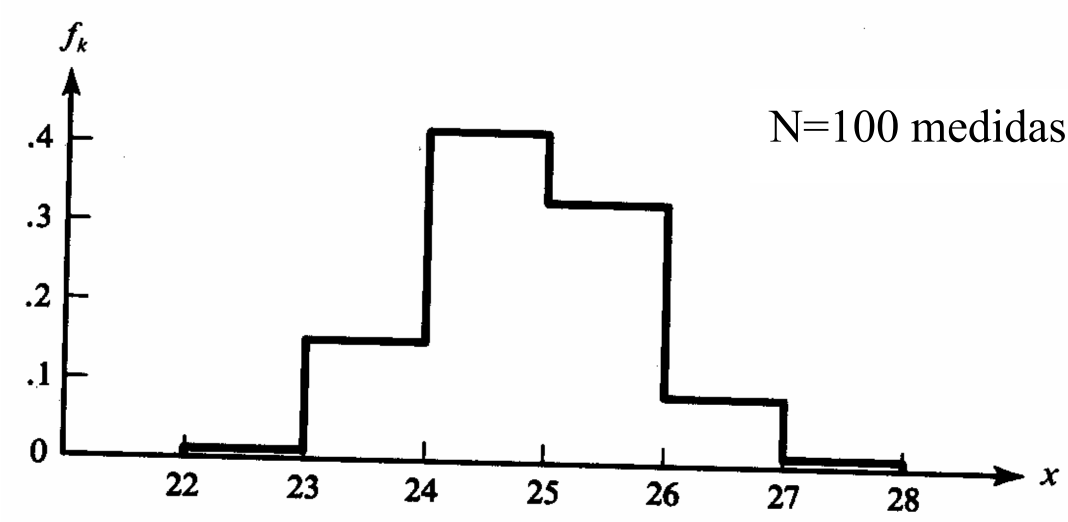
La distribución normal o de Gauss

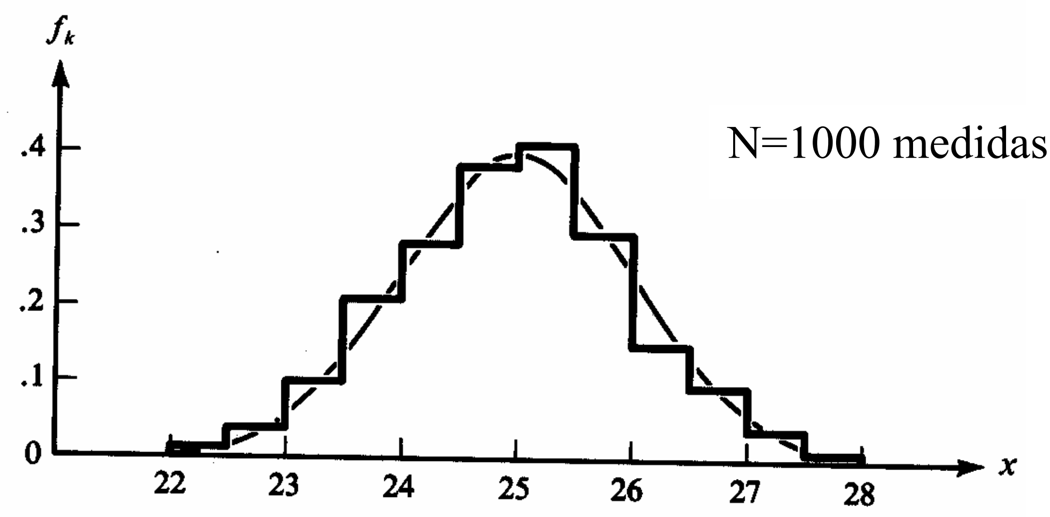
- Distribución límite
- La distribución Normal o de Gauss
- La distribución de Gauss tipificada
- La función integral. Cálculo de la función integral
- La desviación estándar de la media
- Intervalos de probabilidad y confianza
- Diferencias significativas

• La distribución límite

¿Qué ocurre si aumentamos el número de medidas?



