

# MATEMÁTICAS PARA LOS MODELOS DINÁMICOS

25 de Enero 2024

1. (1 punto) Halla los valores del parámetro  $\alpha \in \mathbb{R}$ , en cada caso, para que sucesiones cuyos primeros términos son

(a)  $1, 2, 8, \dots$                       (b)  $1, 2, 4, \dots$                       (c)  $1, 1, 1, \dots$

sean solución de la ED

$$\alpha X_{n+1} - X_n^2 = 0.$$

2. (1 punto) Demuestra que la ED

$$X_{n+1} = X_n^3 + \frac{3X_n}{4}$$

es monótona y representa su diagrama de monotonía.

¿En qué casos podemos afirmar que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} X_n = +\infty$ ? Justifica la respuesta.

3. (1 punto) Halla los puntos de equilibrio y las soluciones de periodo 2 de las siguientes ED:

(a)  $X_{n+1} - 2X_n + 1 = 0.$

(b)  $X_{n+1} + X_n - 2 = 0.$

Además, estudia el comportamiento (atracción, repulsión) de sus puntos de equilibrio.

4. Resuelve los siguientes PVI:

(a) (1 punto) 
$$\begin{cases} X_{n+2} + 4X_n = 0 \\ X_0 = 1, \quad X_1 = 2. \end{cases}$$

(b) (1.5 puntos) 
$$\begin{cases} X_{n+2} - 5X_{n+1} + 4X_n = 3 \\ X_0 = 0, \quad X_1 = 4. \end{cases}$$

5. (1 punto) Determina el valor del parámetro  $\alpha \in \mathbb{R}$  para que la función  $\varphi(t) = \sin(\alpha t)$  sea solución de

$$(X')^2 - XX'' = 4.$$

(Nota:  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .)

6. Resuelve los siguientes PVI:

(a) (1 punto) 
$$\begin{cases} X'' + 4X' + 4X = 0 \\ X(0) = 2, \quad X'(0) = -3. \end{cases}$$

(b) (1.5 puntos) 
$$\begin{cases} X'' - 2X' + 2X = 2t \\ X(0) = 1, \quad X'(0) = 0. \end{cases}$$

7. (1 punto) Discretiza el siguiente PVI usando el método de Euler, con paso  $h$ :

$$\begin{cases} X'' + X' + X^2 = t \\ X(0) = 1, \quad X'(0) = 0. \end{cases}$$

Suponiendo que  $\varphi(t)$  sea la solución (desconocida) del PVI anterior, indica cómo hallarías una aproximación de  $\varphi(1)$  usando la discretización anterior.