

Sistemas Lineales

1. Descomponer mediante el método **LU** las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Descomponer mediante el método **LU** las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 14 \end{pmatrix}$$

3. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones haciendo uso del método de descomposición **LU**:

$$\begin{array}{rrcr} 2x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 2 \end{array}$$

4. Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 9x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 4 \end{array}$$

- (a) Obtener la descomposición **LU** de la matriz.
(b) Resolver el sistema.

5. Calcular la inversa de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Dada la siguiente matriz triangular superior determinar su matriz inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

7. La descomposición **LU** de una matriz viene dada, en forma empaquetada, por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

En la determinación de esta descomposición no se hizo ningún intercambio de filas.

- (a) Determinése la matriz original.

- (b) Resuélvase el problema lineal asociado a esta matriz para un vector de términos independientes.

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- (c) Compruébese el resultado.

8. Tenemos una matriz 3×3 descompuesta en la forma $\mathbf{LU}$. En forma empaquetada dicha matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 28.0 & 31.0 & 37.0 \\ 0.1071 & 5.6786 & 24.0357 \\ 0.3214 & 0.5346 & 6.2579 \end{pmatrix}$$

y para su obtención se hizo la siguiente reordenación de filas:

Fila	por fila
1	3
2	3
3	3

- (a) Obtenga la matriz original.

- (b) Resuelva el sistema lineal de ecuaciones asociado a un vector columna de términos independientes:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

- (c) Compruebe que la solución está bien.

9. Para matrices simétricas y definidas positivas existe una forma especial de descomposición $\mathbf{LU}$, conocida con el nombre de descomposición de Cholesky, y que expresa la matriz simétrica $\mathbf{A}$ como producto de una matriz $\mathbf{L}$ triangular inferior por su traspuesta $\mathbf{L}^T$ de manera que $\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T = \mathbf{A}$.

- (a) Determinése el algoritmo para llevar a cabo esta descomposición con una matriz de dimensión cuatro.
(b) Obtener las fórmulas generales del algoritmo para matrices de dimensión arbitraria.
(c) Determinése la descomposición de Cholesky para la matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

y compruébese el resultado.

10. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 30 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \end{pmatrix}$$

Obtégase la descomposición de la misma mediante el método de Cholesky ($\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T = \mathbf{A}$).