SOBRE MATEMÁTICAS Y FÍSICA: UNA CONVERSACIÓN CON

SIR MICHAEL ATIYAH

J. Adolfo de Azcárraga

Sir Michael Francis Atiyah es uno de los más distinguidos matemáticos de nuestro tiempo. Junto con I. Singer probó el famoso teorema del índice que lleva sus nombres y que relaciona el análisis y la topología; después, el teorema resultó muy importante en la moderna física teórica. Entre otros premios, ha recibido la medalla Fields (1966) y el premio Abel (con Singer, 2009). Ha sido Presidente de la *Royal Society*, Master del *Trinity College* de la Univ. de Cambridge y Presidente de la *Royal Society* de Edimburgo; Sir Michael es miembro de la Orden del Mérito de la Commonwealth, una de las 24 personas que pueden tenerla en un momento dado. En su época de Master del Trinity promovió, junto con el físico teórico Peter Goddard del vecino St John's Coll., la creación del *Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences*, del cual fue su primer director en 1990 (y Goddard el primer subdirector). La primera mitad de su carrera fue la de un brillante matemático puro; la segunda, la de un matemático preocupado por problemas fundamentales de la física. En la actualidad se encuentra en la *Edinburgh School of Mathematical Sciences*, donde mantiene una intensa actividad investigadora. Si se le preguntara sobre su jubilación, supongo que respondería como lo hizo recientemente el Nobel S. Weinberg: "pienso retirarme poco después de mi fallecimiento".

El profesor Atiyah visitó la RSEF a principios de mayo en el marco del Convenio de Colaboración RSEF-Fundación Ramón Areces. Pese al fallecimiento de su esposa pocas semanas antes decidió mantener su visita y, el 3 de mayo, pronunció una conferencia en la Facultad de Ciencias Físicas de la UCM, *Have Fun with Numbers and become Rich or Famous*. Gran conversador, sugerí realizarle una entrevista sobre la relación entre la física y las matemáticas y sobre su investigación más reciente, que mencionó en su conferencia; nuestra conversación sigue abajo. Algunas de las preguntas son intencionadamente extensas para proporcionar el contexto adecuado.

[J. Adolfo de Azcárraga] Comencemos por la relación entre las matemáticas y la física. En 1993, en un ensayo en el *Bull. Am. Math. Soc.,* A. Jaffe y F. Quinn acuñaron la expresión 'matemática teórica' para resaltar los peligros de la 'matemática especulativa' ya que, desde su perspectiva, "la matemática moderna se caracteriza fundamentalmente por el uso de demostraciones rigurosas". Tú fuiste uno de los matemáticos que, sin menospreciar el rigor, reaccionó ante ese artículo. ¿Por qué?

[Sir Michael Atiyah] Pensé que estaban amonestando a los matemáticos para que se alejaran de la física porque atribuían

Para el texto original en inglés, ver la versión electrónica de la *Revista Española de Física,* vol. **32**, #3 (julio-septiembre), 2018 en http://www.revistadefisica.es/index.php/ref/article/view/2457/1948.

al nuevo diálogo unos fundamentos cuestionables. A grandes rasgos, tenía una base 'topológica', no 'analítica'; se trataba de un análisis 'blando' y no 'duro' como el practicado por Glimm y Jaffe. Me resistía a que se me dijera que no debía hablar con mis buenos amigos de la comunidad de físicos como Edward Witten [físico y medalla Fields en 1990]. Quizá no fueran rigurosos al estilo de Jaffe, pero yo tenía el íntimo convencimiento de que su trabajo acabaría siendo riguroso a su debido tiempo, como ya sucedió en el pasado cuando Riemann utilizó la prolongación analítica para justificar los brillantes teoremas de Euler. Esto es lo que sucede; los analistas 'duros' se quedan atrás.

