PRÁCTICAS DE FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA

Departamento de Análisis Matemático

Curso 2004/2005

Profesores responsables :
Grupo A: Rafael Crespo García
Grupo B: Rafael Crespo García ; Antonio Galbis Verdú

Práctica 1
Números complejos

Ejercicio 1.1
Realizar las operaciones indicadas.
(a) $(2+7\mathbf{j})+(3-\mathbf{j})$ **(b)** $(1-\mathbf{j})+(2+4\mathbf{j})$ **(c)** $(1-\mathbf{j})\cdot(2+4\mathbf{j})$
(d) $(2+3\mathbf{j})\cdot(2-3\mathbf{j})$ **(e)** $\mathbf{j}^2$ **(f)** $\frac{1}{\mathbf{j}}$ **(g)** $\frac{1-\mathbf{j}}{1+\mathbf{j}^8}$ **(h)** $\frac{2}{1-3\mathbf{j}}$ **(i)** $\frac{2-(6/\sqrt{3})\mathbf{j}}{2+(6/\sqrt{3})\mathbf{j}}$
(j) $(1+\sqrt{3}\mathbf{j})^3$ **(k)** $(\sqrt{3}+\mathbf{j}^3)\cdot(1-\mathbf{j})$

Ejercicio 1.2
Hallar el módulo (o magnitud) y el argumento principal (o ángulo de fase) de los siguientes números complejos.
(a) $2+2\mathbf{j}$ **(b)** $-\mathbf{j}$ **(c)** $3\mathbf{j}$ **(d)** -2 **(e)** $1+\mathbf{j}$ **(f)** $\frac{1}{\mathbf{j}}$ **(g)** $-1-\mathbf{j}$
(h) $2+5\mathbf{j}$ **(i)** $2-5\mathbf{j}$ **(j)** $-2+5\mathbf{j}$ **(k)** $-2-5\mathbf{j}$ **(l)** $1+\sqrt{3}\mathbf{j}$
(m) $\mathbf{j}(1+\mathbf{j})$ **(n)** $\frac{1-\sqrt{3}\mathbf{j}}{1+\mathbf{j}}\cdot(-1+\mathbf{j})$

Ejercicio 1.3
Calcular el valor de las siguientes expresiones en forma binaria o rectangular.
(a) $e^{-\mathbf{j}\frac{\pi}{4}}$ **(b)** $e^{\mathbf{j}\frac{\pi}{6}}$ **(c)** $e^{1+\mathbf{j}\frac{\pi}{2}}$ **(d)** $e^{2\pi\mathbf{j}}$ **(e)** $e^{-2+\mathbf{j}}$ **(f)** $e^{2+\mathbf{j}}$ **(g)** $e^{2-\mathbf{j}}$

Ejercicio 1.4
Expresar los números complejos del problema (2) en forma polar exponencial.

Ejercicio 1.5
Hallar la parte real de los siguientes números complejos.
(a) $e^{\frac{\pi}{2}\mathbf{j}+\frac{\pi}{3}\mathbf{j}}$ **(b)** $e^{2+\frac{\pi}{4}\mathbf{j}}$ **(c)** $e^{-1+\frac{\pi}{4}\mathbf{j}-\frac{\pi}{2}\mathbf{j}}$ **(d)** $4e^{\frac{25\pi}{4}\mathbf{j}}$ **(e)** $\mathbf{j}e^{\frac{11\pi}{5}\mathbf{j}}$
(f) $3e^{\mathbf{j}4\pi}+2e^{\mathbf{j}7\pi}$ **(g)** $6\frac{e^{-\mathbf{j}\pi}}{1-\mathbf{j}}$ **(h)** $5e^{\mathbf{j}\frac{\pi}{3}}-e^{\mathbf{j}7\frac{\pi}{2}}$ **(i)** $4e^{\mathbf{j}\frac{\pi}{4}}-e^{-\mathbf{j}5\frac{\pi}{3}}$
(j) $-25e^{-\mathbf{j}\frac{\pi}{6}}-e^{\mathbf{j}11\frac{\pi}{3}}$ **(k)** $6\frac{e^{-\mathbf{j}\pi}}{1-e^{\mathbf{j}3\pi}}$

Ejercicio 1.6
Supongamos que las siguientes funciones describen oscilaciones. Escribirlas en la forma $x(t)=\Re\mathrm{e}\, Ce^{\mathbf{j}(\omega t+\phi)}$. *(El número complejo* $Ce^{\mathbf{j}\phi}$ *se conoce como el fasor correspondiente a* $x(t)$. *)*
(a) $x(t)=0.01\cos 15t$
(b) $x(t)=0.04\,\mathrm{sen}\,12t$
(c) $x(t)=0.05\,\mathrm{sen}(10t+\pi)$
(d) $x(t)=\mathrm{sen}(0.4t+\frac{\pi}{4})$
(e) $x(t)=0.02\cos\left(5t-\frac{\pi}{2}\right)$

Ejercicio 1.7
Escribir las expresiones del problema anterior en la forma $x(t)=\Im\mathrm{m}\, Ce^{\mathbf{j}(\omega t+\phi)}$.

Ejercicio 1.8
Comprobar que las tres raíces cúbicas de 1 *son*

$$1,\quad \frac{-1+\mathbf{j}\sqrt{3}}{2}\quad \mathrm{y}\quad \frac{-1-\mathbf{j}\sqrt{3}}{2}$$

y que las cinco raíces quintas de 1 *vienen dadas por*

$$1,\quad \frac{-1-\sqrt{5}+\mathbf{j}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},\quad \frac{-1-\sqrt{5}-\mathbf{j}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\frac{-1+\sqrt{5}+\mathbf{j}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \quad \text{y} \quad \frac{-1+\sqrt{5}-\mathbf{j}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Ejercicio 1.9

Encontrar todos los valores de las siguientes expresiones.

(a) $\sqrt{\mathbf{j}}$ **(b)** $\sqrt[3]{27}$ **(c)** $\sqrt[5]{-32}$ **(d)** $\sqrt[3]{-64}$ **(e)** $\sqrt[6]{-64}$ **(f)** $\sqrt{10\sqrt{5}-5\sqrt{5}\mathbf{j}}$

Ejercicio 1.10

Calcular el logaritmo principal de los siguientes números complejos.

(a) $\mathbf{j}$ **(b)** -1 **(c)** $1+\mathbf{j}$ **(d)** $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$ **(e)** $-e$ **(f)** $\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$ **(g)** $1-\mathbf{j}$

Ejercicio 1.11

Vamos a estudiar un circuito que, si bien puede tener oscilaciones libres cuando se conecta la fuente, éstas desaparecen al cabo de poco tiempo y queda sólo una corriente alterna, corriente que viene determinada por una función periódica. Es ésta corriente estacionaria la que estudiaremos aquí. Se dice que nuestro estudio tiene lugar en el dominio de la frecuencia.

Consideremos un circuito en serie que está formado por una fuente de tensión de $v(t) = V\cos\omega t$ *voltios, una resistencia de* R *ohmios y un inductor de* L *henrios.*

(a) *Demostrar que la intensidad de corriente* $i(t)$ *cumple la ecuación diferencial* $L\frac{di}{dt}+Ri = v(t)$.

(b) *Si la corriente estacionaria viene dada por* $i(t) = \Re\mathrm{e}\left(Ie^{\mathbf{j}(\omega t+\phi)}\right)$, *con* $I>0$, *probar que se cumple la siguiente relación entre los fasores del voltaje y de la intensidad:* $(\mathbf{j}\omega L+R)Ie^{\mathbf{j}\phi} = V$. *(El número* $\mathbf{j}\omega L+R$ *es la impedancia del circuito.)*

(c) *Si* $V=6$, $L=1$, $R=4$ *y* $\omega=2$; *demostrar que* $I=\frac{3}{\sqrt{5}}$ *y* $\phi = -\arctan\frac{1}{2}$. *Deducir que la corriente estacionaria del circuito es* $i(t)=\frac{3}{\sqrt{5}}\cos(2t-\arctan\frac{1}{2})$.

Práctica 2
Sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicio 2.1
Comprobar que los siguientes vectores son solución de los correspondientes sistemas de ecuaciones.

$$(\mathbf{a}) \qquad (-1,3) \quad \text{de} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 1 \\ 4x & + & 3y & = & 5 \end{array} \right.$$

$$(\mathbf{b}) \qquad (1+\mathbf{j}, 2-\mathbf{j}) \quad \text{de} \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} 2x & + & \mathbf{j}y & = & 3+4\mathbf{j} \\ (2+\mathbf{j})x & + & (1-\mathbf{j})y & = & 2 \end{array} \right.$$

$$(\mathbf{c}) \qquad (-7,-1,5) \quad \text{de} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ 4x & - & 3y & + & 5z & = & 0 \\ 2x & - & 4y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$(\mathbf{d}) \qquad (0,0,0) \quad \text{de} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ 4x & - & 3y & + & 5z & = & 0 \\ 2x & - & 4y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

Ejercicio 2.2
Demostrar que el sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} (1-\mathbf{j})x & - & (3+2\mathbf{j})y & = & 0 \\ 0x & + & 0y & = & 1 \end{array} \right.$$

no tiene ninguna solución.

Ejercicio 2.3
Estudiar el sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 4\mathbf{j} \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

demostrando que es equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x+z & = & 2\mathbf{j} \\ y & = & 2\mathbf{j} \end{array} \right.$$

¿Cuál es la solución general?

Ejercicio 2.4
Demostrar que se obtienen sistemas equivalentes cuando se realiza cada una de las siguientes transformaciones elementales:
  (a) *Se intercambian dos ecuaciones.*
  (b) *Se multiplica una ecuación por un número distinto de* 0.
  (c) *Se suma a una ecuación otra ecuación.*

Ejercicio 2.5
Demostrar que el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 3z & = & 4 \\ 2x & & & + & 5z & = & 2 \\ -3x & + & y & + & 4z & = & 2 \end{array} \right.$$

es equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & 3z & = & 4 \\ & & y & - & (1/2)z & = & -3 \\ & & & & z & = & 2/3 \end{array} \right.$$

y resolverlo.

Ejercicio 2.6
Demostrar que el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & -1 \\ x & + & y & & & = & 2 \end{array}\right.$$

es equivalente a

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & - & y & + & z & = & -3 \\ & & & & 0z & = & 4 \end{array}\right.$$

y deducir que el sistema es incompatible.

Ejercicio 2.7
Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de eliminación de Gauss.

$$(\mathbf{a})\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3\mathbf{j} \\ 2x & - & 3y & - & z & = & 0 \\ 4x & + & y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right. \qquad (\mathbf{b})\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & \mathbf{j} \\ x & - & y & - & z & = & 3-\mathbf{j} \\ 2x & - & y & + & z & = & 3+\mathbf{j} \end{array}\right.$$

$$(\mathbf{c})\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 2y & + & \mathbf{j}z & = & 4+2\mathbf{j} \\ 2x & + & y & - & z & = & -1+2\mathbf{j} \\ -\mathbf{j}x & + & y & + & z & = & 6 \end{array}\right. \qquad (\mathbf{d})\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ 4x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & - & y & - & z & = & -3 \end{array}\right.$$

$$(\mathbf{e})\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 4 \\ -x & + & y & - & z & = & -2 \\ & & 2y & + & z & = & 1 \end{array}\right. \qquad (\mathbf{f})\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 4 \\ -x & + & y & - & z & = & -2 \\ & & 2y & + & z & = & 2 \end{array}\right.$$

Ejercicio 2.8
Efectuar las siguientes operaciones matriciales.

$$(\mathbf{a})\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{b})\quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & \mathbf{j} & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{c})\quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{d})\quad 4\cdot\begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 5/8 & -1 \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{e})\quad -1\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -\mathbf{j} & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.9
Comprobar que es posible efectuar las siguientes multiplicaciones y calcular los productos.

$$(\mathbf{a})\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{b})\quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{c})\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{d})\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{e})\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{f})\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}$ **(h)** $\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{j} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{j} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ **(j)** $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2.10
Escribir los sistemas de ecuaciones del ejercicio 7 en forma matricial.

Ejercicio 2.11
Probar que la solución general de un sistema de ecuaciones compatible es la suma de una solución particular y la solución general del sistema homogéneo asociado.

