La distribución de Poisson

- Introducción
- La distribución de Poisson
- Propiedades
- Ejemplos
- Aproximación gaussiana

Introducción:

Desintegraciones radiactivas

Se sabe que una fuente radiactiva emite partículas alfa a un ritmo de 1.5 por minuto. ¿Si medimos el número de partículas alfa emitidas en dos minutos ¿ Cuál es el resultado promedio esperado?¿Cuál es la probabilidad de observar $x = 0,1,2,3,4$? ¿y la probabilidad de que $x \geq 5$?

Experimentos de contar sucesos

⇓

Distribución de Poisson

$$\boxed{P_{\mu}(x) = \frac{\mu^{x}}{x!} e^{-\mu}}$$

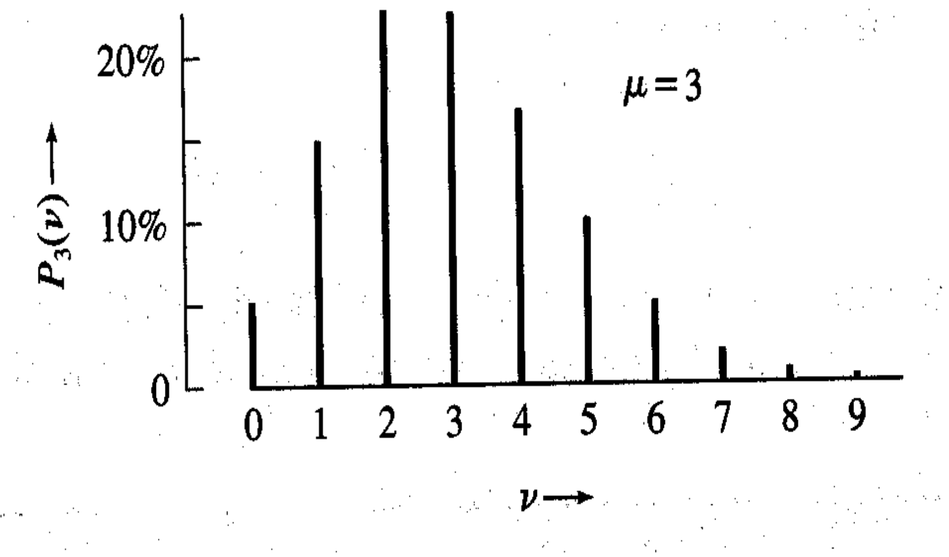
Si en promedio esperamos μ sucesos, la probabilidad de obtener *x*, viene dada por $P_{\mu}(x)$

$$\boxed{\mu = \text{Número medio de sucesos esperados}}$$

Probabilidad de observar *x* sucesos cuando el promedio es $\mu = 1.5 \times 2\,\text{min} = 3$	$P_3(x) = \dfrac{3^x}{x!} e^{-3}$

Sucesos observados x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Probabilidad	**5%**	**14%**	**22%**	**22%**	**17%**

$$\boxed{\Pr ob(x \geq 5) = 100\% - (5+15+22+22+17)\% = 19\%}$$



Distribución de Poisson para un valor medio de μ = 3

La distribución de Poisson

$\lambda =$ Prob. por unidad de intervalo de ocurrir un suceso

$\lambda t =$ Sucesos en un tiempo t

$\lambda dt =$ Prob. de que ocurra un suceso en dt

$(1-\lambda dt) =$ Prob. de que no ocurra nada en dt

Hipótesis fundamental

La probabilidad λ es tan pequeña que en el intervalo dt no pueden producirse dos o más sucesos

¿Cuál es la probabilidad de que ocurran x sucesos en un intervalo de $t + dt$?

$$p_x(t+dt) = p_x(t)(1-\lambda dt) + p_{x-1}(t)\lambda dt$$

$$\frac{dp_x}{dt} = \lambda [p_{x-1} - p_x]$$

$$\boxed{p_x = \frac{(\lambda t)^x}{x!}e^{-\lambda t} = \xrightarrow{\mu=\lambda t} = \frac{\mu^x}{x!}e^{-\mu}}$$

Propiedades

Condición de normalización

$$\boxed{\sum_{x=0}^{\infty} P_{\mu}(x) = 1}$$

Valor medio

$$\boxed{\overline{x} = \sum_{x=0}^{\infty} x P_{\mu}(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\mu^{x}}{x!} e^{-\mu} = \mu}$$

Desviación típica

$$\boxed{\begin{gathered}\sigma^2 = \sum_{x=0}^{\infty} (x-\overline{x})^2 P_{\mu}(x) = \mu \\ \sigma = \sqrt{\mu}\end{gathered}}$$

Cuando realizamos un experimento de contar sucesos y obtenemos un valor x, el resultado con su error es:

$$\boxed{x \pm \sqrt{x}}$$

Ejemplos

Más desintegraciones radiactivas

Un estudiante observa que una muestra de Torio emite 49 partículas en 30 minutos ¿Cuál es la tasa de emisión?¿Cuál es la tasa en partículas por minuto?