[AA] Sí, resulta adecuado hablar de la exitosa 'matemática física' para reconocer la influencia de la física en el desarrollo de las matemáticas. Entre los ejemplos del s. XX se encuentra la teoría de distribuciones, que puede decirse que comienza en 1927 con la delta de Dirac y sus derivadas; la entonces (1913) esotérica teoría de espinores de Élie Cartan, que creció enormemente con la física; el artículo de Dirac sobre el monopolo (1931), del que cabría decir que incluye los antecedentes de la teoría de fibrados con el papel de la topología; el florecimiento de la geometría no conmutativa y de las supervariedades incluyendo la integración de Grassmann, que Berezin introdujo en los sesenta teniendo *in mente* la física de fermiones; muchos desarrollos de la teoría de grupos (ya no la *Gruppenpest* de la física), etc. ¿Cuáles son, en tu opinión, los ejemplos más recientes e importantes en esa línea?

[MA] Estoy de acuerdo contigo, aunque has simplificado la historia y la interacción entre la física y matemáticas, que ha sido un proceso de iteración en ambos sentidos. Antes de la delta de Dirac estuvo Heaviside (un ingeniero). Los espinores se deben realmente a Hamilton (matemático y físico a la vez); Cartan partió de Sophus Lie; los fibrados y la teoría de gauge U(1) se deben a Clifford. Grassmann utilizó la comprensión de Maxwell de los cuaterniones de Hamilton. Maxwell dedujo toda la notación de *div*, *grad* y *rot* de Hamilton, quien escribió por primera vez la ecuación $(i\, d/dx + j\, d/dy + k d/dz)^2 = -Laplaciano$ y dijo que debía tener un sentido geométrico profundo. Todo esto fue muchas décadas antes de Dirac. Los diálogos continúan y ahora tenemos una comprensión mejor de los fermiones, de la supersimetría y de la teoría de Morse; de la teoría cuántica de campos topológica en tres dimensiones y de los invariantes de nudos de Jones; de los invariantes de Donaldson en cuatro dimensiones y del papel especial de la dimensión cuatro a la vez en la geometría y en la física. También de los espacios de *moduli* en la teoría de Yang-Mills; de los monopolos y los instantones, de las anomalías, cohomología y de la teoría del índice; de la holografía y la geometría, etc. Necesitaría muchas charlas para explicar las últimas ideas; mi conferencia en Madrid fue sólo un ejemplo.

[AA] Pensaba en algunos pioneros del s. XX pero, efectivamente, O. Heaviside introdujo la 'función' salto. Y por cierto, eliminando (como Hertz) el potencial vector $\boldsymbol{A}$ de la formulación original de Maxwell, redujo en los 1880s esas ecuaciones a las cuatro que hoy son las más familiares. Maxwell es una figura gigantesca; de sus ecuaciones dijo Feynman en 1964: "la guerra civil americana quedará reducida a una insignificancia provinciana comparada con este acontecimiento científico de la misma década". Las ecuaciones de Maxwell implicaron, además, un importante cambio de perspectiva al eliminar la 'acción a distancia' de Ampère en favor de la teoría de campos; también inspiraron la teoría de la relatividad especial. Realmente, constituyen un ejemplo magnífico de la exitosa interrelación de la física y las matemáticas. No obstante, C.N. Yang, quien (con T.T. Wu) tradujo en 1975 la estructura de las teorías gauge al lenguaje de fibrados principales con conexión, advirtió en 1979: "aunque la relación entre las matemáticas y la física es muy profunda, sería erróneo, sin embargo, creer que ambas disciplinas se solapan mucho. No lo hacen. Tienen finalidades y gustos separados, diferentes juicios de valor y diferentes tradiciones". Efectivamente, resulta difícil imaginar en 1900 alguna pista matemática que hubiera podido conducir a la Mecánica Cuántica (MC). Pero con la llegada de las relatividades de Einstein (1905, 1915), el principio de gauge de Weyl (1929), el desarrollo de la propia MC, la importancia fundamental de las simetrías en la física y, en un pasado más reciente, la aparición de la teoría de cuerdas, la geometría y la física aparecen más próximas que nunca. Sin embargo, F. Dyson se equivocó al escribir en 1972 que "el [muy fértil] matrimonio entre física y matemáticas ha acabado recientemente en divorcio". ¿Sería posible que, tras la teoría de cuerdas, se produjera un divorcio entre la física y las matemáticas?

