ECONOMETRÍA EMPRESARIAL II

ADE

TEMA 8

MODELOS LINEALES SIN ESTACIONALIDAD I

(Modelos regulares)

8. MODELOS LINEALES SIN ESTACIONALIDAD (I).

8.1. Modelos autorregresivos (AR): especificación, hipótesis y caracterización (normalidad, fac, facp, raíces del polinómio de retardos)

8.2. Modelos de medias moviles (MA): especificación, hipótesis y caracterización (normalidad, fac, facp, raíces del polinómio de retardos).

8.3. Modelos mixtos autorregresivos y de medias moviles (ARMA). especificación, hipótesis y caracterización (normalidad, fac, facp, raíces del polinómio de retardos).

TEMA 9

MODELOS LINEALES SIN ESTACIONALIDAD (I)

Introducción.

Los modelos lineales de las series temporales se pueden considerar como un método sofisticado de extrapolación de series temporales. Dicha extrapolación es diferente de la extrapolación simple, ya que este enfoque de modelización asume que dichas series temporales son una realización de un proceso estocástico estacionario. La descripción de la serie temporal así concebida no es una ecuación de comportamiento causa-efecto, sino mas bien una concepción estadística en términos probabilísticos para describir la forma de aleatoriedad que está presente en la serie temporal.

En efecto, cuando intentamos modelizar una serie temporal, lo que estamos infiriendo es la modelización de un proceso estocástico, y en definitiva, lo que se esta intentando es describir las características aleatorias del proceso en cuestión.

El objetivo de este método de análisis es la especificación de modelos que expliquen los movimientos de una serie temporal Y_t . Pero así como en los modelos de regresión se utiliza una variable endógena o regresando y variables explicativas o regresores, en este tipo de enfoque se utilizan como variables explicativas la propia variable endógena defasada y una suma ponderada de variables aleatorias actuales y defasadas.

Los modelos propuestos suponen las siguientes hipótesis sobre la especificación de los modelos:

1. La serie o variable objeto de estudio es discreta y estacionaria (en media y en varianza), o bien ha sido transformada de forma adecuada para lograr su estacionariedad.
2. La ecuación que relaciona el regresando con los regresores es lineal.
3. El modelo especificado es de estructura fija, es decir, los parámetros (coeficientes) no cambian en el transcurso temporal.

Es de resaltar que en este enfoque de modelización de las series temporales se requiere que la variable objeto del estudio sea estacionaria (en media y en varianza).

En este contexto, además, se entiende por invertir un proceso la transformación de un modelo AR en su modelo MA equivalente. La generalización de este concepto permite transformar un modelo MA en su modelo AR equivalente.

Con el fin de sistematizar la exposición se va a estudiar en primer lugar los modelos autorregresivos (AR), en segundo lugar los modelos de medias móviles (MA) y, por último los modelos mixtos autorregresivos y de medias móviles (ARMA). En todos los casos se van a estudiar los modelos más comunes y simples. En concreto, para el caso de los modelos AR se van a analizar el modelo AR(1) y el modelo AR(2). Mientras que para los modelos MA se van a estudiar los modelos MA(1) y MA(2). En el caso de los modelos mixtos ARMA tan sólo se estudiará el modelo ARMA(1,1).

8.1. MODELOS AUTORREGRESIVOS (AR).

Se dice que una serie temporal Y_t admite una representación autoregresiva (**AR**) de orden p, y se denota por **AR(** p **)**, si es susceptible de ser modelizada a través de la ecuación:

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \phi_3 Y_{t-3} + ... + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \qquad \textbf{(8.1)}$$

donde:

Y_t , Y_{t-1}, Y_{t-2}, ... son variables aleatorias concebidas como realizaciones de un proceso estocástico en los momentos del tiempo t , t-1 , t-2, ... , que se caracterizan por $\mathbf{E}(Y_t) = \mathbf{E}(Y_{t-1}) = \mathbf{E}(Y_{t-2}) = ...$

μ, ϕ_1 , ϕ_2, ϕ_3 , ... , ϕ_p junto con la varianza del proceso σ_ε^2 son los parámetros que definen el modelo (que deben ser estimados)

ε_t es un proceso constituido por variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas que cumplen:

la esperanza de ε_t es nula; $\mathbf{E}(\varepsilon_t) = 0$

la varianza de ε_t es constante; $\mathbf{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t+s}) = \sigma_\varepsilon^2 \qquad \forall s = 0$

las autocovarianzas de ε_t son nulas; $\mathbf{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t+s}) = 0 \qquad \forall s \neq 0$

además la variable ε_t se distribuye según una función normal y en este caso $\varepsilon_t \Rightarrow \mathrm{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$

la variable aleatoria que reúne estas características se denomina, en este contexto, ***variable aleatoria ruido blanco.***

Dado que en la realidad los modelos más usuales son los más simples se va a proceder a estudiarlos. En concreto, se van a analizar el modelo AR(1) y el modelo AR(2).

Modelo autorregresivo de primer orden: Modelo AR (1).

Se dice que una serie temporal Y_t admite una representación autoregresiva (**AR)** de primer orden, y se denota por **AR**(1), si es susceptible de ser modelizada a través de la ecuación:

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad \textbf{(8.2)}$$

donde:

Y_t , Y_{t-1} **,** son variables aleatorias concebidas como realizaciones de un proceso estocástico en los momentos del tiempo t , t-1 , t-2 , ... , que se caracterizan por $\mathbf{E}(Y_t) = \mathbf{E}(Y_{t-1}) = \mathbf{E}(Y_{t-2}) =$ ...número finito

μ **,** ϕ_1 **,** junto con la varianza del proceso σ_ε^2 **,** son los parámetros que definen el modelo (que deben ser estimados)

ε_t es un proceso constituido por variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas que cumplen:

la esperanza de ε_t es nula; $\mathbf{E}(\varepsilon_t) = 0$

la varianza de ε_t es constante; $\mathbf{E}(\varepsilon_t\, \varepsilon_{t+s}) = \sigma_\varepsilon^2 \qquad \forall s = 0$

las autocovarianzas de ε_t son nulas; $\mathbf{E}(\varepsilon_t\, \varepsilon_{t+s}) = 0 \qquad \forall s \neq 0$

además la variable ε_t se distribuye según una normal

la variable aleatoria que reúne estas características se denomina, en este contexto, ***variable aleatoria ruido blanco.***

<u>Condición de estacionariedad.</u>

La modelización de una serie a través de un modelo AR exige que el modelo sea estacionario en media y varianza. La condición de estacionariedad en media exige que la E(Y_t) no sea función del tiempo y, además, la E(Y_t) debe ser finita y determinada. En el caso presente se tiene: $Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$

o bien sustituyendo de forma reiterada se obtiene:

$$Y_t = \mu + \phi_1 \mu + \phi_1^2 \mu + \phi_1^3 \mu + \ldots. + \varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \phi_1^3 \varepsilon_{t-3} + \ldots. + \phi_1^t Y_0$$

si se supone que Y_0 es igual a cero se tiene que la esperanza de Y_t es:

$$\mathrm{E}(Y_t) = \mu + \phi_1 \mu + \phi_1^2 \mu + \phi_1^3 \mu + \ldots.$$

dado que E(ε_t)=0 Así pues la condición de estacionariedad en media exige que la E(Y_t) no sea función del tiempo y, además, la E(Y_t) debe ser finita y determinada. En este caso como la esperanza de Y_t es igual a una progresión geométrica de razón ϕ_1 La suma de la progresión será finita si se cumple la condición de que $|\phi_1| < 1$ y en este caso se tiene:

$$\mathrm{E}(Y_t) = \frac{1}{1-\phi_1}\ \mu$$

Así, en el modelo de objeto de estudio, se tiene $\mathrm{E}(Y_t) = (1 - \phi_1)^{-1}\mu$, pudiendo comprobar que el parámetro μ esta relacionado con la esperanza de Y_t En el caso de que se suponga que μ sea igual a cero entonces $\mathrm{E}(Y_t)$=0. En lo sucesivo de la explicación se va suponer que μ=0.

El requisito de estacionariedad en varianza para un modelo AR es que la varianza sea finita e independiente del tiempo. Con el fin de comprobar que el modelo AR(1) es estacionario en varianza se parte:

$$Y_t = \mu + \phi_1\ \mu + \phi_1^2\ \mu + \phi_1^3\ \mu + ... + \varepsilon_t + \phi_1\ \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2\ \varepsilon_{t-2} + \phi_1^3\ \varepsilon_{t-3} + ...$$

además sabemos que: $\mathrm{E}(Y_t) = \mu + \phi_1\ \mu + \phi_1^2\ \mu + \phi_1^3\ \mu + ...$

aplicando la definición de la varianza se tiene:

$$\mathrm{Var}(Y_t) = E(Y_t - E(Y_t))^2 = E(Y_t)^2 =$$

$$= E(\varepsilon_t + \phi_1\ \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2\ \varepsilon_{t-2} + \phi_1^3\ \varepsilon_{t-3} + ...)^2 =$$

$$= \sigma^2 + \phi_1^2\ \sigma^2 + \phi_1^4\ \sigma^2 + \phi_1^6\ \sigma^2 + \phi_1^8\ \sigma^2 + ... =$$

$$= \sigma^2 (1 + \phi_1^2 + \phi_1^4 + \phi_1^6 + \phi_1^8 + ...) =$$

para que la suma de la progresión geométrica sea finita se debe cumplir que la razón ϕ_1^2 debe ser inferior a la unidad hecho que tan solo se cumple si $|\phi_1|$<1 y en este caso se tiene:

$$\mathrm{Var}(Y_t) = \sigma^2\ \frac{1}{1-\phi_1^2}$$

Una forma alternativa de comprobar que el modelo $Y_t = \mu + \phi_1\ Y_{t-1} + \varepsilon_t$ *es estacionario en varianza es comprobando que las raíces del polinomio característico, en módulo, sean menores que la unidad. Con el fin de comprobar si el modelo es estacionario en varianza se van a calcular las raíces del polinomio característico del modelo, para ello se iguala a cero la parte autorregresiva del modelo:*

$$Y_t \text{ - } \phi_1 \; Y_{t-1} \; = \; 0$$

si ahora, se sustituye Y_t *por* λ^t *se obtiene la ecuación:* $\lambda^t \text{ - } \phi_1 \; \lambda^{t-1} \; = \; 0$

dividiendo por λ^{t-1} *se tiene:* $\lambda \text{ - } \phi_1 \; = \; 0$

la solución de la ecuación o raíz del monomio es: $\lambda_1 = \phi_1$

Como la raíz del monomio es real, se debe cumplir que el valor absoluto de la raíz debe ser menor que la unidad: $|\lambda_1| < 1$

o bien $|\phi_1| < 1$

Así pues, si el modelo especificado para representar la serie $Y_t = \phi_1 \; Y_{t-1} + \varepsilon_t$ **cumple la condición** $|\phi_1| < 1$, el modelo es estacionario en media y varianza.

Condición de invertibilidad.