Ejercicio 2.12
Demostrar que un sistema homogéneo tiene solución única si, y sólo si, los vectores columna de la matriz del sistema son linealmente independientes y que un sistema homogéneo tiene más de una solución si, y sólo si, una columna es combinación lineal de las restantes.

Ejercicio 2.13
Comprobar que el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} a_{11}x & + & a_{12}y & = & 0 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & = & 0 \end{array} \right.$$

es equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} a_{11}x & + & a_{12}y & = & 0 \\ & & (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{cuando} \quad a_{11} \neq 0$$

y es equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} a_{21}x & + & a_{22}y & = & 0 \\ & & (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{cuando} \quad a_{21} \neq 0.$$

Deducir que, en cualquier caso, el sistema dado tiene solución no trivial si, y sólo si, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$.

Ejercicio 2.14
Razonar como en el ejercicio anterior para mostrar que el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} a_{11}x & + & a_{12}y & + & a_{13}z & = & 0 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & + & a_{23}z & = & 0 \\ a_{31}x & + & a_{32}y & + & a_{33}z & = & 0 \end{array} \right.$$

tiene solución no trivial si, y sólo si,

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} = 0.$$

Ejercicio 2.15
Comprobar que la siguiente fórmula es correcta.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ejercicio 2.16
Estudiar si los siguientes grupos de vectores son o no linealmente independientes.

(a) $(1, 3, -1)$, $(2, 0, 1)$ *y* $(-1, 1, 0)$.
(b) $(3, -1, 2)$, $(0, 1, 3)$ *y* $(1, 0, 0)$.
(c) $(-1, 2, 0)$, $(1, 3, 2)$ *y* $(-2, 1, 2)$.
(d) $(1, 3, 5)$, $(-2, 0, 1)$ *y* $(-1, 3, 6)$.

Ejercicio 2.17
Demostrar que si el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a_{11}x & + & a_{12}y & = & b_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & = & b_2 \end{array}\right.$$

es compatible y determinado, su solución viene dada por las expresiones

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Ejercicio 2.18
Utilizar la regla de Cramer para hallar la solución de los sistemas del ejercicio 7.

Ejercicio 2.19
Si bien sólo hemos utilizado las matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales, las operaciones con matrices tienen muchas otras aplicaciones; por ejemplo, en teoría de gráficas.

Supongamos que una empresa dispone de un sistema de comunicación por cable que enlaza seis estaciones. Cada estación está situada en una de las siguientes ciudades: Madrid (1), Barcelona (2), Valencia (3), Sevilla (4), Zaragoza (5) y Bilbao (6). Las conexiones son seis y enlazan los siguientes pares de estaciones: Madrid-Valencia, Madrid-Zaragoza, Madrid-Sevilla, Barcelona-Valencia, Barcelona-Zaragoza y Zaragoza-Bilbao.

Consideremos la llamada matriz de incidencias $A = (a_{ij}^{(1)})$ *definida por*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) *Comprobar que se cumple* $a_{ij}^{(1)} = 1$ *si la estación* i *y la* j, $i \neq j$, *están conectadas, y* $a_{ij}^{(1)} = 0$ *si no hay conexión directa. (Por tanto,* $a_{ij}^{(1)}$, $i \neq j$, *indica el número de conexiones directas entre las estaciones* i *y* j. *)*

(b) *Calcular* $A^2 = (a_{ij}^{(2)})$ *y comprobar que* $a_{ij}^{(2)}$, $i \neq j$, *indica el número de conexiones posibles entre las estaciones* i *y* j *que utiliza sólo una estación intermedia.*

(c) *Calcular* $A^3 = (a_{ij}^{(3)})$ *y comprobar que* $a_{ij}^{(3)}$, $i \neq j$, *indica el número de conexiones posibles entre las estaciones* i *y* j *a través de una ruta que necesita dos estaciones intermedias.*

(d) *Encontrar, por medio de rutas que utilicen la menor cantidad de estaciones intermedias, el número de formas posibles que hay de enlazar las estaciones de Madrid-Barcelona, Barcelona-Sevilla, Sevilla-Bilbao y Bilbao-Valencia.*

Práctica 3
Cálculo de funciones de una variable

1 Continuidad

Ejercicio 3.1
Calcular los siguientes límites laterales.

(a) $\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x-1}$.
(b) $\lim_{x\to 1^\pm} [x+1]$, *donde* $[x]$ *denota el mayor entero menor o igual que* x.
(c) $\lim_{x\to 0^\pm} 1 + \frac{|x|}{x}$.
(d) $\lim_{x\to 1^\pm} [x] + [2-x] - 1$.
(e) $\lim_{x\to 1^\pm} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } 0 \le x \le 1; \\ 2-x, & \text{si } 1 < x \le 2. \end{cases}$
(f) $\lim_{x\to 1^\pm} 1/(x-1)$.
(g) $\lim_{x\to 3^\pm} \frac{x-3}{x^2-9}$.
(h) $\lim_{x\to 4^\pm} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.
(i) $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{3^{1/x}+1}{3^{1/x}-1}$.
¿En qué casos existe el correspondiente límite?

Ejercicio 3.2
Calcular los límites:

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+1}{x^2+2}$.
(b) $\lim_{x\to 1} (x-1)x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{1-x})$.
(c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{2x^3+2x^2-10x+6}$.

Ejercicio 3.3
Demostrar que cuando $a < 0$, *se cumple* $\lim_{x\to\infty} e^{ax}\cos x = 0$, *y que cuando* $a \ge 0$ *el límite no existe.*

Ejercicio 3.4
Calcular los siguientes límites.

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.
(b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$.
(c) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.
(d) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$.
(e) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$.
(f) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$.

Ejercicio 3.5
Utilizar los resultados del ejercicio 4 para hallar el valor de los siguientes límites.

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{(x-1)\operatorname{sen} x}{x^2-2x}$.
(b) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}}$.
(c) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (x-\frac{\pi}{2})\tan(x)$.
(d) $\lim_{x\to 0} \frac{(x^2-x^3)((x+1)^{\sqrt{2}}-1}{\log(1+4x)(1-\cos(2x))}$.

Ejercicio 3.6
Calcular los límites:

(a) $\lim_{x\to 0} (1-x)^{\frac{1}{x^2}}$.
(b) $\lim_{x\to\infty} (\frac{4x^2-1}{4x^2})^{\frac{x^3}{x-1}}$.

Ejercicio 3.7
Estudiar la continuidad de las funciones definidas por:

(a) $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0; \\ \frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}} & x \neq 0. \end{cases}$

(b) $f(x) = |x|e^{-|x-1|}$.

(c) $f(x) = \begin{cases} 2 & x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \frac{x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{\operatorname{sen} x} & x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Ejercicio 3.8
Estudiar la continuidad en el punto $x = 0$ *de las funciones definidas por:*

$$(\mathbf{a}) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0; \\ x \operatorname{sen}(1/x) & x \neq 0. \end{cases}$$

$$(\mathbf{b}) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0; \\ \frac{2^{1/x}+1}{2^{1/x}-1} & x \neq 0. \end{cases}$$

$$(\mathbf{c}) \quad f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1 - \cos x, & x > 0. \end{cases}$$

2 Diferenciabilidad

Ejercicio 3.9
Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones en el punto $x = 1$.

(a) $f(x) = |x - 1|$.

(b) $f(x) = |x - 2\sqrt{x} + 2|$.

(c) $f(x) = (x - 1)^{1/3}$.

(d) $f(x) = (x - 1)^{2/5}$.

(e) $f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & x < 1; \\ 1 - \operatorname{sen}(x - 1), & x \geq 1. \end{cases}$

Ejercicio 3.10
Calcular las derivadas de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = 1/x$.

(b) $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$.

(c) $f(x) = e^x \cos x$.

(d) $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$.

(e) $f(x) = xe^x \cos x$.

Ejercicio 3.11
Utilizar la regla de la cadena para hallar las derivadas de

(a) $f(x) = e^{2x}$.

(b) $f(x) = e^{-x}$.

(c) $f(x) = (x^3 - 1)^3$.

(d) $f(x) = \cos^3 x$.

(e) $f(x) = \cos(x^3)$.
(f) $f(x) = e^{x^2+2x}$.
(g) $f(x) = 1/\big(1 + (\sqrt{x}+1)^2\big)$.

3 Integración

Ejercicio 3.12
Calcular las siguientes integrales.
(a) $\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\, dx$.
(b) $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}\, dx$.
(c) $\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}\, dx$.
(d) $\int \frac{x^4}{(1-x)^3}\, dx$.
(e) $\int \frac{x^3+x^2+x+3}{(x^2+1)(x^2+3)}\, dx$.

Ejercicio 3.13
Utilizar un cambio de variable para hallar las siguientes integrales.
(a) $\int \frac{e^x+e^{2x}}{1+e^x}\, dx$.
(b) $\int \frac{\tan^2 x+3\tan x}{1+\tan x}\, dx$.
(c) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
(d) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}\, dx$.
(e) $\int \frac{dx}{(24x-4x^2-27)^{3/2}}$.

Ejercicio 3.14
Calcular:
(a) $\int x \operatorname{sen} 2x\, dx$.
(b) $\int x^2 \cos x\, dx$.
(c) $\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$.
(d) $\int \cos^2 4x\, dx$.
(e) $\int \operatorname{sen} 2x\ \cos 3x\, dx$.
(f) $\int \cos 2x\ \cos x\, dx$.
(g) $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$.
(h) $\int x e^x \cos x\, dx$.

Ejercicio 3.15
Calcular los valores de las siguientes integrales definidas.
(a) $\int_{-2}^{4} (x-1)(x-2)\, dx$.
(b) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\, dx$.
(c) $\int_1^5 e^x \cos x\, dx$.
(d) $\int_0^2 f(x)\, dx$ donde $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } 0 \le x \le 1; \\ 2-x, & \text{si } 1 < x \le 2. \end{cases}$
(e) $\int_0^1 f(x)\, dx$ donde $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \le x \le c; \\ c\frac{1-x}{1-c}, & \text{si } c < x \le 1; \end{cases}$ *siendo* c *tal que* $0 < c < 1$.

Ejercicio 3.16
Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones f *y* g *en el intervalo que se indica.*
(a) $f(x) = \cos x, \quad g(x) = \operatorname{sen} x$ *en* $[0, \pi/4]$.
(b) $f(x) = x^3, \quad g(x) = x\sqrt{x^2+2}$ *en* $[0,1]$.
(c) $f(x) = e^x, \quad g(x) = e^{-x}$ *en* $[-1,1]$.
(d) $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x, \quad g(x) = \operatorname{sen} x$ *entre el origen y el menor punto de corte positivo.*

Ejercicio 3.17
Encontrar el área común a los círculos $x^2 + y^2 = 9$ *y* $(x-3)^2 + y^2 = 9$.

Ejercicio 3.18
Demostrar que la curva $y = x^3$ *descompone en dos partes iguales al triángulo formado por las rectas* $y = 7x$, $x = a$ *y el eje OX, siendo* a *la abscisa del punto positivo de intersección de la curva con la recta* $y = 7x$.

Ejercicio 3.19
Se considera la parábola $y = \sqrt{2}x^2/a$, *donde* $a > 0$, *y la circunferencia de ecuación* $x^2 + y^2 = a^2$. *Determinar el volumen engendrado por la zona que se encuentra entre el eje OX y las dos curvas, al girar en torno a OX.*

Ejercicio 3.20
Calcular el volumen de revolución engendrado, girando alrededor del eje OX, por el área que delimitan las parábolas $y^2 = 2hx$ *y* $x^2 = 2hy$, *con* $h > 0$.

Ejercicio 3.21
Al girar en torno al eje OX, la curva de ecuación $y = \sqrt{x}/(1 + x^2)$ *engendra una superficie de revolución que delimita un cuerpo cuyo volumen entre los puntos* $x = 0$ *y* $x = h$ *vamos a denotar por* $V(h)$. *Determinar* $a > 0$ *de modo* $V(a) = \frac{1}{2} \lim_{h \to +\infty} V(h)$.

Práctica 4
Ecuaciones diferenciales ordinarias

Ejercicio 4.1
En este problema estudiaremos la corriente que se origina en un circuito cuando se conecta una fuente continua. Habitualmente se dice que nuestra discusión tiene lugar en el dominio del tiempo.