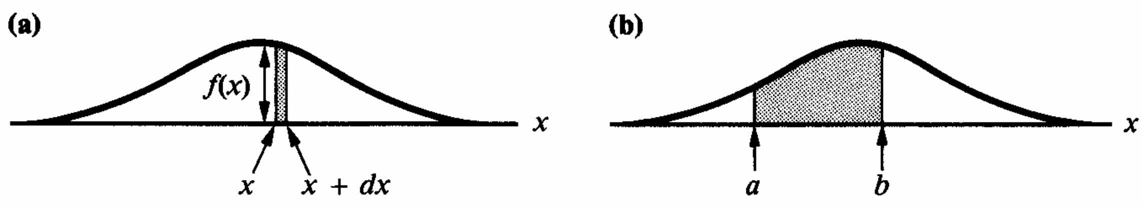
Histograma de bins de 100 medidas de x



Histograma de bins de 1000 medidas de x

• La distribución límite

Cuando $N \to \infty \Rightarrow$ nos acercamos a la distribución límite.



Distribución límite $f(x)$

$f(x)dx$ = Fraccion de las medidas que se encuentran entre x y $x + dx$
= Probabilidad de que una medida de un resultado comprendido entre x y $x + dx$

$\int_a^b f(x)dx$ = Fraccion de las medidas que se encuentran entre $x = a$ y $x = b$
= Probabilidad de que una medida de un resultado que se encuentre entre a y b

➢ Distribuciones discretas y continuas

$x \to$ discretas

$x \to$ continuas

$$F_k = \frac{n_k}{N}$$

$$F_k = f(x_k)dx_k$$

- Condición de normalización

$x \to$ discretas $\qquad$ $x \to$ continuas

$$\sum_k F_k = 1 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

- Cálculo de la media

$x \to$ discretas $\qquad$ $x \to$ continuas

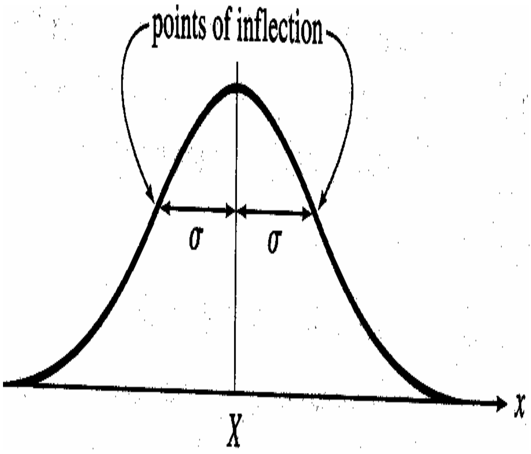
$$\overline{x} = \sum_k F_k x_k \qquad \overline{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

- Cálculo de la desviación estándar

$x \to$ discretas $\qquad$ $x \to$ continuas

$$\sigma_x^2 = \sum_k \frac{n_k}{N}(x_k - \overline{x})^2 \qquad \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \overline{x})^2 f(x)dx$$

• La distribución Normal o de Gauss

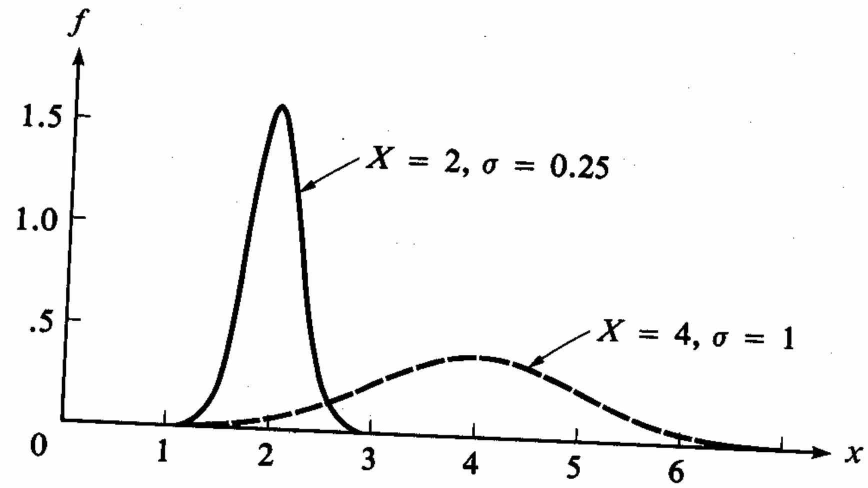


$$G_{X,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_{X,\sigma}(x)dx = 1$$