Invertir un modelo AR consiste en transformarlo en su modelo MA equivalente. En el caso de un modelo AR(1) se tiene:

$$Y_t = \phi_1 \; Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

o bien $Y_t - \phi_1 \; Y_{t-1} = \varepsilon_t$

utilizando el operador retardo $Y_t \text{ - } \phi_1 \; L \, Y_t = \varepsilon_t$

sacando factor común Y_t se tiene: $(1 \text{ - } \phi_1 \; L) \; Y_t = \varepsilon_t$

despejando Y_t se obtiene: $Y_t = \left(1 \text{ - } \phi_1 \; L \right)^{-1} \varepsilon_t =$

$$= (1 + \phi_1 \; L + \phi_1^2 \; L^2 + \phi_1^3 \; L^3 + \phi_1^4 \; L^4 + \ldots) \; \varepsilon_t =$$

$$= \varepsilon_t + \phi_1 \; \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2 \; \varepsilon_{t-2} + \phi_1^3 \; \varepsilon_{t-3} + \phi_1^4 \; \varepsilon_{t-4} + \ldots$$

Así pues, el modelo AR(1) estacionario se ha transformado en un modelo de medias móviles de orden infinito MA(∞). La condición de invertibilidad en los modelos autorregresivos de un número finito de términos se cumple siempre de forma automática.

Caracterización del modelo AR(1).

La caracterización de un modelo AR se efectua a través de la función de autocovarianza, la función de autocorrelación (AC) y la función de autocorrelación parcial (PAC). En primer lugar se va a estudiar la función de autocovarianza, en segundo lugar la AC y por último la PAC.

Función de autocovarianza.

Se entiende por función de autocovarianza a las sucesivas covarianzas de distintos órdenes de una variable con ella misma desfasada diferentes órdenes o períodos. La función de autocovarianza se define como:

$$\gamma_\tau = \text{cov}(Y_t \; Y_{t-\tau}) = \text{E}[(Y_t \text{ -E}(Y_t))(Y_{t-\tau}\text{-E}(Y_{t-\tau}))]$$

En el caso presente, dado que E(Y_t) = E($Y_{t-\tau}$) = 0, la función de autocovarianza se puede expresar como:

$$\gamma_\tau = \text{cov}(Y_t \; Y_{t-\tau}) = \text{E}(Y_t \; Y_{t-\tau})$$

Para el valor τ =0 , la autocovarianza de orden cero es realmente la varianza.

Autocovarianza de orden cero (varianza)*:*

$$\gamma_0 = \text{E}(Y_t \; Y_t) = \text{E}\left(\phi_1 \; Y_{t-1} + \varepsilon_t\right)^2 = \text{E}(\phi_1^2 \; Y_{t-1}^2 + \varepsilon_t^2 + 2\,\phi_1 \; Y_{t-1} \, \varepsilon_t) =$$

$$= \phi_1^2 \; \text{E}(Y_{t-1}^2) + \text{E}(\varepsilon_t^2) + 2\,\phi_1 \; \text{E}(Y_{t-1} \, \varepsilon_t) =$$

$$= \phi_1^2 \; \gamma_0 + \sigma_\varepsilon^2$$

Despejando la varianza se obtiene:

$$\gamma_0 = \frac{1}{1-\phi^2} \, \sigma_\varepsilon^2$$

Autocovarianza de orden uno:

$$\gamma_1 = \text{E}(Y_t \; Y_{t-1}) = \text{E}((\phi_1 \; Y_{t-1} + \varepsilon_t) \; Y_{t-1}) = \phi_1 \; \text{E}(Y_{t-1} \; Y_{t-1}) + \text{E}(\varepsilon_t \; Y_{t-1}) = \phi_1 \; \gamma_0$$

Autocovarianza de orden dos:

$$\gamma_2 = \text{E}(Y_t \; Y_{t-2}) = \text{E}((\phi_1 \; Y_{t-1} + \varepsilon_t) \; Y_{t-2}) = \phi_1 \; \text{E}(Y_{t-1} \; Y_{t-2}) + \text{E}(\varepsilon_t \; Y_{t-2}) = \phi_1 \; \gamma_1 = \phi_1^2 \; \gamma_0$$

Autocovarianza de orden tres:

$$\gamma_3 = \text{E}(Y_t \; Y_{t-3}) = \text{E}((\phi_1 \; Y_{t-1} + \varepsilon_t) \; Y_{t-3}) = \phi_1 \; \text{E}(Y_{t-1} \; Y_{t-3}) + \text{E}(\varepsilon_t \; Y_{t-3}) = \phi_1 \; \gamma_2 = \phi_1^3 \; \gamma_0$$

Procediendo de forma análoga, se deduce la función de autocovarianza para un modelo AR(1), que es:

$$\gamma_\tau = \phi_1 \ \gamma_{\tau-1} = \phi_1^\tau \ \gamma_0 \qquad \text{para todo} \quad \tau > 1$$

La limitación principal de la función de autocovarianza es que depende de las unidades de medida de las distintas series objeto del análisis. Con el fin de superar esta limitación se utiliza en su lugar la función de autocorrelación.

Función de autocorrelación (AC).

Se entiende por AC a los sucesivos coeficientes de correlación de distintos órdenes de una variable con ella misma desfasada diferentes órdenes o períodos. La AC se define como:

$$\rho_\tau = \frac{\operatorname{cov}(Y_t \ Y_{t-\tau})}{\operatorname{var}(Y_t \ )} = \frac{E(Y_t \ Y_{t-\tau})}{E(Y_t \ )^2}$$

La AC proporciona información sobre la relación lineal entre la misma serie separadas por τ unidades temporales.

La AC de orden uno:

$$\rho_1 = \frac{E(Y_t \ Y_{t-1})}{E(Y_t \ )^2} = \frac{\phi_1 \ \gamma_0}{\gamma_0} = \phi_1$$

La AC de orden dos:

$$\rho_2 = \frac{E(Y_t \ Y_{t-2})}{E(Y_t \ )^2} = \frac{\phi_1^2 \ \gamma_0}{\gamma_0} = \phi_1^2$$

La AC de orden tres:

$$\rho_3 = \frac{E(Y_t \ Y_{t-3})}{E(Y_t \ )^2} = \frac{\phi_1^3 \ \gamma_0}{\gamma_0} = \phi_1^3$$

Procediendo de forma análoga, se deduce la AC para un modelo AR(1), que es:

$$\rho_\tau = \phi_1^\tau \qquad \text{para todo} \quad \tau > 1$$

Función de autocorrelación parcial (PAC).

Definición: se entiende por la PAC de una serie temporal a la sucesión formada por: ϕ_{11} ϕ_{22} ϕ_{33} ϕ_{44} .... $\phi_{\tau\tau}$ .... En donde cada uno de los valores de la PAC por ejemplo el de orden τ, es decir, $\phi_{\tau\tau}$ se define como la interrelación

entre las variables Y_t e $Y_{t-\tau}$, eliminando los efectos lineales de las variables[1]: Y_{t-1}; Y_{t-2}; Y_{t-3}; ... ; $Y_{t-\tau+1}$

$$\phi_{\tau\tau} = corr\ (Y_t\ \ Y_{t-\tau}\ .\ Y_{t-1}\ \ Y_{t-2}\ Y_{t-3}\ \dots\ \ Y_{t-\tau+1})$$

Así pues, se entiende por PAC a los sucesivos coeficientes de correlación parcial de los distintos órdenes de una variable con ella misma desfasada diferentes órdenes o períodos[2].

En el caso particular de un modelo AR(1) el único modelo autoregresivo que tiene sentido especificar es:

$$Y_t = \phi_{11}\, Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

[1] El concepto de autocorrelación parcial es análogo al concepto de coeficiente de regresión parcial. *En el modelo de regresión (autorregresivo de orden τ) múltiple con τ variables, el coeficiente de regresión β_τ mide la tasa de cambio en el valor medio de la variable regresada ante un cambio unitario en el τ -ésimo regresor, manteniendo constante la influencia de todos los demás regresores*. De forma similar, el coeficiente de correlación parcial $\phi_{\tau\tau}$ mide la correlación entre observaciones separadas τ períodos, manteniendo constantes las correlaciones en los defases intermedios, es decir, los defases menores de τ .

[2] Una de las formas de calcular los coeficientes de la función de autocorrelación parcial es la que se describe a continuación. El coeficiente de autocorrelación parcial del modelo $Y_t = \phi_{11}\, Y_{t-1} + \varepsilon_t$ es:

$$\phi_{11} = \text{corr}\ (Y_t\ .Y_{t-1}) = \frac{|\rho_1|}{|1|} = \rho_1$$

que coincide con el coeficiente de autocorrelación de primer orden.

El coeficiente de autocorrelación parcial del modelo $Y_t = \phi_{21}\, Y_{t-1} + \phi_{22}\, Y_{t-2} + \varepsilon_t$ es:

$$\phi_{22} = \text{corr}\ (Y_t\ \ Y_{t-2}\ .\ Y_{t-1}) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

El coeficiente de autocorrelación parcial del modelo $Y_t = \phi_{31}\, Y_{t-1} + \phi_{32}\, Y_{t-2} + \phi_{33}\, Y_{t-3} + \varepsilon_t$ es:

$$\phi_{33} = \text{corr}\ (Y_t\ \ Y_{t-3}\ .\ Y_{t-1}\ \ Y_{t-2}) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

En este caso, la función de autocorrelación parcial tiene el primer valor distinto de cero y el resto de valores son iguales a cero. Así se tiene:

$$\phi_{\tau\tau} = \phi_{11} = \phi_1 = \rho_1 \qquad \text{para } \tau = 1$$

$$\phi_{\tau\tau} = 0 \qquad \text{para } \tau > 1$$

Correlograma.

Es la representación gráfica de la función de autocorrelación y de la función de autocorrelación parcial, que se acostumbra representar por las iniciales en inglés AC y PAC respectivamente. En el Gráfico 8.1 se representa el correlograma (AC y PAC) del modelo $Y_t = 0{,}7\ Y_{t-1} + \varepsilon_t$

Gráfico 8.1 Correlograma del modelo $Y_t = 0{,}7\ Y_{t-1} + \varepsilon_t$

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC
.|*****	.|*****	1	0.700	0.700
.|****	.|	2	0.490	0.000
.|***	.|	3	0.343	0.000
.|**	.|	4	0.240	0.000
.|*	.|	5	0.168	0.000
.|*	.|	6	0.118	0.000
.|	.|	7	0.082	0.000
.|	.|	8	0.058	0.000
.|	.|	9	0.040	0.000
.|	.|	10	0.028	0.000

En el Gráfico 8.2 se representa el correlograma (AC y PAC) del modelo $Y_t =$ $-0{,}7\ Y_{t-1} + \varepsilon_t$

Gráfico 8.2 Correlograma del modelo $Y_t = -\ 0{,}7\ Y_{t-1} + \varepsilon_t$

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC
*****|	*****|	1	- 0.700	- 0.700
.|****	.|	2	0.490	0.000
***|	.|	3	-0.343	0.000
.|**	.|	4	0.240	0.000
*|	.|	5	-0.168	0.000
.|*	.|	6	0.118	0.000
.|	.|	7	-0.082	0.000
.|	.|	8	0.058	0.000
.|	.|	9	-0.040	0.000
.|	.|	10	0.028	0.000

En el Gráfico 8.3 se representa el correlograma (AC y PAC) del modelo $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$; se trata de un modelo no estacionario y la particularidad es que todos los valores de la función de autocorrelación son iguales a la unidad.

Gráfico 8.3 Correlograma del modelo $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC
|*******	.|*******	1	1.000	1.000
.|*******	.|	2	1.000	0.000
|*******	.|	3	1.000	0.000
.|*******	.|	4	1.000	0.000
|*******	.|	5	1.000	0.000
.|*******	.|	6	1.000	0.000
.|*******	.|	7	1.000	0.000
.|*******	.|	8	1.000	0.000
.|*******	.|	9	1.000	0.000
.|*******	.|	10	1.000	0.000

En el Gráfico 8.4 se representa el correlograma (AC y PAC) del modelo $Y_t = \varepsilon_t$. Se trata de un modelo puramente aleatorio. En este caso todos los coeficientes de autocorrelación tienen un valor próximo a cero.