[MA] Dyson se equivocó porque la física y las matemáticas no son como marido y esposa sino más bien como gemelos siameses. Un divorcio en este caso conduce generalmente a la muerte de al menos un gemelo, por lo que no debería contemplarse. Yang también simplifica en exceso al considerar las matemáticas y la física como organismos separados y, por implicación, que físicos y matemáticos son diferentes personas. ¿Cómo decide quiénes de las grandes figuras de la historia como Arquímedes, Newton, Gauss, Hamilton, Maxwell, Riemann, Poincaré, Weyl, fueron matemáticos o físicos?

[AA] Cierto; por ejemplo, Pauli ironizó sobre los méritos del matemático H. Weyl como físico, pero tuvo que cambiar su opinión cuando éste introdujo el principio (final) de gauge en 1929 (y en su libro de 1928). Permíteme que vayamos ahora a

tu antiguo amigo y colega de Oxford R. Penrose, que recientemente ha publicado *Fashion, Faith and Fantasy in the New Physics of the Universe*, usando tres palabras que supestamente se aplican a algunas áreas de la física, como a la *fashionable* teoría de cuerdas. Algunos científicos han señalado que E. Witten, proponente (1995) y líder de la teoría M (en la que las cinco teorías de supercuerdas y la supergravedad en once dimensiones aparecen como casos límite), ha desviado su atención hacia otros intereses como el estado sólido. No obstante, S.Weinberg comentó el año pasado que la teoría de cuerdas todavía es "la mejor esperanza que tenemos" para una teoría de las partículas elementales y que "confía en que no abandonen quienes la cultivan". ¿Cuál es tu visión de la teoría M?

[MA] Roger Penrose es uno de los pensadores más profundos sobre la gravedad. Es un auténtico discípulo de Einstein, pero su conocimiento de la física de partículas y de la teoría de cuerdas es limitado. En contraposición, Weinberg desestimó la geometría como forma equivocada de estudiar la gravitación, aunque cree en la teoría de cuerdas. Witten es el pensador más profundo de todos, y la única persona que tiene una visión unificada, aunque incompleta, de la teoría M. Su reciente interés en el estado sólido no es inconsistente con su creencia en la teoría M. En estos momentos parece estar atascada, así que es lógico poner el foco en otros aspectos de la física. Witten tiene toda mi simpatía. Mi única diferencia con él es que yo creo que necesitamos más matemáticas para el siguiente avance. Puesto que empecé como matemático es natural que busque ahí la inspiración.

He adquirido una nueva perspectiva que contempla la teoría M diferentemente y que extrae problemas resolubles uno a uno. Sus raíces están en la teoría de de Broglie-Bohm de la onda piloto y en una aproximación no local a la física, alejada de la partícula puntual no física con todos sus infinitos, y hacia modelos geométricos más realistas.

La pregunta más profunda de todas es si el universo es fundamentalmente tetradimensional o multidimensional. Penrose cree lo primero, los cultivadores de la teoría M lo segundo. Creo que ambas posturas son ciertas. Recordaré la máxima de Pauli, "una verdad profunda es aquella cuya opuesta es también cierta", y el rompecabezas lógico que resulta al preguntar si el propio dicho de Pauli también es 'una verdad profunda'.

Es mejor permanecer agnóstico. Todas las 'fes' contemplan un aspecto de la verdad; no hay una única verdad.

[AA] ¿Podrías describir *grosso modo* tu visión del enfoque de de Broglie y Bohm?

[MA] El enfoque de de Broglie y Bohm es la mejor forma de entender la dicotomía onda-partícula, con sus aspectos locales y no locales. Encontró dificultades en la teoría cuántica de campos, pero creo que con nuevas ideas esas dificultades podrían soslayarse. Mi predicción es que Bohm será contemplado como un avanzado en su tiempo.