Consideremos un circuito en serie formado por una fuente de tensión continua de v_0 *voltios, que se conecta en el instante* $t = 0$, *una resistencia de* R *ohmios y un inductor de* L *henrios de inductancia.*

(a) *Deducir que la intensidad de corriente del circuito cumple* $L\frac{di}{dt} + Ri = v_0$.
(b) *Si la corriente inicial es* $i_0 = 0$, *comprobar que* $i(t) = \frac{v_0}{R}(1 - e^{-Rt/L})$ *es solución.*
(c) *En general, si la corriente inicial es arbitraria* i_0, *comprobar que la solución es*

$$i(t) = \frac{v_0}{R} + (i_0 - \frac{v_0}{R})\ e^{-\frac{Rt}{L}}.$$

Ejercicio 4.2
Indicar el orden de las ecuaciones diferenciales siguientes.
(a) $(\operatorname{sen} t)(x'')^3 - x^2 = e^t$.
(b) $x''' + xt = \cos t$.
(c) $(x')^2 + x^2 = 1$.

Ejercicio 4.3
Comprobar que las siguientes funciones son soluciones de las ecuaciones diferenciales correspondientes.
(a) $x(t) = \operatorname{sen} t + \cos t$ *es solución de* $x'' + x = 0$.
(b) $x(t) = e^t$ *es solución de* $x' - x = 0$.
(c) $x(t) = -16t^2 + 14t + 30$ *es solución de* $x'' + 32 = 0$.
(d) $x(t) = e^{t^2} \int_0^t e^{-s^2} ds$ *es solución de* $x' = 2tx + 1$.
(e) $x(t) = 2e^{-t}$ *es solución de* $x'' - x = 0$.
(f) $x(t) = e^t$ *es solución de* $x'' - x = 0$.

Ejercicio 4.4
Calcular la solución general de las siguientes ecuaciones y posteriormente hallar la solución particular que verifique la condición inicial que se indica.
(a) $2xx' = t^2 + t$ *(* $x(0) = 1$ *).*
(b) $(t^2 + 4)x' = xt$ *(* $x(0) = 2$ *).*
(c) $t^2x' = x$ *(* $x(1) = 0$ *).*
(d) $3e^t \tan x + (2 - e^t)\frac{x'}{\cos^2 x} = 0$ *(* $x(1) = \frac{\pi}{4}$ *).*
(e) $\cos^{-1} t x x' = \tan t$ *(* $x(0) = 1$ *).*
(f) $x'\sqrt{1 - t^2} = \frac{-t}{x}$ *(* $x(0) = 2$ *).*
(g) $e^t x' = \frac{t+2}{x}$ *(* $x(0) = 1$ *).*

Ejercicio 4.5
Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones de primer orden.
(a) $tx' - 2x = t^2$.
(b) $x' + 2tx = 2te^{-t^2}$.
(c) $x' + \frac{x}{t} = 3t + 4$.
(d) $x' + tx = -t$.

Ejercicio 4.6
Demostrar que la solución particular de la ecuación $x' - 2x = e^{-t^2}$ *que verifica la condición inicial* $x(0) = 0$ *viene dada por*

$$x(t) = \int_0^t e^{2(t-\tau)} e^{-\tau^2} \, d\tau.$$

Práctica 5
Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

Ejercicio 5.1
Demostrar que, en cada apartado, las funciones son linealmente independientes.

(a) $x_1(t) = 1, \quad x_2(t) = t, \quad x_3(t) = t^2 \;\; y \;\; x_4(t) = t^3.$
(b) $x_1(t) = e^{\lambda t} \;\; y \;\; x_2(t) = e^{\mu t}, \;\; donde \;\; \lambda \neq \mu.$
(c) $x_1(t) = \operatorname{sen} \lambda t \;\; y \;\; x_2(t) = \cos \lambda t, \;\; siendo \;\; \lambda \neq 0.$
(d) $x_1(t) = e^t \operatorname{sen} t \;\; y \;\; x_2(t) = e^t \cos t.$
(e) $x_1(t) = e^t, \quad x_2(t) = te^t \;\; y \;\; x_3(t) = e^{2t}.$

1 Ecuaciones homogéneas

Ejercicio 5.2
Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones lineales homogéneas.

(a) $x'' - 4x = 0.$
(b) $x'' + 3x' + x = 0.$
(c) $x'' = x' + x.$
(d) $x''' + 2x'' - x' - 2x = 0.$
(e) $x^{(4)} - 5x'' + 4x = 0.$
(f) $x'' + x = 0.$
(g) $x'' + x' + x = 0.$
(h) $x'' + 6x' + 12x = 0.$
(i) $x''' - 2x'' + 5x' = 0.$
(j) $x''' + 2x'' + x' = 0.$
(k) $x''' - 6x'' + 12x' - 8x = 0.$
(l) $x^{(5)} + 2x''' + x' = 0.$
(m) $x^{(5)} - 2x^{(4)} + 2x''' - 4x'' + x' - 2x = 0.$

2 Ecuaciones completas

Ejercicio 5.3
Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones lineales no homogéneas.

(a) $x'' + 3x' = 3.$
(b) $x^{(4)} - 2x'' + x = t + 2.$
(c) $x^{(4)} - x'' = t + 2.$
(d) $x''' - x'' + x' - x = t^2 + t.$
(e) $x''' - x'' = 12t^2 + 6t.$

Ejercicio 5.4
Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones completas.

(a) $x'' - 4x' + 3x = te^{2t}.$
(b) $x^{(4)} - x'' = (t + 2)e^t.$
(c) $x'' - 6x' + 9x = 5e^{3t}.$

Ejercicio 5.5
Calcular la solución general de las siguientes ecuaciones.

(a) $x'' - 6x' + 9x = 25e^t \operatorname{sen} t.$
(b) $x'' + 4x = \operatorname{sen} 2t.$

(c) $x'' + x = \operatorname{sen} t - \cos t$.

Ejercicio 5.6
Averiguar la solución general de las siguientes ecuaciones.
(a) $x'' - 9x = 2t^2$.
(b) $x'' - 9x = -\cos t$.
(c) $x'' - 9x = 2t^2 - \cos t$.
(d) $x'' + x = e^t + te^{-t}$.

Ejercicio 5.7
Utilizar el método de variación de los parámetros para hallar la solución general de las siguientes ecuaciones.
(a) $x'' + x = \frac{1}{\cos t}$.
(b) $x'' - 2x' + x = \frac{e^t}{t^2+1}$.
(c) $x'' + 2x' + x = e^{-t} \log t$.
(d) $x'' - 3x' + 2x = \frac{1}{1+e^{-t}}$.
(e) $x''' - 2x'' - x' + 2x = \frac{2t^3+t^2-4t-6}{t^4}$.

Ejercicio 5.8
Sea $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *una función continua. Probar que el método de variación de los parámetros aplicado a la ecuación* $x'' + x = f$ *conduce a la solución particular*

$$x_p(t) = \int_0^t f(\tau) \operatorname{sen}(t - \tau) \, d\tau.$$

Práctica 6
Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales

Ejercicio 6.1

Consideremos un circuito formado por dos mallas. En la primera hay una fuente de tensión continua de v_0 *voltios, que se conecta en el instante* $t=0$, *una resistencia de* R_1 *ohmios y un inductor de* L *henrios. La segunda malla contiene el mismo inductor de* L *henrios además de otro de* L_2 *henrios y una resistencia de* R_2 *ohmios.*

(a) *Deducir que la intensidad de corriente en la primera malla* i_1 *y en la segunda* i_2 *verifican*

$$\begin{array}{rl} L\frac{di_1}{dt} - L\frac{di_2}{dt} + R_1 i_1 & = v_0 \\ -L\frac{di_1}{dt} + (L+L_2)\frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 & = 0 \end{array}$$

(b) *Despejar* $\frac{di_1}{dt}$ *en la segunda ecuación, sustituir en la primera y derivar para obtener que* i_2 *verifica la ecuación diferencial*

$$L_2\frac{d^2 i_2}{dt^2} + (R_2 + R_1 + \frac{R_1 L_2}{L})\frac{di_2}{dt} + \frac{R_1 R_2}{L} i_2 = 0$$

(c) *Despejar* $\frac{di_2}{dt}$ *en la primera ecuación, sustituir en la segunda y derivar para obtener que* i_1 *verifica la ecuación diferencial*

$$L_2\frac{d^2 i_1}{dt^2} + (R_1 + R_2 + \frac{R_1 L_2}{L})\frac{di_1}{dt} + \frac{R_1 R_2}{L} i_1 = \frac{R_2}{L} v_0$$

(d) *Suponiendo que* $R_1 = 10$, $R_2 = 15$, $L = 5$, $L_2 = 5$ *y* $v_0 = 10$*; resolver la ecuación del apartado (b) y obtener las soluciones* i_1 *e* i_2 *que cumplen* $i_1(0) = i_{01}$ *e* $i_2(0) = i_{02}$.

Ejercicio 6.2

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x' = x + 2y + t - 1 \\ y' = 3x + 2y - 5t - 2. \end{array} \right.$$

(a) *Probar que*

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t) = 2e^{4t} \\ y_1(t) = 3e^{4t} \end{array} \right. \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2(t) = e^{-t} \\ y_2(t) = -e^{-t} \end{array} \right.$$

son soluciones del sistema homogéneo correspondiente

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x + 2y \\ y' = 3x + 2y. \end{array} \right.$$

(b) *Demostrar que las soluciones del apartado (a) son linealmente independientes y escribir la solución general del sistema homogéneo.*

(c) *Comprobar que*

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = 3t - 2 \\ y(t) = -2t + 3 \end{array} \right.$$

es una solución particular del sistema completo (S) y escribir la solución general de este sistema.

Ejercicio 6.3
Escribir los siguientes sistemas de ecuaciones de primer orden como ecuaciones lineales y obtener la solución general.

$$(\mathbf{a})\ \left\{\begin{array}{r}x'=x+y\\ y'=y\end{array}\right.\qquad(\mathbf{b})\ \left\{\begin{array}{r}x'=y+1\\ y'=x+1\end{array}\right.\qquad(\mathbf{c})\ \left\{\begin{array}{r}x'=3-2y\\ y'=2x-2t\end{array}\right.$$

$$(\mathbf{d})\ \left\{\begin{array}{r}x'=y\\ y'=4x\end{array}\right.\qquad(\mathbf{e})\ \left\{\begin{array}{r}x'=y\\ y'=z\\ z'=x+2\end{array}\right.\qquad(\mathbf{f})\ \left\{\begin{array}{r}x'=y+z\\ y'=x+z\\ z'=x-y\end{array}\right.$$

Ejercicio 6.4
Encontrar la solución general de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales homogéneas.

$$(\mathbf{a})\ \left\{\begin{array}{r}x'=2x-y\\ y'=-x+3y\end{array}\right.\qquad(\mathbf{b})\ \left\{\begin{array}{r}x'=x-5y\\ y'=2x-y\end{array}\right.\qquad(\mathbf{c})\ \left\{\begin{array}{r}x'=2x+y\\ y'=4y-x\end{array}\right.\qquad(\mathbf{d})\ \left\{\begin{array}{r}x'=x+y\\ y'=4x-2y\end{array}\right.$$

Ejercicio 6.5
Aplicar el método de variación de los parámetros para hallar una solución particular del sistema no homogéneo

$$\left\{\begin{array}{r}x'=x+y-5t+2\\ y'=4x-2y-8t-8.\end{array}\right.$$

Obtener la solución general.

Práctica 7
Cálculo vectorial

1 Continuidad

Ejercicio 7.1
Hallar el dominio y el rango de las siguientes funciones. ¿Cuál es la gráfica en (a), (d) y (e)?
- **(a)** $f(x, y) = x^2 + y^2$.
- **(b)** $f(x, y) = \sqrt{x} + 2xy$.
- **(c)** $f(x, y) = \log(x + y)$.
- **(d)** $f(x, y) = 2 + 3x + 4y$.
- **(e)** $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Ejercicio 7.2
Calcular los siguientes límites.
- **(a)** $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \sqrt{x} + 2xy$.
- **(b)** $\lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{2xy+x^2}{x^2+xy+y^2}$.
- **(c)** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy+x^2-5}{x^2+xy+y^2+2}$.

Ejercicio 7.3
Aproximarse por rectas para hallar el posible valor del límite de las siguientes funciones.
- **(a)** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$.
- **(b)** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$.
- **(c)** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^2}$.
- **(d)** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(y+1)+y^2}{x^2+y^2}$.
- **(e)** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.
- **(f)** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2|y|^{3/2}}{x^4+4y^2}$.
- **(g)** $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^2+(x-1)y^2}{(x-1)^2+y^2}$.