Gráfico 8.4 Correlograma del modelo $Y_t = \varepsilon_t$

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC
|	.|	1	0.000	0.000
.|	.|	2	0.000	0.000
|	.|	3	0.000	0.000
.|	.|	4	0.000	0.000
|	.|	5	0.000	0.000
.|	.|	6	0.000	0.000
.|	.|	7	0.000	0.000
.|	.|	8	0.000	0.000
.|	.|	9	0.000	0.000
.|	.|	10	0.000	0.000

Síntesis.

La característica más importante de una serie temporal estacionaria susceptible de ser modelizada a través de un modelo AR(1) es que la función de autocorrelación decrece exponencialmente, mientras que la función de autocorrelación parcial tan sólo presenta el primer valor distinto de cero. El resto de valores de la función de autocorrelación parcial son nulos.

El caso en que todos los valores de la función de autocorrelación estén próximos a la unidad es indicativo de que la serie es no estacionaria, mientras que el caso en que todos los valores de la función de autocorrelación estén próximos a cero es indicativo de que la serie es puramente aleatoria.

PROBLEMAS PROPUESTOS SOBRE EL MODELO AR(1)

PROBLEMA 1.

Dada la serie temporal susceptible de ser representada a través del modelo

$$Y_t = 0{,}4\ Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

1. Comprobar si el modelo es estacionario.
2. En el caso de que el modelo sea estacionario calcule la función de autocorrelación y la función de autocorrelación parcial.

PROBLEMA 2.
Dada la serie temporal susceptible de ser representada a través del modelo

$$Y_t = -\,0{,}5\ Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

1. Comprobar si el modelo es estacionario.
2. En el caso de que el modelo sea estacionario calcule la función de autocorrelación y la función de autocorrelación parcial.

PROBLEMA 3.
Dada la función de autocorrelación (AC) y la función de autocorrelación parcial (PAC) siguiente:

$\rho_1 = 0.8$ $\rho_2 = 0.64$ $\rho_3 = 0.512$ $\rho_4 = 0.410$ $\rho_5 = 0.328$ $\rho_6 = 0.262$

$\phi_{11} = 0{,}8$ $\phi_{22} = 0$ $\phi_{33} = 0$ $\phi_{44} = 0$ $\phi_{55} = 0$ $\phi_{66} = 0$

proponga el modelo de la serie temporal que ha generado estos estadísticos (identifique el modelo).

PROBLEMA 4.
Dada la función de autocorrelación (AC) y la función de autocorrelación parcial (PAC) siguiente:

$\rho_1 = 0.99$ $\rho_2 = 0.98$ $\rho_3 = 0.98$ $\rho_4 = 0.97$ $\rho_5 = 0.96$ $\rho_6 = 0.95$

$\phi_{11} = 0.99$ $\phi_{22} = 0$ $\phi_{33} = 0$ $\phi_{44} = 0$ $\phi_{55} = 0$ $\phi_{66} = 0$

proponga el modelo de la serie temporal que ha generado estos estadísticos (identifique el modelo).

PROBLEMA 5.
Dada la función de autocorrelación (AC) y la función de autocorrelación parcial (PAC) siguiente:

$\rho_1 = 0{,}02$ $\rho_2 = 0{,}03$ $\rho_3 = 0{,}02$ $\rho_4 = 0{,}05$ $\rho_5 = 0{,}05$ $\rho_6 = 0{,}03$

$\phi_{11} = 0{,}02$ $\phi_{22} = 0$ $\phi_{33} = 0$ $\phi_{44} = 0$ $\phi_{55} = 0$ $\phi_{66} = 0$

proponga el modelo de la serie temporal que ha generado estos estadísticos (identifique el modelo).

Modelo autorregresivo de segundo orden: Modelo AR (2).

Se dice que una serie temporal Y_t admite una representación autoregresiva (**AR)** de segundo orden, y se denota por **AR**(2), si es susceptible de ser modelizada a través de la ecuación:

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t \qquad \textbf{(8.3)}$$

donde:

Y_t , Y_{t-1}, Y_{t-2} son variables aleatorias concebidas como realizaciones de un proceso estocástico en los momentos del tiempo t , t-1 , t-2 , ... , que se caracterizan por **E**(Y_t) = **E**(Y_{t-1}) = **E**(Y_{t-2}) = ...número finito

μ , ϕ_1 , ϕ_2 junto con la varianza del proceso σ_ε^2 son los parámetros que definen el modelo (que deben ser estimados) .

ε_t es un proceso constituido por variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas que cumplen:

la esperanza de ε_t es nula; **E**(ε_t)= 0

la varianza de ε_t es constante; **E**($\varepsilon_t \, \varepsilon_{t+s}$) = σ_ε^2 $\qquad \forall s = 0$

las autocovarianzas de ε_t son nulas; **E**($\varepsilon_t \, \varepsilon_{t+s}$) = 0 $\qquad \forall s \neq 0$

además la variable ε_t se distribuye según una función normal

la variable aleatoria que reúne estas características se denomina, en este contexto, ***variable aleatoria ruido blanco.***

Condición de estacionariedad.

La modelización de una serie a través de un modelo AR exige que el modelo sea estacionario en media y varianza. La condición de estacionariedad en media exige que la E(Y_t) no sea función del tiempo y, además, la E(Y_t) debe ser finita y determinada. En el caso presente se tiene: $Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$

o bien $Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} = \mu + \varepsilon_t$

utilizando el operador retardo $Y_t - \phi_1 L Y_t - \phi_2 L^2 Y_t = \mu + \varepsilon_t$

sacando factor común Y_t se tiene: $(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2) Y_t = \mu + \varepsilon_t$

despejando Y_t se obtiene: $Y_t = \left(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 \right)^{-1} (\mu + \varepsilon_t)$

la esperanza de Y_t es: $\quad E(Y_t) = E\left(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2\right)^{-1} (\mu + \varepsilon_t) =$

$$= \left(1 - \phi_1 - \phi_2\right)^{-1} \mu + \left(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2\right)^{-1} E(\varepsilon_t)$$

Dado que $E(\varepsilon_t)=0$, la condición de estacionariedad en media exige que la $E(Y_t)$ no sea función del tiempo y, además, la $E(Y_t)$ debe ser finita y determinada. Para ello se debe cumplir que $(1-\phi_1 - \phi_2)$ debe ser distinto de cero. En el presente caso se cumple la condición de estacionario en media siempre y cuando que $\phi_1 + \phi_2 \neq 1$.

Así, en el modelo de objeto de estudio se tiene $E(Y_t) = \left(1 - \phi_1 - \phi_2\right)^{-1} \mu$, pudiendo comprobar que el parámetro μ esta relacionado con la esperanza de Y_t . En el caso de que se suponga que μ sea igual a cero , entonces $E(Y_t)=0$. En lo sucesivo de la explicación se va suponer que $\mu=0$.

El requisito de estacionariedad en varianza para un modelo AR es que las raices del polinomio característico, en módulo, sean menores que la unidad. Con el fin de comprobar si el modelo es estacionario en varianza se van a calcular las raíces del polinomio característico del modelo, para ello se iguala a cero la parte autorregresiva del modelo:

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} = 0$$

si ahora, se sustituye Y_t por λ^t se obtiene la ecuación: $\quad \lambda^t - \phi_1 \lambda^{t-1} - \phi_2 \lambda^{t-2} = 0$

dividiendo por λ^{t-2} se tiene: $\quad \lambda^2 - \phi_1 \lambda - \phi_2 = 0$

la solución de la ecuacún o raíces del polinomio de segundo grado son:

$$\lambda_1 ; \lambda_2 = \frac{\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2}$$

Si el módulo de las raíces del polinomio característico es menor que 1, el modelo será estacionario en varianza.

Así pues, **si el modelo** especificado para representar la serie $Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$ **cumple las condiciones:**

$$\phi_1 + \phi_2 \neq 1$$

$$\| \lambda_1 \| < 1$$

$$\| \lambda_2 \| < 1$$

el modelo será **estacionario en media y varianza**.

Condición de invertibilidad.

Invertir un modelo AR consiste en transformarlo en su modelo MA equivalente. En el caso de un modelo AR(1) se tiene:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

o bien $\quad Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} = \varepsilon_t$

utilizando el operador retardo $\quad Y_t - \phi_1 L Y_t - \phi_2 L^2 Y_t = \varepsilon_t$

sacando factor común Y_t se tiene: $\quad (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2) Y_t = \varepsilon_t$

despejando Y_t se obtiene: $\quad Y_t = (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)^{-1} \varepsilon_t =$

$$= (1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \psi_3 L^3 + \psi_4 L^4 + \ldots)\, \varepsilon_t =$$

$$= \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \psi_3 \varepsilon_{t-3} + \psi_4 \varepsilon_{t-4} + \ldots$$

Así pues, el modelo AR(2) estacionario se ha transformado en un modelo de medias móviles de orden infinito MA(∞). La condición de invertibilidad en los modelos autorregresivos de un número finito de términos se cumple siempre de forma automática.

Caracterización del modelo AR(2).

La caracterización de un modelo AR se efectua a través de la función de autocovarianza, la función de autocorrelación (AC) y la función de autocorrelación parcial (PAC). En primer lugar se va a estudiar la función de autocovarianza, en segundo lugar la AC y por último la PAC.

Función de autocovarianza.

Se entiende por función de autocovarianza a las sucesivas covarianzas de distintos órdenes de una variable con ella misma, desfasada diferentes órdenes o períodos. La función de autocovarianza se define como:

$$\gamma_\tau = \text{cov}(Y_t\ Y_{t-\tau}) = \text{E}[(Y_t - \text{E}(Y_t))(Y_{t-\tau} - \text{E}(Y_{t-\tau}))]$$

En el caso presente, dado que $\text{E}(Y_t) = \text{E}(Y_{t-\tau}) = 0$, la función de autocovarianza se puede expresar como:

$$\gamma_\tau = \text{cov}(Y_t\ Y_{t-\tau}) = \text{E}(Y_t\ Y_{t-\tau})$$

Para el valor $\tau = 0$, la autocovarianza de orden cero es realmente la varianza.