[AA] El problema del *paisaje* (*landscape*) en la teoría de cuerdas, el número prácticamente infinito de vacíos consistentes de la teoría —como puntos de un paisaje terrestre— dificulta explicar por qué la física debería estar gobernada por *un* conjunto de leyes y no por muchos. Como algunos han señalado (por ejemplo, Penrose), el problema del paisaje proyecta serias dudas sobre la posibilidad de determinar *la* teoría que describe todas las interacciones de la Naturaleza, una de los motivos originales de la teoría de cuerdas. ¿Constituye esta falta de unicidad una auténtica dificultad para obtener las leyes de la Naturaleza partiendo de primeros principios o, como a veces se argumenta, puede superarse recurriendo *e.g.* a cosmologías de multi-universos?

[MA] El paisaje no es un problema. No describe diferentes universos, sólo diferentes estados de nuestro universo, en el que se han especificado la temperatura, la presión y otras propiedades físicas. La cuestión de si un universo en todos sus diferentes estados es un 'objeto' o un 'multiverso' es pura semántica mal entendida. Platón no se habría tragado nunca la idea de universos paralelos. Hemos estado intimidados por la idea de los 'estados cuánticos'.

[AA] En cualquier caso, nosotros sí vivimos en un universo específico, con un valor definido para las constantes físicas. ¿Estás implicando que, al final, ideas como la visión de los muchos mundos de H. Everett de la MC son simplemente escapatorias semánticas?

[MA] Sólo hay un universo pero si un observador ficticio se pasea a su alrededor encontrará muchas condiciones locales distintas. Verá el universo en

muchos estados diferentes. No veo ningún problema filosófico; es la camisa de fuerza mecánico-cuántica la que crea el problema. Descártese la MC como base filosófica, considérese como una aproximación útil, y los problemas desaparecen.

[AA] Cambiemos de asunto. Nadie trataría de enseñar relatividad a un chimpancé. Para quienes tenemos una visión evolutiva de la naturaleza humana (y dejando de lado la inteligencia artificial), esto pone en perspectiva nuestras limitaciones. No obstante, todavía se habla de la 'teoria del todo' como posible y alcanzable. ¿Podría serlo?

[MA] Los monos sólo pueden entenderse a través de la evolución y el mejor punto de partida es el famoso libro [1944] de Schrödinger *¿Qué es la vida?* Todos los biólogos famosos que conozco (y he conocido a la mayoría de ellos, desde Max Perutz a Francis Crick) dijeron que habían leído el libro y que les inspiró, pero que ¡estaba equivocado! Esto es algo que siempre me ha intrigado. Ahora comprendo por qué los biólogos decían eso, por qué estaban equivocados y por qué Schrödinger tenía esencialmente razón.

La explicación es muy simple. Schrödinger, siendo físico, pensaba en términos de *Energía* y la primera ley de la termodinámica. Los biólogos piensan en términos de *Entropía* y la segunda ley. En modelos analíticos, Energía y Entropía son el cuadrado del módulo y la fase de una función analítica y por tanto, como partes real e imaginaria, se determinan mutuamente. Pero esto es una situación matemática idealizada que no corresponde a la Naturaleza. En el mundo real las funciones pueden ser muy 'suaves', incluso infinitamente diferenciables, pero no son analíticas.

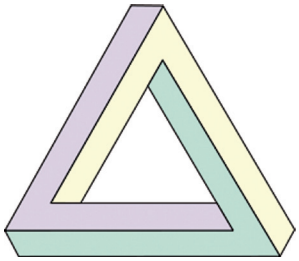
Maxwell, el gran filósofo natural en los albores de la evolución Darwiniana, pero mucho antes de la teoría cuántica de campos, vio claramente la diferencia. Insistió en que la Primera Ley era matemática y cierta, mientras que la Segunda Ley era probabilista e incierta. No consiguió convencer a Kelvin, pero sí me convenció a mí como puede leerse en mi artículo sobre la constante de estructura fina.