Ejercicio 7.4
Comprobar que al aproximarse por rectas en el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y^4}{(x^4+y^2)^3}$ *se obtiene como único valor el* 0. *¿Qué valor se obtiene aproximándose por la curva* $y = x^2$ *?*

Ejercicio 7.5
Verificar la existencia de límite en los apartados del problema 3 en que sea posible.

Ejercicio 7.6
Comprobar si las siguientes funciones son o no continuas.
- **(a)** $f(x, y) = x^3 + 4y^2 - x + 1$, *en* $(1, 1)$.
- **(b)** $f(x, y) = \frac{x-y}{y-x^2}$ *si* $y \neq x^2$ *y* $f(x, x^2) = 1$, *en* $(1, 1)$.
- **(c)** $f(x, y) = \frac{y}{x}$ *si* $x \neq 0$ *y* $f(0, y) = 0$, *en* $(0, 1)$.
- **(d)** $f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$ *si* $(x, y) \neq (0, 0)$ *y* $f(0, 0) = 0$, *en* $(0, 0)$.
- **(e)** $f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$ *si* $(x, y) \neq (0, 0)$ *y* $f(0, 0) = 1$, *en* $(0, 0)$.

2 Diferenciabilidad

Ejercicio 7.7
Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones.
- **(a)** $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^3$ *en* $(1,2)$.
- **(b)** $f(x,y) = \frac{2x^2y^2}{x^2+y^2}$ *si* $(x,y) \neq (0,0)$ *y* $f(0,0) = 0$ *en* $(0,0)$ *y en* $(1,0)$.
- **(c)** $f(x,y) = xe^{x^2y}$ *en* $(1, \log 2)$.

Ejercicio 7.8
Encontrar la pendiente, en la dirección de los ejes x e y, de la superficie dada por
- **(a)** $z = x^2 + 2xy + y^3$ *en el punto* $(1,2,13)$.
- **(b)** $z = 1 - (x-1)^2 - (y-2)^2$ *en el punto* $(1,2,1)$.

Ejercicio 7.9
Hallar las siguientes derivadas direccionales.
- **(a)** $f(x,y) = x + y$ *en el punto* $(0,0)$ *y en la dirección* $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.
- **(b)** $f(x,y) = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2$ *en el punto* $(1,2)$ *y en la dirección* $(\cos\frac{\pi}{3}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{3})$.

Ejercicio 7.10
Consideremos la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

¿Existen las derivadas direccionales en el punto $(0,0)$ *? ¿Es continua en ese punto?*

Ejercicio 7.11
Comprobar que la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{-3xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

no es de clase C^1.

Ejercicio 7.12
Consideremos

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{\sqrt{x^4+y^4}}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

- **(a)** *Estudiar la continuidad en* $(0,0)$.
- **(b)** *Estudiar la existencia de derivadas direccionales en* $(0,0)$.
- **(c)** *Calcular las derivadas parciales en cualquier punto.*
- **(d)** *¿Son las parciales continuas en* $(0,0)$ *?*

Ejercicio 7.13
Sea $f(x,y) = 3x^2 - 4y$.
- **(a)** *Demostrar que es una función de clase C^1.*
- **(b)** *Calcular el gradiente de la función en* $(1,3)$.
- **(c)** *Calcular la derivada direccional en* $(1,3)$ *en la dirección* $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Ejercicio 7.14
Comprobar que las siguientes funciones son de clase C^1 y calcular las derivadas parciales de la composición $f \circ g$ *en los siguientes casos.*
- **(a)** $f(x) = e^x$ *y* $g(t) = \cos t$ *en el punto* 0.

(b) $f(x) = e^x$ *y* $g(s,t) = 3s^2 + 2t^3$ *en el punto* $(0,0)$.
(c) $f(x,y) = x^2y - y^2$ *y* $g(t) = (\operatorname{sen} t, e^t)$ *en el punto* 0.
(d) $f(x,y) = 2xy$ *y* $g(s,t) = (s^2 + t^2, \frac{s}{t})$ *en el punto* $(0,1)$.
(e) $f(x,y) = 2xe^y$ *y* $g(s,t) = (s^2 + t^2, \log s)$ *en el punto* $(1,0)$.

Ejercicio 7.15
Encontrar las derivadas parciales segundas de las siguientes funciones.
(a) $f(x,y) = 3xy^2 - 2y + 5x^2y^2$ *en el punto* $(-1,2)$.
(b) $f(x,y) = ye^x + x\log y$ *en el punto* $(0,1)$.

$$(\mathbf{c}) \quad f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0); \end{cases} \quad \text{en el punto } (0,0).$$

3 Integración

Ejercicio 7.16
Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *dos funciones continuas tales que* $f(x) \leq g(x)$ *para todo* $x \in [a,b]$. *Interpretar geométricamente la integral iterada*

$$\int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} dy\ dx.$$

Ejercicio 7.17
Calcular las integrales iteradas de las siguientes funciones.
(a) $f(x,y) = xy$ *en el triángulo de vértices* $(0,0)$, $(1,0)$ *y* $(1,1)$.
(b) $f(x,y) = e^{x+y}$ *en el triángulo de vértices* $(0,0)$, $(2,2)$ *y* $(4,0)$.
(c) $f(x,y) = \cos x$ *en el cuadrado de vértices* $(1,0)$, $(0,-1)$, $(-1,0)$ *y* $(0,1)$.
(d) $f(x,y) = x^2$ *en la región limitada por las curvas* $y^2 = x$, $y^2 = -x$ *e* $y = 1$.
(e) $f(x,y) = x$ *en la región situada por encima del eje de abcisas, y limitada por las circunferencias centradas en* $(0,0)$ *y con radios* 2 *y* 3 *respectivamente.*

Ejercicio 7.18
Consideremos la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{(x+y)^3}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

(a) *Comprobar que no es continua en el punto* $(0,0)$.
(b) *Calcular las integrales iteradas en el cuadrado de vértices* $(1,1)$, $(1,0)$, $(0,0)$ *y* $(0,1)$.

Práctica 8
Funciones de variable compleja

Ejercicio 8.1
Determinar el significado geométrico de las siguientes relaciones.
(a) $|p| \leq 1$. **(b)** $|p-3+\mathbf{j}| = 4$. **(c)** $|p+2| \geq 3$. **(d)** $1 < |p-5| < 21$. **(e)** $\Re\mathrm{e}(p) = 1$.
(f) $\Re\mathrm{e}(p) \geq -2$. **(g)** $-\pi < \Im\mathrm{m}(p) < \pi$. **(h)** $0 < \Re\mathrm{e}(p) \leq 2$. **(i)** $0 < \Re\mathrm{e}(\mathbf{j}p) < 1$.

Ejercicio 8.2
Probar que la función definida por $f(p) = p + \frac{1}{p}$ *transforma la circunferencia* $|p| = 2$ *en una elipse.*

Ejercicio 8.3
Demostrar que la función definida por $f(p) = p/(1-p)$ *transforma el círculo* $|p| < 1$ *en el semiplano* $\Re\mathrm{e} f(p) > -1/2$.

1 Derivación: ecuaciones de Cauchy-Riemann

Ejercicio 8.4
Hallar las derivadas de las siguientes funciones.
(a) $f(p) = c$. **(b)** $f(p) = p$. **(c)** $f(p) = p^3$. **(d)** $f(p) = e^p$.
(e) $f(p) = \mathrm{Log}(p)$. **(f)** $f(p) = p^q$. *(Por definición,* $p^q = e^{q\mathrm{Log}(p)}$. *)*
(g) $f(p) = q^p$. **(h)** $f(p) = \cos p$. **(i)** $f(p) = \operatorname{sen} p$. **(j)** $f(p) = \tan p$.

Ejercicio 8.5
Comprobar si las siguientes funciones tienen parte real e imaginaria de clase C^1 *y estudiar su derivabilidad.*
(a) $f(\sigma + \mathbf{j}\omega) = (\sigma^2 - \omega^2) + \mathbf{j}2\sigma\omega$
(b) $f(\sigma + \mathbf{j}\omega) = (\sigma^2 - 3\omega) + \mathbf{j}(\omega^2 + 2\sigma\omega)$
(c) $f(\sigma + \mathbf{j}\omega) = \sigma - \mathbf{j}\omega$
(d) $f(\sigma + \mathbf{j}\omega) = \sigma^2 + \mathbf{j}\omega^2$
(e) $f(\sigma + \mathbf{j}\omega) = \sigma^2 + 2\sigma - \mathbf{j}\omega$

(f) $$f(\sigma + \mathbf{j}\omega) = \begin{cases} \frac{\sigma^3-\omega^3}{\sigma^2+\omega^2} + \mathbf{j}\frac{\sigma^3+\omega^3}{\sigma^2+\omega^2}, & \text{si } \sigma + \mathbf{j}\omega \neq 0; \\ 0, & \text{si } \sigma + \mathbf{j}\omega = 0. \end{cases}$$

Ejercicio 8.6
Calcular los valores de a, b *y* c *para que la función definida por* $f(\sigma + \mathbf{j}\omega) = (\sigma + a\omega) + \mathbf{j}(b\sigma + c\omega)$ *sea derivable en todo* $\mathbb{C}$.

2 Desarrollos en series de potencias

Ejercicio 8.7
Demostrar que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} p^n$ *converge si* $|p| < 1$ *y diverge si* $|p| \geq 1$. *Calcular su suma cuando sea posible.*

Ejercicio 8.8
Hallar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias.
(a) $\sum_{n=0}^{\infty}(p-p_0)^n$. **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(p-p_0)^n$. **(c)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(p-p_0)^n$.
(d) $\sum_{n=0}^{\infty}2^n(p-p_0)^n$. **(e)** $\sum_{n=1}^{\infty}n^n(p-p_0)^n$. **(f)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(p-p_0)^n$.
(g) $\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{j}^n(p-p_0)^n$. **(h)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(p-p_0)^n$. **(i)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbf{j}^n n^3}{2^n}(p-p_0)^n$.

Ejercicio 8.9
Hallar la serie de Taylor de las siguientes funciones en el punto 0.
(a) $f(p) = e^p$. **(b)** $f(p) = e^{\mathbf{j}p}$. **(c)** $f(p) = \cos p$. **(d)** $f(p) = \operatorname{sen} p$.

Ejercicio 8.10
Escribir las series de potencias centradas en 0 *de las siguientes funciones.*
(a) $f(p) = \operatorname{Log}(1-p)$. **(b)** $f(p) = 1/(1-p)^2$. **(c)** $f(p) = 1/(1-p)^3$.
(d) $f(p) = p/(1-p)^3$. **(e)** $f(p) = 1/(1+p)^2$. **(f)** $f(p) = \operatorname{Log}(1+p)$.
(g) $f(p) = 1/(1+p^2)$. **(h)** $f(p) = \arctan(p)$. **(i)** $f(p) = \frac{p}{p^2-4p+3}$.
(j) $f(p) = \frac{p}{1-p-p^2}$. **(k)** $f(p) = \frac{1}{(p+1)(p+3)}$. **(l)** $f(p) = \frac{1}{p^2-p-1}$.
(m) $f(p) = \frac{p}{p^2+2p+1}$. **(n)** $f(p) = \frac{p}{p^3+1}$. **(o)** $f(p) = \frac{p-1}{p^2+1}$.

Ejercicio 8.11
Este ejercicio y el siguiente pretenden mostrar la utilidad de los desarrollos en serie de funciones de variable compleja; en particular, veremos su aplicación a la resolución de algunas ecuaciones en diferencias: el refinamiento de este método conduce a lo que se conoce como la transformada z.

Consideremos un circuito que consta de infinitas mallas M_n, $n \geq 0$, *con forma cuadrada y alineadas. En uno de los lados de la malla* M_0 *está conectada una fuente de tensión continua de* V *voltios y en los otros tres lados hay sendas resistencias de* R *ohmios. Las demás mallas tienen cuatro resistencias de* R *ohmios, una en cada lado. Supondremos que la intensidad de la corriente en* M_0 *es* $i_0 = 1$ *y que* $V = R$.