Autocovarianza de orden cero (varianza)*:*

$$\gamma_0 = \mathrm{E}(Y_t \; Y_t) = \mathrm{E}((\phi_1 \; Y_{t-1} + \phi_2 \; Y_{t-2} + \varepsilon_t) \; Y_t) =$$

$$= \mathrm{E}(\phi_1 \; Y_{t-1} \, Y_t \; + \phi_2 \; Y_{t-2} \, Y_t \; + \varepsilon_t \; Y_t) =$$

$$= \phi_1 \; \mathrm{E}(Y_{t-1} \, Y_t) + \phi_2 \; \mathrm{E}(Y_{t-2} \, Y_t) + \mathrm{E}(\varepsilon_t \; Y_t) =$$

$$= \phi_1 \; \gamma_1 + \phi_2 \; \gamma_2 + \sigma_\varepsilon^2$$

Autocovarianza de orden uno:

$$\gamma_1 = \mathrm{E}(Y_t \; Y_{t-1}) = \mathrm{E}((\phi_1 \; Y_{t-1} + \phi_2 \; Y_{t-2} + \varepsilon_t) \; Y_{t-1}) =$$

$$= \phi_1 \, \mathrm{E}(Y_{t-1} \; Y_{t-1}) + \phi_2 \, \mathrm{E}(Y_{t-2} \; Y_{t-1}) + \mathrm{E}(\varepsilon_t \; Y_{t-1}) = \phi_1 \; \gamma_0 + \phi_2 \; \gamma_1$$

Autocovarianza de orden dos:

$$\gamma_2 = \mathrm{E}(Y_t \; Y_{t-2}) = \mathrm{E}((\phi_1 \; Y_{t-1} + \phi_2 \; Y_{t-2} + \varepsilon_t) \; Y_{t-2}) =$$

$$= \phi_1 \; \mathrm{E}(Y_{t-1} \; Y_{t-2}) + \phi_2 \, \mathrm{E}(Y_{t-2} \; Y_{t-2}) + \mathrm{E}(\varepsilon_t \; Y_{t-2}) = \phi_1 \; \gamma_1 + \phi_2 \; \gamma_0$$

Autocovarianza de orden tres:

$$\gamma_3 = \mathrm{E}(Y_t \; Y_{t-3}) = \mathrm{E}((\phi_1 \; Y_{t-1} + \phi_2 \; Y_{t-2} + \varepsilon_t) \; Y_{t-3}) =$$

$$= \phi_1 \; \mathrm{E}(Y_{t-1} \; Y_{t-3}) + \phi_2 \, \mathrm{E}(Y_{t-2} \; Y_{t-3}) + \mathrm{E}(\varepsilon_t \; Y_{t-3}) = \phi_1 \; \gamma_2 + \phi_2 \; \gamma_1$$

Procediendo análogamente se deduce la función de autocovarianza para un modelo AR(2):

$$\gamma_\tau = \phi_1 \; \gamma_{\tau-1} + \phi_2 \; \gamma_{\tau-2} \qquad \text{para todo } \tau > 1$$

La limitación principal de la función de autocovarianza es que depende de las unidades de medida de las distintas series objeto del análisis. Con el fin de superar esta limitación se utiliza en su lugar la función de autocorrelación.

<u>Función de autocorrelación</u> (AC).

Se entiende por AC a los sucesivos coeficientes de correlación de distintos órdenes de una variable con ella misma desfasada diferentes órdenes o períodos. La AC se define como:

$$\rho_\tau = \frac{\mathrm{cov}(Y_t \; Y_{t-\tau})}{\mathrm{var}(Y_t)} = \frac{E(Y_t \; Y_{t-\tau})}{E(Y_t)^2}$$

La AC proporciona información sobre la relación lineal entre dos observaciones de la misma serie separadas por τ unidades temporales.

La AC de orden uno: $\rho_1 = \dfrac{E(Y_t\ Y_{t-1})}{E(Y_t\ )^2} = \dfrac{\phi_1\ \gamma_0 + \phi_2\ \gamma_1}{\gamma_0} = \phi_1\ +\ \phi_2\ \rho_1$

La AC de orden dos: $\rho_2 = \dfrac{E(Y_t\ Y_{t-2})}{E(Y_t\ )^2} = \dfrac{\phi_1\ \gamma_1 + \phi_2\ \gamma_0}{\gamma_0} = \phi_1\ \rho_1\ +\ \phi_2$

La AC de orden tres: $\rho_3 = \dfrac{E(Y_t\ Y_{t-3})}{E(Y_t\ )^2} = \dfrac{\phi_1\ \gamma_2 + \phi_2\ \gamma_1}{\gamma_0} = \phi_1\ \rho_2\ +\ \phi_2\ \rho_1$

Procediendo de forma análoga se concluye que la AC para un modelo AR(2) es:

$$\rho_\tau = \phi_1\ \rho_{\tau-1} + \phi_2\ \rho_{\tau-2} \quad \text{para todo } \tau > 1$$

<u>Función de autocorrelación parcial</u> (PAC).

Recordemos que la PAC describe las interrelaciones entre las variables Y_t e $Y_{t-\tau}$, eliminando los efectos lineales de las variables: Y_{t-1} ; Y_{t-2} ; Y_{t-3} ; ... ; $Y_{t-\tau+1}$

$$\phi_{\tau\tau} = \text{corr}\ (Y_t\ \ Y_{t-\tau}\ .\ Y_{t-1}\ \ Y_{t-2}\ Y_{t-3}\ \dots\ \ Y_{t-\tau+1})$$

Asi pues, se entiende por PAC a los sucesivos coeficientes de correlación parcial de los distintos órdenes de una variable con ella misma desfasada diferentes órdenes o períodos.

En el caso de un modelo AR(2) los modelos autoregresivos que tiene sentido son:

$$Y_t = \phi_{11}\ Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \phi_{21}\ Y_{t-1} + \phi_{22}\ Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

En este caso, la función de autocorrelación parcial tiene los dos primeros valores distintos de cero y el resto de valores son iguales a cero. Así se tiene:

$$\phi_{\tau\tau} \neq 0 \qquad \text{para } \tau = 1\ ,2$$

$$\phi_{\tau\tau} = 0 \qquad \text{para } \tau > 2$$

<u>Correlograma.</u>

Es la representación gráfica de la función de autocorrelación y de la función de autocorrelación parcial, que se acostumbran a representar por las iniciales en inglés AC y PAC respectivamente. En el Gráfico 8.5 se representa el correlograma (AC y PAC) del modelo Y_t = - 0,6 Y_{t-1} + 0,3 Y_{t-2} + ε_t

Gráfico 8.5 Correlograma del modelo Y_t = - 0,6Y_{t-1}+ 0,3Y_{t-2}+ ε_t

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC
******|	******|	1	-0.857	-0.857
.|******	.|**	2	0.814	0.300
*****|	.|	3	- 0.746	0.000
.|****	.|	4	0.692	0.000
****|	.|	5	-0.639	0.000
.|****	.|	6	0.591	0.000
***|	.|	7	-0.546	0.000
.|***	.|	8	0.505	0.000
***|	.|	9	- 0.467	0.000
.|***	.|	10	0.431	0.000

En el Gráfico 8.6 se representa el correlograma (AC y PAC) del modelo Y_t = 0,6 Y_{t-1}+ 0,3Y_{t-2}+ ε_t

Gráfico 8.6 Correlograma del modelo Y_t = 0,6 Y_{t-1} + 0,3Y_{t-2}+ ε_t

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC
|******	.|******	1	0.857	0.857
.|******	.|**	2	0.814	0.300
|*****	.|	3	0.746	0.000
.|****	.|	4	0.692	0.000
|****	.|	5	0.639	0.000
.|****	.|	6	0.591	0.000
.|***	.|	7	0.546	0.000
.|***	.|	8	0.505	0.000
.|***	.|	9	0.467	0.000
.|***	.|	10	0.431	0.000

Síntesis.

La característica más importante de una serie temporal estacionaria susceptible de ser modelizada a través de un modelo AR(2) es que la función de autocorrelación decrece a partir del segundo valor, mientras que la función de autocorrelación parcial tan sólo presenta los dos primeros valores distintos de cero. El resto de valores de la función de autocorrelación parcial son nulos.

PROBLEMAS PROPUESTOS SOBRE EL MODELO AR(2)

PROBLEMA 6.

Dado el modelo autorregresivo Y_t = 0,4 Y_{t-1} - 1,2 Y_{t-2}+ ε_t representativo de una serie temporal comprobar:

1. Si es estacionario.

2. Calcular el modelo de medias móviles (MA) equivalente si tiene sentido.

PROBLEMA 7.
Dada la serie temporal susceptible de ser representada a través del modelo

$$Y_t = -0,6\ Y_{t-1} + 0,3\,Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

1. Comprobar si el modelo es estacionario.
2. En el caso de que el modelo sea estacionario calcule la función de autocorrelación y la función de autocorrelación parcial.

PROBLEMA 8.
Dada la función de autocorrelación (AC) y la función de autocorrelación parcial (PAC) siguiente:

$\rho_1 = 0,625$ $\rho_2 = 0,513$ $\rho_3 = 0,381$ $\rho_4 = 0,293$ $\rho_5 = 0,223$ $\rho_6 = 0,170$

$\phi_{11} = 0,625$ $\phi_{22} = 0,2$ $\phi_{33} = 0$ $\phi_{44} = 0$ $\phi_{55} = 0$ $\phi_{66} = 0$

proponga el modelo de la serie temporal que ha generado estos estadísticos (identifique el modelo).

PROBLEMA 8.
Dada la función de autocorrelación (AC) y la función de autocorrelación parcial (PAC) siguiente:

$\rho_1 = -0,46$ $\rho_2 = -0,023$ $\rho_3 = -0,104$ $\rho_4 = -0,056$ $\rho_5 = -0,049$ $\rho_6 = -0,036$

$\phi_{11} = -0,46$ $\phi_{22} = -0,300$ $\phi_{33} = 0$ $\phi_{44} = 0$ $\phi_{55} = 0$ $\phi_{66} = 0$

proponga el modelo de la serie temporal que ha generado estos estadísticos (identifique el modelo).

8.2. MODELO DE MEDIAS MOVILES (MA).

Se dice que una serie temporal Y_t admite una representación de medias móviles (**MA**) de orden q, y se denota por **MA(**q**)**, si es susceptible de ser modelizada a través de la ecuación:

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \theta_3 \varepsilon_{t-3} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \qquad \textbf{(8.4)}$$

donde:

Y_t es una variable aleatoria concebida como realizaciones de un proceso estocástico en los momentos del tiempo t, que se caracterizan por **E(**Y_t **)** = **E(**Y_{t-1}**)** = **E(**Y_{t-2}**)** = ... = número finito

μ, θ_1, θ_2, θ_3, ... ,θ_q junto con la varianza del proceso σ^2_ε, son los parámetros que definen el modelo (que deben ser estimados),

ε_t es un proceso constituido por variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas que cumplen:

la esperanza de ε_t es nula; **E(**ε_t **)**= 0

la varianza de ε_t es constante; **E(**$\varepsilon_t \varepsilon_{t+s}$**)** = σ^2_ε $\qquad \forall s = 0$

las autocovarianzas de ε_t son nulas; **E(**$\varepsilon_t \varepsilon_{t+s}$**)** = 0 $\qquad \forall s \neq 0$

además la variable ε_t se distribuye según una función normal

la variable aleatoria que reúne estas características se denomina, en este contexto, ***variable aleatoria ruido blanco.***

Dado que en la realidad los modelos más usuales son los más simples se va a proceder a estudiarlos. En concreto, se van a analizar el modelo MA(1) y el modelo MA(2).

Modelo de medias móviles de primer orden: Modelo MA(1).

Se dice que una serie temporal Y_t admite una representación a través de medias móviles (**MA**) de primer orden, y se denota por **MA(1)**, si es susceptible de ser modelizada a través de la ecuación:

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \qquad \textbf{(8.5)}$$

donde:

Y_t es una variable aleatoria concebida como una realización de un proceso estocástico en los momentos del tiempo t ; t-1 ; t-2; ...

μ , θ_1 , junto con la varianza del proceso σ_ε^2 , son los parámetros que definen el modelo (que deben ser estimados),

ε_t es un proceso constituido por variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas que cumplen:

la esperanza de ε_t es nula; **E(** ε_t **)**= 0

la varianza de ε_t es constante; **E(** $\varepsilon_t\,\varepsilon_{t+s}$ **)** = σ_ε^2 $\qquad \forall s = 0$

las autocovarianzas de ε_t son nulas; **E(** $\varepsilon_t\,\varepsilon_{t+s}$ **)** = 0 $\qquad \forall s \neq 0$

además la variable ε_t se distribuye según una función normal

la variable aleatoria que reúne estas características se denomina, en este contexto, ***variable aleatoria ruido blanco.***

Condición de estacionariedad.