La subsiguiente interpretación de la entropía como información fue la respuesta de Shannon al diablo de Maxwell. Esto encaja muy bien en la biología moderna con el DNA codificando la información de la herencia. Pero sabemos que los genes mutan bajo la radioactividad y que ésta es probabilista, por lo que el diablo de Maxwell no fue captado realmente por Shannon. Todos deberíamos releer a Maxwell.

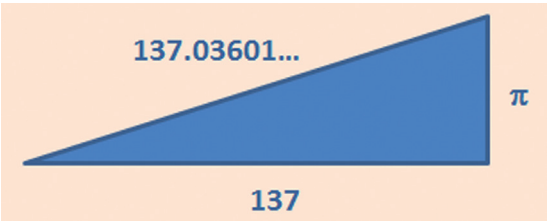
Algunos físicos hablan de la 'teoría del todo'. Esa expresión me desagrada y me resulta arrogante; nunca podemos conocer todo. Simplemente podemos construir estructuras con fines determinados. La humildad caracteriza los grandes científicos como Maxwell.

[AA] O Faraday... Consideremos ahora el Santo Cáliz de la física teórica, la teoría cuántica de la gravedad, una de las esperanzas de la teoría de cuerdas. Es probable que Einstein no consiguiera unir la gravedad con el electromagnetismo —dos teorías clásicas— porque dejó de lado la MC, algo no sorprendente porque no estaba muy satisfecho con ella. En tu visión, no obstante, la dificultad de unificar todas las interacciones no parece resultar de la resistencia de la gravedad a ser tratada cuánticamente, sino de que la gravedad no se tuvo en cuenta desde el principio. Si lo reflejo adecuadamente, tu punto de vista es que la gravedad no puede ignorarse incluso en el dominio microscópico si, además de calcular, queremos comprender. ¿Podrías elaborar esa visión?

[MA] La dificultad de la gravedad es la realimentación. La materia curva el espaciotiempo y este nuevo espaciotiempo curvo afecta a la materia. El modelo matemático que mejor captura este problema lo proporcionan los octoniones, lo que conduce al famoso triángulo de Penrose y a los grabados de Escher. La teoría cuántica no sirve en esta situación salvo que la gravedad sea muy débil. El hecho de que la gravedad débil sea siempre atractiva puede entenderse a partir de los octoniones y la famosa función de Bernoulli, que podemos comentar luego.



El triángulo imposible de Penrose



Una 1/α 'pitagórica' y no lo bastante precisa

[AA] Volveremos sobre la gravedad, pero consideremos primero un aspecto de la conferencia de Madrid, la determinación matemática de la constante de estructura fina de Sommefeld (1916), $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137.035\ 999\ 074(44) \sim 1/137$. Ha habido muchos intentos puramente numerológicos —i.e., jugando con números— de calcularla, incluso cabalísticos (137 aparece frecuentemente en la Cábala). Como sabes, muchos grandes científicos como Pauli —estudiante de Sommerfeld nacido en una familia cristiana de ascendencia judía— estuvo frustrado por el origen de α. En tu conferencia

citaste a Feynman (1985): "[El valor de α] ha sido un misterio desde que se descubrió… y preocupa a todos los buenos físicos teóricos. Uno querría saber inmediatamente de dónde viene ese número para un acoplamiento: ¿tiene que ver con π o quizá con la base de los logaritmos naturales? Nadie lo sabe. Es uno de los condenados y más grandes misterios de la física". Tu tratamiento es puramente matemático, pero no 'numerológico' en el sentido anterior (¡y resulta no ser ajeno a *e* y a π!). Pero, antes de que entremos en ello, ¿por qué creías, para empezar, que semejante cálculo era posible?