(a) *Estudiar* M_0 *y deducir que la corriente* i_1 *en* M_1 *cumple* $3i_0 - i_1 = 1$.
(b) *Probar que la corriente* i_n *en* M_n *verifica* $i_{n+1} - 4i_n + i_{n-1} = 0$ *para* $n \geq 1$.
(c) *Hallar la serie de Taylor centrada en* 0 *de la función* $f(p) = \frac{-2p+1}{p^2-4p+1}$.
(d) *Averiguar la corriente en cada malla.*

Ejercicio 8.12
Con el fin de producir efectos de sonido, un ingeniero desarrolla un eco en un estudio de grabación: ante una señal de audio $x(n)$, $(n \geq 0)$ *se obtiene como respuesta grabada la señal* $y(0) = x(0)$, $y(n) = x(n) + ay(n-1)$, $(n \geq 1)$*; siendo* $a > 0$.

(a) *Si la señal original es* $x(0) = \alpha$, $x(n) = 0$, $(n \geq 1)$, *considerar la función definida por*

$$f(p) = \frac{\alpha}{1-ap},$$

desarrollarla en serie de Taylor centrada en 0 *y deducir la respuesta* $y(n)$.

(b) *Desarrollar en serie de Taylor centrada en* 0 *la función definida por*

$$f(p) = \frac{\alpha + \beta p}{1-ap} = -\frac{\beta}{a} + \frac{\alpha a + \beta}{a}\frac{1}{1-ap}$$

y deducir la respuesta $y(n)$ *cuando la señal original es* $x(0) = \alpha$, $x(1) = \beta$, $x(n) = 0$, $(n \geq 2)$.

(Observar que cuando $0 < a < 1$ *la amplitud de la señal grabada se amortigua con el tiempo, cuando* $a = 1$ *no se altera y cuando* $a > 1$ *la amplitud se hace cada vez mayor.)*

Práctica 9
Integrales impropias

Ejercicio 9.1
Aplicar la regla de Barrow generalizada para determinar si las siguientes integrales impropias convergen o no y, en caso que converjan, calcularlas.

(a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt$
(b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$
(c) $\int_1^{+\infty} \cos t\, dt$
(d) $\int_{-\infty}^{+\infty} t\, dt$
(e) $\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt$
(f) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{1+e^{2t}}\, dt$

Ejercicio 9.2
Averiguar los valores de $a \in \mathbb{R}$ *para los que la integral* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^a}\, dt$ *converge.*

Ejercicio 9.3
Utilizar el criterio de mayoración para averiguar si las siguientes integrales convergen.

(a) $\int_0^{+\infty} e^{-t^2/a}\, dt,$ *con* $a > 0.$
(b) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, dt$
(c) $\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos t}{t}\, dt$
(d) $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t^2}\, dt$
(e) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\, dt$
(f) $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$

Ejercicio 9.4
Probar que la integral $\int_1^{+\infty} |\frac{\operatorname{sen} t}{t}|\, dt$ *diverge.*

Ejercicio 9.5
Determinar si convergen o no las siguientes integrales.

(a) $\int_1^{+\infty} \frac{t}{t^2+t+1}\, dt$
(b) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}}\, dt$
(c) $\int_1^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{2t^5+t^2+7}}\, dt$

Ejercicio 9.6
Demostrar que $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-xy} \operatorname{sen} x\, dy\, dx$ *e intercambiar el orden de integración para obtener* $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \pi/2.$

Ejercicio 9.7
Probar que $\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} ye^{-(1+x^2)y^2}\, dx\, dy = \pi/4$ *y que* $\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} ye^{-(1+x^2)y^2}\, dy\, dx = \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx\right)^2.$
Deducir que $\int_0^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{\pi}/2.$

Práctica 10
Transformadas de Laplace

Ejercicio 10.1
Consideremos el circuito de una sola malla formado por una fuente de tensión, que se activa en el instante $t = 0$, *una resistencia de* R *ohmios y un inductor de* L *henrios. Sea* $v(t)$ *el voltaje de la fuente e* $i(t)$ *la intensidad de la corriente resultante -supondremos que* $i(0) = 0$.

Denotaremos $V(p) = \int_0^\infty e^{-pt}v(t)\ dt$ *e* $I(p) = \int_0^\infty e^{-pt}i(t)\ dt$, *donde* $p \in \mathbb{C}$ *verifica* $\Re\mathrm{e}p > 0$.

(a) *Denotando por* $v_R(t)$ *el voltaje de la resistencia, probar que* $\int_0^\infty e^{-pt}v_R(t)\ dt = RI(p)$.

(b) *Utilizar la integración por partes para demostrar que si* $v_L(t)$ *denota el voltaje del inductor, entonces* $\int_0^\infty e^{-pt}v_L(t)\ dt = pLI(p)$.

(c) *Probar que* $V(p) = (pL + R)I(p)$. *(La función* $pL + R$ *se denomina la impedancia del circuito.)*

(d) *En el caso que* $v(t) = 2$ *voltios,* $L = 1$ *henrio y* $R = 2$ *ohmios, hallar el valor de* $I(p)$, *demostrar que* $I(p) = \int_0^\infty e^{-pt}(1 - e^{-2t})\ dt$ *y deducir que* $i(t) = 1 - e^{-2t}$.

1 La transformada de Laplace y sus propiedades

Ejercicio 10.2
Hallar la transformada de Laplace de las siguientes funciones.

(a) f *una función constante:* $f(t) = c$.
(b) $f(t) = t^n$.
(c) $f(t) = \mathrm{sen}(at)$, $a \in \mathbb{R}$.
(d) $f(t) = \cos(at)$, $a \in \mathbb{R}$.
(e) $f(t) = e^{at}$, $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 10.3
Demostrar las siguientes propiedades de la transformada de Laplace.

(a) Linealidad: *Si* f *y* g *son funciones y* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, *entonces* $\mathcal{L}[\alpha f + \beta g](p) = \alpha\mathcal{L}[f](p) + \beta\mathcal{L}[g](p)$.

(b) Cambios de escala: *Si* $g(t) = f(at)$ *y* $a > 0$, *entonces* $\mathcal{L}[g](p) = \frac{1}{a}\mathcal{L}[f](\frac{p}{a})$.

(c) Relación con la derivada respecto de t: *Si existen las transformadas de Laplace de* f *y* f', *entonces* $\mathcal{L}[f'](p) = p\mathcal{L}[f](p) - f(0)$.

(d) Relación con la derivada respecto de p: *Si existe* $\mathcal{L}[f](p)$ *para* $\Re\mathrm{e}p > \sigma_0$, *demostrar que la transformada de Laplace es una función derivable compleja en* $\Re\mathrm{e}p > \sigma_0$ *y* $\frac{d}{dp}\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[-tf(t)]$. *Aplicar esta propiedad y* $\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}\, t}{t}\ dt = \frac{\pi}{2}$ *(ver ejercicio 9.6) al cálculo de* $\mathcal{L}[\frac{\mathrm{sen}\, t}{t}]$.

Ejercicio 10.4
Se define u *la función escalón unitario, también llamada función de Heaviside, por*

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \geq 0; \\ 0, & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Las funciones escalonadas surgen de modo natural en el estudio de problemas con discontinuidades, como el cierre de un interruptor o el estudio de pulsos.

Expresar las siguientes funciones sin utilizar la función u *y dibujarlas.*

(a) $u(t - 2)$.
(b) $-2u(t)$.
(c) $u(-t)$.
(d) $u(t) + u(t - 1)$.
(e) $u(t)u(1 - t)$.

(f) $u(t)u(-1-t)$.
(g) $u(-t)-2u(t-2)$.

Ejercicio 10.5
Relación de la transformada de Laplace con traslaciones:
(a) *Si* $g(t)=f(t-a)u(t-a)$, *entonces* $\mathcal{L}[g](p)=e^{-ap}\mathcal{L}[f](p)$.
(b) *Si* $g(t)=e^{at}f(t)$, *entonces* $\mathcal{L}[g](p)=\mathcal{L}[f](p-a)$.

Ejercicio 10.6
Calcular los siguientes productos de convolución.
(a) $u*u$.
(b) *Si* $f(t)=e^{-at}u(t)$, *calcular* $f*f$.
(c) *Si* $f_n(t)=t^ne^{-at}u(t)$ *hallar* f_0*f_n *y deducir que*

$$f_0 * \overset{n+1)}{\cdots} * f_0 = \frac{f_n}{n!}.$$

(d) *Si* $f(t)=e^{-t^2/2}$, *calcular* $f*f$ *sabiendo que* $\int_0^\infty e^{-t^2/2}\,dt=\sqrt{\pi/2}$ *(ver ejercicio 9.7).*
(e) *Si* $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi a}}e^{-\frac{t^2}{2a}}$ *y* $g(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi b}}e^{-\frac{t^2}{2b}}$, *calcular* $f*g$.
(f) *Probar que* $\big(u*(fu)\big)(t)=u(t)\int_0^t f(\tau)\,d\tau$.

Ejercicio 10.7
Relación con la convolución: *Sean* $f,g:[0,+\infty[\to\mathbb{C}$ *y consideremos* $h=(fu)*(gu)$; *es decir,* $h(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$; *probar que* $\mathcal{L}[h]=(\mathcal{L}[f])\cdot(\mathcal{L}[g])$.

Ejercicio 10.8
Utilizar las propiedades anteriores para el cálculo de la transformada de Laplace de las siguientes funciones.
(a) $f(t)=e^{at}\cos(\omega t)$.
(b) $f(t)=e^{at}\operatorname{sen}(\omega t)$.
(c) $f(t)=e^{(a+\mathbf{j}\omega)t}$.
(d) $f(t)=t\,\cos t$.
(e) $f(t)=e^{-t}-e^{-3t}$.
(f) $f(t)=t\,\operatorname{sen} t+t^2e^{-t}$.
(g) $f(t)=\int_0^t e^{t-\tau}\operatorname{sen}\tau\,d\tau$.
(h) $f(t)=\int_0^t e^{\tau}e^{2(t-\tau)}\,d\tau$.
(i) $f(t)=\int_0^t \tau e^{\tau}(t-\tau)\,d\tau$.

Ejercicio 10.9
Encontrar las funciones f *cuyas transformadas de Laplace son las siguientes.*
(a) $\mathcal{L}[f](p)=\frac{4}{p-2}$.
(b) $\mathcal{L}[f](p)=\frac{p}{p^2+2}$.
(c) $\mathcal{L}[f](p)=\frac{3p+7}{p^2-2p-3}$.
(d) $\mathcal{L}[f](p)=\frac{2p^2-4}{(p+1)(p-2)(p-3)}$.
(e) $\mathcal{L}[f](p)=\frac{3p+1}{(p-1)(p^2+1)}$.

2 Aplicación a las ecuaciones diferenciales

Ejercicio 10.10
En la siguientes ecuaciones diferenciales encontrar la solución particular que verifica las condiciones iniciales $x(0) = 0$ *y* $x'(0) = 0$.

(a) $x'' - 5x' + 4x = 4$.
(b) $x'' + 4x = 2\cos^2 t$.
(c) $x'' - 3x' + 2x = e^t$.
(d) $x'' - x = \text{sen}(e^t)$.
(e) $x'' + x' - 2x = \cos(e^t)$.
(f) $x'' + x = \log(e^t + 1)$.
(g) $x'' + 3x' + 2x = \arctan(e^{-t})$.

Ejercicio 10.11
Sea $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *verificando que existe* $\mathcal{L}[f](p)$ *para todo* $p \in \mathbb{C}$ *tal que* $\Re e p > \sigma$.

(a) *Probar que la solución particular de la ecuación* $x' - 2x = f(t)$ *que verifica la condición inicial* $x(0) = 0$ *viene dada por*

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)e^{2(t-\tau)}\, d\tau.$$

(b) *Demostrar que la solución particular de la ecuación* $x'' + x = f$ *que cumple* $x(0) = 0$ *y* $x'(0) = 0$ *es*

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)\,\text{sen}(t - \tau)\, d\tau.$$

Ejercicio 10.12
Obtener la solución particular, que verifica las condiciones iniciales dadas, de las siguientes ecuaciones diferenciales.

(a) $x'' + x' - 2x = 0$, *con* $x(0) = 3$ *y* $x'(0) = 0$.
(b) $x'' + x = 3$ *con* $x(0) = 0$ *y* $x'(0) = 1$.
(c) $x'' - x = te^t$ *con* $x(0) = 1$ *y* $x'(0) = 1$.

Ejercicio 10.13
Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones de primer orden con valores iniciales.