La modelización de una serie a través de un modelo MA exige que el modelo sea estacionario en media y varianza. La condición de estacionariedad en media exige que la E(Y_t) no sea función del tiempo y, además, la E(Y_t) debe ser finita y determinada. En el caso presente se tiene: $Y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1\ \varepsilon_{t-1}$

mientras que la esperanza de Y_t es:

$$\begin{aligned} E(Y_t) &= E(\mu + \varepsilon_t - \theta_1\ \varepsilon_{t-1}) = \\ &= \mu + (1 - \theta_1 L)\ \varepsilon_t = \\ &= \mu + (1 - \theta_1)\ .\ 0 \end{aligned}$$

Dado que E(ε_t)=0 , la condición de estacionariedad en media exige que la E(Y_t) no sea función del tiempo y, además, la E(Y_t) debe ser finita y determinada. En el presente caso se cumple la condición de estacionario en media siempre y cuando μ sea finito y (1 - θ_1) sea distinto de cero. Es decir, que $\theta_1 \neq 1$.

Así, en el modelo de objeto de estudio se tiene E(Y_t) = μ , pudiendo comprobar que el parámetro μ esta relacionado con la esperanza de Y_t . En el caso de que se suponga que μ sea igual a cero , entonces E(Y_t)=0. En lo sucesivo sin perdida de la generalidad se va suponer que μ =0.

El requisito de estacionariedad en varianza para un modelo MA finito se cumple automáticamente ya que la varianza de un MA finito será siempre finita.

Así pues, el modelo especificado para representar la serie $Y_t = \varepsilon_t - \theta_1\ \varepsilon_{t-1}$ **cumple la condición** de estacionario en media y varianza si el valor de μ es finito y $\theta_1 \neq 1$.

Condición de invertibilidad.

Invertir un modelo MA consiste en transformarlo en su modelo AR equivalente. El requisito para que se pueda invertir un modelo MA es que las raíces del polinomio característico, en módulo, sean menores que la unidad. Con el fin de comprobar si el modelo es invertible se van a calcular las raíces del polinomio característico del modelo. Para ello se iguala a cero la parte de medias móviles del modelo:

$$\varepsilon_t - \theta_1 \ \varepsilon_{t-1} = 0$$

si ahora, se sustituye ε_t por λ^t se obtiene la ecuación: $\lambda^t - \theta_1 \ \lambda^{t-1} = 0$

dividiendo por λ^{t-1} se tiene: $\lambda - \theta_1 = 0$

la solución de la ecuación o raíz del monomio es: $\lambda_1 = \theta_1$

Como la raíz del monomio es real, se debe cumplir que el valor absoluto de la raíz debe ser menor que la unidad: $|\lambda_1| < 1$

o bien $|\theta_1| < 1$

Así pues, si θ_1, en valor absoluto, es menor que la unidad el modelo $Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \ \varepsilon_{t-1}$ será invertible.

En el caso de un modelo MA(1), la inversión del modelo, esto es, su conversión en el modelo AR equivalente, da como resultado:

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \ \varepsilon_{t-1}$$

utilizando el operador retardo $Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \ L \ \varepsilon_t$

sacando factor común ε_t se tiene: $Y_t = (1 - \theta_1 \ L) \ \varepsilon_t$

despejando ε_t se obtiene: $\varepsilon_t = \left(1 - \theta_1 \ L\right)^{-1} \ Y_t =$

$$= (1 + \theta_1 \ L + \theta_1^2 \ L^2 + \theta_1^3 \ L^3 + \theta_1^3 \ L^4 + \dots) \ Y_t =$$

$$= Y_t + \theta_1 \ Y_{t-1} + \theta_1^2 \ Y_{t-2} + \theta_1^3 \ Y_{t-3} + \theta_1^3 \ Y_{t-4} + \dots$$

Así pues, el modelo MA(1) invertible se ha transformado en un modelo autorregresivo de orden infinito AR(∞). La condición de invertibilidad en los modelos de medias móviles requiere que las raíces del polinomio característico, en módulo, sean menores que la unidad.

Caracterización del modelo MA(1).

La caracterización de un modelo MA se efectúa a través de la función de autocovarianza, la función de autocorrelación (AC) y la función de autocorrelación parcial

(PAC). En primer lugar se va a estudiar la función de autocovarianza, en segundo lugar la AC y por último la PAC.

Función de autocovarianza.

Se entiende por función de autocovarianza a las sucesivas covarianzas de distintos órdenes de una variable con ella misma desfasada diferentes órdenes o períodos. La función de autocovarianza se define como:

$$\gamma_\tau = \mathrm{cov}(Y_t \; Y_{t-\tau}) = \mathrm{E}[(Y_t \text{ -E}(Y_t))(Y_{t-\tau}\text{-E}(Y_{t-\tau}))]$$

En el caso presente, dado que E(Y_t) = E($Y_{t-\tau}$) = 0, la función de autocovarianza se puede expresar como:

$$\gamma_\tau = \mathrm{cov}(Y_t \; Y_{t-\tau}) = \mathrm{E}(Y_t \; Y_{t-\tau})$$

Para el valor τ=0 , la autocovarianza de orden cero es realmente la varianza.

Autocovarianza de orden cero (varianza)*:*

$$\gamma_0 = \mathrm{E}(Y_t \; Y_t) = \mathrm{E}\left(\varepsilon_t - \theta_1 \; \varepsilon_{t-1} \right)^2 = \mathrm{E}(\varepsilon_t^2 + \theta_1^2 \; \varepsilon_{t-1}^2 \text{ - } 2 \; \theta_1 \; \varepsilon_t \; \varepsilon_{t-1}) =$$

$$= \mathrm{E}(\varepsilon_t^2) + \theta_1^2 \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}^2)\text{- } 2 \; \theta_1 \; \mathrm{E}(\varepsilon_t \; \varepsilon_{t-1}) =$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2 \; \sigma_\varepsilon^2$$

Despejando la varianza se obtiene:

$$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2) \; \sigma_\varepsilon^2$$

Autocovarianza de orden uno:

$$\gamma_1 = \mathrm{E}(Y_t \; Y_{t-1}) = \mathrm{E}((\varepsilon_t - \theta_1 \; \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} - \theta_1 \; \varepsilon_{t-2})) =$$

$$= \mathrm{E}(\varepsilon_t \; \varepsilon_{t-1}) \text{ - } \theta_1 \; \mathrm{E}(\varepsilon_t \; \varepsilon_{t-2}) \text{ - } \theta_1 \; \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1} \; \varepsilon_{t-1}) + \theta_1^2 \; \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1} \; \varepsilon_{t-2}) =$$

$$= 0 \text{ - } 0 \text{ - } \theta_1 \; \sigma_\varepsilon^2 + 0 = -\theta_1 \; \sigma_\varepsilon^2$$

Autocovarianza de orden dos:

$$\gamma_2 = \mathrm{E}(Y_t \; Y_{t-2}) = \mathrm{E}((\varepsilon_t - \theta_1 \; \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-2} - \theta_1 \; \varepsilon_{t-3})) =$$

$$= \mathrm{E}(\varepsilon_t \; \varepsilon_{t-2}) \text{ - } \theta_1 \; \mathrm{E}(\varepsilon_t \; \varepsilon_{t-3}) \text{ - } \theta_1 \; \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1} \; \varepsilon_{t-2}) + \theta_1^2 \; \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1} \; \varepsilon_{t-3}) = 0$$

Autocovarianza de orden tres:

$$\gamma_3 = \mathrm{E}(Y_t \; Y_{t-3}) = \mathrm{E}((\varepsilon_t - \theta_1 \; \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-3} - \theta_1 \; \varepsilon_{t-4})) =$$

$$= \mathrm{E}(\varepsilon_t \; \varepsilon_{t-3}) \text{ - } \theta_1 \; \mathrm{E}(\varepsilon_t \; \varepsilon_{t-4}) \text{ - } \theta_1 \; \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1} \; \varepsilon_{t-3}) + \theta_1^2 \; \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1} \; \varepsilon_{t-4}) = 0$$

Procediendo análogamente, se deduce que la función de autocovarianza para un modelo MA(1) es:

$$\gamma_\tau = 0 \qquad\qquad \text{para todo} \quad \tau > 1$$

La limitación principal de la función de autocovarianza es que depende de las unidades de medida de las distintas series objeto del análisis. Con el fin de superar esta limitación se utiliza en su lugar la función de autocorrelación.

<u>Función de autocorrelación</u> (AC).

Se entiende por AC a los sucesivos coeficientes de correlación de distintos órdenes de una variable con ella misma desfasada diferentes órdenes o períodos. La AC se define como:

$$\rho_\tau = \frac{\operatorname{cov}(Y_t \; Y_{t-\tau})}{\operatorname{var}(Y_t)} = \frac{E(Y_t \; Y_{t-\tau})}{E(Y_t)^2}$$

La AC proporciona información sobre la relación lineal entre dos observaciones de la misma serie separadas por τ unidades temporales.

La AC de orden uno:

$$\rho_1 = \frac{E(Y_t \; Y_{t-1})}{E(Y_t)^2} = \frac{-\theta_1 \sigma_\varepsilon^2}{(1+\theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2} = \frac{-\theta_1}{(1+\theta_1^2)}$$

La AC de orden dos:

$$\rho_2 = \frac{E(Y_t \; Y_{t-2})}{E(Y_t)^2} = \frac{0}{(1+\theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2} = 0$$

La AC de orden tres:

$$\rho_3 = \frac{E(Y_t \; Y_{t-3})}{E(Y_t)^2} = \frac{0}{(1+\theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2} = 0$$

Procediendo de forma análoga, se deduce la AC de un modelo MA(1), que es :

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1}{(1+\theta_1^2)} \qquad\qquad \text{para} \quad \tau = 1$$

$$\rho_\tau = 0 \qquad\qquad \text{para todo} \quad \tau > 1$$

<u>Función de autocorrelación parcial</u> (PAC).

Recordemos que la PAC describe las interrelaciones entre las variables Y_t e $Y_{t-\tau}$, eliminando los efectos lineales de las variables: Y_{t-1} ; Y_{t-2} ; Y_{t-3} ; ... ; $Y_{t-\tau+1}$

$$\phi_{\tau\tau} = \operatorname{corr}\,(Y_t \;\; Y_{t-\tau} \;.\; Y_{t-1} \;\; Y_{t-2} \; Y_{t-3} \;\ldots\; Y_{t-\tau+1})$$

Se entiende por PAC a los sucesivos coeficientes de correlación parcial de los distintos órdenes de una variable con ella misma desfasada diferentes órdenes o períodos.

En el caso de un modelo MA(1) invertible (se puede obtener el modelo AR(∞) equivalente) se pueden plantear infinitos modelos autoregresivos:

$$Y_t = \phi_{11}\, Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \phi_{21}\, Y_{t-1} + \phi_{22}\, Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \phi_{31}\, Y_{t-1} + \phi_{32}\, Y_{t-2} + \phi_{33}\, Y_{t-3} + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \phi_{41}\, Y_{t-1} + \phi_{42}\, Y_{t-2} + \phi_{43}\, Y_{t-3} + \phi_{44}\, Y_{t-4} + \varepsilon_t$$

...

En este caso, la función de autocorrelación parcial tiene infinitos valores distintos de cero y van decreciendo exponencialmente a partir del primer valor.

$$\phi_{11} = \rho_1 = \frac{-\theta_1}{(1+\theta_1^2)} \qquad \text{para } \tau = 1$$

$$\phi_{\tau\tau} \neq 0 \qquad \text{para todo } \tau > 1$$

Correlograma.

