términos generales son

$$2^n, \quad (-3)^n.$$

En este caso, la solución general de la EDLH viene dada por

$$A \cdot 2^n + B \cdot (-3)^n, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Ahora hay que calcular A y B para que se cumplan las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{l} X_0 = 3 \quad \Longrightarrow \quad A + B = 3 \\ \\ X_1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad 2A - 3B = 1. \end{array}\right\}$$

La solución de este sistema es $A = 2$, $B = 1$, con lo que la única solución del PVI es la sucesión cuyo término general es

$$2 \cdot 2^n + (-3)^n = 2^{n+1} + (-3)^n.$$

Ejemplo 36 En este ejemplo vamos a estudiar la ecuación de Fibonacci

$$X_{n+2} = X_{n+1} + X_n, \tag{2.32}$$

que es una EDLH de grado 2. Su ecuación característica tiene como soluciones ϕ y $1-\phi$, en donde $\phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2 \approx 1.618$ es la llamada *razón áurea*. Por lo tanto, la solución general de (2.32) viene dada por

$$A \cdot \phi^n + B \cdot (1-\phi)^n, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Ahora bien, el sumando $B \cdot (1-\phi)^n$ puede considerarse prácticamente despreciable para n suficientemente grande, ya que $1-\phi \approx -0.618$ y por lo tanto $(1-\phi)^n$ converge a 0 muy rápido cuando n crece. Así pues, si

$$S_n = A \cdot \phi^n + B \cdot (1-\phi)^n \approx A \cdot \phi^n,$$

es una solución de (2.32), entonces

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} \approx \frac{A \cdot \phi^{n+1}}{A \cdot \phi^n} = \phi,$$

para n suficientemente grande. Por lo tanto, podemos concluir que, para tiempos suficientemente avanzados, la relación entre dos valores consecutivos de una solución de la ecuación de Fibonacci es aproximadamente la razón áurea. Además, esto es cierto independientemente de las condiciones iniciales.

Ejemplo 37 Consideremos el PVI

$$\begin{cases} X_{n+2} - 4X_{n+1} + 8X_n = 0 \\ \\ X_0 = 4, X_1 = 10. \end{cases}$$

La ecuación característica correspondiente es

$$\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0,$$

que no tiene soluciones reales, pero sí complejas: $\lambda_1 = 2 + 2\mathrm{i}$ y $\lambda_2 = 2 - 2\mathrm{i}$. Siguiendo el esquema que estamos utilizando llegamos a que $\left\{(2+2\mathrm{i})^n, (2-2\mathrm{i})^n\right\}$ forman un sistema fundamental de soluciones de la EDLH. Aunque esto es cierto, lo deseable es conseguir otro que sea real. Para obtenerlo, vamos a realizar un *cambio de base*, para lo que necesitamos calcular el *módulo* y un *argumento* de una de las soluciones (que son *conjugadas*). Dado un número complejo cualquiera, $a + b\mathrm{i}$, si lo representamos como un vector (a, b) en el plano complejo (en donde el eje horizontal es el de las partes reales y el eje vertical es el de las partes imaginarias), el módulo r representa lo que mide dicho vector y el argumento θ es el ángulo que forma con el eje real; de este modo, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\tan\theta = \frac{b}{a}$. En nuestro caso, el módulo y argumento de λ_1 vienen dados respectivamente por $r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ y $\theta = \frac{\pi}{4}$, ya que gráficamente λ_1 se sitúa en la diagonal principal del primer cuadrante, con lo que forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ (es decir, 45°) con el eje real. Por lo tanto, debe verificarse

$$2 \pm 2\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \pm \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Aplicando la *fórmula de Moivre*[5] obtenemos

$$(2 \pm 2\mathrm{i})^n = \left(2\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) \pm \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right).$$

Así pues, otro sistema fundamental de soluciones estaría formado por

$$\frac{(2+2\mathrm{i})^n + (2-2\mathrm{i})^n}{2} = \left(2\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$$

$$\frac{(2+2\mathrm{i})^n - (2-2\mathrm{i})^n}{2\mathrm{i}} = \left(2\sqrt{2}\right)^n \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}n\right),$$

con lo que la solución general de la EDLH será de la forma

$$A \cdot \left(2\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + B \cdot \left(2\sqrt{2}\right)^n \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}n\right), \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Imponiendo que se cumplan las condiciones iniciales

$$\left.\begin{array}{lllll} X_0 = 4 & \Longrightarrow & A \cdot \cos 0 + B \cdot \mathrm{sen}\, 0 = 4 & \Longrightarrow & A = 4 \\ X_1 = 10 & \Longrightarrow & A \cdot \left(2\sqrt{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + B \cdot \left(2\sqrt{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 10 & \Longrightarrow & 2A + 2B = 10 \end{array}\right\}$$

cuya solución es $A = 4$, $B = 1$. Por lo tanto, la solución del PVI es la sucesión cuyo término general es

$$4 \cdot \left(2\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \left(2\sqrt{2}\right)^n \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}n\right).$$

Ejemplo 38 Consideremos el PVI

$$\begin{cases} X_{n+2} - 3X_{n+1} + 9X_n = 0 \\ X_0 = 4, X_1 = 10. \end{cases}$$

La ecuación característica correspondiente es

$$\lambda^2 - 3\lambda + 9 = 0,$$

cuyas soluciones son complejas: $\lambda_1 = \frac{3+3\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{3-3\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$. El módulo de estas soluciones es

$$r = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 3.$$

Para calcular el argumento de λ_1 observamos que se ubica en el primer cuadrante (tanto su parte real como su parte imaginaria son positivas) y por lo tanto

$$\theta = \arctan\left(\frac{3\sqrt{3}/2}{3/2}\right) = \arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

[5] La fórmula de Moivre establece que si $\lambda = r\left(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$, entonces $\lambda^n = r^n\left(\cos(\theta n) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,(\theta n)\right)$, ya que si multiplicamos dos números complejos, sus módulos se multiplican y sus argumentos se suman.

Así pues, un sistema fundamental de soluciones lo forman las sucesiones cuyos términos generales son

$$3^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right), \qquad 3^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}n\right),$$

y la solución general de la EDLH será de la forma

$$A \cdot 3^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + B \cdot 3^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}n\right), \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Imponiendo que se cumplan las condiciones iniciales

$$\left.\begin{array}{lllll} X_0 = 4 & \Longrightarrow & A \cdot \cos 0 + B \cdot \operatorname{sen} 0 = 4 & \Longrightarrow & A = 4 \\ \\ X_1 = 10 & \Longrightarrow & A \cdot 3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + B \cdot 3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 10 & \Longrightarrow & \dfrac{3}{2}A + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}B = 10 \end{array}\right\}$$

cuya solución es $A = 4$, $B = \frac{8\sqrt{3}}{9}$. Por lo tanto, la solución del PVI es la sucesión cuyo término general es

$$4 \cdot 3^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + 8\sqrt{3} \cdot 3^{n-2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}n\right).$$

Veamos cómo calcular un sistema fundamental de soluciones cuando el polinomio característico tiene soluciones múltiples:

Ejemplo 39 Consideremos el PVI

$$\left\{\begin{array}{l} X_{n+2} - 4X_{n+1} + 4X_n = 0 \\ \\ X_0 = 3, X_1 = 10. \end{array}\right.$$

La ecuación característica correspondiente es

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0,$$

cuya única solución es $\lambda = 2$. No obstante, esta solución es una raíz doble del polinomio característico y, en este caso, se puede comprobar que un sistema fundamental de soluciones lo forman las sucesiones cuyos términos generales son

$$2^n, \quad n2^n.$$

Por lo tanto, la solución general de la EDLH viene dada por

$$A \cdot 2^n + B \cdot n2^n, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Exigiendo que se cumplan las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{rcl} X_0 = 3 & \Longrightarrow & A = 3 \\ \\ X_1 = 10 & \Longrightarrow & 2A + 2B = 10. \end{array}\right\}$$

La solución de este sistema es $A = 3$, $B = 2$, con lo que la única solución del PVI es la sucesión cuyo término general es

$$3 \cdot 2^n + 2 \cdot n2^n = (3 + 2n) \cdot 2^n.$$

En general, para calcular un sistema fundamental de soluciones de una EDLH, debemos calcular todas las raíces del polinomio característico correspondiente junto con sus multiplicidades, y cada una de las raíces (contadas con su multiplicidad) da lugar a una solución de acuerdo al siguiente esquema:

- Si λ es una raíz real con multiplicidad m, entonces las sucesiones cuyos términos generales son
$$\lambda^n, n\lambda^n, \ldots, n^{m-1}\lambda^n,$$
son m soluciones linealmente independientes de la EDLH.

- Si $\lambda = r(\cos\theta \pm \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta)$ es una raíz compleja (junto con su conjugada) con multiplicidad m, entonces las sucesiones cuyos términos generales son
$$\begin{array}{l} r^n\cos(\theta n), r^n\operatorname{sen}(\theta n), \\ nr^n\cos(\theta n), nr^n\operatorname{sen}(\theta n), \\ \ldots \\ n^{m-1}r^n\cos(\theta n), n^{m-1}r^n\operatorname{sen}(\theta n), \end{array}$$
son $2m$ soluciones linealmente independientes de la EDLH.

Ejemplo 40 Dada la EDLH de orden 6
$$X_{n+6} - 13X_{n+5} + 69X_{n+4} - 193X_{n+3} + 306X_{n+2} - 270X_{n+1} + 108X_n = 0,$$
el polinomio característico correspondiente
$$\lambda^6 - 13\lambda^5 + 69\lambda^4 - 193\lambda^3 + 306\lambda^2 - 270\lambda + 108$$
se puede factorizar como
$$(\lambda-2)(\lambda-3)^3(\lambda^2-2\lambda+2),$$
con lo que sus raíces (contadas con su multiplicidad) son
$$2, 3, 3, 3, 1+\mathrm{i}, 1-\mathrm{i}.$$
Por lo tanto, teniendo en cuenta que $1 \pm \mathrm{i} = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \pm \mathrm{i}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ y que $\left(\sqrt{2}\right)^n = 2^{n/2}$, un sistema fundamental de soluciones lo forman las sucesiones cuyos términos generales son
$$2^n, \quad 3^n, \quad n3^n, \quad n^2 3^n, \quad 2^{n/2}\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right), \quad 2^{n/2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}n\right).$$

Para acabar con el estudio de las EDLH, veamos un ejemplo en el que se plantea el modelo francés de hipoteca.