➢ Propiedades

- ♦ Tiene un máximo en $x = X$
- ♦ Es simétrica alrededor de X
- ♦ Tiende a cero rápidamente si $|x - X| >> \sigma$



• Valor medio y desviación estándar

¿Si se efectúan un gran número de medidas de una variable aleatoria que sigue una distribución de Gauss, ¿qué valores hay que esperar para $\overline{x}$ y $\sigma_x^2(x)$?

Valor medio

$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \rightarrow \overline{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x G_{X,\sigma}(x) dx$$

$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x G_{X,\sigma}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{\frac{-(x-X)^2}{2\sigma^2}} dx \xrightarrow[dy=dx]{y=x-X}$$

$$\overline{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} y e^{\frac{-y^2}{2\sigma^2}} dy + X \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-y^2}{2\sigma^2}} dy \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left\{ 0 + X\sqrt{2\pi\sigma^2} \right\} = X$$

$$\boxed{\overline{x} = X}$$

Desviación estándar

$$\sigma_x^2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-X)^2 G_{X,\sigma}(x) dx = \sigma^2$$

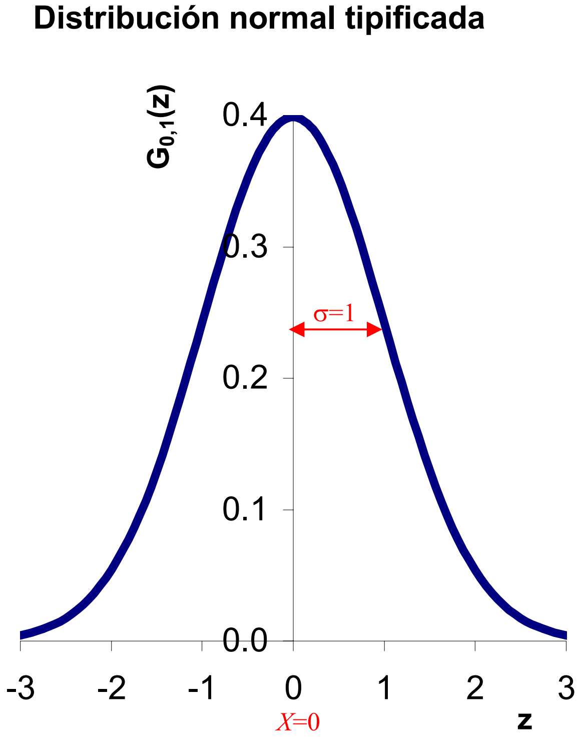
$$\boxed{\sigma_x^2(x) = \sigma^2}$$

• La distribución Normal tipificada:

¿Cómo puede estudiarse la distribución de Gauss de forma general?

$$G_{X,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}} \xrightarrow{z=\frac{x-X}{\sigma}}$$

$$\rightarrow G_{0,1}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$



← Distribución Normal tipificada

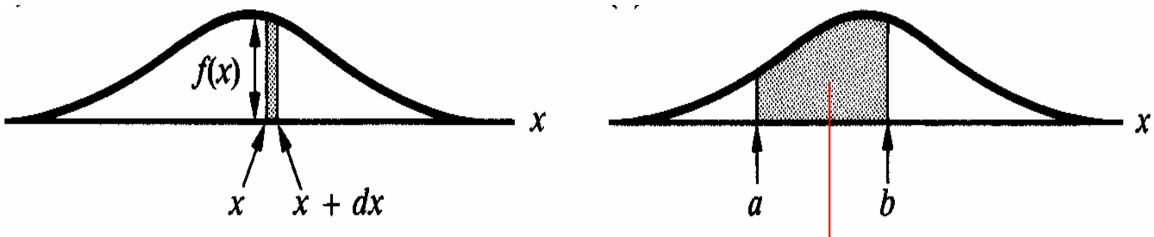
$$G_{0,1}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