Es la representación gráfica de la función de autocorrelación y de la función de autocorrelación parcial , que se acostumbra a representar por las iniciales en inglés AC y PAC respectivamente. En el Gráfico 8.7 se representa el correlograma (AC y PAC) del modelo $Y_t = \varepsilon_t$ - 0,8 ε_{t-1}

Gráfico 8.7 Correlograma del modelo $Y_t = \varepsilon_t$ - 0,8 ε_{t-1}

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC
****|	*****|	1	-0.488	-0.488
.|	****|	2	0.000	-0.316
.|	**|	3	0.000	-0.221
.|	**|	4	0.000	-0.165
.|	*|	5	0.000	-0.127
.|	*|	6	0.000	-0.099
.|	*|	7	0.000	-0.078
.|	*|	8	0.000	-0.062
.|	.|	9	0.000	-0.049
.|	.|	10	0.028	-0.039

En el Gráfico 8.8 se representa el correlograma (AC y PAC) del modelo $Y_t = \varepsilon_t$ + 0,8 ε_{t-1}

Gráfico 8.8 Correlograma del modelo $Y_t = \varepsilon_t$ + 0,8 ε_{t-1}

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC
|****	****|	1	0.488	0.488
.|	***|	2	0.000	-0.316
.|	|**	3	0.000	0.221
.|	*|	4	0.000	-0.165

.|	|*	5	0.000	0.127
.|	*|	6	0.000	-0.099
.|	.|	7	0.000	0.078
.|	.|	8	0.000	-0.062
.|	.|	9	0.000	0.049
.|	.|	10	0.028	-0.039

Síntesis.

La característica más importante de una serie temporal estacionaria susceptible de ser modelizada a través de un modelo MA(1) es que la función de autocorrelación tan sólo presenta el primer valor distinto de cero (y en valor absoluto menor que 0,5), mientras que la función de autocorrelación parcial decrece exponencialmente.

PROBLEMAS PROPUESTOS SOBRE EL MODELO MA(1)

PROBLEMA 10.

Dado el modelo de medias móviles (MA) $Y_t = \varepsilon_t$ - 0,6 ε_{t-1}

Se pide:

3. Comprobar si el modelo es estacionario.
4. En el caso de que el modelo sea estacionario calcule la función de autocorrelación y la función de autocorrelación parcial.

PROBLEMA 9.

Dado el modelo de medias móviles (MA) $Y_t = \varepsilon_t + 0{,}9\ \varepsilon_{t-1}$

Se pide:

1. Comprobar si el modelo es estacionario.
2. En el caso de que el modelo sea estacionario calcule la función de autocorrelación y la función de autocorrelación parcial.

PROBLEMA 12.

Dadas la función de autocorrelación y la función de autocorrelación parcial siguientes:

ρ_1 = -0,488 ρ_2 = 0 ρ_3 = 0 ρ_4 = 0 ρ_5 = 0 ρ_6 = 0

ϕ_{11} = -0,488 ϕ_{22} = -0,312 ϕ_{33} = -0,221 ϕ_{44} = -0,165 ϕ_{55} = 0,127 ϕ_{66} = -0,099

proponga el modelo de la serie temporal que ha generado los estadísticos (identifique el modelo).

PROBLEMA 13.

Demostrar que el valor máximo que puede alcanzar el primer valor da la función de autocorrelación (ρ_1) de un modelo MA(1) estacionario es 0,5.

Modelo de medias móviles de segundo orden: Modelo MA(2).

Se dice que una serie temporal Y_t admite una representación autoregresiva **(MA)** de segundo orden, y se denota por **MA(2)**, si es susceptible de ser modelizada a través de la ecuación:

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} \qquad \textbf{(8.6)}$$

donde:

Y_t es una variable aleatoria concebida como una realización de un proceso estocástico en los momentos del tiempo t , t-1 , t-2 , ...

μ , θ_1 , θ_2 , junto con la varianza del proceso σ_ε^2 , son los parámetros que definen el modelo (que deben ser estimados),

ε_t es un proceso constituido por variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas que cumplen:

la esperanza de ε_t es nula; **E(**ε_t **)**= 0

la varianza de ε_t es constante; **E(**$\varepsilon_t \varepsilon_{t+s}$**)** = σ_ε^2 $\forall s = 0$

las autocovarianzas de ε_t son nulas; **E(**$\varepsilon_t \varepsilon_{t+s}$**)** = 0 $\forall s \neq 0$

además la variable ε_t se distribuye según una función normal

la variable aleatoria que reúne estas características se denomina, en este contexto, ***variable aleatoria ruido blanco.***

<u>Condición de estacionariedad.</u>

La modelización de una serie a través de un modelo MA exige que el modelo sea estacionario en media y varianza. La condición de estacionariedad en media exige que la E(Y_t) no sea función del tiempo y, además, la E(Y_t) debe ser finita y determinada. En el caso presente se tiene: $Y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}$

mientras que la esperanza de Y_t es:

$$\begin{aligned} E(Y_t) &= E(\mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}) = \\ &= E(\mu) + E(1-\theta_1 L \varepsilon_t - \theta_2 L^2 \varepsilon_t) = \\ &= \mu + (1-\theta_1 L - \theta_2 L^2) E(\varepsilon_t) = \\ &= \mu + (1-\theta_1 - \theta_2)\ 0 \end{aligned}$$

Dado que E(ε_t) = 0 , la condición de estacionariedad en media exige que la E(Y_t) no sea función del tiempo y, además, la E(Y_t) debe ser finita y determinada. En el presente caso se cumple la condición de estacionariedad en media siempre y cuando μ sea finito y (1-θ_1 -θ_2)$\neq$0. Es decir que $\theta_1 + \theta_2 \neq 1$.

Así, en el modelo de objeto de estudio se tiene E(Y_t) = μ , pudiendo comprobar que el parámetro μ esta relacionado con la esperanza de Y_t . En el caso de que se suponga que μ sea igual a cero, entonces E(Y_t)=0. En lo sucesivo, sin perdida de la generalidad, se va suponer que μ=0 .

El requisito de estacionariedad en varianza para un modelo MA finito se cumple automáticamente ya que la varianza de un MA finito será siempre finita.

Así pues, el modelo especificado para representar la serie $Y_t = \varepsilon_t - \theta_1\ \varepsilon_{t-1} - \theta_2\ \varepsilon_{t-2}$ **cumple la condición** de estacionario en media y varianza si el valor de μ es finito o determinado y $\theta_1 + \theta_2 \neq 1$.

Condición de invertibilidad.

Invertir un modelo MA consiste en transformarlo en su modelo AR equivalente. El requisito para que se pueda invertir un modelo MA es que las raíces del polinomio característico, en módulo, sean menores que la unidad. Con el fin de comprobar si el modelo es invertible se van a calcular las raíces del polinomio característico del modelo. Para ello se iguala a cero la parte de medias móviles del modelo:

$$\varepsilon_t - \theta_1\ \varepsilon_{t-1} - \theta_2\ \varepsilon_{t-2} = 0$$

Si ahora, se sustituye ε_t por λ^t se obtiene la ecuación: $\lambda^t - \theta_1\ \lambda^{t-1} - \theta_2\ \lambda^{t-2} = 0$

dividiendo por λ^{t-2} se tiene: $\lambda^2 - \theta_1\ \lambda - \theta_2 = 0$

las raíces del polinomio de segundo grado son: $\lambda_1\ ;\ \lambda_2 = \dfrac{\theta_1 \pm \sqrt{\theta_1^2 + 4\ \theta_2}}{2}$

Si el módulo de las raíces del polinomio característico es menor que la unidad, el modelo MA (2) será invertible.

En el caso de un modelo MA(2), la inversión del modelo, esto es, su conversión en el modelo AR equivalente, da como resultado:

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1\ \varepsilon_{t-1} - \theta_2\ \varepsilon_{t-2}$$

utilizando el operador retardo $Y_t = \varepsilon_t - \theta_1\ L\ \varepsilon_t - \theta_2\ L^2\ \varepsilon_t$

sacando factor común ε_t se tiene: $Y_t = (1 - \theta_1\ L - \theta_2\ L^2)\ \varepsilon_t$

despejando ε_t se obtiene: $\varepsilon_t = \left(\ 1 - \theta_1\ L - \theta_2\ L^2\ \right)^{-1}\ Y_t =$

$$= (\ 1 + \psi_1\ L + \psi_2\ L^2 + \psi_3\ L^3 + \psi_4\ L^4 + \ldots\ )\ Y_t =$$

$$= Y_t + \psi_1\ Y_{t-1} + \psi_2\ Y_{t-2} + \psi_3\ Y_{t-3} + \psi_4\ Y_{t-4} + \ldots$$

Así pues, el modelo MA(2) invertible se ha transformado en un modelo autorregresivo de orden infinito AR(∞). La condición de invertibilidad en los modelos de medias móviles requiere que las raíces del polinomio característico, en módulo, sean menores que la unidad.

Caracterización del modelo MA(2).

La caracterización de un modelo MA se efectúa a través de la función de autocovarianza, la función de autocorrelación (AC) y la función de autocorrelación parcial (PAC). En primer lugar se va a estudiar la función de autocovarianza, en segundo lugar la AC y por último la PAC.

Función de autocovarianza.

Se entiende por función de autocovarianza a las sucesivas covarianzas de distintos órdenes de una variable con ella misma desfasada diferentes órdenes o periodos. La función de autocovarianza se define como:

$$\gamma_\tau = \text{cov}(Y_t\ Y_{t-\tau}) = \text{E}[(Y_t - \text{E}(Y_t))(Y_{t-\tau} - \text{E}(Y_{t-\tau}))]$$

En el caso presente, dado que $\text{E}(Y_t) = \text{E}(Y_{t-\tau}) = 0$, la función de autocovarianza se puede expresar como:

$$\gamma_\tau = \text{cov}(Y_t\ Y_{t-\tau}) = \text{E}(Y_t\ Y_{t-\tau})$$

Para el valor $\tau = 0$, la autocovarianza de orden cero es realmente la varianza.