Ejemplo 41 Consideremos una hipoteca según el *modelo francés* (cuota mensual constante) en donde T representa el capital total, i es el porcentaje de interés anual (en este caso conviene definir I como el interés mensual correspondiente en tanto por uno, es decir, $I := i/1200$), C es la cuota mensual, y N el número de cuotas. Para facilitar los cálculos, supondremos que el interés es constante y que la unidad monetaria es infinitamente divisible. Si consideramos la malla de tiempos $t_0 = 0, t_1, \ldots, t_N$ en donde t_n es el mes n-ésimo (para $n \in \mathbb{N}$, $1 \le n \le N$), definimos A_n como la parte de la cuota n-ésima destinada a amortización, y B_n la parte destinada a los intereses. Por lo tanto, como la cuota C es constante, se tiene

$$C = A_n + B_n. \tag{2.33}$$

Si llamamos X_n al capital amortizado en las n primeras cuotas, se tiene $X_n = A_1 + \ldots + A_n$, o lo que es lo mismo,

$$A_n = X_n - X_{n-1}, \tag{2.34}$$

considerando $X_0 = 0$. Así pues, el capital pendiente antes de pagar la cuota n-ésima será $T - X_{n-1}$, con lo que los intereses correspondientes a dicha cuota serán

$$B_n = I \cdot (T - X_{n-1}). \tag{2.35}$$

Aplicando (2.34) y (2.35) en (2.33) se tiene

$$C = A_n + B_n = X_n - X_{n-1} + I \cdot (T - X_{n-1})$$

$$\Longrightarrow \quad C = X_n - (1+I) \cdot X_{n-1} + I \cdot T, \tag{2.36}$$

para $1 \leq n \leq N$. De la misma forma se tiene

$$C = X_{n+1} - (1+I) \cdot X_n + I \cdot T, \tag{2.37}$$

para $0 \leq n \leq N-1$. Combinando (2.36) y (2.37) se obtiene

$$X_{n+1} - (1+I) \cdot X_n + I \cdot T = X_n - (1+I) \cdot X_{n-1} + I \cdot T$$

$$\Longrightarrow \quad X_{n+1} - (2+I) \cdot X_n + (1+I) \cdot X_{n-1} = 0,$$

para $1 \leq n \leq N-1$, con lo que, haciendo una traslación temporal y considerando las condiciones de frontera se tiene el PVI

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{n+2} - (2+I) \cdot X_{n+1} + (1+I) \cdot X_n = 0 \\ \\ X_0 = 0, \quad X_N = T \end{array} \right. \tag{2.38}$$

para $0 \leq n \leq N-2$. La ecuación característica asociada a la EDLH de (2.38) es

$$\lambda^2 - (2+I)\lambda + (1+I) = 0,$$

cuyas soluciones son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 1 + I$, con lo que la solución general de la EDLH viene dada por

$$K_1 \cdot 1^n + K_2 \cdot (1+I)^n = K_1 + K_2 \cdot (1+I)^n, \qquad K_1, K_2 \in \mathbb{R}.$$

Exigiendo que se cumplan las condiciones frontera

$$\left. \begin{array}{rcl} X_0 = 0 & \Longrightarrow & K_1 + K_2 = 0 \\ \\ X_N = T & \Longrightarrow & K_1 + K_2 \cdot (1+I)^N = T \end{array} \right\}$$

se tiene que $K_1 = -K_2$ y $K_2 = \dfrac{T}{(1+I)^N - 1}$. Así pues, la única solución del PVI (2.38) es

$$X_n = \frac{-T}{(1+I)^N - 1} + \frac{T}{(1+I)^N - 1} \cdot (1+I)^n = \frac{(1+I)^n - 1}{(1+I)^N - 1} \cdot T. \tag{2.39}$$

Finalmente, aplicando (2.39) en (2.34) y (2.35) se obtiene

$$A_n = X_n - X_{n-1} = \frac{(1+I)^{n-1}}{(1+I)^N - 1} \cdot IT$$

$$B_n = I \cdot (T - X_{n-1}) = \frac{(1+I)^N - (1+I)^{n-1}}{(1+I)^N - 1} \cdot IT,$$

de donde, teniendo en cuenta (2.33), se concluye

$$C = A_n + B_n = \frac{(1+I)^N}{(1+I)^N - 1} \cdot IT = \frac{I}{1 - (1+I)^{-N}} \cdot T.$$

2.4.2. Resolución de EDLs completas

Dada una EDL de la forma (2.30), si $q(n) \neq 0$ se dice que la EDL es *no homogénea* o *completa*:

$$a_k X_{n+k} + a_{k-1} X_{n+k-1} + \cdots + a_1 X_{n+1} + a_0 X_n = q(n). \tag{2.40}$$

En este caso, se puede construir una EDLH simplemente sustituyendo $q(n)$ por 0; esta nueva ecuación recibe el calificativo de *homogénea asociada* a (2.40) y se cumple la siguiente propiedad cuya demostración se puede obtener por simple comprobación:

Propiedad 5 *Dadas soluciones cualesquiera S_n de la EDL completa* (2.40) *y $\overline{S}_n$ de la correspondiente EDLH asociada, se cumple que $S_n + \overline{S}_n$ es también solución de* (2.40).

De esta propiedad se deduce que la solución general de una EDL completa se puede construir mediante la suma de una solución particular de dicha EDL y la solución general de la EDLH asociada. En forma esquemática:

$$\left[\begin{array}{c}\text{solución general}\\ \text{de la EDL completa}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\text{solución particular}\\ \text{de la EDL completa}\end{array}\right] + \left[\begin{array}{c}\text{solución general}\\ \text{de la EDLH asociada}\end{array}\right].$$

Como ya sabemos calcular la solución general de cualquier EDLH, basta calcular ahora una solución particular de la EDL completa y sumarla a la solución general de la EDLH asociada para obtener la solución general de la EDL completa. Así pues, nuestro objetivo es calcular una solución particular de la EDL completa, y para ello vamos a utilizar el *método de los coeficientes indeterminados.*

Método de los coeficientes indeterminados

Este método se utiliza para hallar una solución particular de la EDL completa (2.40) y consiste en buscar una solución que sea "del mismo tipo" que el término externo $q(n)$. No obstante, este método funciona sólo para algunos tipos de funciones $q(n)$, como por ejemplo constantes, exponenciales, polinómicas, sinusoidales, o productos de las anteriores. Veamos algunos casos:

- $q(n) = c$ con $c \in \mathbb{R} \Rightarrow$ se busca solución particular del tipo $S_n = C$ con $C \in \mathbb{R}$ a determinar.

- $q(n) = c \cdot r^n$ con $c, r \in \mathbb{R} \Rightarrow$ se busca solución particular del tipo $S_n = C \cdot r^n$ con $C \in \mathbb{R}$ a determinar.

- $q(n) = c_j n^j + \cdots + c_1 n + c_0$ con $j \in \mathbb{N}$, $c_0, c_1, \ldots, c_j \in \mathbb{R} \Rightarrow$ se busca solución particular del tipo $S_n = C_j n^j + \cdots + C_1 n + C_0$ con $C_0, C_1, \ldots, C_j \in \mathbb{R}$ a determinar.

En realidad, el caso $q(n)$ constante es un caso particular de $q(n)$ exponencial (con base $r = 1$) o $q(n)$ polinómica (de grado 0). En este caso, lo que estamos buscando son puntos fijos, ya que éstos son soluciones particulares constantes.

Sin embargo, cuando $q(n)$ es solución de la EDLH asociada se dice que hay *resonancia* y el método no funciona. En este caso, hay que multiplicar sucesivamente la función candidata a ser solución particular por n, n^2, etc... hasta que encontremos alguna solución particular. No obstante, en los casos que estamos estudiando, se puede averiguar a priori el exponente de dicha n:

- $q(n) = c$ con $c \in \mathbb{R}$ y resonancia $\Rightarrow$ se busca solución particular del tipo $S_n = C \cdot n^m$ con $C \in \mathbb{R}$ a determinar y m la multiplicidad de 1 como raíz del correspondiente polinomio característico.

- $q(n) = c \cdot r^n$ con $c \in \mathbb{R}$ y resonancia $\Rightarrow$ se busca solución particular del tipo $S_n = C \cdot r^n \cdot n^m$ con $C \in \mathbb{R}$ a determinar y m la multiplicidad de r como raíz del correspondiente polinomio característico.

- $q(n) = c_j n^j + \cdots + c_1 n + c_0$ con $j \in \mathbb{N}$, $c_0, c_1, \ldots, c_j \in \mathbb{R}$ y resonancia $\Rightarrow$ se busca solución particular del tipo $S_n = \big(C_j n^j + \cdots + C_1 n + C_0\big) \cdot n^{m-j}$ con $C_0, C_1, \ldots, C_j \in \mathbb{R}$ a determinar y m la multiplicidad de 1 como raíz del correspondiente polinomio característico.

Veamos algunos ejemplos de cómo hallar soluciones particulares.

Ejemplo 42 Dada la EDL

$$X_{n+2} + 4X_{n+1} + 4X_n = 27,$$

buscamos una solución particular de la forma $S_n = C$ con $C \in \mathbb{R}$ a determinar, es decir, buscamos puntos de equilibrio. Sustituyendo en la EDL:

$$C + 4C + 4C = 27 \Longrightarrow 9C = 27 \Longrightarrow C = 3.$$

Ejemplo 43 Dada la EDL

$$X_{n+2} - 4X_{n+1} + 3X_n = 10,$$

se puede comprobar que no existen puntos de equilibrio y por lo tanto no existen soluciones particulares de la forma $S_n = C$ con $C \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, hay resonancia, y en su lugar buscamos una solución particular de la forma $S_n = C \cdot n$ con $C \in \mathbb{R}$ a determinar. Sustituyendo en la EDL:

$$C \cdot (n+2) - 4C \cdot (n+1) + 3C \cdot n = 10 \Longrightarrow -2C = 10 \Longrightarrow C = -5.$$

Ejemplo 44 Dada la EDL

$$X_{n+2} - 2X_{n+1} + 3X_n = 22 \cdot 4^n,$$

buscamos una solución particular de la forma $S_n = C \cdot 4^n$ con $C \in \mathbb{R}$ a determinar. Sustituyendo en la EDL:

$$C \cdot 4^{n+2} - 2C \cdot 4^{n+1} + 3C \cdot 4^n = 22 \cdot 4^n \Longrightarrow 16C \cdot 4^n - 8C \cdot 4^n + 3C \cdot 4^n = 22 \cdot 4^n$$

$$\Longrightarrow 11C \cdot 4^n = 22 \cdot 4^n \Longrightarrow 11C = 22 \Longrightarrow C = 2.$$

Ejemplo 45 Dada la EDL

$$X_{n+1} - 2X_n = 2^n,$$

se puede comprobar que no existen soluciones particulares de la forma $S_n = C \cdot 2^n$ con $C \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, hay resonancia, y en su lugar buscamos una solución particular de la forma $S_n = C \cdot n \cdot 2^n$ con $C \in \mathbb{R}$ a determinar. Sustituyendo en la EDL:

$$C \cdot (n+1) \cdot 2^{n+1} - 2C \cdot n \cdot 2^n = 2^n \Longrightarrow 2C \cdot n \cdot 2^n + 2C \cdot 2^n - 2C \cdot n \cdot 2^n = 2^n$$

$$2C = 1 \Longrightarrow C = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 46 Dada la EDL

$$X_{n+1} + X_n = n^2,$$

buscamos una solución particular de la forma $S_n = an^2 + bn + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ a determinar. Sustituyendo en la EDL:

$$a(n+1)^2 + b(n+1) + c + an^2 + bn + c = n^2 \Longrightarrow 2an^2 + 2(a+b)n + a + b + 2c = n^2$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2a & = & 1 \\ 2(a+b) & = & 0 \\ a+b+2c & = & 0, \end{array} \right.$$

con lo que $a = 1/2$, $b = -1/2$, $c = 0$.