(a) $$\begin{cases} x' + 4y + 2x = 4t + 1 \\ y' + x - y = \frac{3}{2}t^2 \end{cases} \qquad x(0) = 0 \text{ e } y(0) = 0.$$

(b) $$\begin{cases} x' + x = y + e^t \\ y' + y = x + e^t \end{cases} \qquad x(0) = 1 \text{ e } y(0) = 1.$$

(c) $$\begin{cases} x' + 2y = 3t \\ y' - 2x = 4 \end{cases} \qquad x(0) = 2 \text{ e } y(0) = 3.$$

(d) $$\begin{cases} x' + y - 2x = 0 \\ y' + x - 2y = -5e^t \ \text{sen}\, t \end{cases} \qquad x(0) = 2 \text{ e } y(0) = 3.$$

Práctica 11
Métodos numéricos

Ejercicio 11.1
En este problema estudiaremos una ecuación diferencial que no se puede resolver analíticamente y, consecuentemente, para la que es necesario buscar métodos aproximados.

Sea $f(t) = e^{-t^2}$ *y consideremos la ecuación diferencial* $x' - 2x = f$ *con la condición inicial* $x(0) = 0$. *Sabemos por el ejercicio 4.6 (y por el 10.11 (a)) que* $x(t) = \int_0^t e^{2(t-\tau)}e^{-\tau^2}\,d\tau$*; en particular, para* $t = 1$*, resulta*

$$x(1) = \int_0^1 e^{2-2\tau-\tau^2}\,d\tau = e^3\int_1^2 e^{-s^2}\,ds.$$

(a) *Como la integral* $\int_1^2 e^{-s^2}\,ds$ *no se puede calcular por medio de funciones elementales, para aproximarla, se divide el intervalo* $[1,2]$ *en cuatro partes iguales obteniéndose subintervalos de extremos* $t_i = 1 + \frac{i}{4}$*, con* $0 \le i \le 4$.

Sustituir en cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ *la función* $f(t)$ *por el valor de la función en el punto medio* $f\big((t_{i-1}+t_i)/2\big)$ *y efectuar la aproximación* $\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(s)\,ds \approx (t_i - t_{i-1})f\big((t_{i-1}+t_i)/2\big)$. *Deducir que*

$$x(1) \approx \frac{e^3}{4}\big[e^{-81/64} + e^{-121/64} + e^{-169/64} + e^{-225/64}\big] = 2.68184.$$

(b) *Demostrar que si el intervalo* $[0,1]$ *se divide y en cada uno de los subintervalos* $[t_{i-1}, t_i]$ *se substituye* $x'(t_{i-1})$ *por*

$$\frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}},$$

entonces resulta que aproximadamente

$$x(t_i) \approx \big(2(t_i - t_{i-1}) + 1\big)x(t_{i-1}) + (t_i - t_{i-1})f(t_{i-1}).$$

Dividir el intervalo $[0,1]$ *en 10 partes iguales (* $t_i = i/10$*, con* $0 \le i \le 10$ *) y aplicar la anterior aproximación para generar un proceso iterativo que empieza con* $x(t_0) = x(0) = 0$. *Deducir que*

$$x(1) = x(t_{10}) \approx \sum_{i=1}^{10} \frac{12^{i-1}}{10^i} e^{-\big((10-i)/10\big)^2} = 2.24892.$$

(El valor "exacto" de $x(1)$ *es* 2.7167*; para conseguir mediante la técnica del apartado (b) resultados semejantes a los obtenidos en el apartado (a) se necesita dividir el intervalo* $[0,1]$ *en 163 subintervalos, en cuyo caso la aproximación resultante es* $x(1) \approx 2.68182$. *)*

1 Integración numérica

Ejercicio 11.2
Calcular aproximadamente la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

(a) *subdividiendo* $[0,1]$ *en 10 subintervalos y aplicando la regla del trapecio. Acotar el error.*

(b) *aplicando la regla de Simpson tomando* $n = 10$. *Acotar el error.*

Hallar el valor de n *que hay que tomar en ambos métodos para obtener el valor de la integral con cuatro cifras decimales exactas.*

Ejercicio 11.3
Usar la regla del trapecio con $n = 4$ *para aproximar* $\displaystyle\int_{-1}^2 x^2\,dx.$

Ejercicio 11.4
Aplicar la regla de Simpson con $n = 10$ *para aproximar* $\int_1^2 \frac{dx}{x}$. *Acotar el error. ¿Cuántos subintervalos necesitaremos para lograr un error menor que* 0.00005 *usando la regla del trapecio?*

Ejercicio 11.5
Utilizar la regla de Simpson, acotando el error, para calcular

(a) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ *tomando* $n = 10$.

(b) $\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$ *tomando* $n = 4$.

Ejercicio 11.6
Acotar el error que se produce al aproximar $\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$ *utilizando tanto la regla de Simpson como la regla del trapecio para* $n = 8$ *y* $n = 16$.

Ejercicio 11.7
Un terreno está situado entre una valla rectilínea y un rio. La anchura en metros del terreno a una distancia x *de uno de los extremos de la valla se denota por* y *y viene dada por*

x	0	20	40	60	80	100	120
y	0	22	41	53	38	17	0

Aplicar la regla de Simpson para hallar, aproximadamente, el área del terreno.

Ejercicio 11.8
De una curva se conocen los valores que aparecen en la siguiente tabla

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	0.6	0.9	1.2	1.4	1.5	1.7	1.8	2

(a) *Hallar el valor aproximado del área limitada por la curva, el eje de abscisas y las ordenadas en* $x = 1$ *y* $x = 9$, *aplicando la regla de Simpson.*

(b) *Averiguar el valor aproximado del volumen engendrado al girar el área del apartado (a) alrededor del eje de abscisas, aplicando la regla de Simpson.*

2 Resolución numérica de ecuaciones diferenciales

Ejercicio 11.9
Utilizar el método de Euler para hallar el valor aproximado de y:

(a) *cuando* $x = 1.1$ *y* $h = 0.025$, *sabiendo que* $y_0 = 1.2$ *para* $x_0 = 1$ *e* $y' = 3x + y^2$.

(b) *cuando* $x = 1.4$ *y* $h = 0.1$, *sabiendo que* $y_0 = 0.2$ *para* $x_0 = 1$ *e* $y' = (x^2 + 2y)^{1/2}$.

Ejercicio 11.10
Utilizar el método de Euler y el método de Euler modificado para aproximar la solución del problema de valor inicial $y' = y^2 - x^2$ *para la cual* $y_0 = 1$ *cuando* $x_0 = 0$ *en el intervalo* $[0, 1/2]$, *cuando* $\Delta x = h = 0.1$, 0.05 *y* 0.01.

Ejercicio 11.11
Utilizar el método de Picard para obtener las siguientes aproximaciones.

(a) $y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5$ *para* $x = 0.2$ *en el problema* $y' = x - y$, *sabiendo que* $y = 1$ *cuando* $x = 0$.

(b) $y_1,\ y_2,\ y_3$ *para* $x = 0.1$ *en el problema* $y' = 3x + y^2$, *sabiendo que* $y = 1$ *cuando* $x = 0$.

Ejercicio 11.12
Aplicar el método de Picard y su mejora para resolver el problema de valores iniciales $y' = y^2 - x^2$ *con* $y_0 = 1$ *cuando* $x_0 = 0$. *Obtener* $y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x)$.

Ejercicio 11.13
Utilizar el método de la serie de Taylor para hallar el valor aproximado de y cuando:
- **(a)** $x = 0.2$ *en* $y' = x - y$; $y = 1$ *para* $x = 0$.
- **(b)** $x = 1.6$ *en* $y' = x - y$; $y = 0.4$ *para* $x = 1$.
- **(c)** $x = 0.1$ *en* $y' = 3x + y^2$; $y = 1$ *para* $x = 0$.
- **(d)** $x = 1.1$ *en* $y' = 3x + y^2$; $y = 1.2$ *para* $x = 1$.

Ejercicio 11.14
Usar el método de la serie de Taylor para estimar los valores de y en el problema $y' = y^2 - x^2$ en el intervalo $[0, 0.5]$ que cumple $y_0 = 1$ cuando $x_0 = 0$.

Ejercicio 11.15
Utilizar el método de Runge-Kutta para averiguar el valor aproximado de y cuando $x = 0.8$ para la solución particular de $y' = \sqrt{x + y}$ que satisfaga $y = 0.41$ cuando $x = 0.4$.

Ejercicio 11.16
Resolver, por el método de Runge-Kutta, el problema de valor inicial $y' = y^2 - x^2$ para el que $y_0 = 1$ cuando $x_0 = 0$ en los puntos $x = 0.1$, $x = 0.2$ y $x = 0.3$.

Ejercicio 11.17
Utilizar el método de Milne para encontrar el valor de y en $x = 0.4$ en el problema $y' = y^2 - x^2$; $x = 0$, $y = 1$ sabiendo que por medio del método de Runge-Kutta se obtiene

x	*0.1*	*0.2*	*0.3*
y	*1.11*	*1.25*	*1.42*

Ejercicio 11.18
Utilizar el método de Picard para calcular los valores aproximados de y y z correspondientes a $x = 0.1$ para la solución particular de

$$\begin{cases} y' = x + z; \\ z' = x - y^2; \end{cases}$$

que satisface $y = 2$, $z = 1$ cuando $x = 0$.

Ejercicio 11.19
Utilizar el método de Runge-Kutta para hallar el valor aproximado de y correspondiente a $x = 0.1$ para la solución particular de $y'' + 2xy' - 4y = 0$ que satisface $y = 0.2$, $y' = 0.5$ cuando $x = 0$.

Práctica 12
Series de Fourier

Ejercicio 12.1
Consideremos un circuito en serie que contiene una resistencia de R *ohmios y un inductor de* L *henrios. Observar que cuando se tiene conectada una fuente de tensión con voltaje* $v(t) = e^{\mathbf{j}\omega t}$, *la intensidad de corriente resultante es* $i(t) = \frac{1}{R+\mathbf{j}L\omega}e^{\mathbf{j}\omega t}$. *(Comprobar que, efectivamente,* $i(t)$ *es la solución estacionaria de la ecuación diferencial* $L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = v(t)$. *)*

Demostrar que el circuito forma un sistema lineal en el sentido de que si se tiene una fuente con voltaje $v(t) = \alpha_1 e^{\mathbf{j}\omega_1 t} + \alpha_2 e^{\mathbf{j}\omega_2 t}$, *se obtendrá una intensidad* $i(t) = \frac{\alpha_1}{R+\mathbf{j}L\omega_1}e^{\mathbf{j}\omega_1 t} + \frac{\alpha_2}{R+\mathbf{j}L\omega_2}e^{\mathbf{j}\omega_2 t}$.

Calcular la respuesta del sistema si el voltaje de la fuente viene dado por

(a) $v(t) = \operatorname{sen} t$.
(b) $v(t) = \cos t$.
(c) $v(t) = 1 + \operatorname{sen} t + 2\cos t + \cos(2t + \frac{\pi}{4})$.
(d) $v(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in]2k\pi, (2k+1)\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}; \\ 0, & \text{si } t = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots; \\ -1, & \text{si } t \in](2k-1)\pi, k\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

(Utilizar en el apartado (d) que $v(t) = \frac{4}{\pi}[\operatorname{sen} t + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3t + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5t + \frac{1}{7}\operatorname{sen} 7t + \cdots]$. *)*

Ejercicio 12.2
Comprobar si las siguientes funciones son periódicas y, en caso de serlo, calcular su periodo fundamental.

(a) $f(t) = \operatorname{sen}(\omega t)$.
(b) $f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$.
(c) $f(t) = \cos\frac{t}{3} + \cos\frac{t}{4}$.
(d) $f(t) = \cos(10t) + \cos(10 + \pi)t$.
(e) $f(t) = (10\cos t)^2$.
(f) $f(t) = \operatorname{sen}(t^2)$.

Ejercicio 12.3
Demostrar que si la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *verifica* $f(t) = f(t+T)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$\int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(t)\ dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\ dt = \int_0^T f(t)\ dt.$$

Ejercicio 12.4
Supongamos que $\omega T = 2\pi$.