$$(\text{Part. en 30 minutos }) = 49 \pm \sqrt{49} = 49 \pm 7$$

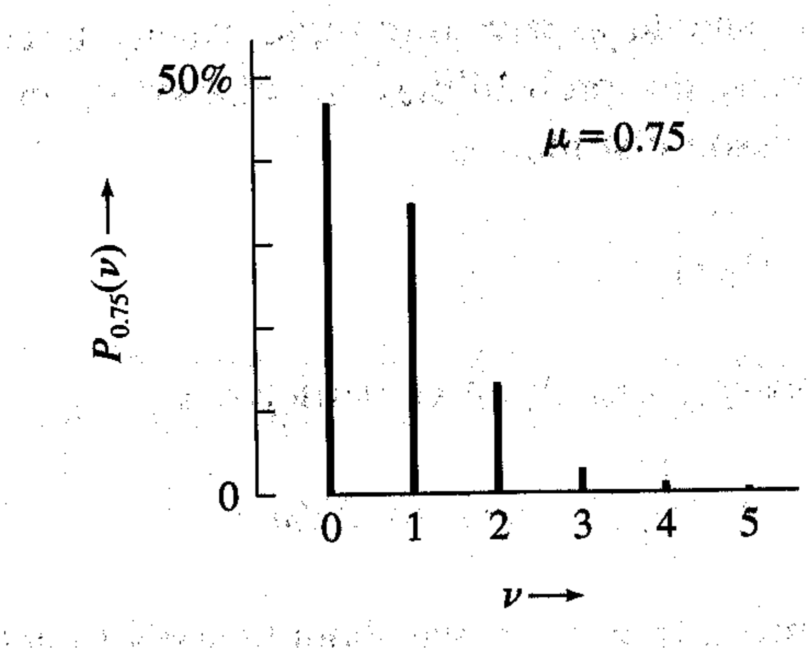
$$R = \frac{49 \pm 7}{30} = 1.6 \pm 0.2 \text{ part/min}$$

Ejemplo

En promedio, cada una de las 18 gallinas de un gallinero pone un huevo al día. Si se recogen los huevos cada hora ¿Cuál es el número medio de huevos que se recogen en cada visita? ¿Con qué probabilidad encontraremos x huevos para $x = 0,1,2,3$? ¿y la probabilidad de que $x \geq 4$?

Promedio : $\mu = 1 \times 18 / 24 = 0.75$ huevos / hora

Sucesos observados x	**0**	**1**	**2**	**3**	$x \geq 4$
Probabilidad(%)	**47.2**	**35.4**	**13.3**	**3.3**	**0.8**



Distribución de Poisson para un valor medio de μ = 0.75

Aproximación gaussiana

☛ Diferencias entre ambas distribuciones

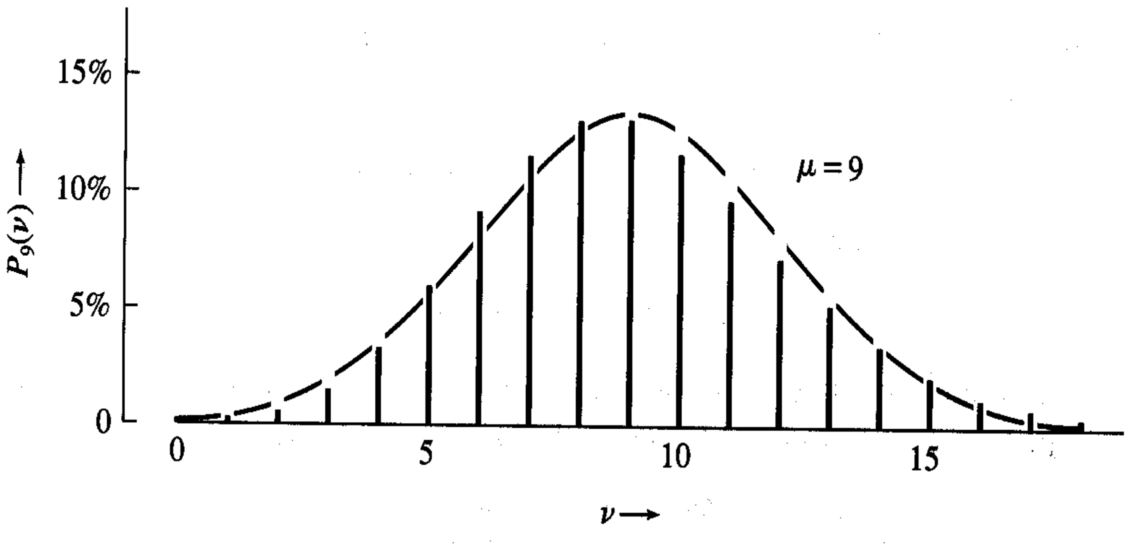
Poisson	**Gauss**
Variable discreta	Variable continua
No es simétrica	Simétrica
Un parámetro (μ)	Dos parámetros (X, σ)

☛ Sin embargo:

$$P_\mu(x) \approx G_{X,\sigma}(x), \quad \text{cuando } \mu \text{ es grande}$$

con

$$X = \mu \quad \text{y} \quad \sigma = \sqrt{\mu}$$



Distribuciones de Gauss y de Poisson para un valor medio de μ = 9

Ejemplo

Consideremos la distribución de Poisson para $\mu = 64$

☛ ¿Cuál es la probabilidad de obtener 72 sucesos?

Según Poisson:

$$\text{Prob}(72) = P_{64}(72) = \frac{(64)^{72}}{72!} e^{-64} = 2.91\ \%$$

Según Gauss:

$$\text{Prob}(72) = \text{G}_{64,8}(72) = \frac{1}{8\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(72-64)^2}{2\times 8^2}} = 3.02\ \%$$

☛ ¿Cuál es la probabilidad de obtener 72 o más sucesos?

Según Poisson:

$$\text{Prob}(x \geq 72) = P_{64}(72) + P_{64}(72) + \ \dots\ = 17.3\ \%$$

Según Gauss:

$$\text{Prob}(x \geq 72) = P_G(x \geq 71.5) = P_G(x \geq X + t\sigma) = 17.4\%$$

con $\quad t = \dfrac{x - X}{\sigma} = \dfrac{71.5 - 64}{8} = 0.9375$