

TEMA 1:

INTRODUCCIÓN A SISTEMAS DINÁMICOS

1. Clasifica las ED siguientes:

(a) $X_{n+2} = X_{n+1}X_n - X_n$

(b) $(X_{n+2} + \sqrt{X_n})^3 = nX_{n+1}$

(c) $X_{n+1} + \frac{1}{X_n} = 5X_{n-1}$

(d) $X_{n+1} = X_{n+2} + ne^{X_n}$

2. Dada la ED $X_{n+2} = X_{n+1}X_n - X_n$, determina si las sucesiones cuyos primeros términos son

(a) $\{0, 1, 0, -1, \dots\}$

(b) $\{1, 2, 1, 2, \dots\}$

(c) $\{2, 2, 2, 2, \dots\}$

pueden ser solución, y calcula los dos siguientes términos en caso afirmativo.

3. Calcula los 7 primeros términos de las soluciones de los siguientes PVI, y representa gráficamente los términos calculados:

(a) $\begin{cases} X_{n+1} = \sin(X_n) \\ X_0 = \pi/2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} X_{n+1} = 2X_n - 3 \\ X_0 = 3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} X_{n+1} = 1 - X_n^2 \\ X_0 = 1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} X_{n+1} = \frac{1}{X_n} \\ X_0 = 2 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} X_{n+2} = X_{n+1} + X_n \\ X_0 = 0, \quad X_1 = 1 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} X_{n+2} = X_{n+1}X_n + n \\ X_0 = 1, \quad X_1 = 1 \end{cases}$

4. Calcula el siguiente término de las secuencias siguientes, justificándolo mediante una ED de la que sean solución:

(a) $\{2, 5, 8, 11, 14, 17, \dots\}$

(b) $\{2, 3, 5, 9, 17, 33, \dots\}$

(c) $\{2, 4, -2, 16, -38, \dots\}$

(d) $\{20, 12, 8, 6, 5, \dots\}$

(e) $\{1, 2, 5, 13, 34, \dots\}$

(f) $\{-1, 2, 3, 1, -2, \dots\}$

5. Determina el valor de los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que la sucesión

$$S = \{0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, \dots\}$$

sea solución de $X_{n+1} = aX_n^2 + bX_n + c$.

6. Determina el valor de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que una sucesión cuyos primeros términos son $\{-1, 0, 1, 4, \dots\}$ sea solución de $X_{n+2} = aX_{n+1} + bX_n$.

7. Determina el valor de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la sucesión $S_n = an + b$ sea solución de $X_{n+1} = 2X_n + n$.

8. Comprueba que $S_n = (an + b)2^n$, en donde $a, b \in \mathbb{R}$ son parámetros, es solución de

$$X_{n+2} = 4(X_{n+1} - X_n)$$

y halla los valores de a, b para que se cumplan las condiciones iniciales $X_0 = 3$, $X_1 = 10$.

9. Clasifica las EDO siguientes:

$$(a) X'' = X^2 + (X')^2 \quad (b) (X'' + \sqrt{X})^3 = tX'$$

$$(c) X'' + \frac{1}{X'} = 5X' \quad (d) X' = X'' + te^t$$

10. Dada la EDO $X' = -tX^2$, determina si las siguientes funciones son solución:

$$(a) \varphi(t) = \frac{2}{27 - t^2} \quad (b) \psi(t) = \frac{2}{27 + t^2} \quad (c) f(t) = 0$$

11. ¿Es la función $\varphi(t) = te^t$ una solución de $X' - X = e^t$?

12. ¿Es la función $\varphi(t) = 3 + t^2$ una solución de $X' = X^2 - 3$?

13. Determina el valor del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$ para que la función $\varphi(t) = t^\alpha$ sea solución de $X' = 3t^{-1}X$.

14. Comprueba que $\varphi(t) = (at + b)e^{2t}$, en donde $a, b \in \mathbb{R}$ son parámetros, es solución de

$$X'' = 4(X' - X)$$

y halla los valores de a, b para que se cumplan las condiciones iniciales $X(0) = 3$, $X'(0) = 10$.

15. Discretiza los siguientes PVI usando el método de Euler, con pasos $h = 1$ y $h = 1/2$, y calcula los 5 primeros términos del problema discretizado:

$$(a) \begin{cases} X'' + X' - X = 0 \\ X(0) = 1, \quad X'(0) = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} X' = X + t \\ X(2) = 1 \end{cases}$$

16. Dado el PVI

$$\begin{cases} X' + X = 0 \\ X(0) = 1 \end{cases},$$

se pide:

(a) Comprueba que $\varphi(t) = e^{-t}$ es solución.

(b) Discretiza el PVI usando el método de Euler, con un paso h .

(c) Compara el valor de la solución del apartado (a) en $t = 1$ con el valor de la solución del problema discretizado en $t = 1$, tomando $h = 1$, $h = 1/2$, $h = 1/10$ y $h = 1/100$.