Para finalizar, veremos un ejemplo práctico:

Ejemplo 47 En un plan de pensiones, en cada periodo de capitalización el cliente recibe los intereses correspondientes a la cantidad que hay en ese momento en el plan de pensiones a la vez que hace una aportación de capital c que vamos a considerar constante. Por lo tanto, la ED que modeliza la evolución del capital en el periodo de capitalización $(n+1)$-ésimo viene dada por

$$X_{n+1} = (1 + rh)X_n + c, \tag{2.41}$$

en donde, al igual que en el caso de la capitalización discreta, r es el tipo de interés nominal anual (en tanto por 1) y h es el periodo de capitalización medido en años (por ejemplo, $1/12$ si es mensual). La ED (2.41) es lineal no homogénea y por lo tanto, para resolverla hallamos primero la solución general de la EDL homogénea asociada

$$X_{n+1} - (1 + rh)\, X_n = 0. \tag{2.42}$$

El polinomio característico es en este caso $\lambda - (1 + rh)$, cuya única raíz es $1 + rh$. Así pues, la solución general de (2.42) es

$$A\,(1 + rh)^n\,, \qquad A \in \mathbb{R}. \tag{2.43}$$

Por otro lado, si buscamos en (2.41) una solución particular constante $S_n = p$ con $p \in \mathbb{R}$ a determinar, se tiene que

$$p - (1 + rh)\,p = c \quad \Longrightarrow \quad p = -\frac{c}{rh}. \tag{2.44}$$

Así pues, teniendo en cuenta (2.43) y (2.44), la solución general de (2.41) es

$$A\,(1 + rh)^n - \frac{c}{rh}, \qquad A \in \mathbb{R}. \tag{2.45}$$

Si X_0 es la cantidad aportada inicialmente, entonces, teniendo en cuenta (2.45) se tiene

$$X_0 = A\,(1 + rh)^0 - \frac{c}{rh} \quad \Longrightarrow \quad A = X_0 + \frac{c}{rh},$$

y por lo tanto, la única solución del PVI formado por la EDL (2.41) y la condición inicial X_0 es

$$X_n = \left(X_0 + \frac{c}{rh}\right)(1 + rh)^n - \frac{c}{rh}. \tag{2.46}$$

En el caso particular $X_0 = c$, la expresión (2.46) se puede simplificar, obteniendo

$$X_n = \frac{(1 + rh)^{n+1} - 1}{rh} c.$$

Además, si un cliente quisiera recibir T u.m. al cabo de N periodos de capitalización (es decir, $X_N = T$, incluyendo la última cuota), entonces

$$X_N = \frac{(1 + rh)^{N+1} - 1}{rh} c = T,$$

con lo que debería realizar aportaciones de

$$c = \frac{rh}{(1 + rh)^{N+1} - 1} T.$$

Por ejemplo, si un cliente de 30 años quisiera recibir 100 000 u.m. a los 65 años con periodos de capitalización mensuales al 6 % de interés nominal anual, entonces $c \approx 69.79$ u.m.

2.4.3. Estabilidad en EDLs

A continuación vamos a describir cómo evolucionan en el tiempo las soluciones de EDLs de la forma (2.40) en donde el término externo q es una constante (es decir, son autónomas). Esta evolución se conoce como *comportamiento asintótico*, de donde se extraerán una serie de criterios de estabilidad para los puntos de equilibrio de dichas ecuaciones.

Estabilidad en EDLs de primer orden

Empezaremos estudiando el caso más sencillo, es decir, las EDLs homogéneas (tomando $q = 0$) de primer orden, de la forma

$$aX_{n+1} + bX_n = 0, \tag{2.47}$$

en donde $a, b \neq 0$. El polinomio característico tiene una única raíz $\lambda = -b/a$, y por lo tanto la solución general viene dada por

$$X_0\lambda^n = X_0 \left(-\frac{b}{a}\right)^n,$$

en donde $X_0 \in \mathbb{R}$ es la condición inicial. Vamos a describir cómo evolucionan en el tiempo las soluciones (su comportamiento asintótico). Para concretar, supongamos que tenemos una condición inicial X_0 positiva. La evolución de la solución correspondiente depende del signo de λ, existiendo varias posibilidades, tal y como se muestra en la Figura 2.22.

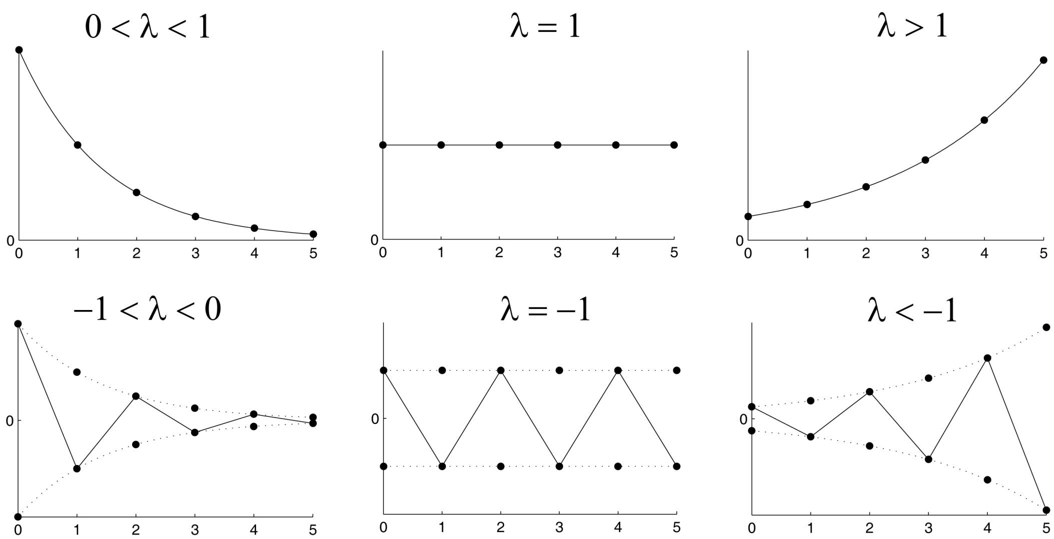

Figura 2.22: Representación gráfica de la solución $X_0\lambda^n$ para una condición inicial $X_0 > 0$ y distintos valores de λ para EDLs homogéneas de grado 1.

- Si $\lambda > 0$:
  - Si $0 < \lambda < 1$ la solución decrece hacia 0.
  - Si $\lambda = 1$ la solución permanece constante.
  - Si $\lambda > 1$ la solución crece de forma exponencial hacia $+\infty$.
- Si $\lambda < 0$:
  - Si $-1 < \lambda < 0$ la solución tiende a 0 de forma oscilante, cambiando de signo en cada iteración.

- Si $\lambda = -1$ todos los términos de la solución tienen el mismo valor absoluto, pero el signo cambia en cada iteración. Es decir, la solución es $\{X_0, -X_0, X_0, -X_0, \ldots\}$.
- Si $\lambda < -1$ el valor absoluto de la solución crece de forma exponencial hacia $+\infty$, cambiando de signo en cada iteración.

Si la condición inicial X_0 fuese negativa, todo el estudio sería análogo, pero con el signo cambiado (habría que "darle la vuelta" a las gráficas). Finalmente, si $X_0 = 0$ entonces la solución es constante e igual a 0 (punto de equilibrio).

Esta discusión también se puede realizar teniendo en cuenta que la EDLH (2.47) se puede expresar como una ED de primer orden autónoma y explícita

$$X_{n+1} = \lambda X_n = f(X_n)$$

de la forma (2.6), en donde $f(x)$ es una recta con pendiente λ que pasa por el origen, y por lo tanto podemos hallar las soluciones con el método de la resolución gráfica.

En conclusión, podemos reunir todos los casos teniendo en cuenta que

$$\lim_{n\to+\infty} |\lambda^n| = \begin{cases} 0 & \text{si } |\lambda| < 1 \\ 1 & \text{si } |\lambda| = 1 \\ +\infty & \text{si } |\lambda| > 1. \end{cases}$$

En base a este cálculo, y teniendo en cuenta que la ecuación (2.47) tiene un punto de equilibrio en $p = 0$, podemos enunciar el siguiente criterio de estabilidad:

Propiedad 6 *Dada la ecuación $aX_{n+1} + bX_n = 0$ con $a, b \neq 0$, se verifica:*

- *Si $|\frac{b}{a}| < 1$ entonces $p = 0$ es un punto de equilibrio atractor global.*
- *Si $|\frac{b}{a}| = 1$ entonces $p = 0$ es un punto de equilibrio estable pero no es atractor. Concretamente, si $\frac{b}{a} = -1$ entonces todas las soluciones son puntos de equilibrio, y por lo tanto son estables pero no atractores.*
- *Si $|\frac{b}{a}| > 1$ entonces $p = 0$ es un punto de equilibrio repulsor global.*

Se puede hacer un estudio análogo para el caso de una EDL completa de primer orden y autónoma de la forma

$$aX_{n+1} + bX_n = q, \tag{2.48}$$

en donde $a, b, q \neq 0$. En este caso, si no hay resonancia, la solución general viene dada por

$$(X_0 - p)\,\lambda^n + p,$$

en donde $\lambda = -b/a$ (como en el caso anterior), X_0 es la condición inicial y $p = \frac{q}{a+b}$ es un punto de equilibrio que hace el papel del punto de equilibrio 0 del caso homogéneo. Si hay resonancia entonces $\lambda = 1$ y no hay puntos de equilibrio; en este caso se puede comprobar que una solución particular es $n\frac{q}{a}$, y por lo tanto la solución general viene dada por $X_0 + n\frac{q}{a}$ (compruébese).

