

En un estudio de mercado del sector inmobiliario sobre la segunda residencia de las familias se han realizado 804 entrevistas aleatorias a otras tantas familias. En dicho estudio se relaciona la variable dicotómica poseer vivienda secundaria (VS=1) frente a no poseer vivienda secundaria (VS=0) con las variables explicativas ingresos familiares (IF) e ingresos familiares al cuadrado (IF²). La estimación del modelo se ha realizado a través de un modelo Logit cuyos resultados se detallan a continuación:

```

=====
Dependent Variable: VS
Method: ML - Binary Logit (Quadratic hill climbing)
Included observations: 804
Convergence achieved after 5 iterations
Covariance matrix computed using second derivatives
=====

```

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	-3.556640	0.230076	-15.45854	0.0000
IF	0.721220	0.048306	14.93018	0.0000
IF ²	-0.016078	0.001884	-8.534782	0.0000

```

=====
Mean dependent var      0.486170      S.D. dependent var    0.500075
S.E. of regression      0.341459      Akaike info criteri   0.766098
Sum squared resid       109.2485      Schwarz criterion     0.781564
Log likelihood           -357.0661     Hannan-Quinn criter  0.771994
Restr. log likelihood   -651.1987     Avg. log likelihood   -0.379858
LR statistic (2 df)     588.2652     McFadden R-squared    0.451679
Probability(LR stat)    0.000000
=====
Obs with Dep=0          403          Total obs              804
Obs with Dep=1          401
=====

```

Se pide:

1.- Calcular la probabilidad de que una familia posea vivienda secundaria para los valores siguientes $IF = 4$; $IF = 5$ e $IF = 6$

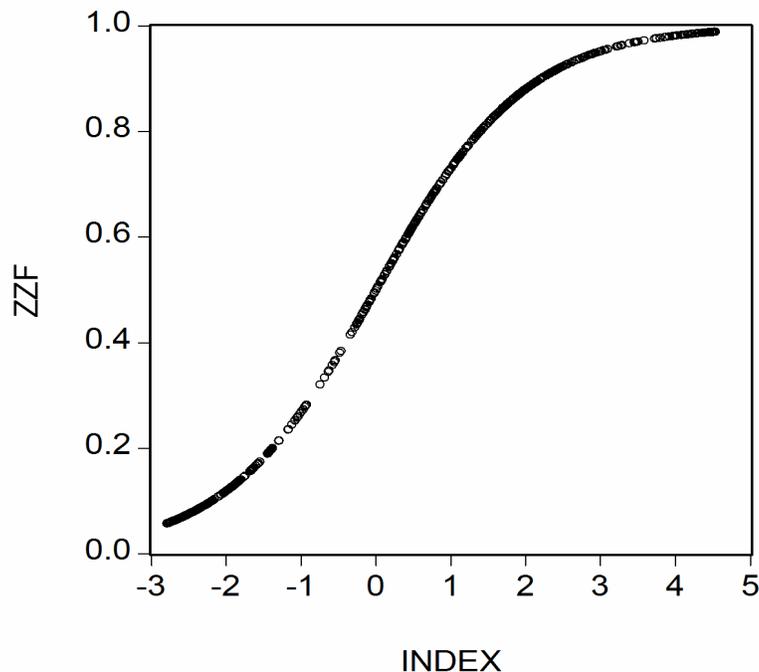
Utilizando el modelo estimado se obtiene:

$$\text{Prob}(VS=1/IF=4) = \hat{V}S = \frac{1}{1 + e^{-(-3.556 + 0.721 \times 4 - 0.016 \times 16)}} = 0.283$$

$$\text{Prob}(VS=1/IF=5) = \hat{V}S = \frac{1}{1 + e^{-(-3.556 + 0.721 \times 5 - 0.016 \times 25)}} = 0.41277873$$

$$\text{Prob}(VS=1/IF=6) = \hat{V}S = \frac{1}{1 + e^{-(-3.556 + 0.721 \times 6 - 0.016 \times 36)}} = 0.54782138$$

Procediendo de forma análoga se podrían obtener las probabilidades de tener vivienda secundaria para distintos valores de los ingresos familiares. Si se representan a través del diagrama donde en el eje de abscisas se representa el índice [index = $(-3.556+0.721IF-0.016IF^2)$] mientras que en ordenadas se representan las probabilidades estimadas correspondientes se obtiene el siguiente gráfico:



2.- Calcular el valor de los ingresos familiares que maximiza la probabilidad para que la familia en cuestión posea vivienda secundaria.