1. Máximo en $z = 0$
2. Puntos de inflexión: $z = \pm\sigma = 1$

• La función integral

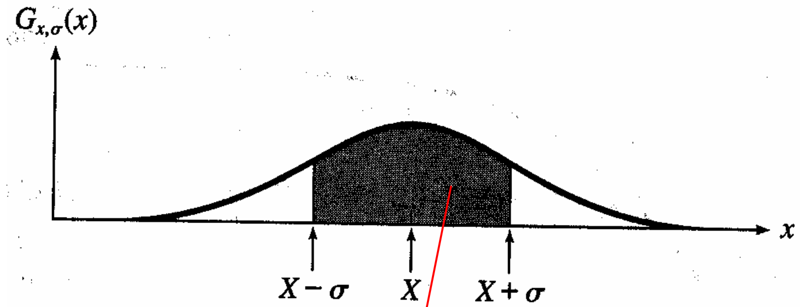
¿Cuál es la probabilidad de que una medida

esté comprendida entre *a* y *b?*



$$\text{Prob}(a \le x \le b) = \int_a^b G_{X,\sigma}(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_a^b e^{\frac{-(x-X)^2}{2\sigma^2}} dx$$

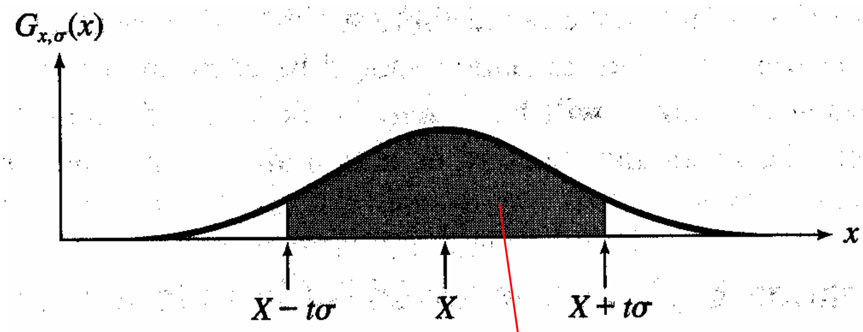
¿Cuál es la probabilidad de que una medida esté comprendida dentro de ***una*** desviación estándar?



$$\text{Prob}(X - \sigma \le x \le X + \sigma) =$$

$$= \int_{X-\sigma}^{X+\sigma} G_{X,\sigma}(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{X-\sigma}^{X+\sigma} e^{\frac{-(x-X)^2}{2\sigma^2}} dx$$

¿Cuál es la probabilidad de que una medida esté comprendida dentro de ***t*** desviaciones estándares?



$$\text{Prob}(X-t\sigma \le x \le X+t\sigma) =$$

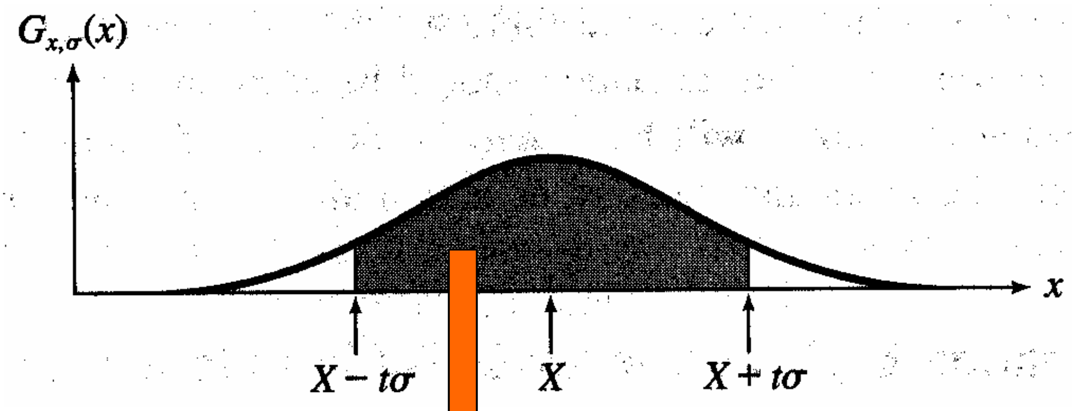
$$= \int_{X-t\sigma}^{X+t\sigma} G_{X,\sigma}(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{X-t\sigma}^{X+t\sigma} e^{\frac{-(x-X)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\text{Prob}(X-t\sigma \le x \le X+t\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{X-t\sigma}^{X+t\sigma} e^{\frac{-(x-X)^2}{2\sigma^2}} dx$$