Teniendo en cuenta que las gráficas de las soluciones son las mismas que en la Figura 2.22, pero centradas en p en vez de en 0 (excepto para el caso en donde hay resonancia, ver Figura 2.23), el criterio de estabilidad para EDLs de la forma (2.48) es el siguiente:

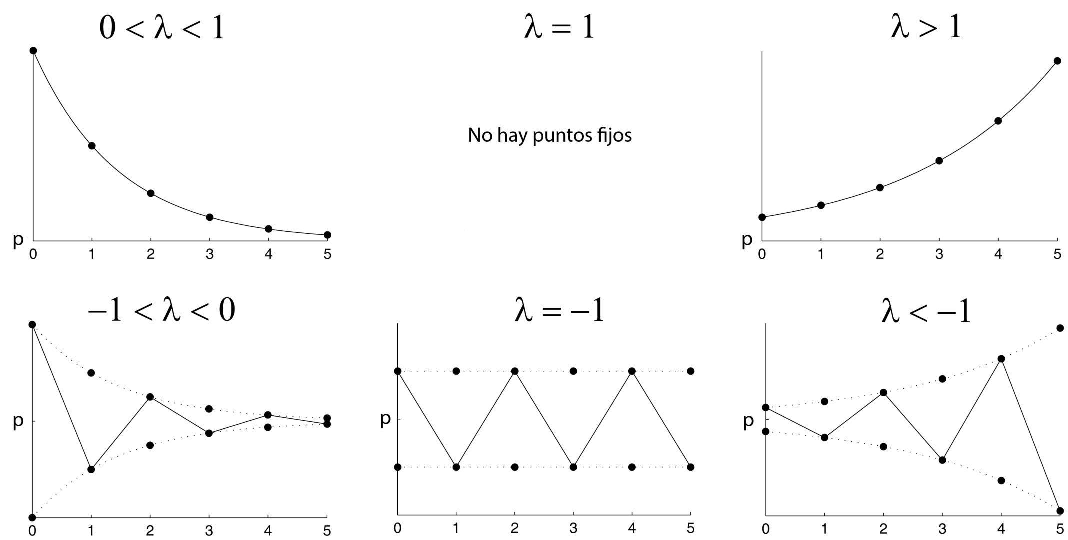

Figura 2.23: Representación gráfica de la solución $(X_0 - p)\,\lambda^n + p$ para una condición inicial $X_0 > p$ y distintos valores de λ para EDLs no homogéneas de grado 1 con término independiente $q(n)$ constante.

Propiedad 7 *Dada la ecuación $aX_{n+1} + bX_n = q$ con $a, b, q \neq 0$, se verifica:*

- *Si $|\frac{b}{a}| < 1$ entonces $p = \frac{q}{a+b}$ es un punto de equilibrio atractor global.*
- *Si $\frac{b}{a} = 1$ entonces $p = \frac{q}{a+b}$ es un punto de equilibrio estable pero no es atractor.*
- *Si $\frac{b}{a} = -1$ (resonancia) entonces no hay puntos de equilibrio y todas las soluciones son divergentes.*
- *Si $|\frac{b}{a}| > 1$ entonces $p = \frac{q}{a+b}$ es un punto de equilibrio repulsor global.*

Estabilidad en EDLs de orden superior

Para motivar el criterio que enunciaremos posteriormente, analicemos algunos ejemplos concretos de EDLHs de segundo orden.

Ejemplo 48 Supongamos que

$$\left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n, \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\}$$

forman un sistema fundamental de soluciones de una EDLH de la forma (2.31). Observamos que ambas soluciones convergen a 0 cuando $n \to +\infty$. Puesto que el resto de soluciones de la ecuación se obtienen como combinación lineal de ellas, todas tendrán el mismo comportamiento. Veámoslo con más detalle: todas las soluciones son de la forma

$$X_n = A\left(\frac{1}{2}\right)^n + B\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

en donde $A, B \in \mathbb{R}$ son constantes cualesquiera. Por lo tanto, por las propiedades de linealidad de los límites de sucesiones obtenemos

$$\lim_{n\to+\infty} X_n = A \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + B \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = A \cdot 0 + B \cdot 0 = 0.$$

Es decir, todas las soluciones de la ecuación tienden a 0 cuando $n \to +\infty$ y, consecuentemente, el punto de equilibrio $p = 0$ es un atractor global.

Ejemplo 49 Supongamos que

$$\{2^n, 3^n\}$$

forman un sistema fundamental de soluciones de una EDLH de la forma (2.31). Observamos que ambas soluciones divergen a $+\infty$ cuando $n \to +\infty$. Puesto que el resto de soluciones de la ecuación se obtienen como combinación lineal de ellas, también tendrán un comportamiento divergente, salvo la solución constantemente igual a 0. Veámoslo con más detalle: todas las soluciones son de la forma

$$X_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n,$$

en donde $A, B \in \mathbb{R}$ son constantes cualesquiera. Por lo tanto, si $A \neq 0$ ó $B \neq 0$ obtenemos

$$\lim_{n\to+\infty} |X_n| = \lim_{n\to+\infty} |A \cdot 2^n + B \cdot 3^n| = +\infty.$$

Es decir, $p = 0$ es un repulsor global.

Ejemplo 50 Supongamos que

$$\{2^n, (-2)^n\}$$

forman un sistema fundamental de soluciones de una EDLH de la forma (2.31). En este caso, la solución

$$2^n + (-2)^n = \begin{cases} 2^{n+1} \text{ si } n \text{ es par.} \\ 0 \text{ si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

no es atraída ni repelida por 0. Además, 0 no es estable.

Ejemplo 51 Supongamos que

$$\left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n, 3^n \right\}$$

forman un sistema fundamental de soluciones de una EDLH de la forma (2.31). Observamos que la primera solución converge a 0 cuando $n \to +\infty$, pero la segunda diverge a $+\infty$. Así pues, además de la solución constantemente igual a 0, las soluciones que convergen a 0 son las de la forma

$$X_n = A \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

en donde $A \in \mathbb{R}$ es una constante cualquiera, mientras que el resto de soluciones son divergentes. Por ejemplo, las soluciones de la forma $B \cdot 3^n$ (con $B \neq 0$) son divergentes y tienen condiciones iniciales tan próximas a 0 como se desee (basta tomar B suficientemente pequeño). Por lo tanto, $p = 0$ es un punto de equilibrio inestable.

Los ejemplos anteriores sirven para ilustrar el siguiente criterio de estabilidad para EDLHs de cualquier orden:

Propiedad 8 *Consideremos una EDLH dada por* (2.31) *y sea* μ *el máximo de los módulos de las raíces del correspondiente polinomio característico, que usualmente recibe el nombre de radio espectral.*

- *Si* $\mu < 1$ *entonces* $p = 0$ *es un punto de equilibrio atractor global.*
- *Si* $\mu = 1$ *entonces* $p = 0$ *es un punto de equilibrio estable pero no es atractor.*
- *Si* $\mu > 1$ *entonces* $p = 0$ *es un punto de equilibrio inestable.*

Ejemplo 52 Bajo las hipótesis de la propiedad anterior, supongamos que las raíces del polinomio característico son

$$\left\{\frac{1}{2}, -\frac{4}{5}, \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{i}, \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\mathrm{i}\right\}.$$

Entonces

$$\mu = \text{máx}\left\{\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9}}\right\} = \frac{4}{5}.$$

Puesto que $\mu < 1$ podemos concluir que $p = 0$ es un atractor global.

Con respecto a las EDLs completas y autónomas de la forma

$$a_k X_{n+k} + a_{k-1} X_{n+k-1} + \cdots + a_1 X_{n+1} + a_0 X_n = q, \tag{2.49}$$

si hay resonancia entonces no hay puntos de equilibrio y no existen soluciones acotadas. Por el contrario, si existe algún punto de equilibrio p, el comportamiento de las soluciones es similar al de las soluciones de la homogénea asociada, ya que éstas sólo se han trasladado p unidades. El papel que en las EDLs homogéneas jugaba el punto de equilibrio 0, lo juega en las completas el punto de equilibrio p. De hecho, la Propiedad 8 (con algunas modificaciones) se puede adaptar para EDLs completas y autónomas:

Propiedad 9 *Consideremos una EDL completa y autónoma de la forma* (2.49)*, y sea* μ *el radio espectral correspondiente a la EDLH asociada.*

- *Si* $\mu < 1$ *entonces existe un único punto de equilibrio* p *que es atractor global.*
- *Si* $\mu > 1$ *y existe algún punto de equilibrio (que sería único), entonces es inestable.*

Ejemplo 53 Dada la EDL de segundo orden

$$16X_{n+2} + 8X_{n+1} - 3X_n = 21,$$

el polinomio característico correspondiente a la ecuación homogénea asociada es $16\lambda^2 + 8\lambda - 3$, cuyas raíces son

$$\left\{\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right\}.$$

El máximo de los módulos de las raíces es $\mu = \frac{3}{4}$ que es menor que 1. Por lo tanto, en virtud de la Propiedad 9 podemos asegurar que la ecuación tiene un único punto de equilibrio $p = 1$ que es atractor global.

Existen otros criterios que determinan las propiedades de estabilidad de los puntos de equilibrio a partir de los coeficientes de la ecuación. Estos criterios normalmente son consecuencia de la Propiedad 9 y son especialmente útiles cuando se estudian EDLs que dependen de parámetros. Como ejemplo, citaremos el siguiente criterio de estabilidad para EDLs autónomas de segundo orden:

Propiedad 10 *Dada la EDL*

$$aX_{n+2} + bX_{n+1} + cX_n = q,$$

en donde $a > 0$ *y tal que* $a+b+c \neq 0$*, se tiene que* $p = \dfrac{q}{a+b+c}$ *es un punto de equilibrio. Además,*

- *si* $|b| < a + c$ *y* $c < a$ *entonces* p *es atractor global.*
- *si* $|b| > a + c$ *ó* $c > a$ *entonces* p *es inestable.*

2.5. El método de la primera aproximación

La Propiedad 9 nos ofrece un criterio de estabilidad para puntos de equilibrio de EDs lineales. Nuestro objetivo es extender esta propiedad a EDs no lineales, y para ello vamos a aproximar una ED no lineal por otra que sea lineal y que tenga un comportamiento parecido cerca del punto de equilibrio que se quiere estudiar. Para realizar dicha aproximación vamos a utilizar la *fórmula de Taylor* de primer orden o *primera aproximación.*

Para una función de una variable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la primera aproximación de f en un entorno de un punto p de su dominio (es decir, cuando $x \approx p$) viene dada por

$$f(x) \approx f(p) + f'(p)(x - p).$$

Para una función de dos variables $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, la primera aproximación de f en un entorno de un punto (p, q) de su dominio (es decir, cuando $(x, y) \approx (p, q)$) viene dada por

$$f(x, y) \approx f(p, q) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(p,q)} (x - p) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(p,q)} (y - q). \tag{2.50}$$

En general, para una función de n variables $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la primera aproximación de f en un entorno de un punto $\overrightarrow{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ de su dominio (es decir, cuando $\overrightarrow{x} = (x_1, \ldots, x_n) \approx \overrightarrow{p}$) viene dada por

$$f\left(\overrightarrow{x}\right) \approx f\left(\overrightarrow{p}\right) + \nabla f\left(\overrightarrow{p}\right) \cdot \left(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{p}\right),$$

en donde "∇" es el operador gradiente y "$\cdot$" es el producto escalar de vectores.