[MA] Se trataba claramente de un reto matemático al que no podía sustraerme. Algo tan importante para la física y tan matemático tenía que tener una muy buena razón para existir. Para mí, eso significaba belleza y simplicidad si se veían con la perspectiva adecuada.

$$e^{2\pi i} = 1$$

"El 'ser o no ser' de Hamlet equivale en profundidad y brevedad a la fórmula de Euler" [MA]

[AA] Tu conclusión es que α aparece en la expresión $e^{2Ж\omega} = 1$ en la que el carácter cirílico Ж (*zhe*) ha de ser calculado matemáticamente y se identifica con 1/α. Tu fórmula de 'Euler-Hamilton' $e^{2Ж\omega} = 1$ sigue el patrón de la de Euler , en la que π ha sido 'renormalizado' al número real positivo Ж (e *i* a ω, cuyo significado podemos ignorar aquí). Como bien sabes, para un físico cuántico la renormalización es un proceso que permite extraer respuestas finitas en un cálculo de orden superior en teoría cuántica de campos, como el famoso (1948) de J. Schwinger del momento magnético anómalo del electrón. ¿Podrías explicar que significa 'renormalización' en tu contexto y por qué el número real Ж, matemático, debería ser identificado *a priori* con 1/α que tiene un origen físico, dejando al margen que, según afirmas, coinciden las cifras calculadas?

[MA] Para un matemático la renormalización es simplemente un cambio de norma, con frecuencia dado por un simple cambio de coordenadas como x yendo a 1/x. Es natural interpolar con habilidad entre las dos coordenadas. Esto lo hace de forma especialmente bella la función de Bernoulli $x/(1-e^{-x})$, con x reemplazado por mx donde m es un parámetro positivo (que modela el efecto de la gravedad débil). Cerca del origen parece como x desplazado por m; cerca del infinito parece como una coordenada inversa 1/x desplazada. Esto es sencillo de comprender cuando x es una variable real o compleja porque el álgebra de polinomios es conmutativa. Mi trabajo era mimetizar este proceso para el álgebra no conmutativa de los cuaterniones de Hamilton. Afortunadamente para mí, todo el trabajo duro ya había sido realizado por von Neumann, Hirzebruch y Alain Connes. Todo lo que tuve que hacer fue poner juntas las piezas del rompecabezas.

Combinando el desafío del problema puesto por los físicos con la no-conmutatividad de Hamilton y el papel de u(2) en la interacción electrodébil quedaba sólo un pequeño paso (de fe/adivinanza/inspiración) para predecir que Ж debía ser la inversa 1/α de la constante de estructura fina. Todas las piezas del rompecabezas encajaban juntas para dar lugar a la imagen perfecta diseñada por Dios. Mi antiguo profesor J.A. Todd solía decir, cuando tropezaba con una fórmula bella, que "si hay algo de justicia en el mundo, tiene que ser cierta". Maxwell, Einstein y Dirac sintieron lo mismo sobre su percepción de la naturaleza de la luz.

[AA] Tu cálculo de α sería un ejemplo de lo que el Nobel E.P. Wigner llamó en 1960 "irrazonable eficacia de las matemáticas en las ciencias naturales"; antes, H. Poincaré había discutido en *La Science et l'Hypothèse* (1902) por qué las ecuaciones diferenciales dominan las leyes de la física. Tu formula 'de Hamilton-Euler' $e^{2Ж\omega} = 1$ es, como la de Euler $e^{2\pi i} = 1$, bella y mágica a la vez. ¿Podrías comentar sobre la importancia de la belleza de las fórmulas en la física —lo que se ha suscitado ya— y por qué, en tu opinión, las matemáticas son efectivamente tan adecuadas para describir la Naturaleza?

[MA] El propósito de la Ciencia es que la humanidad comprenda la Naturaleza. La entendemos formulando leyes que organizan el conocimiento. Una ley debe ser clara e inteligible. La belleza es un criterio de claridad. Si hubiéramos sido grandes ordenadores electrónicos no habríamos tenido necesidad de la belleza, o ésta habría significado algo bastante diferente.

