Producción de Rayos X

Ejercicio 1

Un cambio en la corriente del tubo produce un cambio proporcional en la intensidad de la emisión, pero no cambia su forma. Un cambio en la tensión cambia la forma del espectro, pues la radiación de frenado alcanza hasta la tensión de aceleración, y la radiación característica sólo aparece cuando la tensión supera la energía de enlace del material.

Por tanto, el espectro del centro corresponde a un cambio de corriente, y el espectro de la derecha corresponde a un cambio de tensión de aceleración.

Ejercicio 2

La intensidad (o exposición, E) de un tubo de rayos X es proporcional a la corriente aplicada (I) y al cuadrado de la tensión (V), luego:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{I_1}{I_2} \text{ y } \frac{E_1}{E_2} = \frac{(V_1)^2}{(V_2)^2}$$

La nueva intensidad para V=125kV será:

$$E_2 = \frac{E_1}{(V_1)^2}(V_2)^2 = \frac{32mR}{(110kV)^2}(125kV)^2 = 41{,}32mR$$

La nueva intensidad para I=20mAs será: $E_2 = \frac{E_1}{I_1} I_2 = \frac{32mR}{10mAs} 20mAs = 64mR$

Interacción de los Rayos X con la materia

Ejercicio 1

Los rayos atraviesan un material con distintos coeficientes de absorción. En este caso, la absorción total producida es proporcional al coeficiente de atenuación lineal de cada región ponderado por su longitud:

$$I = I_o e^{-\sum \mu x}$$

En el primer caso:

$$I_1 = I_0 e^{-(\mu_{hueso} \cdot 1cm + \mu_{tejido} \cdot 3cm)} = I_0 e^{-(10\cdot 1 + 1\cdot 3)} = I_0 e^{-13}$$

En el segundo caso:

$$I_2 = I_0 e^{-(\mu_{hueso} \cdot 3cm + \mu_{tejido} \cdot 1cm)} = I_0 e^{-(10\cdot 3 + 1\cdot 1)} = I_0 e^{-31}$$

Y por último en el tercer caso:

$$I_3 = I_0 e^{-(\mu_{tejido} \cdot 4cm)} = I_0 e^{-(1\cdot 4)} = I_0 e^{-4}$$

Ejercicio 2:

La probabilidad de interacción por efecto Compton es proporcional a ρ/E. Como la E se mantiene constante, la probabilidad relativa será:

$$\frac{p_{hueso}}{p_{grasa}} = \frac{\rho_{hueso}}{\rho_{grasa}} = \frac{1650 kg/m^3}{916 kg/m^3} = 1,80$$

Es decir, hay un 80% más de interacciones por efecto Compton en el hueso que en la grasa.

Rayos X

Ejercicio 1

La eficiencia de un tubo de rayos X, medida como el porcentaje de energía entregada al ánodo por los e- que se convierte en radiación de Rayos X, es aproximadamente:

Eficiencia = kV x Z x 10^{-6}

Para el caso del Tungsteno (Z=74) a 90kV será: eficiencia = 90 · 74 · 10-6 = 6,66·10-3
Es decir, de aproximadamente el 0,6%
A esta tensión sí que hay radiación característica, porque el Tungsteno presenta e- cuyas energías de unión son inferiores a 90keV:

Capa K = -69,5keV
Capa L = -11keV
Capa M = -2,5keV

Por tanto habrá radiación característica debido a los saltos entre L y M y entre K y M:

$Rad_{LèK}$ = 69,5keV – 11keV = 59,5 keV
$Rad_{MèK}$ = 69,5keV – 2,5keV = 67 keV

Ejercicio 2

En el hueso predomina el calcio (Z = 20) mientras que en el tejido prevalece el carbono (Z = 12). El número atómico equivalente para cada tejido es aproximadamente Z_{hueso} = 13,7 y Z_{tejido}=6,5 (http://www.jacmp.org/index.php/jacmp/article/view/3557/2363).
La constante de atenuación lineal depende de la suma de los efectos fotoeléctrico y Compton principalmente (en energías de diagnóstico) con una proporcionalidad:

$$p_{fotoeléctrico} \propto \rho \frac{Z^3}{E^3} \text{ y } p_{Compton} \propto \frac{\rho}{E}$$

En energías bajas prevalece el efecto fotoeléctrico y se puede despreciar el efecto Compton. Por tanto si E es baja, la absorción del hueso es mucho mayor que la del tejido:

$$\left(Z_{hueso}\right)^3 \gg \left(Z_{tejido}\right)^3$$

En cambio para altas energía prevalece el efecto Compton, por lo que la absorción depende prioritariamente de la densidad (ρ) que es más parecida entre ambos casos (1,9g/cm^3 para hueso y 1g/cm^3 para tejido).