2.5.1. Linealización de EDs de primer orden autónomas y explícitas

Consideremos una ED de primer orden autónoma y explícita de la forma (2.6)

$$X_{n+1} = f\left(X_n\right),$$

en donde vamos a suponer que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$; es decir, f es continua, derivable y con derivada continua en $\mathbb{R}$. Sea p un punto de equilibrio de la ED (2.6), se define la *linealización* de dicha ED en el punto p como la ED lineal

$$X_{n+1} = p + f'(p)\,(X_n - p)\,, \tag{2.51}$$

o equivalentemente

$$X_{n+1} - f'(p)X_n = p\left(1 - f'(p)\right).$$

Observa que para obtener la ED *linealizada* lo que se ha hecho ha sido cambiar $f(X_n)$ por su primera aproximación de Taylor, teniendo en cuenta que p es un punto de equilibrio de (2.6) y por lo tanto se cumple que $f(p) = p$. Observa además que p es también un punto de equilibrio de la nueva ED linealizada (2.51). En general, se puede demostrar que el punto de equilibrio p tiene localmente las mismas propiedades de estabilidad tanto en la ED original como en la ED linealizada, con lo que aplicando criterios de estabilidad para EDs lineales podemos conocerlas fácilmente. En efecto, la ED (2.51) es de la forma

$$aX_{n+1} + bX_n = q,$$

en donde $a = 1$, $b = -f'(p)$ y $q = p\,(1 - f'(p))$. Para determinar las propiedades locales de estabilidad del punto de equilibrio p podemos usar la Propiedad 7, aunque sólo podremos exportar los apartados primero y cuarto de este criterio en su versión local.

Propiedad 11 (Criterio de la primera aproximación) *Dado un punto de equilibrio p de la ED $X_{n+1} = f(X_n)$ en donde $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, se verifica:*

- *Si $|f'(p)| < 1$ entonces p es atractor.*
- *Si $|f'(p)| > 1$ entonces p es repulsor.*

Obsérvese que si $|f'(p)| = 1$, el criterio de la primera aproximación no proporciona ninguna información.

Para ilustrar la utilidad del criterio de la primera aproximación, podemos aplicarlo en un ejemplo concreto.

Ejemplo 54 Calculemos los puntos de equilibrio de la ED

$$X_{n+1} = \frac{10X_n^2}{9 + X_n^2}$$

y estudiemos sus propiedades de estabilidad. La función que define esta ED es $f(x) := 10x^2/(9 + x^2)$. Por lo tanto, para calcular los puntos de equilibrio hemos de resolver la siguiente ecuación:

$$f(x) = x \quad \Longrightarrow \quad \frac{10x^2 - 9x - x^3}{9 + x^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 10x + 9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = 9, \end{cases} \end{cases}$$

luego los puntos de equilibrio son $p_1 = 0$, $p_2 = 1$ y $p_3 = 9$.

Calculemos ahora la derivada de f:

$$f'(x) = \frac{180x}{(9 + x^2)^2}$$

y evaluemos esta función en los tres puntos de equilibrio:

- $f'(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad p_1 = 0$ es atractor.
- $f'(1) = 9/5 \quad \Longrightarrow \quad p_2 = 1$ es repulsor.
- $f'(9) = 1/5 \quad \Longrightarrow \quad p_3 = 9$ es atractor.

2.5.2. El método para EDs implícitas

Consideremos la ED implícita que suele aparecer en modelos oferta-demanda

$$\mathcal{O}\left(X_{n+1}\right) = \mathcal{D}\left(X_n\right), \tag{2.52}$$

en donde la oferta se ajusta a la demanda anterior. Supongamos que $\mathcal{O}, \mathcal{D} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ y que p_{eq} es un precio de equilibrio tal que $\mathcal{O}'(p_{\text{eq}}) \neq 0$. Usando las fórmulas de Taylor de primer orden en las funciones $\mathcal{O}$ y $\mathcal{D}$ tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(X_{n+1}) &\approx \mathcal{O}(p_{\text{eq}}) + \mathcal{O}'(p_{\text{eq}})(X_{n+1} - p_{\text{eq}}) \\ \mathcal{D}(X_n) &\approx \mathcal{D}(p_{\text{eq}}) + \mathcal{D}'(p_{\text{eq}})(X_n - p_{\text{eq}}) \end{aligned}$$

cuando X_{n+1} y X_n están cerca de p_{eq} respectivamente. Sustituyendo en la ecuación (2.52) obtenemos la ED linealizada correspondiente

$$\mathcal{O}(p_{\text{eq}}) + \mathcal{O}'(p_{\text{eq}})(X_{n+1} - p_{\text{eq}}) = \mathcal{D}(p_{\text{eq}}) + \mathcal{D}'(p_{\text{eq}})(X_n - p_{\text{eq}}).$$

Teniendo en cuenta que $\mathcal{O}(p_{\text{eq}}) = \mathcal{D}(p_{\text{eq}})$ obtenemos

$$\mathcal{O}'(p_{\text{eq}})X_{n+1} - \mathcal{D}'(p_{\text{eq}})X_n = \left(\mathcal{O}'(p_{\text{eq}}) - \mathcal{D}'(p_{\text{eq}})\right) p_{\text{eq}},$$

que es una ED lineal de primer orden de la forma $aX_{n+1} + bX_n = q$. Como consecuencia, aplicando la Propiedad 7, obtenemos el siguiente criterio local:

Propiedad 12 *Sea p_{eq} un precio de equilibrio de* (2.52) *tal que $\mathcal{O}'(p_{eq}) \neq 0$.*

- *Si* $\left|\dfrac{\mathcal{D}'(p_{eq})}{\mathcal{O}'(p_{eq})}\right| < 1$ *entonces p_{eq} es atractor.*
- *Si* $\left|\dfrac{\mathcal{D}'(p_{eq})}{\mathcal{O}'(p_{eq})}\right| > 1$ *entonces p_{eq} es repulsor.*

Ejemplo 55 La oferta de un producto de consumo, en función del precio de ese producto, viene dada por la expresión

$$\mathcal{O}(p) = \frac{16p^2}{16p + 95},$$

mientras que la demanda se rige por la función

$$\mathcal{D}(p) = \frac{16}{p + 2}.$$

Se establece un modelo de oferta-demanda para el producto de manera que se cumple la ley implícita de actualización de precios $\mathcal{O}(X_{n+1}) = \mathcal{D}(X_n)$. El precio de equilibrio p_{eq} se caracteriza por ser una solución de $\mathcal{O}(p) = \mathcal{D}(p)$, es decir

$$\frac{16p^2}{16p + 95} = \frac{16}{p + 2} \quad \Longrightarrow \quad p^2(p + 2) = 16p + 95 \quad \Longrightarrow \quad p^3 + 2p^2 - 16p - 95 = 0.$$

La única solución real de esta ecuación es $p_{\text{eq}} = 5$. Para determinar si este precio de equilibrio es estable o inestable, calculamos las derivadas de las funciones oferta y demanda en ese punto:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}'(p) &= \tfrac{256p^2+3040p}{(16p+95)^2} &\implies \quad \mathcal{O}'(5) = \tfrac{864}{1225} \\ \mathcal{D}'(p) &= -\tfrac{16}{(p+2)^2} &\implies \quad \mathcal{D}'(5) = -\tfrac{16}{49}. \end{aligned}$$

Así pues

$$\left|\frac{\mathcal{D}'(5)}{\mathcal{O}'(5)}\right| = \frac{25}{54} < 1$$

y por lo tanto $p_{\text{eq}} = 5$ es atractor, de acuerdo con la tercera ley de la oferta y la demanda.

2.5.3. El método para EDs de segundo orden

Consideremos la ED de segundo orden autónoma y explícita de la forma

$$X_{n+2} = f\left(X_n, X_{n+1}\right), \tag{2.53}$$

en donde $f = f(x, y)$ es una función de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, es decir, continua y con derivadas parciales continuas en $\mathbb{R}^2$. Sea $p \in \mathbb{R}$ un punto de equilibrio de la ED, y por lo tanto cumple $f(p,p) = p$. Para estudiar las propiedades de estabilidad del punto de equilibrio, podemos linealizar la ED original (2.53) mediante el polinomio de Taylor de primer orden de f en el punto (p,p) (ver (2.50)), obteniendo

$$X_{n+2} = p + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(p,p)} (X_n - p) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(p,p)} (X_{n+1} - p). \tag{2.54}$$

Propiedad 13 *Se tienen los siguientes casos:*

- *Si p es un punto de equilibrio atractor de la ED linealizada* (2.54)*, entonces p es un punto de equilibrio atractor de la ED original* (2.53)*.*
- *Si p es el único punto de equilibrio de la ED linealizada* (2.54) *y es repulsor, entonces p es un punto de equilibrio repulsor de la ED original* (2.53)*.*

Usando la Propiedad 10 podemos obtener un nuevo criterio para determinar las propiedades de estabilidad de un punto de equilibrio de una ED no lineal de segundo orden.

Tema 3

Ecuaciones diferenciales ordinarias

En el Tema 1 se introdujo el concepto de *ecuación diferencial ordinaria* (EDO), como una expresión de la forma

$$F\left(X^{(k)}, X^{(k-1)}, \ldots, X', X, t\right) = 0, \tag{3.1}$$

o equivalente, en donde X y sus derivadas son funciones de t, F es una función continua dada, y $k \in \mathbb{N}^+$ es el *orden* de la EDO. Además, se introdujo el concepto de *solución* como una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, de clase $\mathcal{C}^k(I)$ y que satisface dicha ecuación.

