

Derivación e integración numérica

1. Sea la función $f(x) = \sqrt{x}$. Calcúlese $f'(x)$ en $x = 1$ numéricamente, aplicando el método de extrapolación de Richardson (extrapolación al límite) a las derivadas numéricas con pasos $h = 0.8$, 0.4 y 0.2 . ¿En qué factor mejora el error la extrapolación de Richardson con respecto al valor obtenido con $h = 0.2$?
2. Calcular la integral $\int_0^1 e^x dx$ mediante la regla trapezoidal repetida con pasos $h = 1$, $h = 0.5$, $h = 0.25$ y $h = 0.125$. Repetir el cálculo utilizando la regla de Simpson con pasos $h = 0.5$ y $h = 0.25$.

3. Determinése el valor de la integral

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{\sin(x)}{\sqrt{2}}\right) dx$$

mediante la regla trapezoidal con pasos de integración $h = \pi/2$ y $h = \pi/4$. Mejórese el resultado mediante la extrapolación de Richardson (extrapolación al límite) y hágase una estimación del error.

4. Obténgase la fórmula de integración de Bode

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x) dx = \frac{2h}{45} [7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4]$$

con $x_n = x_0 + nh$, a partir de la regla trapezoidal con pasos h , $2h$ y $4h$, y la extrapolación de Richardson.

5. Dedúzcase la regla de integración de Simpson mediante el siguiente procedimiento (*Método de los coeficientes indeterminados*):

- (a) Supóngase la fórmula

$$\int_0^{2h} f(x) dx \approx af(0) + bf(h) + cf(2h)$$

- (b) Determinése a , b y c exigiendo que la ecuación aproximada anterior se cumpla *exacta* para los casos en que $f(x) = 1$, $f(x) = x$ y $f(x) = x^2$

6. Un cuerpo está sometido a la fuerza conservativa $F(x) = x - \frac{1}{x}$ y se desplaza desde la posición $x = 1$ hasta $x = 1.8$. Usando la regla trapezoidal determinar el trabajo realizado usando pasos de valor 0.2 , 0.4 y 0.8 y haciendo todas las extrapolaciones de Richardson posibles. Obténgase también una estimación del error del mejor resultado.

7. Determinése el valor de la integral:

$$I = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx$$

mediante la regla trapezoidal y las adecuadas extrapolaciones de Richardson y hágase una estimación del error del mejor resultado.

8. Se desea determinar una regla de integración numérica de dos puntos, de forma que se tenga la relación aproximada:

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

Deben encontrarse los valores de $\{x_1, x_2\}$ y $\{w_1, w_2\}$ con el fin de que la mencionada fórmula sea exacta para polinomios de grado 0, 1, 2 y 3. Determinada dicha fórmula, aplíquese al cálculo de la integral

$$\int_{-1}^{+1} e^x dx$$

y compárese con el resultado obtenido mediante la regla de Simpson ($h = 1$).

9. Se calcula una cierta integral definida mediante la regla trapezoidal con distintos valores para el número de intervalos obteniendo los resultados que se muestran en la tabla:

x	$f(x)$
3	0.2366255
7	0.2067888
8	0.2052002

Use la extrapolación de Richardson para obtener el mejor valor posible de la integral y una estimación del error de dicho valor.

10. Calcular la integral

$$\int_0^1 \frac{\sinh(x)}{x} dx$$

mediante la regla trapezoidal con 1, 2 y 4 intervalos seguida de las extrapolaciones de Richardson a orden $\sim h^2$ y $\sim h^4$

11. Se desea determinar una regla de integración especializada para calcular integrales del tipo:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cdot f(x) dx$$

expresando el resultado mediante la forma:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cdot f(x) dx = w_0 f(0) + w_1 f\left(\frac{\pi}{4}\right) + w_2 f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Para obtener los pesos imponemos la condición de que la regla de integración sea exacta cuando $f(x) = 1$, $f(x) = x$ y $f(x) = x^2$. Determinar los pesos w_0 , w_1 y w_2 y aplicar la regla al cálculo de la integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cdot e^x dx$$

y comparar con el valor exacto.

12. Se quiere hacer una integral definida de una cierta función $f(x)$, cuyos valores se dan en la tabla que sigue:

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
$f(x)$	2.71828	3.0042	3.3201	3.6693	4.0552	4.4817	4.9530

Con estos datos se puede calcular la integral mediante la regla trapezoidal para varios casos: con 1 intervalo, con 2 intervalos, con 3 intervalos y con 6 intervalos. Obtenga los valores de estas aproximaciones a la integral y el tablero de todas las extrapolaciones de Richardson posibles, indicando finalmente el valor de la mejor estimación numérica y su error.