Ejercicio 3

La energía que lleva un único fotón de Rayos X es de 60keV (=9,613·10^{-15} J). Por otro lado, la energía de un único fotón de luz visible es, según la Ec. de Planck: E = h·f:

$$E_{415nm} = hf = h\frac{c}{\lambda} = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\, J \cdot s \frac{3 \cdot 10^{8}\, m/s}{415 \cdot 10^{-9}\, m} = 4{,}79 \cdot 10^{-19}\, J$$

(http://www.wolframalpha.com/input/?i=415nm+in+J)

Es decir, que un solo fotón puede generar n fotones de luz visible:

$$n = \frac{E_{60keV}}{E_{415nm}} = \frac{9{,}613 \cdot 10^{-15}\, J}{4{,}79 \cdot 10^{-19}\, J} = 20.069$$

Como la eficiencia de conversión es del 20%, obtendremos un 20% de estos fotones:

N = 20.069 x 0,2 = 4.013,8 fotones de luz visible

Ejercicio 4

La exposición recibida es proporcional a mA x (kV)^2 luego:

$$\frac{ESE_{58kV,8mAs}}{ESE_{54kV,8mAs}} = \frac{8mAs \cdot (58kV)^2}{8mAs \cdot (54kV)^2}$$

Despejando: $ESE_{54kV,8mAs} = \frac{ESE_{58kV,8mAs} \cdot (54kV)^2}{(58kV)^2} = 0{,}24mGy \cdot 0{,}887 = 0{,}208\text{mGy}$

Ejercicio 5

Aumentar la tensión en un 15% y reducir la corriente a la mitad significa aplicar 80kV x 1,15 = 92kV y 30mAs/2 = 15mA/s.

Como en el ejercicio anterior, si despejamos la nueva ESE:

$$ESE_{92kV,15mAs} = \frac{ESE_{80kV,30mAs} \cdot (92kV)^2 \cdot 15mA}{(80kV)^2 \cdot 30mA} = 1{,}35mGy \cdot 0{,}6612 = 0{,}8927\text{mGy}$$

Ejercicio 6

La exposición es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia (SID):

$$\frac{ESE_1}{ESE_2} = \frac{(SID_2)^2}{(SID_1)^2}$$

Luego: $ESE_{91cm} = \frac{(100cm)^2}{(91cm)^2} \cdot ESE_{100cm} = 1{,}2076 \cdot 0{,}13\text{mGy} = 0{,}157\text{mGy}$

Medicina nuclear

Ejercicio 1

5mCi de Tc-99m a las 24h tienen una actividad de:

$$A(t) = A(0)e^{-\lambda t}$$

donde A(0) = 5mCi = $5\cdot10^{-3}$ x $3.7\cdot10^{10}$ Bq=$185\cdot10^{6}$ Bq ($185\cdot10^{6}$ desintegraciones/s)

dado que $t_{1/2}$ es de 6h, el λ del Tc-99m es de:

$$A(6h) = 0.5 \cdot A(0)e^{-6h\cdot\lambda}$$

A(6)=0.5*A0=A0*e-(λ*6) luego λ = -ln(0.5)/6h = 0.1155/h porque -λ* $t_{1/2}$ =ln(1/2) es decir, λ* $t_{1/2}$ =ln(2)
por tanto:

$$A(24h) = 185^{6} \cdot e^{-6\cdot 0.115/h\cdot 24h} = 11.56 \cdot 10^{6}\ Bq$$

Es decir, $11.56\cdot10^{6}$ desintegraciones por segundo
En mCi:

A(24h)=5mCi*e^(-0.1155/h*24h)=0.3127 mCi

Cuestión 2.b
dosis total depositada en un hígado de 1.8kg.
La dosis se mide como (Energía depositada) / masa

La energía de cada fotón es:

$E_{Tc\text{-}99}$ = 140 KeV = $2,243047\cdot10^{-14}$ J

(http://www.wolframalpha.com/input/?i=140kev%20in%20j)

El número total de desintegraciones que se producen es:

N= A(0)/λ ; Luego
N= $1.85\cdot10^{8}/3.209\cdot10^{-5}$ =$5.765\cdot10^{12}$ desintegraciones

Donde λ= ln2/6h = 0.1155 h^{-1} = $3.209\cdot10^{-5}$ s^{-1}

Por tanto la energía total depositada en el hígado es

E= N· $E_{Tc\text{-}99}$.
E= $5.765\cdot10^{12}$ · $1.4\cdot10^{5}$ (eV) = $8.071\cdot10^{17}$ eV = 0.1293 J.

Y la dosis: D= E/masa

D = 0.1293 J/ 1.8 Kg = 0.0718 Gy.