3.1. Problema de Cauchy

Como vimos en el Tema 1, un *problema de Cauchy* es un problema de valores iniciales (PVI) formado por una EDO explícita de orden k

$$X^{(k)} = f(X^{(k-1)}, \ldots, X', X, t)$$

junto con k condiciones de la forma

$$X\left(t_0\right) = X_0, \quad X'\left(t_0\right) = X_0', \quad \ldots, \quad X^{(k-1)}\left(t_0\right) = X_0^{(k-1)},$$

en donde $(X_0^{(k-1)}, \ldots, X_0, t_0) \in \operatorname{dom}(f)$. En este caso, se dice que una función definida en un intervalo I que contiene a t_0 es *solución* del problema de Cauchy si es solución de la EDO correspondiente y cumple las condiciones iniciales (considerando a t_0 como el "instante inicial").

Definición 1 Un problema de Cauchy está bien planteado si

- Existe una única solución.
- Al variar un poco las condiciones iniciales, las soluciones correspondientes son únicas y dependen de forma continua de dichas condiciones iniciales.

No todo problema de Cauchy está bien planteado, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 56 El problema de Cauchy

$$\begin{cases} X' &= 2\sqrt{|X|} \\ \\ X(0) &= 0, \end{cases}$$

no está bien planteado, ya que las funciones

$$\varphi(t) = 0, \qquad \psi(t) = t|t|$$

son dos soluciones distintas (compruébese).

Teorema 2 (Teorema de Picard de orden 1) *Dada $f(x,t)$ una función continua, si existe $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en el dominio de f y es continua, entonces el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} X' &= f(X,t) \\ \\ X(t_0) &= X_0, \end{cases}$$

está bien planteado, en donde (X_0, t_0) es un punto cualquiera del dominio de f.

Ejemplo 57 Dado un problema de Cauchy con una EDO de la forma

$$X' = h(t)$$

en donde h es continua, aplicando el Teorema de Picard obtenemos que siempre está bien planteado, ya que, considerando $f(x,t) := h(t)$, se tiene que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, que es continua.

Ejemplo 58 Dado un problema de Cauchy con una EDO de la forma

$$X' = g(X)$$

en donde g es de clase $\mathcal{C}^1$, considerando $f(x,t) := g(x)$ se tiene que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = g'(x)$ es continua. Por lo tanto, aplicando el Teorema de Picard, el problema de Cauchy está bien planteado.

Ejemplo 59 La función $g(x) := 2\sqrt{|x|}$ del Ejemplo 56 no es derivable en 0 y por lo tanto no satisface las hipótesis del Teorema de Picard. Así pues, no está asegurado que un problema de Cauchy que tenga como EDO $X' = g(X)$ esté bien planteado. De hecho, en el Ejemplo 56 se vio que dicha EDO junto con la condición inicial $X(0) = 0$ es un problema de Cauchy con varias soluciones.

Ejemplo 60 El problema de Cauchy

$$\begin{cases} X' &= X^2 \\ \\ X(0) &= 1, \end{cases}$$

cumple las hipótesis del Teorema de Picard y por lo tanto está bien planteado. De hecho, la única solución viene dada por

$$\varphi(t) = \frac{1}{1-t},$$

pero solamente está definida en $I =]-\infty, 1[$.

El Teorema de Picard de orden 1 se puede generalizar para problemas de Cauchy de orden superior.

Teorema 3 (Teorema de Picard) *Dada* $f(x_{k-1}, \ldots, x_1, x_0, t)$ *una función continua, si existen* $\dfrac{\partial f}{\partial x_{k-1}}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_0}$ *en el dominio de* f *y son continuas, entonces el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} X^{(k)} = f(X^{(k-1)}, \ldots, X', X, t) \\ \\ X(t_0) = X_0, \quad X'(t_0) = X_0', \quad \ldots, \quad X^{(k-1)}(t_0) = X_0^{(k-1)} \end{cases}$$

está bien planteado, en donde $(X_0^{(k-1)}, \ldots, X_0', X_0, t_0)$ *es un punto cualquiera del dominio de* f*.*

3.2. Métodos de resolución

Dada una EDO de la forma (3.1), podemos intentar hallar soluciones particulares que tengan una forma concreta. El tipo de soluciones más sencillas son las constantes; así pues, si buscamos soluciones del tipo $\varphi(t) = p \in \mathbb{R}$, como las derivadas sucesivas de una función constante son cero, p deberá satisfacer la ecuación algebraica

$$F(0, 0, \ldots, 0, p, t) = 0$$

para todo $t \in I$. En este caso, se dice que p es un *punto de equilibrio*, al igual que pasaba con las soluciones constantes de las EDs.

Ejemplo 61 Dada la EDO

$$X'' = tX' + X^2 - 1,$$

los puntos de equilibrio deben satisfacer la ecuación $0 = p^2 - 1$ y por lo tanto existen dos puntos de equilibrio: 1 y -1.

Ejemplo 62 Dada la EDO

$$X'' = X' + X^2 - t,$$

los puntos de equilibrio deben satisfacer la ecuación $0 = p^2 - t$, es decir $p^2 = t$, para todo t de algún intervalo. Así pues, como p ha de ser constante, no existen puntos de equilibrio.

No obstante, es conveniente hallar todas las posibles soluciones. El conjunto de todas las soluciones de una EDO se denomina *solución general* y se representa por $X(t)$.

3.2.1. EDOs de primer orden

En esta sección consideraremos EDOs explícitas, aunque no quede explícitamente indicado.

Las EDOs más sencillas son las de la forma

$$X' = h(t),$$

en donde h es una función continua. En este caso, la solución general es el conjunto de primitivas de h:

$$X(t) = \int h(t)\mathrm{d}t.$$

Así pues, dada una condición inicial $X(t_0) = X_0$, el problema de Cauchy correspondiente está bien planteado (ver Ejemplo 57) y la única solución viene dada por

$$\int_{t_0}^{t} h(\tau)\mathrm{d}\tau + X_0.$$

Veamos a continuación cómo resolver otros tipos de EDOs de primer orden.

EDOs autónomas

Las EDOs autónomas de primer orden son de la forma

$$X' = g(X),$$

en donde supondremos que g es de clase $\mathcal{C}^1$ (ver Ejemplo 58). Nótese que, en este caso, los puntos de equilibrio son los ceros de la función g, es decir, aquellos $p \in \mathbb{R}$ tales que $g(p) = 0$.

Para hallar todas las soluciones, expresamos la EDO en notación diferencial:

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = g(X) \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{g(X)}\mathrm{d}X = \int \mathrm{d}t = t + C,$$

en donde $C \in \mathbb{R}$ es una constante de integración. De esta expresión obtenemos las funciones inversas de las soluciones en forma de primitiva:

$$t(X) = \int \frac{1}{g(X)}\mathrm{d}X.$$

De este modo se da la solución general en forma *implícita*, aunque preferiblemente es aconsejable despejar X (siempre y cuando sea posible) para darla en forma *explícita*.

Ejemplo 63 Dada la EDO

$$X' = X$$

se tiene que

$$t(X) = \int \frac{1}{X}\mathrm{d}X = \ln |X| + C,$$

en donde $C \in \mathbb{R}$ y suponiendo $X \neq 0$. Por lo tanto

$$|X(t)| = e^{t-C}.$$

En este caso, se puede redefinir C como e^{-C} obteniéndose

$$|X(t)| = Ce^{t},$$

con C un parámetro estrictamente positivo. Así pues, la solución general en forma explícita viene dada por

$$X(t) = Ce^{t},$$

con $C \in \mathbb{R}$ un parámetro (no solamente positivo), ya que $X = 0$ es también solución.

Ejemplo 64 Dada la EDO
$$X' = X^2 + 1,$$
se tiene que
$$t(X) = \int \frac{1}{X^2+1}\mathrm{d}X = \arctan X + C,$$
en donde $C \in \mathbb{R}$. Así pues, la solución general en forma explícita viene dada por
$$X(t) = \tan(t + C),$$
en donde C ha sido redefinida y hace el papel de parámetro.

Ejemplo 65 Dada la EDO
$$X' = \frac{e^X}{X^2+1}$$
se tiene que, integrando por partes
$$t(X) = \int (X^2+1)e^{-X}\mathrm{d}X = -(X^2+2X+3)e^{-X} + C,$$
en donde $C \in \mathbb{R}$. De dicha expresión no se puede despejar X y por lo tanto no se puede hallar la solución general en forma explícita.

Ejemplo 66 (Modelo de deuda de Domar) Considerando que las funciones $I(t), D(t)$ representan el *ingreso* y la *deuda* nacionales[1] respectivamente de una determinada economía, el modelo de deuda de Domar supone que estas dos funciones crecen de forma proporcional al ingreso, es decir, existen dos constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que
$$\begin{cases} I' &= c_1 I \\ \\ D' &= c_2 I. \end{cases}$$
Por ejemplo, si suponemos que el ingreso crece a una razón igual al 8 % de su tamaño, se tiene que
$$I' = 0.08I,$$
que es una EDO autónoma. Por lo tanto
$$I(t) = I_0 e^{0.08t},$$
en donde I_0 es el ingreso inicial en $t = 0$. Por otro lado, si suponemos que la deuda crece a una razón igual al 1 % del ingreso, se tiene que
$$D' = 0.01 I_0 e^{0.08t} \qquad \Longrightarrow \qquad D(t) = \frac{1}{8} I_0 e^{0.08t} + C,$$
en donde $C := D_0 - \frac{1}{8}I_0$ con D_0 la deuda inicial. Para ver cómo evoluciona la deuda en comparación con el ingreso, es interesante definir la función
$$\frac{D(t)}{I(t)} = \frac{1}{8} + \frac{C}{I(t)}.$$

[1] Han de considerarse el ingreso y la deuda acumuladas en el último año.

Como $I(t)$ crece exponencialmente con el tiempo, se tiene que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{D(t)}{I(t)} = \frac{1}{8},$$

es decir, la deuda tiende a estabilizarse en el 12.5 % del valor del ingreso, independientemente de las condiciones iniciales.

EDOs de variables separables

Las EDOs que hemos visto hasta ahora son casos particulares de un tipo más general de EDOs llamadas *de variables separables*, que son de la forma

$$X' = g(X)h(t),$$

en donde h es una función continua y g es de clase $\mathcal{C}^1$. Al igual que pasaba con las EDOs autónomas, los puntos de equilibrio son los ceros de la función g.

Para hallar la solución general, se procede de igual forma que con las EDOs autónomas, usando la notación diferencial:

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = g(X)h(t) \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{g(X)}\mathrm{d}X = \int h(t)\mathrm{d}t,$$

de donde se obtiene la solución general en forma *implícita*.

Ejemplo 67 Dada la EDO

$$X' = X^2 t^2,$$

suponiendo $X \neq 0$ se tiene que

$$\int \frac{1}{X^2}\mathrm{d}X = \int t^2\mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{X} = \frac{t^3}{3} + C,$$

Así pues, la solución general en forma explícita viene dada por

$$X(t) = \frac{3}{C - t^3},$$

en donde C ha sido redefinida y hace el papel de parámetro. Además, como $X(t) = 0$ también satisface la EDO, hay que añadirla.

