Análisis estadístico de incertidumbres aleatorias

- Errores aleatorios y sistemáticos
- La media y la desviación estándar
- La desviación estándar como error de una sola medida
- La desviación estándar de la media
- Número de medidas necesarias

La repetición de las medidas es el arma para luchar contra los errores aleatorios

¿Cómo analizaremos estas medidas con los métodos estadísticos?

• Tipos de errores: aleatorios y sistemáticos

EJEMPLOS

➢ Medida de un intervalo de tiempo con un cronómetro.

- Error en el *start* y en el *stop* del experimentador: error aleatorio.
- El cronómetro funciona mal y da siempre un intervalo de tiempo menor (o mayor): error sistemático.

➢ Medida de una longitud con una regla.

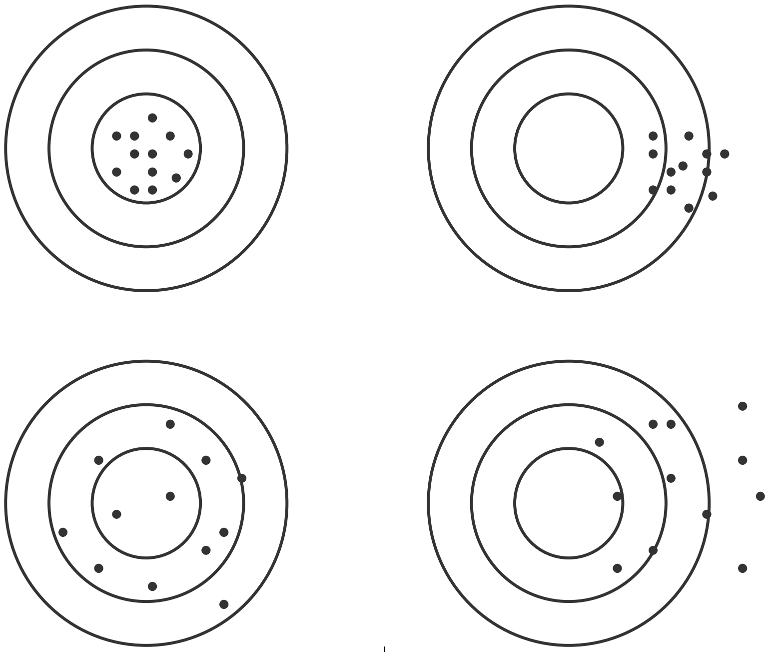
- Error en la interpolación entre dos marcas por el experimentador: error aleatorio.
- La regla esta mal calibrada y da longitudes menores (o mayores) siempre: error sistemático.

☞ Errores aleatorios: incertidumbres debidas a numerosas causas imprevisibles que dan lugar a resultados distintos cuando se repiten las medidas.

☞ Errores sistemáticos: Equivocaciones debidas a métodos o instrumentos de medida inadecuados, cambiando las medidas en la misma dirección.

Error aleatorio: Pequeño
Error sistemático: Pequeño

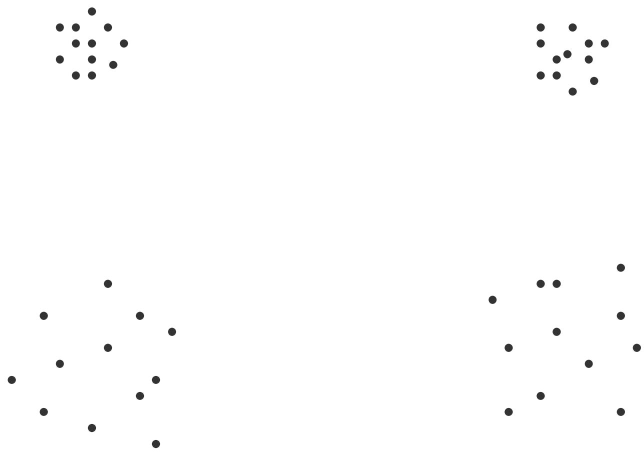
Error aleatorio: Pequeño
Error sistemático: Grande



Error aleatorio: Grande
Error sistemático: Pequeño

Error aleatorio: Grande
Error sistemático: Grande

➢ Situación real en un experimento:



- Errores aleatorios: alteraciones que responden a distribuciones de probabilidad, se pueden analizar mediante métodos estadísticos (Teoría de errores)

Posibles causas

- ✓ Acumulación incertidumbres incontroladas
- ✓ Variabilidad de las condiciones ambientales
- ✓ Variaciones aleatorias intrínsecas a nivel microscópico
- ✓ Falta de definición de la magnitud a medir

- Errores sistemáticos: Deben evitarse o minimizarse. No hay reglas fijas. Habilidad que se adquiere con la práctica.

Ejemplos:

- ✓ Cero de la escala incorrecto
- ✓ Calibración defectuosa del instrumento
- ✓ Utilización de fórmulas aproximadas
- ✓ Utilización de datos incorrectos

• La media y la desviación estándar

N medidas de la cantidad x: $x_1, x_2, \cdots, x_N$.