La razón del éxito de las matemáticas está estrechamente ligado a su belleza, pero también a la biología evolutiva. Los humanos son producto de una larga evolución, en la que un cerebro poderoso constituía una ventaja. Esos cerebros evolucionaron en un mundo físico, de modo que el éxito evolutivo se medía por el éxito físico. Consecuentemente, los cerebros humanos evolucionaron para resolver problemas físicos, lo que requirió que el cerebro desarrollara el tipo adecuado de matemáticas. ¿Por qué se sorprendió Wigner? Porque hizo énfasis en las matemáticas y la física, pero ignoró la biología.

[AA] Tu visión de 1/α necesariamente ha de conducir a un número sin dimensiones. Una medida experimental de una magnitud física es necesariamente un número racional, pero eso no es un problema; también usamos aproximaciones racionales de π. No obstante, ¿deberíamos esperar que el número adimensional Ж fuera irracional? ¿Puede ser incluso trascendente, como π y e?

[MA] Las medidas no son racionales; son sucesiones de racionales que convergen en un número real al mejorar la medida. π es el ejemplo clásico y se ha probado que es trascendente. Ж debería serlo también, pero probarlo podría ser lógicamente difícil en el sentido de Gödel. Lo mismo creo respecto de la constante de Euler γ.

[AA] La identificación de Ж con $1/\alpha$ pone la constante de estructura fina en un dominio puramente matemático, incluso platónico, de la misma forma que π, la longitud de la circunferencia dividida por su diámetro, no tiene nada que ver con la física (aunque para nuestro asombro aparezca por doquier). ¿Tiene ese hecho alguna implicación en la nucleosíntesis de Hoyle que permite llegar al C^{12} esencial para la vida o, en general, para el *principio antrópico* de B. Carter (1967, 1974)? Weinberg comentó recientemente que este principio constituía una "sugerencia algo desesperada" para explicar el pequeño valor de la constante cosmológica.

[MA] He acabado con el principio antrópico. No sé de Hoyle y del C^{12} pero lo imagino. Todas esas cuestiones carecen de sentido. Una constante matemática como π o Ж no está a la venta. Carece de sentido preguntar cómo sería el universo si esos números fueran diferentes de lo que son —a menos que seas lo bastante radical para creer que las matemáticas podrían ser diferentes en otros universos, aunque entonces todo argumento antrópico indicaría que tal universo sería un lugar completamente estéril y, ciertamente, ¡sin vida ni matemáticos!

[AA] Sí, Penrose incluye el principio antrópico en el capítulo 'Fantasía' de su libro.

Tu tratamiento de $1/\alpha$ ha de conducir a un valor numérico que, dices, satisface el criterio de Good; también comentaste que restablece la reputación de Eddington. Supongo que te refieres a su cálculo (1930) de $1/\alpha$ cuando se creía que valía 136, enseguida ajustado al mejor valor 137. Esto motivó (1930) un poema sarcástico de V. Fock en el hoy desaparecido semanario *Punch*, *Sir Arthur Eddington adding one.* ¿Puedes comentar sobre esto?

[MA] El criterio de Good es que una explicación numerológica sólo es aceptable si procede de una teoría más fundamental, proporcionando una razón para ese valor numérico. Sí, Eddington obtuvo 136 sumando potencias de 2: $136 = 2^3 + 2^7 = 8 + 128$, que aparecen en mi artículo sobre α y que pueden explicarse en términos de álgebras de Clifford (próximas al razonar de Eddington). El 1 adicional para llegar a 137 procede de comenzar la sucesión antes: $137 = 2^0 + 2^3 + 2^7$.

[AA] Curiosamente, hay tantas álgebras de división (reales $\mathbb{R}$, complejos $\mathbb{C}$, cuaterniones $\mathbb{H}$ y octoniones $\mathbb{O}$) como tipos de interacciones. Desde tu perspectiva, la interacción electrodébil estaría relacionada con $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, la fuerte con $\mathbb{H}$ y la gravedad con $\mathbb{O}$. $\mathbb{H}$ no es commutativa y $\mathbb{O}$ ni siquiera asociativa. ¿No genera esto dificultades insuperables con la gravedad? Y, si no es así, ¿por qué la no conmutatividad y la no asociatividad son físicamente necesarias?