Autocovarianza de orden cero (varianza)*:*

$$\gamma_0 = \text{E}(Y_t\ Y_t) = \text{E}\left(\varepsilon_t - \theta_1\ \varepsilon_{t-1} - \theta_2\ \varepsilon_{t-2}\right)^2 =$$

$$= \text{E}(\varepsilon_t^2 + \theta_1^2\ \varepsilon_{t-1}^2 + \theta_2^2\ \varepsilon_{t-2}^2 - 2\ \theta_1\ \varepsilon_t\ \varepsilon_{t-1} - 2\ \theta_2\ \varepsilon_t\ \varepsilon_{t-2} + 2\ \theta_1\ \theta_2\ \varepsilon_{t-1}\ \varepsilon_{t-2}) =$$

$$= \text{E}(\varepsilon_t^2) + \theta_1^2\,\text{E}(\varepsilon_{t-1}^2) + \theta_2^2\,\text{E}(\varepsilon_{t-2}^2) - 2\theta_1\ \text{E}(\varepsilon_t\ \varepsilon_{t-1}) - 2\theta_2\ \text{E}(\varepsilon_t\ \varepsilon_{t-2}) + 2\theta_1\ \theta_2\ \text{E}(\varepsilon_{t-1}\ \varepsilon_{t-2}) =$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2\ \sigma_\varepsilon^2 + \theta_2^2\ \sigma_\varepsilon^2$$

En definitiva:

$$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\ \sigma_\varepsilon^2$$

Autocovarianza de orden uno:

$$\gamma_1 = \text{E}(Y_t\ Y_{t-1}) = \text{E}((\varepsilon_t - \theta_1\ \varepsilon_{t-1} - \theta_2\ \varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-1} - \theta_1\ \varepsilon_{t-2} - \theta_2\ \varepsilon_{t-3})) =$$

$$= \text{E}(\varepsilon_t\ \varepsilon_{t-1}) - \theta_1\ \text{E}(\varepsilon_t\ \varepsilon_{t-2}) - \theta_2\ \text{E}(\varepsilon_t\ \varepsilon_{t-3}) - \theta_1\ \text{E}(\varepsilon_{t-1}^2) + \theta_1^2\,\text{E}(\varepsilon_{t-1}\ \varepsilon_{t-2}) + \theta_1\ \theta_2\ \text{E}(\varepsilon_{t-1}\ \varepsilon_{t-3}) -$$

$$- \theta_2\ \text{E}(\varepsilon_{t-2}\ \varepsilon_{t-1}) + \theta_2\ \theta_1\ \text{E}(\varepsilon_{t-2}^2) + \theta_2^2\,\text{E}(\varepsilon_{t-2}\ \varepsilon_{t-3}) =$$

$$= 0 - \theta_1\ 0 - \theta_2\ 0 - \theta_1\ \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2\ 0 + \theta_1\ \theta_2\ 0 - \theta_2\ 0 + \theta_2\ \theta_1\ \sigma_\varepsilon^2 + \theta_2^2\ 0 =$$

$$= -\theta_1\ \sigma_\varepsilon^2 + \theta_2\ \theta_1\ \sigma_\varepsilon^2 = (-\theta_1 + \theta_2\ \theta_1)\sigma_\varepsilon^2$$

Autocovarianza de orden dos:

$$\gamma_2 = \mathrm{E}(Y_t \ Y_{t-2}) = \mathrm{E}((\varepsilon_t - \theta_1 \ \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \ \varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-2} - \theta_1 \ \varepsilon_{t-3} - \theta_2 \ \varepsilon_{t-4})) =$$

$$= \mathrm{E}(\varepsilon_t \ \varepsilon_{t-2}) - \theta_1 \mathrm{E}(\varepsilon_t \ \varepsilon_{t-3}) - \theta_2 \mathrm{E}(\varepsilon_t \ \varepsilon_{t-4}) - \theta_1 \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1} \ \varepsilon_{t-2}) + \theta_1^2 \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1} \ \varepsilon_{t-3}) +$$

$$+ \theta_1 \ \theta_2 \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1} \ \varepsilon_{t-4}) - \theta_2 \mathrm{E}(\varepsilon_{t-2}^2) + \theta_2 \ \theta_1 \mathrm{E}(\varepsilon_{t-2} \ \varepsilon_{t-3}) + \theta_2^2 \mathrm{E}(\varepsilon_{t-2} \ \varepsilon_{t-4}) = -\theta_2 \ \sigma_\varepsilon^2$$

Autocovarianza de orden tres:

$$\gamma_3 = \mathrm{E}(Y_t \ Y_{t-3}) = \mathrm{E}((\varepsilon_t - \theta_1 \ \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \ \varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-3} - \theta_1 \ \varepsilon_{t-4} - \theta_2 \ \varepsilon_{t-5})) =$$

$$= \mathrm{E}(\varepsilon_t \ \varepsilon_{t-3}) - \theta_1 \mathrm{E}(\varepsilon_t \ \varepsilon_{t-4}) - \theta_2 \mathrm{E}(\varepsilon_t \ \varepsilon_{t-5}) - \theta_1 \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1} \ \varepsilon_{t-3}) + \theta_1^2 \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1} \ \varepsilon_{t-4}) +$$

$$+ \theta_1 \ \theta_2 \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1} \ \varepsilon_{t-5}) - \theta_2 \mathrm{E}(\varepsilon_{t-2} \ \varepsilon_{t-3}) + \theta_2 \ \theta_1 \mathrm{E}(\varepsilon_{t-2} \ \varepsilon_{t-4}) + \theta_2^2 \mathrm{E}(\varepsilon_{t-2} \ \varepsilon_{t-5}) = 0$$

Procediendo análogamente, se deduce que la función de autocovarianza para un modelo MA(2) es:

$$\gamma_\tau = 0 \qquad \text{para todo} \quad \tau > 2$$

La limitación principal de la función de autocovarianza es que depende de las unidades de medida de las distintas series objeto del análisis. Con el fin de superar esta limitación se utiliza en su lugar la función de autocorrelación.

<u>Función de autocorrelación</u> (AC).

Se entiende por AC a los sucesivos coeficientes de correlación de distintos órdenes de una variable con ella misma desfasada diferentes órdenes o periodos. La AC se define como:

$$\rho_\tau = \frac{\mathrm{cov}(Y_t \ Y_{t-\tau})}{\mathrm{var}(Y_t)} = \frac{E(Y_t \ Y_{t-\tau})}{E(Y_t)^2}$$

La AC proporciona información sobre la relación lineal entre dos observaciones de la misma serie separadas por τ unidades temporales.

La AC de orden uno: $$\rho_1 = \frac{E(Y_t \ Y_{t-1})}{E(Y_t)^2} = \frac{(-\theta_1 + \theta_2\theta_1)\sigma_\varepsilon^2}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)\sigma_\varepsilon^2} = \frac{(-\theta_1 + \theta_2\theta_1)}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)}$$

La AC de orden dos: $$\rho_2 = \frac{E(Y_t \ Y_{t-2})}{E(Y_t)^2} = \frac{-\theta_2\sigma_\varepsilon^2}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)\sigma_\varepsilon^2} = \frac{-\theta_2}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)}$$

La AC de orden tres: $$\rho_3 = \frac{E(Y_t \ Y_{t-3})}{E(Y_t)^2} = \frac{0}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)\sigma_\varepsilon^2} = 0$$

Procediendo de forma análoga, se deduce la AC para un modelo MA(2):

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1 + \theta_1 \theta_2}{(1+\theta_1^2 + \theta_2^2)} \qquad \text{para} \quad \tau = 1$$

$$\rho_2 = \frac{-\theta_2}{(1+\theta_1^2 + \theta_2^2)} \qquad \text{para} \quad \tau = 2$$

$$\rho_\tau = 0 \qquad \text{para todo} \quad \tau > 2$$

<u>Función de autocorrelación parcial</u> (PAC).

Recordemos que la PAC describe las interrelaciones entre las variables Y_t e $Y_{t-\tau}$, eliminando los efectos lineales de las variables: Y_{t-1} ; Y_{t-2} ; Y_{t-3} ; ... ; $Y_{t-\tau+1}$

$$\phi_{\tau\tau} = \text{corr}\,(Y_t \;\; Y_{t-\tau} \;.\; Y_{t-1} \;\; Y_{t-2} \; Y_{t-3} \; \ldots \; Y_{t-\tau+1})$$

Se entiende por PAC a los sucesivos coeficientes de correlación parcial de los distintos órdenes de una variable con ella misma desfasadas diferentes órdenes o periodos.

En el caso de un modelo MA(2) invertible (se puede obtener el modelo AR(∞) equivalente) se pueden plantear infinitos modelos autoregresivos:

$$Y_t = \phi_{11} Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \phi_{21} Y_{t-1} + \phi_{22} Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \phi_{31} Y_{t-1} + \phi_{32} Y_{t-2} + \phi_{33} Y_{t-3} + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \phi_{41} Y_{t-1} + \phi_{42} Y_{t-2} + \phi_{43} Y_{t-3} + \phi_{44} Y_{t-4} + \varepsilon_t$$

...

...

En este caso, la función de autocorrelación parcial tiene infinitos valores distintos de cero y van decreciendo exponencialmente a partir del segundo valor.

$$\phi_{\tau\tau} \neq 0 \qquad \text{para todo} \quad \tau > 0$$

<u>Correlograma.</u>

Es la representación gráfica de la función de autocorrelación y de la función de autocorrelación parcial, que se acostumbran a representar por las iniciales en inglés AC y PAC respectivamente. En el Gráfico 8.9 se representa el correlograma (AC y PAC) del modelo $Y_t = \varepsilon_t$ -0,3 ε_{t-1} -0,4 ε_{t-2}

Gráfico 8.9 Correlograma del modelo $Y_t = \varepsilon_t$ -0,3 ε_{t-1} -0,4 ε_{t-2}

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC
**|	**|	1	-0.144	-0.144
***|	***|	2	-0.320	-0.347
|	**|	3	0.000	-0.130
|	**|	4	0.000	-0.163
|	*|	5	0.000	-0.094
|	*|	6	0.000	-0.076
.|	*|	7	0.000	-0.063
.|	*|	8	0.000	-0.054
.|	.|	9	0.000	-0.041
.|	.|	10	0.000	-0.034

En el Gráfico 8.10 se representa el correlograma (AC y PAC) del modelo Y_t = ε_t +0,3 ε_{t-1} -0,4 ε_{t-2}

Gráfico 8.10 Correlograma del modelo Y_t = ε_t +0,3 ε_{t-1} -0,4 ε_{t-2}

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC
|**	|**	1	0.144	0.144
***|	***|	2	-0.320	-0.347
|	.|**	3	0.000	0.130
|	**|	4	0.000	-0.163
|	.|*	5	0.000	0.094
|	*|	6	0.000	-0.076
.|	.|*	7	0.000	0.063
.|	*|	8	0.000	-0.054
.|	.|	9	0.000	0.041
.|	.|	10	0.000	-0.034

Síntesis.

La característica más importante de una serie temporal estacionaria susceptible de ser modelizada a través de un modelo MA(2) es que la función de autocorrelación tan sólo presenta los dos primeros valores distintos de cero, mientras que la función de autocorrelación parcial decrece exponencialmente a partir del segundo valor.

PROBLEMAS PROPUESTOS SOBRE EL MODELO MA(2)

PROBLEMA 14.

Dado el modelo de medias móviles $Y_t = \varepsilon_t$ - 0,4 ε_{t-1} + 1,2 ε_{t-2} comprobar:

1. Si es estacionario.
2. Calcular el modelo autorregresivo (AR) equivalente si es posible.

PROBLEMA 15.

Dado el modelo de medias móviles $Y_t = \varepsilon_t$ - 0,3 ε_{t-1} - 0,4 ε_{t-2} comprobar:

1. Si es estacionario.
2. Calcular la función de autocorrelación y autocorrelaciónparcial si es posible.

PROBLEMA 16.

Dada la función de autocorrelación (AC) y la función de autocorrelación parcial (PAC) siguiente:

ρ_1 = -0,144 ρ_2 = -0,320 ρ_3 = 0 ρ_4 = 0 ρ_5 = 0 ρ_6 = 0

ϕ_{11} = -0,144 ϕ_{22} = -0,347 ϕ_{33} = -0,130 ϕ_{44} = -0,163 ϕ_{55} = 0,094 ϕ_{66} = -0,076

proponga el modelo de la serie temporal que ha generado estos estadísticos (identifique el modelo).

PROBLEMA 17.

Dada la función de autocorrelación (AC) y la función de autocorrelación parcial (PAC) siguiente:

ρ_1 = -0,144 ρ_2 = -0,320 ρ_3 = 0 ρ_4 = 0 ρ_5 = 0 ρ_6 = 0

ϕ_{11} = -0,144 ϕ_{22} = -0,347 ϕ_{33} = -0,130 ϕ_{44} = -0,163 ϕ_{55} = 0,094 ϕ_{66} = -0,076

proponga el modelo de la serie temporal que ha generado estos estadísticos (identifique el modelo).

