Ecuaciones diferenciales

1. Considérese la ecuación de movimiento
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x^2$$
con las condiciones iniciales $x(t = 0) = 0$ y $v(t = 0) = 10$. Determínese la posición y la velocidad para $t = 1$, usando la regla poligonal de Euler con paso $h = 0.2$

2. Una partícula de 1 Kg de masa se mueve, partiendo del origen, con una velocidad inicial de 10 m/s, y está sometida a una fuerza repulsiva combinada con otra de tipo viscoso dada por la expresión
$$F = \alpha x^2 - \beta v^2$$
siendo $\alpha = 1$ N/m^2 y $\beta = 0.002$ Kg/m.

   (a) Escríbase la ecuación diferencial que describe su movimiento.

   (b) Transfórmese en un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer grado.

   (c) Escríbanse las fórmulas de integración para el método de la poligonal de Euler.

   (d) Determínese su movimiento rellenando la tabla adjunta

t	x	v	$\alpha x^2 - \beta v^2$
0.0	0.000	10.000	
0.1			
0.2			
0.3			
0.4			
0.5			

3. Considérese la ecuación diferencial
$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - t^4}}$$
con la condición de contorno $y(0) = 0$. Intégrese esta ecuación diferencial hasta $t = 0.5$ con pasos $\Delta T = 0.1$, usando el método de Euler.

   Compárese el resultado con la evaluación numérica de la integral
$$y(0.5) = \int_0^{0.5} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}}$$
por la regla trapezoidal con paso 0.1.

4. La trayectoria de un móvil, a lo largo de una línea recta se describe por la ecuación de Newton
$$\frac{d^2x}{dt^2} = x^2$$
Partiendo del punto $x = 1$ con velocidad inicial $v = 1$ ¿ Cuánto tiempo transcurrirá hasta que el móvil llegue al punto $x = 2$? Utilícese el método de Euler con pasos de $\Delta x = 0.2$.

5. Integre la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = y(t) + \frac{1}{10}e^t$$

usando la *regla implícita* de dos puntos

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[F(t, y_n) + F(t+h, y_{n+1}]$$

para los valores de $t = 0.1, 0.2, ..., 1$ partiendo de la condición inicial $y(t=0) = 1$.

6. Considérese la ecuación diferencial $y^{'} = y$ con la condición de contorno $y(0) = -9$. Calcule el valor de y(1) usando el *método del punto medio*, con dos y cuatro subdivisiones del intervalo. A continuación, haga la extrapolación de Richardson, para obtener un valor mejor. Compare los distintos resultados con la solución analítica de la mencionada ecuación diferencial.

7. Dada la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} = t^2$$

con las condiciones de contorno para $t = 1$

$$x(1) = 4/3$$

$$\frac{dx(1)}{dt} = 8/3$$

lleve a cabo un paso de integración de valor $h = 0.1$ usando el método de Euler y el método predictor-corrector.

8. Consideremos el problema de valor inicial

$$y^{'} = x^2 + y$$

con la condición de contorno $y(0) = 1$, cuya solución exacta es $y(x) = 3e^x - x^2 - 2x - 2$. Tomando una longitud de paso $h = 0.1$, obtener una aproximación de $y(0.3)$ y calcular el error cometido aplicando el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

9. Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t^2}$$

con la condición de contorno en el punto $t = 1$

$$x(1) = 1/e$$

Obtenga numéricamente el valor de $x(2)$ usando el método de Bulirsch-Stoer, dando DOS pasos intermedios