[MA] Exactamente. La no conmutatividad de los cuaterniones es crucial en el problema que trato en mi cálculo de α. La no asociatividad de los octoniones es mucho más difícil y la trataré en mi próximo artículo. La gravedad es mucho más difícil que las teorías gauge asociadas a grupos compactos. Las álgebras de división y las fuerzas físicas encajan perfectamente.

Permíteme aclararlo. Los grupos compactos que actúan sobre $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{C}^2$, $\mathbb{H}^2$ son SO(2), U(2), U(3). El primero da el electromagnetismo, el segundo la teoría electrodébil y el subgrupo SU(3) es el grupo de gauge de la interacción fuerte. Pero sobre $\mathbb{O}^2$ actúan los octoniones que no son grupo porque no son asociativos. Por eso la gravedad es más difícil de tratar que las teorías gauge.

[AA] El álgebra gauge del modelo de la interacción electrodébil no es simple, sino suma directa de dos álgebras, $su(2)\oplus u(1)$, que corresponde al u(2) que mencionaste antes. Como consecuencia, la construcción del modelo estándar parte de dos constantes en lugar de una. Tu esquema da cuenta de α, que corresponde a la interacción electromagnética. ¿Es posible encontrar algún rastro en ese esquema de la interacción débil?

[MA] Ciertamente, el acoplamiento débil tiene un valor geométrico que no es renormalizado en la

teoría puramente electromagnética. Pero puede ser renormalizado para obtener mejores valores para la teoría electrodébil.

[AA] ¿Querría eso decir que la constante de acoplamiento de Fermi G_F podría incluirse en el mismo esquema? Hacerla adimensional implicaría la introducción de un parámetro con dimensiones de $(\text{masa})^2$.

[MA] En general una constante de acoplamiento puede hacerse adimensional introduciendo un parámetro adecuado. Si el parámetro tiene las características geométricas adaptadas a la relatividad general de Einstein podemos llamarlo un parámetro de masa. Si nos permitimos usar espacios-tiempo multidimensionales que incorporan la RG y las teorías gauge, entonces todo parámetro es un parámetro de 'masa' en un sentido generalizado.

[AA] La constante de Newton G de la gravedad también tiene dimensiones. ¿Cuál sería la constante física sin dimensiones que jugaría el papel de α en tu esquema puramente matemático?

[MA] El número adimensional análogo a α es el cociente entre G y $c^3/\hbar e$ donde *e* es la carga del electrón. La masa está relacionada con la energía (gravitatoria) a través de la famosa fórmula de Einstein $E = mc^2$. La carga está relacionada con la energía (electromagnética) a través de las ecuaciones de Maxwell. Como la energía es universal, cualquiera que sea su fuente, masa y carga deben estar relacionadas. Ello implica una relación entre G y α .

[AA] Todo esto resulta sorprendente. Una pregunta más: Las constantes de acoplamiento físicas no son realmente constantes. Las de las interacciones electromagnética, débil y fuerte dependen de la energía y convergen al aumentar ésta; por ejemplo, a la energía del bosón *W*, $\alpha \backsim 1/128$. ¿Es esta variabilidad *física* compatible con un valor *matemático* y único para $1/\alpha$?

[MA] Absolutamente. Una constante de acoplamiento no es realmente constante, pero la física puede extraerse a través de la idealización que nos lleva al terreno de las matemáticas. El único número puro que permanece (para el modelo estándar) es α. Cuando se incorpora la gravedad, obtenemos la constante de Newton G. Pero he pospuesto esto para mi próximo artículo.

[AA] Quizá sea un buen momento para concluir. ¿Querrías añadir algo?

[MA] Mucho, pero la vida es corta.

[AA] *Ars longa, vita brevis*... Te deseo que, al contrario que É. Galois que sólo tuvo una noche para escribir sus descubrimientos antes de su trágico duelo, dispongas de muchos años para pensar y escribir sobre estas cuestiones fundamentales. Fue un placer tu visita a la RSEF; muchas gracias.