¿Cuál es el mejor estimador de x?:

$$u = \sum_{i=1}^{N} \left(x_i - m \right)^2 \to ¿m\ ?$$

¿Cuál es el valor de m que nos minimiza u?

$$\frac{du}{dm} = 0 = -2\sum_{i=1}^{N} \left(x_i - m \right) \to m = \frac{1}{N} \sum_i x_i$$

$$x_{Mejor} = x_{Media} = \overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

¿Cuál es el mejor estimador de la dispersión de los x_i?

Si μ es el valor verdadero de x se definen las cantidades:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2$$

Varianza, desviación cuadrática media

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2}$$

Desviación típica, estándar

Pero no conocemos el valor verdadero μ !!!!!

Conocemos una estimación del mismo que es la media $\overline{x}$

Se definen entonces los estimadores:

$$s_x^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2$$

Varianza muestral

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}$$

Desviación estándar muestral

La desviación estándar σ_x o su estimación s_x caracteriza el error promedio de las medidas $x_1, x_2, \cdots, x_N$ realizadas

Ejemplo:

$N = 5$ medidas de x: $x_1 = 71, x_2 = 72, x_3 = 72, x_4 = 73, x_5 = 71$

i	x_i	$d_i = x_i - \bar{x}$	$d_i^2 = (x_i - \bar{x})^2$
1	71	-0.8	0.64
2	72	+0.2	0.04
3	72	+0.2	0.04
4	73	+1.2	1.44
5	71	-0.8	0.64

$$\sum x_i = 359 \qquad \sum d_i = 0.0 \qquad \sum d_i^2 = 2.80$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{359}{5} = 71.8$$

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} = 0.8$$

- ## La desviación estándar como el error de una sola medida

N medidas de la magnitud x: $x_1, x_2, \cdots, x_N \Rightarrow \bar{x}, s_x$

Si realizamos una medida adicional de la misma magnitud x y con el mismo método, ¿qué error podemos asociarle?

$$\varepsilon(x) = s_x$$

• La desviación estándar de la media

N medidas de las cantidad x: $x_1, x_2, \cdots, x_N \rightarrow \overline{x} = \frac{1}{N} \sum_i x_i$

☞ Si repetimos el experimento varias veces los valores de x_i cambiarán, y la dispersión la medimos con la desviación típica

$$s(x) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2}$$

☞ El valor medio también variará de un experimento a otro, y su varianza será:

$$s^2(\overline{x}) = \sum \frac{1}{N^2} s^2(x) = \frac{s^2(x)}{N}$$

☞ La desviación típica de la media será por tanto:

$$\boxed{s(\overline{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{N}}}$$

☞ Disminuye con el número de medidas N

Ejemplo:

↪ Caja con muelles similares

CÁLCULO DE LA CONSTANTE ELÁSTICA DE UN MUELLE

i	k_i	k_i-k_{media}	$(k_i$-$k_{media})^2$
1	86	0.1	0.01
2	85	-0.9	0.81
3	84	-1.9	3.61
4	89	3.1	9.61
5	86	0.1	0.01
6	88	2.1	4.41
7	88	2.1	4.41
8	85	-0.9	0.81
9	83	-2.9	8.41
10	85	-0.9	0.81
10	**859.0**	**0.0**	**32.9**

k_{media}= **85.9 N/m**

Desv. Est.= **1.9 N/m**

- Valor medio constante elástica $\boxed{k_{media} = 85.9\text{N/m}}$

- Desviación estándar: $\boxed{s(k) = 1.9 \text{ N/m}}$

- El error de la media es $$\boxed{s(\bar{k}) = \frac{s(k)}{\sqrt{N}} = \frac{1.9}{\sqrt{10}} = 0.6 \text{ N/m}}$$

- El resultado lo presentaremos

$$\boxed{k_{media} = 85.9 \pm 0.6 \text{ N/m}}$$

- Si medimos un muelle y obtenemos, por ejemplo, 83 N/m, podemos escribir que

$$\boxed{k = 83.0 \pm 1.9 \text{ N/m}}$$

• Número de medidas necesarias

➢ Se realizan $N = \mathbf{3}$ **medidas** y se calcula $\overline{x}$

➢ Se halla el porcentaje de dispersión: $D = \dfrac{|x_{\max} - x_{\min}|}{\overline{x}} \times 100$

Dispersión de las tres primeras medidas	Número de medidas que deben realizarse
D < 2%	Bastan las 3 medidas realizadas
2% < D < 8%	Hay que hacer 3 medidas más
8% < D < 12%	Hay que realizar 15 medidas
D > 12%	Distribución gaussiana

➢ Estimación del **error absoluto** del valor medio, $\varepsilon(\overline{x})$

Número de medidas	Error absoluto $\varepsilon(\overline{x})$
3	Máximo de $\overline{\varepsilon(x)} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} \varepsilon(x_i)}{N}$ $\quad \varepsilon_{\mathrm{D}} = \dfrac{\lvert x_{\max} - x_{\min} \rvert}{4}$
6	Máximo de $\overline{\varepsilon(x)}$ $\quad \varepsilon_{\mathrm{D}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} \lvert x_i - \overline{x} \rvert}{N}$
> 6	$\varepsilon(\overline{x}) = \dfrac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$