(a) *Demostrar que si* $n, m \in \mathbb{Z}$ *y* $n \neq m$, *entonces* $\int_0^T e^{\mathbf{j}n\omega t}\ e^{-\mathbf{j}m\omega t}\ dt = 0$. *Hallar* $\int_0^T e^{\mathbf{j}n\omega t}e^{-\mathbf{j}n\omega t}\ dt$ *si* $n \in \mathbb{Z}$.

(b) *Demostrar que si* $n, m \in \mathbb{N}$ *y* $n \neq m$, *entonces* $\int_0^T \operatorname{sen}(n\omega t)\ \operatorname{sen}(m\omega t)\ dt = 0$ *y* $\int_0^T \cos(n\omega t)\ \cos(m\omega t)\ dt = 0$.

Probar también que $\int_0^T \operatorname{sen}(n\omega t)\ \cos(m\omega t)\ dt = 0$ *cualesquiera que sean* $n, m \in \mathbb{N}$.

Hallar $\int_0^T \operatorname{sen}^2(n\omega t)\ dt$ *y* $\int_0^T \cos^2(n\omega t)\ dt$

Ejercicio 12.5
Sea $\omega T = 2\pi$ *y supongamos que* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *es una función T-periódica.*

(a) *Si* $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\mathbf{j}n\omega t}$, *demostrar que* $F_m = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\ e^{-\mathbf{j}m\omega t}\ dt$ *para todo* $m \in \mathbb{Z}$.

(b) *Si* $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos(n\omega t) + b_n\operatorname{sen}(n\omega t)\big)$, *comprobar que* $a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\ dt$, *que* $a_m = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(m\omega t)\ dt$ *y que* $b_m = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\operatorname{sen}(m\omega t)\ dt$ *para todo* $m \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 12.6
Encontrar la serie de Fourier de las siguientes funciones.

(a) $f(t) = \begin{cases} -1, & \text{si } -\frac{T}{2} < t < 0; \\ 0, & \text{si } t = 0, \pm\frac{T}{2}; \\ 1, & \text{si } 0 < t < \frac{T}{2}; \end{cases}$ y $f(t) = f(t+T)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(b) $f(t) = (\operatorname{sen} t)^3$

(c) $f(t) = t$ *si* $-\frac{T}{2} < t \leq \frac{T}{2}$ *y* $f(t) = f(t+T)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

(d) $f(t) = t$ *si* $0 \leq t < T$ *y* $f(t) = f(t+T)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

(e) $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\frac{T}{2} < t < 0; \\ 1, & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{T}{2}; \end{cases}$ y $f(t) = f(t+T)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(f) $f(t) = \begin{cases} 2, & \text{si } -2 < t < 0; \\ t, & \text{si } 0 \leq t \leq 2; \end{cases}$ y $f(t) = f(t+4)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 12.7
Utilizar las propiedades de las funciones pares e impares para hallar la serie de Fourier de las siguientes funciones. En este problema $u(t)$ *denota la función escalón unitario o función de Heaviside, definida por*

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \geq 0; \\ 0, & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

(a) $f(t) = |t|$ *si* $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ *y* $f(t) = f(t+T)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

(b) $f(t) = t\cos t$ *si* $-\pi < t < \pi$, $f(\pi) = 0$ *y* $f(t) = f(t+2\pi)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

(c) $f(t) = |4\operatorname{sen}(2t)|$.

(d) $f(t) = 4\cos(2t)\left[u(t+\frac{\pi}{4}) - u(t-\frac{\pi}{4})\right]$ *si* $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ *y* $f(t) = f(t+\pi)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

(e) $f(t) = u(t+\frac{\delta}{2}) - u(t-\frac{\delta}{2})$ *si* $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ *y* $f(t) = f(t+T)$, *donde* $t \in \mathbb{R}$ *y* $0 < \delta < T$.

(f) $f(t) = t^2$ *si* $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ *y* $f(t) = f(t+T)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

(g) $f(t) = e^{|t|}$ *si* $-1 \leq t \leq 1$ *y* $f(t) = f(t+2)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 12.8
Verificar si la serie de Fourier de las funciones de los problemas 6 y 7 converge a la función dada.

Ejercicio 12.9
Utilizar los resultados del problema 8 para comprobar las siguientes igualdades.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1)(-1)^{k+1}}{4k(k+1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{n^2-1} \operatorname{sen}(n\pi/2) = \frac{1}{4}$.

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}$.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

(g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e - 1}{1+n^2\pi^2} = \frac{e}{2}$.

Práctica 13
Transformadas de Fourier

Ejercicio 13.1
Las funciones no periódicas también pueden expresarse en términos de funciones exponenciales complejas, pero en lugar de series de Fourier con frecuencias discretas $n\omega$, donde ω es la frecuencia fundamental y $n \in \mathbb{N}$, aparecen integrales de Fourier con frecuencias continuas $\omega \in \mathbb{R}$. Veamos cuál es la integral apropiada en un caso simple.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < -\frac{1}{2}; \\ \frac{1}{2}, & \text{si } t = -\frac{1}{2}; \\ 1, & \text{si } -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}; \\ \frac{1}{2}, & \text{si } t = \frac{1}{2}; \\ 0, & \text{si } t > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Para cada $T > 1$, consideremos la función T-periódica definida por $f^T(t) = f(t)$ si $-\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$ y $f^T(t) = f^T(t+T)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(a) *Hallar $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^T e^{\mathbf{j}n\omega t}$, la serie exponencial de Fourier correspondiente a f^T (como siempre, $\omega = \frac{2\pi}{T}$).*

(b) *Si $r \neq 0$, considerando cualquier $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{2n\pi}{r} > 1$ y tomando $T = \frac{2n\pi}{r}$, se define $F(r) = Tc_n^T$. Por otra parte, se define $F(0) = Tc_0^T$. Calcular $F(r)$ y demostrar que es independiente del n escogido.*

(c) *Comprobar que $F(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\mathbf{j}rt}\, dt$, con lo cual F es una función continua.*

(d) *Demostrar que, para cada $T > 1$, $f^T(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega F(n\omega)e^{\mathbf{j}n\omega t}$.*

(e) *Sean $k \in \mathbb{N}$ y $\omega > 0$ tal que $\frac{2\pi}{\omega} > 1$. Justificar que la suma $\sum_{n=-k}^{k} \omega F(n\omega)e^{\mathbf{j}n\omega t}$ es una buena aproximación de la integral $\int_{-k\omega}^{k\omega} F(r)e^{\mathbf{j}rt}\, dr$ cuando ω es pequeño. Deducir que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega F(n\omega)e^{\mathbf{j}n\omega t}$ es una buena aproximación de $\int_{-\infty}^{+\infty} F(r)e^{\mathbf{j}rt}\, dt$, cuando ω es pequeño.*

(f) *Estudiar si es posible que $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(r)e^{\mathbf{j}rt}\, dt$. (Observar que $f(t) = \lim_{T\to\infty} f^T(t)$.)*

Ejercicio 13.2
Hallar la transformada de Fourier de las siguientes funciones. En este problema y en el (4), $a > 0$ y $u(t)$ denota la función escalón unitario, definida por

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \ge 0; \\ 0, & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

(a) $f(t) = u(a+t)u(a-t) = \begin{cases} 1, & \text{si } -a \le t \le a; \\ 0, & \text{si } |t| > a. \end{cases}$

(b) $f(t) = e^{-at}u(t)$.

(c) $f(t) = e^{-a|t|}$.

(d) $f(t) = u(\pi+t)u(\pi-t)\operatorname{sen} t = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & \text{si } -\pi \le t \le \pi; \\ 0, & \text{si } |t| > \pi. \end{cases}$

(e) $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < t < a; \\ 0, & \text{si } t = 0; \\ -1, & \text{si } -a < t < 0; \\ 0, & \text{si } |t| \ge a. \end{cases}$

Ejercicio 13.3
Demostrar las siguientes propiedades de la transformada de Fourier.

(a) Linealidad: *Si* f *y* g *son funciones y* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, *entonces*

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g](\omega) = \alpha\mathcal{F}[f](\omega) + \beta\mathcal{F}[g](\omega).$$

(b) Traslaciones: *Si* $g(t) = f(t - t_0)$, *entonces* $\mathcal{F}[g](\omega) = e^{-\mathbf{j}\omega t_0}\mathcal{F}[f](\omega)$.
Si $g(t) = e^{\mathbf{j}\omega_0 t} f(t)$, *entonces* $\mathcal{F}[g](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega - \omega_0)$.

(c) Cambios de escala: *Si* $g(t) = f(at)$ *y* $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, *entonces* $\mathcal{F}[g](\omega) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}[f](\frac{\omega}{a})$.

(d) Relación con la derivada: *Si existen las transformadas de Fourier de* f *y* f', *entonces* $\mathcal{F}[f'](\omega) = \mathbf{j}\omega\mathcal{F}[f](\omega)$.
Si existe $\mathcal{F}[f]$, *es una función derivable y* $\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}[-\mathbf{j}tf(t)]$.

Ejercicio 13.4
Utilizar las propiedades anteriores para el cálculo de la transformada de Fourier de las siguientes funciones.
(a) $f(t) = e^{-at}\operatorname{sen} t\ u(t)$. **(b)** $f(t) = e^{-at}\cos t\ u(t)$. **(c)** $f(t) = e^{-at}\operatorname{sen}(ct)\ u(t)$.
(d) $f(t) = e^{-at}\cos(ct)\ u(t)$. **(e)** $f(t) = e^{-t^2/2}$. **(f)** $f(t) = t^n e^{-at}u(t)$.

Ejercicio 13.5
Hallar la transformada de Fourier del producto de convolución de dos funciones.

Ejercicio 13.6
Aplicar el teorema de convolución para hallar la transformada de Fourier de la función definida por $f(t) = t^n e^{-at}u(t)$.

Ejercicio 13.7
Encontrar la transformada inversa de Fourier de la función definida por

$$f(t) = \begin{cases} 2\frac{\operatorname{sen}(at)}{t}, & \text{si } t \neq 0; \\ 2a, & \text{si } t = 0; \end{cases}$$

y, como consecuencia, obtener el valor de $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(at)}{t}\, dt$.

Ejercicio 13.8
Probar que $\mathcal{F}\big[\mathcal{F}[f]\big](\omega) = 2\pi f(-\omega)$ *y deducir que* $\big(\mathcal{F}[f]\big) * \big(\mathcal{F}[g]\big) = 2\pi\mathcal{F}[f \cdot g]$.

Ejercicio 13.9
Aplicar la transformada inversa de Fourier a la función $f(t) = \frac{1}{(a+\mathbf{j}t)^2}$, *donde* $a > 0$.

Ejercicio 13.10
Determinar la transformada de Fourier de la función definida por

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & \text{si } |t| \leq 1; \\ 0, & \text{si } |t| > 1. \end{cases}$$

Aplicar los resultados del tema para calcular $\int_0^{+\infty} \left(\frac{t\cos t - \operatorname{sen} t}{t^3}\right)\cos(\frac{t}{2})\, dt$.

Ejercicio 13.11
Relación entre la transformada de Fourier y la transformada de Laplace *Dada la función* $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ *y dado* $\sigma \in \mathbb{R}$, *se define la función* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *por* $\varphi(t) = f(t)e^{-\sigma t}u(t)$. *Demostrar que* $(\mathcal{L}[f])(\sigma + \mathbf{j}\omega) = (\mathcal{F}[\varphi])(\omega)$ *para todo* $\omega \in \mathbb{R}$.

Práctica 14
Ecuaciones en derivadas parciales

1 Ecuación de ondas

Ejercicio 14.1
Aplicar el cambio de variable $\xi = x - ct$ *y* $\eta = x + ct$ *para obtener la solución de la ecuación de ondas* $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *que verifica las siguientes condiciones iniciales.*
(a) $u(x,0) = e^x$ *y* $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \operatorname{sen} x$.
(b) $u(x,0) = \log(1 + x^2)$ *y* $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 4 + x$.

Ejercicio 14.2
Hallar la solución de los siguientes problemas no homogéneos.
(a) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^2$, $u(x,0) = 0$ *y* $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$.
(b) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^2$, $u(x,0) = x$ *y* $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$.

Ejercicio 14.3
Sea $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *una función de clase* C^1*:* $u = u(x,t)$*. Aplicando la transformada de Laplace respecto de la variable* t *se obtiene*

$$\big(\mathcal{L}[u(x,t)]\big)(x,p) = \int_0^\infty u(x,t)\ e^{-pt}\ dt,$$

que es una función de dos variables.
(a) *Probar que* $\big(\mathcal{L}\big[\frac{\partial u}{\partial t}\big]\big)(x,p) = p(\mathcal{L}[u(x,t)])(x,p) - u(x,0)$ *y* $\big(\mathcal{L}\big[\frac{\partial u}{\partial x}\big]\big)(x,p) = \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{L}[u(x,t)])(x,p)$.