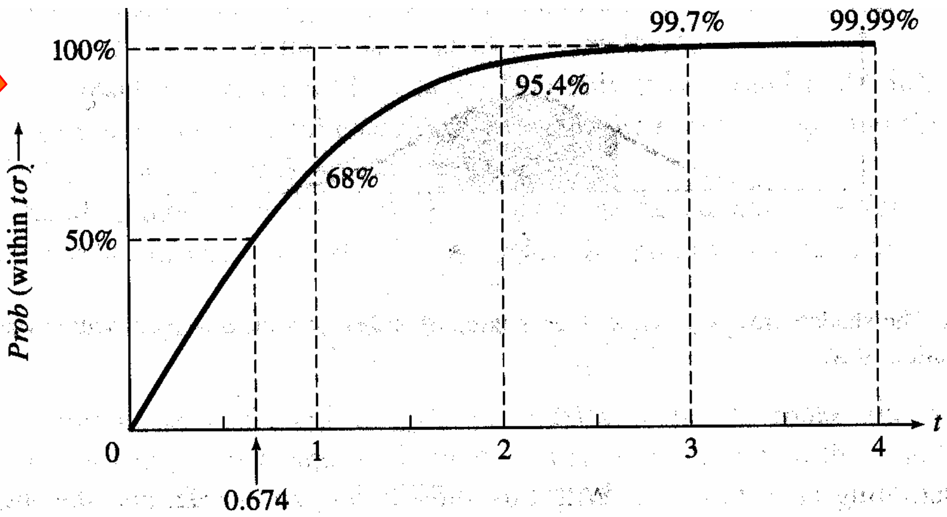
$$\frac{x-X}{\sigma} = z \rightarrow \begin{cases} dx = \sigma dz \\ x_2 = X+t\sigma \rightarrow z_2 = \dfrac{x_2-X}{\sigma} = \dfrac{X+t\sigma-X}{\sigma} = t \\ x_1 = X-t\sigma \rightarrow z_1 = \dfrac{x_1-X}{\sigma} = \dfrac{X-t\sigma-X}{\sigma} = -t \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Prob}(X-t\sigma \le x \le X+t\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{+t} e^{\frac{-z^2}{2}} dz}$$

- Cálculo de la función integral

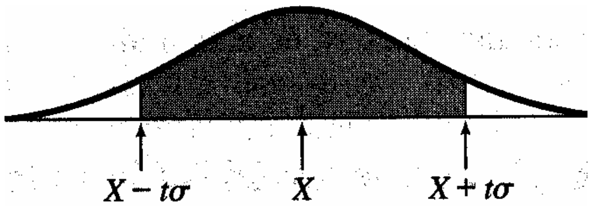


$$\mathrm{Prob}(X - t\sigma \le x \le X + t\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{+t} e^{\frac{-z^2}{2}} dz$$



t	0	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
Prob (%)	0	20	38	55	68	79	87	92	95.4	98.8	99.7	99.95	99.99

• Cálculo de la función integral (cont.)



$$\text{Prob(dentro de } t\sigma) =$$

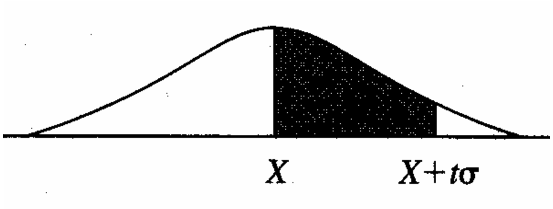
$$= \int_{X-t\sigma}^{X+t\sigma} G_{X,\sigma}(x)dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{+t} e^{\frac{-z^2}{2}} dz$$