El modelo estimado es el siguiente:

$$\hat{VS} = \frac{1}{1 + e^{-(-3.556+0.721IF-0.016IF^2)}}$$

En este caso maximizar VS respecto IF es equivalente a minimizar el denominador del segundo miembro. Al estar el exponente afectado del signo negativo maximizar VS es equivalente a maximizar la expresión siguiente $(-3.556+0.721IF-0.016IF^2)$ Con el fin de obtener el máximo se tiene que obtener la siguiente derivada:

$$\frac{\partial(-3.556 + 0.721IF - 0.016IF^2)}{\partial IF} = (0.721 - 2 \cdot 0.016IF)$$

Si igualamos a cero la primera derivada obtenemos el valor $IF = 22.4282$ que maximiza la probabilidad de que VS sea igual a la unidad, es decir $\text{Prob}(VS=1/IF=22.42)$.

3.- ¿Qué valores de los ingresos familiares (IF) proporcionan una probabilidad de poseer vivienda secundaria iguales o superiores a 0.7 [Prob(VS=1) ≥ 0.7] ?

Con el fin de obtener los valores de los ingresos familiares (IF) que igualan a 0.7 la probabilidad de tener vivienda secundaria se establece la siguiente ecuación:

$$0.7 = \frac{1}{1 + e^{-(-3.556 + 0.721IF - 0.016IF^2)}}$$

O bien operando:

$$\frac{1}{0.7} - 1 = e^{-(-3.556 + 0.721IF - 0.016IF^2)}$$

Es decir:

$$\ln(0.42857143) = -0.8472 = -(-3.556 + 0.721IF - 0.016IF^2)$$

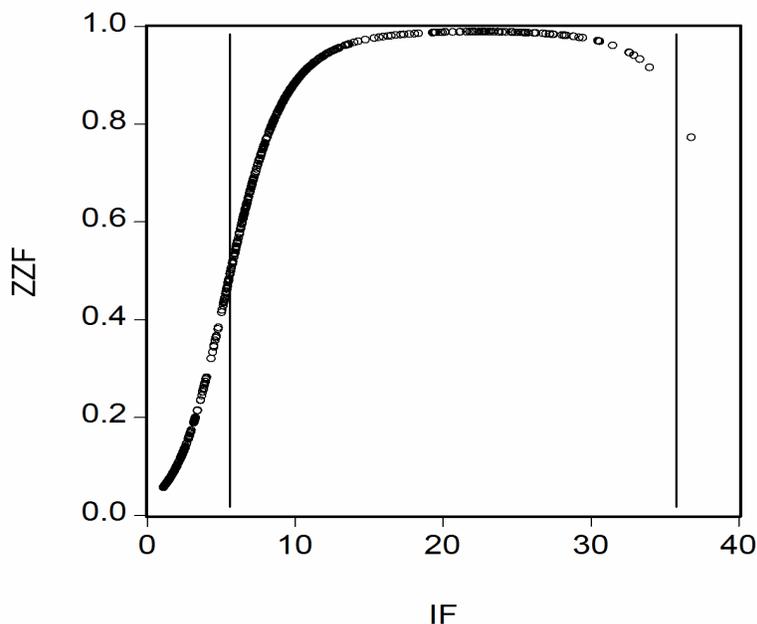
Operando se obtiene:

$$-4.403 + 0.721IF - 0.016IF^2 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado se tiene:

$$IF = \frac{-0.721 \pm \sqrt{0.721^2 - 4 \times 4.403 \times 0.016}}{-2 \times 0.016} = \begin{cases} 7.284 \\ 37.778 \end{cases}$$

Todos los valores de la variable vivienda secundaria IF comprendidos entre 7.284 y 37.778 proporcionan una probabilidad de tener vivienda secundaria superior al 0.7. Desde el punto de vista gráfico los resultados se presentan en el diagrama adjunto, donde en el eje de abscisas se representa la variable vivienda secundaria IF mientras que en ordenadas se representan las probabilidades estimadas correspondientes.



4.- Calcular el valor de los ingresos familiares que neutraliza la probabilidad de poseer vivienda secundaria (Es decir, que la probabilidad de tener vivienda secundaria y probabilidad de no tener vivienda secundaria sean iguales a 0.5).

Con el fin de obtener los valores de los ingresos familiares (IF) que igualan a 0.5 la probabilidad de tener vivienda secundaria se establece la siguiente ecuación:

$$0.5 = \frac{1}{1 + e^{-(-3.556 + 0.721IF - 0.016IF^2)}}$$

Este valor se obtiene cuando el denominador sea igual a 2, o bien:

$$e^{-(-3.556 + 0.721IF - 0.016IF^2)} = 1$$

Es decir:

$$(-3.556 + 0.721IF - 0.016IF^2) = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado se obtiene:

$$IF = \frac{-0.721 \pm \sqrt{0.721^2 - 4 \times 3.556 \times 0.016}}{-2 \times 0.016} = \begin{cases} 5.63 \\ 39.42 \end{cases}$$

En resumen, tanto para el valor de ingresos familiares IF=5.63 como para el valor IF=39.42 la probabilidad de tener vivienda secundaria es del 0.5.