EDOs homogéneas

Las EDOs homogéneas son de la forma

$$X' = f(X, t),$$

en donde f es homogénea de grado 0, es decir, $f(\lambda X, \lambda t) = f(X, t)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ que tenga sentido (teniendo en cuenta el dominio de f). Haciendo el cambio de variable

$$U(t) = \frac{X(t)}{t}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} U' &= \frac{X't - X}{t^2} = \frac{1}{t}\left(X' - \frac{X}{t}\right) = \frac{1}{t}\left(f(X,t) - U\right) \\ &= \frac{1}{t}\left(f\left(\tfrac{1}{t}X, 1\right) - U\right) = \frac{1}{t}\left(f\left(U,1\right) - U\right), \end{aligned}$$

que es una EDO de variables separables. Resolviéndola y deshaciendo el cambio obtenemos la solución general.

Ejemplo 68 Dada la EDO

$$X' = \frac{X\left(X + t\right)}{t^2},$$

se tiene que $f(x,t) = \frac{x(x+t)}{t^2}$ es homogénea de grado cero y por lo tanto, haciendo el cambio $U = X/t$ se tiene que

$$U' = \frac{1}{t}\left(f\left(U,1\right) - U\right) = \frac{U^2}{t},$$

que es una EDO es de variables separables. Resolviéndola, llegamos a

$$U(t) = \frac{-1}{\ln t + C} \qquad \Longrightarrow \qquad X(t) = \frac{-t}{\ln t + C}.$$

EDOs lineales

Las EDOs lineales de primer orden son de la forma

$$X' = a(t)X + b(t),$$

en donde a, b son funciones continuas. Haciendo el cambio de variable

$$U(t) = e^{-A(t)}X(t)$$

con A una primitiva de a (es decir $A' = a$), se tiene que

$$U' = -A'e^{-A}X + e^{-A}X' = e^{-A}\left(-A'X + aX + b\right) = be^{-A}$$

y por lo tanto

$$U(t) = \int b(t)e^{-A(t)}\mathrm{d}t.$$

Deshaciendo el cambio, obtenemos que la solución general viene dada por

$$X(t) = e^{A(t)}\int b(t)e^{-A(t)}\mathrm{d}t. \tag{3.2}$$

Ejemplo 69 Dada la EDO

$$X' = X - 2t,$$

es lineal con $a(t) = 1$ y $b(t) = -2t$. Eligiendo $A(t) = t$ como primitiva de $a(t)$, aplicando la fórmula (3.2) e integrando por partes se tiene que

$$X(t) = e^t\int(-2t)e^{-t}\mathrm{d}t = 2(t+1) + Ce^t.$$

Ecuaciones de Bernoulli

Las ecuaciones de Bernoulli son de la forma

$$X' = a(t)X + b(t)X^n,$$

en donde a, b son funciones continuas y $n \neq 0, 1$. Haciendo el cambio de variable

$$U(t) = (X(t))^{1-n}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} U' &= (1-n)X^{-n}X' = (1-n)(aX + bX^n)X^{-n} = (1-n)(aX^{1-n} + b) \\ &= (1-n)(aU + b), \end{aligned}$$

que es una EDO lineal. Resolviéndola y deshaciendo el cambio obtenemos la solución general.

Ejemplo 70 Dada la EDO

$$X' = X(2tX - 1),$$

es de Bernoulli con $n = 2$. Haciendo el cambio $U = X^{-1}$ se tiene que

$$U' = U - 2t,$$

que es la EDO lineal del Ejemplo 69. Así pues

$$U(t) = 2(t+1) + Ce^t \qquad \Longrightarrow \qquad X(t) = \frac{1}{2(t+1) + Ce^t}.$$

Ecuaciones de Ricatti

Las ecuaciones de Ricatti son de la forma

$$X' = a(t)X + b(t)X^2 + c(t),$$

en donde a, b, c son funciones continuas. Haciendo el cambio de variable

$$U(t) = X(t) - \varphi(t)$$

con φ una solución particular, se tiene que

$$\begin{aligned} U' &= X' - \varphi' = (aX + bX^2 + c) - (a\varphi + b\varphi^2 + c) = a(X - \varphi) + b(X^2 - \varphi^2) \\ &= aU + b(X^2 - 2X\varphi + \varphi^2) + b(2X\varphi - 2\varphi^2) = aU + bU^2 + 2b\varphi U \\ &= (a + 2b\varphi)U + bU^2, \end{aligned}$$

que es una ecuación de Bernoulli con $n = 2$. Resolviéndola y deshaciendo el cambio obtenemos la solución general.

Ejemplo 71 Dada la EDO

$$X' = (4t - 1)X + 2t(X^2 + 1) - 1,$$

se puede comprobar que -1 es un punto de equilibrio, es decir, $\varphi(t) = -1$ es una solución particular constante. Como la EDO es de Ricatti, haciendo el cambio $U = X + 1$ se tiene que

$$U' = -U + 2tU^2 = U(2tU - 1),$$

que es la EDO de Bernoulli del Ejemplo 70. Así pues

$$U(t) = \frac{1}{2(t+1) + Ce^t} \qquad \Longrightarrow \qquad X(t) = \frac{1}{2(t+1) + Ce^t} - 1.$$

3.2.2. EDOs lineales de cualquier orden

Las EDOs lineales (de coeficientes constantes), abreviadamente EDOLs, son de la forma

$$a_k X^{(k)} + a_{k-1} X^{(k-1)} + \cdots + a_1 X' + a_0 X = q(t), \tag{3.3}$$

en donde $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ y el término externo $q(t)$ es una función continua. También se exige que $a_k \neq 0$, y en este caso, k es el orden de la EDOL. Además, por el Teorema de Picard, se puede demostrar que todo problema de Cauchy con una EDOL de la forma (3.3) está bien planteado.

Resolución de EDOLs homogéneas

Si $q(t) = 0$ se dice que la EDOL (3.3) es homogénea, abreviadamente EDOLH:

$$a_k X^{(k)} + a_{k-1} X^{(k-1)} + \cdots + a_1 X' + a_0 X = 0, \tag{3.4}$$

Al igual que pasaba con las EDLHs, la solución general (es decir, el conjunto de soluciones) de una EDOLH tiene estructura de espacio vectorial de dimensión k y por lo tanto, para hallarla basta con encontrar una base (llamada *sistema fundamental*) formada por k soluciones particulares linealmente independientes.

La siguiente propiedad nos ayudará a calcular dicha base.

Propiedad 14 *La función $e^{\lambda t}$ es solución de* (3.4) *si y sólo si λ verifica la ecuación*

$$a_k \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

La ecuación anterior recibe el nombre de *ecuación característica* de la EDOLH (3.4), y está formada por el correspondiente *polinomio característico* igualado a cero. Así pues, el cálculo de la solución general de una EDOLH es análogo al caso discreto. Veamos algunos ejemplos basados en los ejemplos de resolución de EDLHs ya vistos en el Tema 2:

Ejemplo 72 Supongamos que queremos resolver el PVI:

$$\begin{cases} 2X' - 6X = 0 \\ \\ X(0) = 5. \end{cases}$$

La ecuación característica correspondiente es

$$2\lambda - 6 = 0,$$

cuya única solución es $\lambda = 3$. Por lo tanto, la función e^{3t} es solución de la EDOLH, y como el espacio de soluciones es de dimensión 1, la solución general viene dada por

$$A \cdot e^{3t}, \qquad A \in \mathbb{R}.$$

Ahora basta ajustar el parámetro A para conseguir que se cumpla la condición inicial:

$$X(0) = 5 \quad \Longrightarrow \quad A \cdot e^0 = 5 \quad \Longrightarrow \quad A = 5.$$

Así pues, la única solución del PVI es la función $5 \cdot e^{3t}$.

Ejemplo 73 Consideremos el PVI

$$\begin{cases} X'' + X' - 6X' = 0 \\ \\ X(0) = 3, \quad X'(0) = 1. \end{cases}$$

La ecuación característica correspondiente es

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0,$$

cuyas soluciones son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -3$. Por lo tanto, un sistema fundamental de soluciones lo forman las funciones

$$e^{2t}, \quad e^{-3t}.$$

En este caso, la solución general de la EDOLH viene dada por

$$A \cdot e^{2t} + B \cdot e^{-3t}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Ahora hay que calcular A y B para que se cumplan las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{rcl} X(0) = 3 & \Longrightarrow & A + B = 3 \\ \\ X'(0) = 1 & \Longrightarrow & 2A - 3B = 1. \end{array}\right\}$$

La solución de este sistema es $A = 2$, $B = 1$, con lo que la única solución del PVI es la sucesión cuyo término general es

$$2 \cdot e^{2t} + e^{-3t}.$$

Ejemplo 74 Consideremos el PVI

$$\begin{cases} X'' - 4X' + 8X' = 0 \\ \\ X(0) = 4, \quad X'(0) = 10. \end{cases}$$

La ecuación característica correspondiente es

$$\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0,$$

que no tiene soluciones reales, pero sí complejas: $\lambda_1 = 2 + 2\mathrm{i}$ y $\lambda_2 = 2 - 2\mathrm{i}$. Siguiendo el esquema que estamos utilizando llegamos a que $\left\{e^{(2+2\mathrm{i})t}, e^{(2-2\mathrm{i})t}\right\}$ forman un sistema fundamental de soluciones de la EDOLH. Aunque esto es cierto, lo deseable es conseguir otro que sea real. Para obtenerlo, vamos a realizar un *cambio de base*:

$$\frac{e^{(2+2\mathrm{i})t} + e^{(2-2\mathrm{i})t}}{2} = e^{2t}\cos(2t)$$

$$\frac{e^{(2+2\mathrm{i})t} - e^{(2-2\mathrm{i})t}}{2\mathrm{i}} = e^{2t}\operatorname{sen}(2t),$$

con lo que la solución general de la EDOLH será de la forma

$$A \cdot e^{2t}\cos(2t) + B \cdot e^{2t}\operatorname{sen}(2t), \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Imponiendo que se cumplan las condiciones iniciales

$$\left.\begin{array}{lll} X(0) = 4 & \Longrightarrow & A \cdot e^0 \cos 0 + B \cdot e^0 \operatorname{sen} 0 = 4 \quad \Longrightarrow \quad A = 4 \\ & & \\ X'(0) = 10 & \Longrightarrow & A \cdot \left(2e^0 \cos 0 - 2e^0 \operatorname{sen} 0\right) + B \cdot \left(2e^0 \operatorname{sen} 0 + 2e^0 \cos 0\right) = 10 \\ & \Longrightarrow & 2A + 2B = 10 \end{array}\right\}$$

cuya solución es $A = 4$, $B = 1$. Por lo tanto, la solución del PVI es la función

$$4 \cdot e^{2t}\cos(2t) + e^{2t}\operatorname{sen}(2t).$$

Ejemplo 75 Consideremos el PVI

$$\begin{cases} X'' - 3X' + 9X' = 0 \\ \\ X(0) = 4, \quad X'(0) = 10. \end{cases}$$