(b) *Si* u *es de clase* C^2*, demostrar que* $\big(\mathcal{L}\big[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\big]\big)(x,p) = p^2(\mathcal{L}[u(x,t)])(x,p) - pu(x,0) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$ *y* $\big(\mathcal{L}\big[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\big]\big)(x,p) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\mathcal{L}[u(x,t)])(x,p)$.

Ejercicio 14.4
Aplicar la transformada de Laplace en la variable t *para convertir la ecuación de ondas en una ecuación diferencial ordinaria y deducir las soluciones de los siguientes problemas.*
(a) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $u(x,0) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} u(x,t) = 0$ *para todo* $t \geq 0$ *y* $u(0,t) = \operatorname{sen} 2t$.
(b) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $u(x,0) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} u(x,t) = 0$ *para todo* $t \geq 0$ *y* $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \cos \frac{t}{2}$.

Ejercicio 14.5
Resolver los siguientes problemas, considerando primero soluciones con las variables separadas: $u(x,t) = X(x)T(t)$ *y utilizando después el desarrollo en serie de Fourier de una función impar y 2L-periódica.*
(a) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, *con condiciones iniciales* $u(x,0) = \operatorname{sen}\big(\pi x/L\big)$ *y* $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, *y con condiciones de frontera* $u(0,t) = 0$ *y* $u(L,t) = 0$.
(b) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, *con condiciones iniciales* $u(x,0) = x(L-x)$ *y* $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, *y con condiciones de frontera* $u(0,t) = 0$ *y* $u(L,t) = 0$.
(c) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x$, *con condiciones iniciales* $u(x,0) = 0$ *y* $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, *y con condiciones de frontera* $u(0,t) = 0$ *y* $u(L,t) = 0$.

Ejercicio 14.6
Aplicar la transformada de Fourier en la variable x *para convertir la ecuación de ondas en una ecuación diferencial ordinaria y deducir la solución genérica de la ecuación de ondas.*

2 Ecuaciones de líneas de transmisión

Ejercicio 14.7

Consideremos una línea de transmisión con extremo emisor en $x = 0$. *El voltaje* $v(x,t)$ *y la intensidad* $i(x,t)$ *en un punto* x *en el instante* t *vienen determinados por el siguiente sistema.*

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = -Ri - L\frac{\partial i}{\partial t}, \\ \frac{\partial i}{\partial x} = -Gv - C\frac{\partial v}{\partial t}, \end{cases}$$

donde R *es la resistencia,* L *la inductancia,* G *la conductancia y* C *la capacidad por unidad de longitud.*

Supongamos que una línea de transmisión semiinfinita, de resistencia y conductancia despreciables, tiene voltaje inicial y corriente inicial iguales a cero. Cuando $t = 0$, *se aplica en el extremo emisor un voltaje* $v(0,t) = v_0(t)$. *Aplicando la transformada de Laplace en la variable* t, *demostrar que el voltaje en cualquier posición* $x > 0$ *es* $v(x,t) = v_0(t - x\sqrt{LC})u(t - x\sqrt{LC})$ *y la correspondiente intensidad de corriente es* $i(x,t) = \sqrt{\frac{C}{L}}v_0(t - x\sqrt{LC})u(t - x\sqrt{LC})$.

Ejercicio 14.8

Consideremos una línea de transmisión en la que $L \neq 0$ *y* $C \neq 0$.

(a) *Demostrar que el voltaje verifica la siguiente ecuación, conocida como ecuación de los telegrafistas,*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \Big(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\Big)\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{RG}{LC}u = \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

(b) *Cuando* $RC = LG$, *se tiene la línea sin distorsión de Heaviside. Haciendo el cambio de variable*

$$u(x,t) = e^{\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)\frac{t}{2}}v(x,t),$$

probar que, en este caso, se verifica la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

(c) *Resolver la ecuación de los telegrafistas, cuando* $RC = LG$, *obteniendo el voltaje de la línea de transmisión y deducir el valor de la intensidad.*

Ejercicio 14.9

Consideremos una línea de transmisión uniforme y denotemos

$$Z = \sqrt{\frac{R + \mathbf{j}\omega L}{G + \mathbf{j}\omega C}} \quad \text{(Impedancia característica)}$$

y $q = \sqrt{(R + \mathbf{j}\omega L)(G + \mathbf{j}\omega C)}$.

Sabiendo que en un punto se tiene el voltaje $\Re\mathrm{e}(V_0 e^{\mathbf{j}\omega t})$ *y la corriente* $\Re\mathrm{e}(I_0 e^{\mathbf{j}\omega t})$, *encontrar los voltajes y las corrientes estacionarios en los demás puntos de la línea.*

Práctica 15
Funciones discretas y sus transformadas de Fourier

Ejercicio 15.1
En muchas aplicaciones, se puede obtener una ventaja significativa en el procesamiento de una señal continua al convertirla primero en una señal discreta y, después de procesarla de este modo (con un ordenador o con un dispositivo específico), convertirla de nuevo en una señal continua.

Para convertir una señal continua (función continua) en una discreta (sucesión) se la muestrea. Por ejemplo, consideremos la función continua definida por

$$f(t) = \sqrt{2}\cos t - 2\,\mathrm{sen}(2t).$$

(a) *Evaluar la función* f *en los siguientes ocho puntos:*

$$t_n = n\pi/4, \quad \text{con} \quad n = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4.$$

(b) *Comprobar que si* $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, *entonces* $\sum_{n=-3}^{4} e^{\mathbf{j}kn\pi/4} = 0$.
(c) *Demostrar que los coeficientes de la serie de Fourier de* f *vienen dados por*

$$F_k = \frac{1}{8}\sum_{n=-3}^{4} f(t_n)e^{-\mathbf{j}kn\pi/4}.$$

Como consecuencia, utilizando la periodicidad de f, *es posible recuperar la función a partir de estos ocho puntos. (Un importante teorema de muestreo de Nyquist-Shannon afirma que, bajo ciertas hipótesis bastante generales, se puede recuperar una función a partir de una muestra.)*

Ejercicio 15.2
Se definen las funciones discretas impulso unitario $\delta(n)$ *y escalón unitario* $u(n)$ *por*

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0; \\ 0, & \text{si } n \neq 0; \end{cases} \qquad u(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \geq 0; \\ 0, & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

(a) *Comprobar que* $\delta(n) = u(n) - u(n-1)$.
(b) *Expresar las funciones discretas* $u(-n)$, $u(n) - u(n-2)$ *y* $u(n)u(2-n)$ *sin utilizar la función escalón unitario.*
(c) *Calcular* $a\delta(n-k)$, *para* a *y* $k \in \mathbb{Z}$ *fijos.*
(d) *Sea* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *una función discreta, comprobar que se cumple*

$$f(\ell)\delta(n-\ell) = \begin{cases} f(n), & \text{si } n = \ell; \\ 0, & \text{si } n \neq \ell; \end{cases} \qquad \text{para todo} \quad \ell \in \mathbb{Z}.$$

Ejercicio 15.3
Calcular los siguientes productos de convolución.
(a) $f(n) * \delta(n)$. **(b)** $f(n) * \delta(n-\ell)$. **(c)** $u(n) * u(n)$.
(d) $a^n u(n) * u(n)$, *con* $a \neq 1$. **(e)** $\big(\delta(n) + 2\delta(n-1)\big) * \big(2\delta(n+1) + 2\delta(n-1)\big)$.

Ejercicio 15.4
Si $f(t)$ *y* $g(t)$ *definen funciones T-periódicas cuyos coeficientes de Fourier son* $(F_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *y* $(G_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *respectivamente, probar que entonces los coeficientes de la serie de Fourier del producto* $h(t) = f(t)g(t)$ *vienen dados por* $F_k * G_k$.

Ejercicio 15.5
Estudiar si las funciones discretas definidas por las siguientes fórmulas son o no periódicas, y calcular su periodo fundamental.
(a) $f(n) = \mathbf{j}^n$. **(b)** $f(n) = \sqrt{2}\cos(n\pi/4)$. **(c)** $f(n) = e^{\mathbf{j}n}$.
(d) $f(n) = e^{\mathbf{j}2\pi n/N}$, *donde* $N \in \mathbb{N}$. **(e)** $f(n) = 2e^{\mathbf{j}\pi n} + e^{\mathbf{j}2\pi n}$. **(f)** $f(n) = \frac{n}{2} - \left[\frac{n}{2}\right]$.

Ejercicio 15.6
Demostrar que la función discreta definida por $f(n) = e^{\mathbf{j}\omega n}$ *es periódica si, y sólo si,* $\omega/(2\pi)$ *es un número racional. En tal caso, si* $\frac{\omega}{2\pi} = \frac{m}{N}$, *con* m *y* N *primos entre sí, entonces su periodo fundamental es* N.

Ejercicio 15.7
Probar que toda función discreta N-periódica $\big(f(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ *verifica que*

$$\sum_{n=\ell+1}^{N+\ell} f(n) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)$$

para todo $\ell \in \mathbb{Z}$. *En particular, si* N *es par, entonces* $\sum_{n=0}^{N-1} f(n) = \sum_{n=-(N/2)+1}^{N/2} f(n)$ *y si* N *es impar,* $\sum_{n=0}^{N-1} f(n) = \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} f(n)$.

Ejercicio 15.8
Comprobar que

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{\mathbf{j}k2\pi n/N} e^{-\mathbf{j}\ell 2\pi n/N} = \begin{cases} N, & \text{cuando} \quad k-\ell = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots; \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Ejercicio 15.9
Supongamos que $\big(f(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ *es una función discreta N-periódica.*
(a) *Si* $f(n) = \sum_{k=1}^{N} F_k e^{\mathbf{j}k2\pi n/N}$, *demostrar que entonces* $F_k = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n)e^{-\mathbf{j}k2\pi n/N}$ *para todo* $k = 1, \ldots, N$.
(b) *Comprobar que* $F(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n)e^{-\mathbf{j}k2\pi n/N}$ *para todo* $k \in \mathbb{Z}$ *define una función N-periódica.*

Ejercicio 15.10
Encontrar las transformadas discretas de Fourier de las siguientes funciones periódicas.
(a) $f(n) = (-1)^n$.
(b) $f(n) = 2\mathbf{j}^n$.
(c) $f(n) = \operatorname{sen}(n\pi/2)$.
(d) $f(n) = 2\delta(n+2) - \delta(n+1) + \delta(n) + 2\delta(n-2)$ *si* $|n| \leq 2$ *y* $f(n) = f(n+4)$ *para todo* n.
(e) $f(n) = u(n) - u(-n)$ *si* $|n| < N$, $f(N) = 0$ *y* $f(n) = f(n+2N)$ *para todo* n.
(f) $f(n) = [(-1)^n - 1]/2$.
(g) $f(n) = [(-1)^n + 1]/2$.
(h) $f(n) = |\operatorname{sen}(n\pi/4)|$.

(i) $f(n) = n/N$ *cuando* $|n| \leq N-1$, $f(N) = 0$ *y* $f(n) = f(n+2N)$ *para todo* n.
(j) $f(n) = |n|/N$ *cuando* $|n| \leq N$ *y* $f(n) = f(n+2N)$ *para todo* n.

Ejercicio 15.11
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *una función T-periódica. Se divide el intervalo* $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ *en* $2N$ *partes iguales obteniéndose subintervalos con extremos* $t_n = n\frac{T}{2N}$, $-N \leq n \leq N$, *y se define la función de muestreo* $g(n) = f(\frac{nT}{2N})$, $n \in \mathbb{Z}$, *que es una función discreta 2N-periódica.*

Demostrar que aproximando los primeros $2N$ *coeficientes de la serie de Fourier de* f *por medio de la aplicación de la regla del trapecio en cada subintervalo* $[t_{n-1}, t_n]$, $-N+1 \leq n \leq N$, *se obtienen los coeficientes de la transformada de Fourier de la función discreta* g. *(Así pues, la transformada discreta de Fourier de* g *constituye una aproximación de los primeros* $2N$ *coeficientes de la serie de Fourier de* f. *)*