$t = x.yz$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.00	0.80	1.60	2.39	3.19	3.99	4.78	5.58	6.38	7.17
0.1	7.97	8.76	9.55	10.34	11.13	11.92	12.71	13.50	14.28	15.07
0.2	15.85	16.63	17.41	18.19	18.97	19.74	20.51	21.28	22.05	22.82
0.3	23.58	24.34	25.10	25.86	26.61	27.37	28.12	28.86	29.61	30.35
0.4	31.08	31.82	32.55	33.28	34.01	34.73	35.45	36.16	36.88	37.59
0.5	38.29	38.99	39.69	40.39	41.08	41.77	42.45	43.13	43.81	44.48
0.6	45.15	45.81	46.47	47.13	47.78	48.43	49.07	49.71	50.35	50.98
0.7	51.61	52.23	52.85	53.46	54.07	54.67	55.27	55.87	56.46	57.05
0.8	57.63	58.21	58.78	59.35	59.91	60.47	61.02	61.57	62.11	62.65
0.9	63.19	63.72	64.24	64.76	65.28	65.79	66.29	66.80	67.29	67.78
1.0	68.27	68.75	69.23	69.70	70.17	70.63	71.09	71.54	71.99	72.43
1.1	72.87	73.30	73.73	74.15	74.57	74.99	75.40	75.80	76.20	76.60
1.2	76.99	77.37	77.75	78.13	78.50	78.87	79.23	79.59	79.95	80.29
1.3	80.64	80.98	81.32	81.65	81.98	82.30	82.62	82.93	83.24	83.55
1.4	83.85	84.15	84.44	84.73	85.01	85.29	85.57	85.84	86.11	86.38
1.5	86.64	86.90	87.15	87.40	87.64	87.89	88.12	88.36	88.59	88.82
1.6	89.04	89.26	89.48	89.69	89.90	90.11	90.31	90.51	90.70	90.90
1.7	91.09	91.27	91.46	91.64	91.81	91.99	92.16	92.33	92.49	92.65
1.8	92.81	92.97	93.12	93.28	93.42	93.57	93.71	93.85	93.99	94.12
1.9	94.26	94.39	94.51	94.64	94.76	94.88	95.00	95.12	95.23	95.34

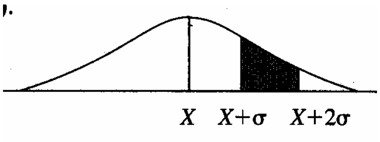
• Cálculo de la función integral (cont.)



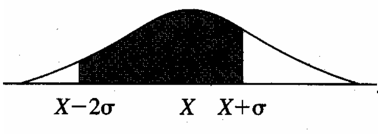
$$Q(t) = \int_X^{X+t\sigma} G_{X,\sigma}(x)dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{\frac{-z^2}{2}} dz$$

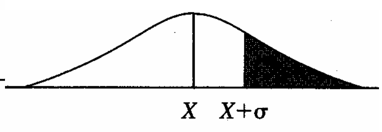
t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.00	0.40	0.80	1.20	1.60	1.99	2.39	2.79	3.19	3.59
0.1	3.98	4.38	4.78	5.17	5.57	5.96	6.36	6.75	7.14	7.53
0.2	7.93	8.32	8.71	9.10	9.48	9.87	10.26	10.64	11.03	11.41
0.3	11.79	12.17	12.55	12.93	13.31	13.68	14.06	14.43	14.80	15.17
0.4	15.54	15.91	16.28	16.64	17.00	17.36	17.72	18.08	18.44	18.79
0.5	19.15	19.50	19.85	20.19	20.54	20.88	21.23	21.57	21.90	22.24
0.6	22.57	22.91	23.24	23.57	23.89	24.22	24.54	24.86	25.17	25.49
0.7	25.80	26.11	26.42	26.73	27.04	27.34	27.64	27.94	28.23	28.52
0.8	28.81	29.10	29.39	29.67	29.95	30.23	30.51	30.78	31.06	31.33
0.9	31.59	31.86	32.12	32.38	32.64	32.89	33.15	33.40	33.65	33.89
1.0	34.13	34.38	34.61	34.85	35.08	35.31	35.54	35.77	35.99	36.21
1.1	36.43	36.65	36.86	37.08	37.29	37.49	37.70	37.90	38.10	38.30
1.2	38.49	38.69	38.88	39.07	39.25	39.44	39.62	39.80	39.97	40.15
1.3	40.32	40.49	40.66	40.82	40.99	41.15	41.31	41.47	41.62	41.77
1.4	41.92	42.07	42.22	42.36	42.51	42.65	42.79	42.92	43.06	43.19
1.5	43.32	43.45	43.57	43.70	43.82	43.94	44.06	44.18	44.29	44.41
1.6	44.52	44.63	44.74	44.84	44.95	45.05	45.15	45.25	45.35	45.45
1.7	45.54	45.64	45.73	45.82	45.91	45.99	46.08	46.16	46.25	46.33
1.8	46.41	46.49	46.56	46.64	46.71	46.78	46.86	46.93	46.99	47.06
1.9	47.13	47.19	47.26	47.32	47.38	47.44	47.50	47.56	47.61	47.67