La ecuación característica correspondiente es

$$\lambda^2 - 3\lambda + 9 = 0,$$

cuyas soluciones son complejas: $\lambda_1 = \frac{3+3\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{3-3\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$. Así pues, un sistema fundamental de soluciones lo forman las funciones

$$e^{\frac{3}{2}t}\cos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}t\right), \qquad e^{\frac{3}{2}t}\operatorname{sen}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}t\right),$$

y la solución general de la EDOLH será de la forma

$$A \cdot e^{\frac{3}{2}t}\cos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}t\right) + B \cdot e^{\frac{3}{2}t}\operatorname{sen}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}t\right), \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Imponiendo que se cumplan las condiciones iniciales

$$\left.\begin{array}{lll} X(0) = 4 & \Longrightarrow & A \cdot e^0 \cos 0 + B \cdot e^0 \operatorname{sen} 0 = 4 \quad \Longrightarrow \quad A = 4 \\ & & \\ X'(0) = 10 & \Longrightarrow & A \cdot \left(\frac{3}{2}e^0 \cos 0 - \frac{3}{2}e^0 \operatorname{sen} 0\right) + B \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}e^0 \operatorname{sen} 0 + \frac{3\sqrt{3}}{2}e^0 \cos 0\right) = 10 \\ & \Longrightarrow & \frac{3}{2}A + \frac{3\sqrt{3}}{2}B = 10 \end{array}\right\}$$

cuya solución es $A = 4$, $B = \frac{8\sqrt{3}}{9}$. Por lo tanto, la solución del PVI es la función

$$4 \cdot e^{\frac{3}{2}t} \cos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{8\sqrt{3}}{9} \cdot e^{\frac{3}{2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Ejemplo 76 Consideremos el PVI

$$\begin{cases} X'' - 4X' + 4X = 0 \\ \\ X(0) = 3, \quad X'(0) = 10. \end{cases}$$

La ecuación característica correspondiente es

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0,$$

cuya única solución es $\lambda = 2$. No obstante, esta solución es una raíz doble del polinomio característico y, en este caso, se puede comprobar que un sistema fundamental de soluciones lo forman las funciones

$$e^{2t}, \quad te^{2t}.$$

Por lo tanto, la solución general de la EDOLH viene dada por

$$A \cdot e^{2t} + B \cdot te^{2t}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Exigiendo que se cumplan las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{rcl} X(0) = 3 & \Longrightarrow & A = 3 \\ \\ X'(0) = 10 & \Longrightarrow & 2A + B = 10. \end{array}\right\}$$

La solución de este sistema es $A = 3$, $B = 4$, con lo que la única solución del PVI es la función

$$3 \cdot e^{2t} + 4 \cdot te^{2t} = (3 + 4t) \cdot e^{2t}.$$

En general, para calcular un sistema fundamental de soluciones de una EDOLH, debemos calcular todas las raíces del polinomio característico correspondiente junto con sus multiplicidades, y cada una de las raíces (contadas con su multiplicidad) da lugar a una solución de acuerdo al siguiente esquema:

- Si λ es una raíz real con multiplicidad m, entonces las funciones

  $$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \ldots, t^{m-1}e^{\lambda t},$$

  son m soluciones linealmente independientes de la EDOLH.

- Si $\lambda = a \pm ib$ es una raíz compleja (junto con su conjugada) con multiplicidad m, entonces las funciones

  $$\begin{array}{l} e^{at} \cos(bt), e^{at} \operatorname{sen}(bt), \\ te^{at} \cos(bt), te^{at} \operatorname{sen}(bt), \\ \ldots \\ t^{m-1}e^{at} \cos(bt), t^{m-1}e^{at} \operatorname{sen}(bt), \end{array}$$

  son $2m$ soluciones linealmente independientes de la EDOLH.

Resolución de EDOLs completas

Dada una EDOL de la forma (3.3), si $q(t) \neq 0$ se dice que la EDOL es *no homogénea* o *completa*:

$$a_k X^{(k)} + a_{k-1} X^{(k-1)} + \cdots + a_1 X' + a_0 X = q(t). \tag{3.5}$$

En este caso, se puede construir una EDOLH simplemente sustituyendo $q(t)$ por 0; esta nueva ecuación recibe el calificativo de *homogénea asociada* a (3.5) y se cumple la siguiente propiedad cuya demostración se puede obtener por simple comprobación:

Propiedad 15 *Dadas soluciones cualesquiera φ de la EDOL completa* (3.5) *y $\overline{\varphi}$ de la correspondiente EDOLH asociada, se cumple que $\varphi + \overline{\varphi}$ es también solución de* (3.5)*.*

De esta propiedad se deduce que la solución general de una EDOL completa se puede construir mediante la suma de una solución particular de dicha EDOL y la solución general de la EDOLH asociada. En forma esquemática:

$$\left[\begin{array}{c}\text{solución general}\\ \text{de la EDOL completa}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\text{solución particular}\\ \text{de la EDOL completa}\end{array}\right] + \left[\begin{array}{c}\text{solución general}\\ \text{de la EDOLH asociada}\end{array}\right].$$

Como ya sabemos calcular la solución general de cualquier EDOLH, basta calcular ahora una solución particular de la EDOL completa y sumarla a la solución general de la EDOLH asociada para obtener la solución general de la EDOL completa.

Al igual que con las EDLs, buscaremos una solución particular que sea “del mismo tipo” que el término externo $q(t)$. No obstante, este método no funciona siempre. Veamos algunos casos:

- $q(t) = c$ con $c \in \mathbb{R} \Rightarrow$ se busca solución particular del tipo $\varphi(t) = C$ con $C \in \mathbb{R}$ a determinar.
- $q(t) = c \cdot r^t$ con $c, r \in \mathbb{R}$, $r > 0 \Rightarrow$ se busca solución particular del tipo $\varphi(t) = C \cdot r^t$ con $C \in \mathbb{R}$ a determinar.
- $q(t) = c_j t^j + \cdots + c_1 t + c_0$ con $j \in \mathbb{N}$, $c_0, c_1, \ldots, c_j \in \mathbb{R} \Rightarrow$ se busca solución particular del tipo $\varphi(t) = C_j t^j + \cdots + C_1 t + C_0$ con $C_0, C_1, \ldots, C_j \in \mathbb{R}$ a determinar.

En realidad, el caso $q(t)$ constante es un caso particular de $q(t)$ exponencial (con base $r = 1$) o $q(t)$ polinómica (de grado 0). En este caso, lo que estamos buscando son puntos de equilibrio, ya que éstos son soluciones particulares constantes.

Sin embargo, cuando $q(t)$ es solución de la EDOLH asociada se dice que hay *resonancia* y el método no funciona. En este caso, hay que multiplicar sucesivamente la función candidata a ser solución particular por t, t^2, etc... hasta que encontremos alguna solución particular.

Veamos algunos ejemplos de cómo hallar soluciones particulares, análogos a los vistos en el Tema 2:

Ejemplo 77 Dada la EDOL

$$X'' + 4X' + 4X = 27,$$

buscamos una solución particular de la forma $\varphi(t) = C$ con $C \in \mathbb{R}$ a determinar, es decir, buscamos puntos de equilibrio. Sustituyendo en la EDOL:

$$4C = 27 \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{27}{4}.$$

Ejemplo 78 Dada la EDOL
$$X'' - 4X' = 10,$$
se puede comprobar que no existen puntos de equilibrio y por lo tanto no existen soluciones particulares de la forma $\varphi(t) = C$ con $C \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, hay resonancia, y en su lugar buscamos una solución particular de la forma $\varphi(t) = C \cdot t$ con $C \in \mathbb{R}$ a determinar. Sustituyendo en la EDOL:
$$-4C = 10 \quad \Longrightarrow \quad C = -\frac{5}{2}.$$
En el caso en el que el término independiente $q(t)$ sea constante, habrá resonancia cuando 0 sea raíz del polinomio característico. Entonces, habrá que buscar una solución particular del tipo $\varphi(t) = C \cdot t^m$ con $C \in \mathbb{R}$ y m la multiplicidad de 0 como raíz del polinomio característico.

Ejemplo 79 Dada la EDOL
$$X'' - 2X' + 3X = 22 \cdot 4^t,$$
buscamos una solución particular de la forma $\varphi(t) = C \cdot 4^t$ con $C \in \mathbb{R}$ a determinar. Sustituyendo en la EDOL:
$$C \cdot 4^t \ln^2(4) - 2C \cdot 4^t \ln(4) + 3C \cdot 4^t = 22 \cdot 4^t$$
$$\Longrightarrow \quad (\ln^2(4) - 2\ln(4) + 3)C \cdot 4^t = 22 \cdot 4^t \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{22}{\ln^2(4) - 2\ln(4) + 3}.$$

Ejemplo 80 Dada la EDOL
$$X' - \ln(2)X = 2^t,$$
se puede comprobar que no existen soluciones particulares de la forma $\varphi(t) = C \cdot 2^t$ con $C \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, hay resonancia, y en su lugar buscamos una solución particular de la forma $\varphi(t) = C \cdot t \cdot 2^t$ con $C \in \mathbb{R}$ a determinar. Sustituyendo en la EDOL:
$$C \cdot (2^t + t2^t \ln(2)) - \ln(2)C \cdot t2^t = 2^t \quad \Longrightarrow \quad C = 1.$$
En el caso $q(t) = c \cdot r^t$ con $c, r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, habrá resonancia cuando $\ln(r)$ sea raíz del polinomio característico. Entonces, habrá que buscar una solución particular del tipo $\varphi(t) = C \cdot t^m \cdot r^t$ con $C \in \mathbb{R}$ y m la multiplicidad de $\ln(r)$ como raíz del polinomio característico.

Ejemplo 81 Dada la EDOL
$$X' + X = t^2,$$
buscamos una solución particular de la forma $\varphi(t) = at^2 + bt + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ a determinar. Sustituyendo en la EDOL:
$$2at + b + at^2 + bt + c = t^2 \quad \Longrightarrow \quad at^2 + (2a + b)t + b + c = t^2$$
$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ 2a + b & = & 0 \\ b + c & = & 0, \end{array} \right.$$
con lo que $a = 1$, $b = -2$, $c = 2$.