$Q(2) - Q(1)$



$Q(2) + Q(1)$



$50\% - Q(1)$

• La desviación estándar de la media

Supongamos que x que se distribuye G_{X,σ_x}. Imaginemos la siguiente secuencia de experimentos:

1	N medidas de x	$\bar{x}_1 = \frac{1}{N}\sum_i x_i$
2	N medidas de x	$\bar{x}_2 = \frac{1}{N}\sum_i x_i$

...

☞ Si repetimos el experimento n veces, los valores de x_i cambiarán, y la media de las medias y su desviación estándar serán

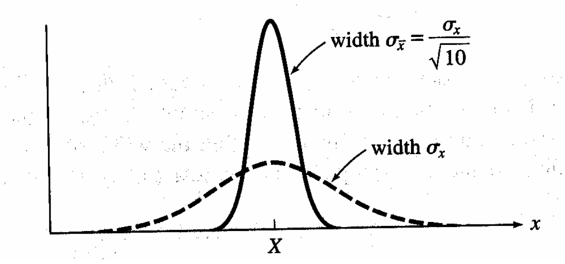
$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i \bar{x}_i \qquad \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\left(\bar{x}_i - \bar{x}\right)^2}$$

Efectuando sólo uno de los experimentos, ¿cuál es la desviación estándar de la media de las N medidas?

Los x_i se distribuyen G_{X,σ_x}, el verdadero valor de $\bar{x}$ es X
La desviación estándar de la media será

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_1}\sigma_{x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_N}\sigma_{x_N}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{N}\sigma_x\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{N}\sigma_x\right)^2} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$



• Intervalos de probabilidad y confianza

➢ ¿Cuál es el significado de asignar la desviación típica como error de una medida?

Si tomamos una muestra de *N* datos, calculamos su media y su desviación típica y escribimos

$$\boxed{\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}}$$

significa que el 68% de las medidas realizadas se encuentran en el intervalo $\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$.

O bien, el mejor valor, X se encuentra en el intervalo:

$$\boxed{\bar{x} - \sigma_{\bar{x}} \leq X \leq \bar{x} + \sigma_{\bar{x}}}$$

con un nivel de confianza del 68 %

- Diferencias significativas

¿Cómo se comparan nuestras medidas con los valores esperados?

Valor medido	$\overline{x} \pm \sigma_x$
Valor esperado	a

- Supongamos que: $\left|\overline{x} - a\right| \leq \sigma_x \quad (t \leq 1)$

  No es una diferencia significativa. Prob (fuera $1\sigma_x$) = 32%

- Supongamos que: $\left|\overline{x} - a\right| \geq 3\sigma_x \quad (t \geq 3)$

  La diferencia es muy significativa. Prob (fuera $3\sigma_x$) = 0.3%

Norma generalmente aceptada:

- Si $\left|\overline{x} - a\right| \leq 2\sigma_x \Rightarrow$ Resultado aceptable.
- Si $\left|\overline{x} - a\right| \geq 2.5\sigma_x \Rightarrow$ Resultado inaceptable.
- Si $1.9\sigma \leq \left|\overline{x} - a\right| \leq 2.6\sigma_x \Rightarrow$ Resultado no concluyente.

O bien:

- P (fuera $t\sigma$) $\leq$ 5% $\Rightarrow$ Diferencia significativa.
- P (fuera $t\sigma$) $\leq$ 1% $\Rightarrow$ La diferencia es muy significativa.