8.3 MODELOS MIXTOS AUTORREGRESIVOS Y MEDIAS MÓVILES (ARMA).

Se dice que una serie temporal Y_t admite una representación autorregresiva y de medias móviles de orden p, q respectivamente, y se denota por **ARMA(**p, q**)**, si es susceptible de ser modelizada a través de la ecuación:

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \qquad \textbf{(8.7)}$$

donde:

$Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}$ son una variables aleatorias concebidas como realizaciones de un proceso estocástico en distintos momentos del tiempo t, t-1, t-2,... , que se caracterizan por $\mathbf{E}(Y_t) = \mathbf{E}(Y_{t-1}) = \mathbf{E}(Y_{t-2}) = \dots$

μ, ϕ_1, ϕ_2, ..., ϕ_p, θ_1, θ_2, θ_3, ..., θ_q junto con la varianza del proceso σ_ε^2 son los parámetros que definen el modelo (que deben ser estimados),

ε_t es un proceso constituido por variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas que cumplen:

la esperanza de ε_t es nula; $\mathbf{E}(\varepsilon_t) = 0$

la varianza de ε_t es constante; $\mathbf{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t+s}) = \sigma_\varepsilon^2 \qquad \forall s = 0$

las autocovarianzas de ε_t son nulas; $\mathbf{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t+s}) = 0 \qquad \forall s \neq 0$

además, la variable ε_t se distribuye según una función normal

la variable aleatoria que reúne estas características se denomina, en este contexto, ***variable aleatoria ruido blanco.***

Una forma alternativa de expresar la ecuación **(8.7)** es utilizando el operador retardo obteniendo:

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} - \dots - \phi_p Y_{t-p} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

esto es:

$$Y_t - \phi_1 L Y_t - \phi_2 L^2 Y_t - \dots - \phi_p L^p Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 L \varepsilon_t - \theta_2 L^2 \varepsilon_t - \dots - \theta_q L^p \varepsilon_t$$

o bien:

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) Y_t = (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^p) \varepsilon_t$$

Además, los polinomios de retardos se pueden descomponer, si las raíces son reales, en productos de monomios:

$$(1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_2 L) \dots (1 - \lambda_p L) Y_t = (1 - \lambda_1^* L)(1 - \lambda_2^* L) \dots (1 - \lambda_p^* L) \varepsilon_t$$

y en la mayoría de los casos los polinomios tienen raíces comunes pudiendo simplificarse la ecuación quedando, en definitiva, un modelo mucho más simple.

Por ejemplo el modelo:

$$Y_t = 1{,}8\ Y_{t-1} - 0{,}8\ Y_{t-2} + \varepsilon_t - 1{,}6\ \varepsilon_{t-1} + 0{,}6\ \varepsilon_{t-2}$$

que se puede escribir como

$$Y_t - 1{,}8\ Y_{t-1} + 0{,}8\ Y_{t-2} = \varepsilon_t - 1{,}6\ \varepsilon_{t-1} + 0{,}6\ \varepsilon_{t-2}$$

o bien:

$$(1- 1{,}8\ L + 0{,}8\ L^2)\ Y_t = (1- 1{,}6\ L + 0{,}6\ L^2)\ \varepsilon_t$$

descomponiendo los polinomios en producto de monomios:

$$(1- 1{,}0\ L)(1- 0{,}8\ L)\ Y_t = (1- 1{,}0\ L)(1- 0{,}6\ L)\ \varepsilon_t$$

y simplificando:

$$(1- 0{,}8\ L)\ Y_t = (1- 0{,}6\ L)\ \varepsilon_t$$

que es en definitiva un modelo ARMA(1,1).

Dado que en la realidad los modelos más usuales son los más simples se va a proceder a estudiarlos. En concreto, se va a analizar el modelo ARMA(1,1).

Modelo autorregresivo y de medias móviles de primer orden: Modelo ARMA(1,1).

Se dice que una serie temporal Y_t admite una representación autoregresiva y de medias móviles de primer orden, y se denota por **ARMA(1,1)**, si es susceptible de ser modelizada a través de la ecuación:

$$Y_t = \phi_1\ Y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1\ \varepsilon_{t-1} \qquad \textbf{(8.8)}$$

donde:

Y_t , Y_{t-1}, son variables aleatorias concebidas como realizaciones de un proceso estocástico en los momentos del tiempo t , t-1 , t-2 , ..., que se caracterizan por $\mathbf{E}(Y_t) = \mathbf{E}(Y_{t-1}) = \mathbf{E}(Y_{t-2}) = ...$

ϕ_1 , θ_1 junto con la varianza del proceso σ^2_ε son los parámetros que definen el modelo (que deben ser estimados),

ε_t es un proceso constituido por variables aleatorias independientes e igualmente distribuidos que cumplen:

la esperanza de ε_t es nula; $\mathbf{E}(\varepsilon_t) = 0$

la varianza de ε_t es constante; $\mathbf{E}(\varepsilon_t\, \varepsilon_{t+s}) = \sigma^2_\varepsilon \quad \forall s = 0$

las autocovarianzas de ε_t son nulas; $\mathbf{E}(\varepsilon_t\, \varepsilon_{t+s}) = 0 \quad \forall s \neq 0$

además la variable ε_t se distribuye según normal *la variable aleatoria que reúne estas características se denomina, en este contexto,* ***variable aleatoria ruido blanco.***

<u>Condición de estacionariedad.</u>

La modelización de una serie a través de un modelo ARMA exige que el modelo sea estacionario en media y varianza. La condición de estacionariedad viene impuesta por la parte AR, ya que la parte MA es estacionaria siempre y cuando sea finita. La estacionariedad en media exige que la E(Y_t) no sea función del tiempo y, además, la E(Y_t) debe ser finita y determinada. En el caso presente se tiene:

$$Y_t = \phi_1 \, Y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \, \varepsilon_{t-1}$$

o bien $\quad Y_t - \phi_1 \, Y_{t-1} = \varepsilon_t - \theta_1 \, \varepsilon_{t-1}$

utilizando el operador retardo $\quad Y_t - \phi_1 \, L \, Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \, L \, \varepsilon_t$

sacando factor común Y_t y ε_t se tiene: $\quad (1 - \phi_1 \, L) \, Y_t = (1 - \theta_1 \, L) \, \varepsilon_t$

despejando Y_t se obtiene: $\quad Y_t = \left(1 - \phi_1 \, L \right)^{-1} (1 - \theta_1 \, L) \, \varepsilon_t$

la esperanza de Y_t es:

$$\begin{aligned} E(Y_t) &= E\left(1 - \phi_1 \, L \right)^{-1} (1-\theta_1 \, L) \, \varepsilon_t \\ &= \left(1-\phi_1 \, L \right)^{-1} (1-\theta_1 \, L) \, E(\varepsilon_t) = \\ &= \left(1-\phi_1 \right)^{-1} (1-\theta_1) \; 0 \end{aligned}$$

Dado que E(ε_t) = 0, la condición de estacionariedad en media exige que la E(Y_t) no sea función del tiempo y, además, la E(Y_t) debe ser finita y determinada. Para ello se debe cumplir que $(1 - \phi_1)$ y que $(1-\theta_1)$ sean distintos de cero. En el presente caso, se cumple la condición de estacionariedad en media siempre y cuando $\phi_1 \neq 1$ y que $\theta_1 \neq 1$.

El requisito de estacionariedad en varianza para un modelo ARMA depende únicamente de la parte AR, ya que la parte MA, si es finita, cumple automáticamente la condición de estacionariedad en varianza. Así pues, el requisito de estacionariedad en varianza para la parte AR de un modelo es que las raíces del polinomio característico, en módulo, sean menores que la unidad.

Con el fin de comprobar si el modelo es estacionario en varianza se van a calcular las raíces del polinomio característico del modelo de la parte AR. Para ello, se iguala a cero la parte autorregresiva del modelo:

$$Y_t - \phi_1 \, Y_{t-1} = 0$$

si ahora, se sustituye Y_t por λ^t se obtiene la ecuación: $\quad \lambda^t - \phi_1 \, \lambda^{t-1} = 0$

dividiendo por λ^{t-1} se tiene: $\lambda - \phi_1 = 0$

la solución de la ecuación o raíz del monomio es: $\lambda_1 = \phi_1$

Como la raíz del monomio es real, se debe cumplir que el valor absoluto de la raíz sea menor que la unidad: $|\lambda_1| < 1$

o bien $|\phi_1| < 1$

Así pues, si el modelo especificado para representar la serie:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

cumple las condiciones: $|\phi_1| < 1$ y $\theta_1 \neq 1$

Por tanto, el modelo es estacionario en media y varianza.

Condición de invertibilidad.

Invertir un modelo ARMA consiste en transformarlo en su modelo AR equivalente. El requisito para que se pueda invertir un modelo ARMA es que las raíces del polinomio característico de la parte MA, en módulo, sean menores que la unidad.

Con el fin de comprobar si el modelo es invertible se van a calcular las raíces del polinomio característico de la parte MA del modelo. Para ello se iguala a cero la parte de medias móviles del modelo:

$$\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} = 0$$

si ahora, se sustituye ε_t por λ^t se obtiene la ecuación: $\lambda^t - \theta_1 \lambda^{t-1} = 0$

dividiendo por λ^{t-1} se tiene: $\lambda - \theta_1 = 0$

la solución de la ecuación o raíz del monomio es: $\lambda_1 = \theta_1$

Como la raíz del monomio es real, se debe cumplir que el valor absoluto de la raíz debe ser menor que la unidad: $|\lambda_1| < 1$

o bien $|\theta_1| < 1$

Así pues, si θ_1, en valor absoluto, es menor de la unidad, el modelo $Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$ será invertible.

En el caso de un modelo ARMA(1,1), la inversión del modelo, esto es su conversión en el modelo AR equivalente, se obtiene:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

utilizando el operador retardo y sacando factor común Y_t y ε_t se tiene:

$$(1 - \phi_1 \ L)\ Y_t = (1 - \theta_1 \ L)\ \varepsilon_t$$

despejando ε_t se obtiene: $\varepsilon_t = \left(1 - \theta_1 \ L \right)^{-1} (1 - \phi_1 \ L)\ Y_t =$

$$= (1 + \theta_1 \ L + \theta_1^2 \ L^2 + \theta_1^3 \ L^3 + \theta_1^3 \ L^4 + ...)\ (1 - \phi_1 \ L)\ Y_t =$$

$$= Y_t + \psi_1 \ Y_{t-1} + \psi_2 \ Y_{t-2} + \psi_3 \ Y_{t-3} + \psi_4 \ Y_{t-4} + ...$$

Así pues, el modelo ARMA(1,1) estacionario e invertible se ha transformado en un modelo autorregresivo de orden infinito AR(∞). La condición de invertibilidad en los modelos ARMA requiere que las raíces del polinomio característico de la parte MA, en módulo, sean menores que la unidad.

Caracterización del modelo ARMA(1,1).

La caracterización de un modelo ARMA se efectúa a través de la función de autocovarianza, la función de autocorrelación (AC) y la función de autocorrelación parcial (PAC). En primer lugar se va a estudiar la función de autocovarianza, en segundo lugar la AC y por último la PAC.

Función de autocovarianza.

Se entiende por función de autocovarianza a las sucesivas covarianzas de distintos órdenes de una variable con ella misma desfasada diferentes órdenes o períodos. La función de autocovarianza se define como:

$$\gamma_\tau = \text{cov}(Y_t \ Y_{t-\tau}) = \text{E}[(Y_t \text{ -E}(Y_t))(Y_{t-\tau} \text{-E}(Y_{t-\tau}))]$$

En el caso presente, dado que E(Y_t) = 0, la función de autocovarianza se puede expresar como:

$$\gamma_\tau = \text{cov}(Y_t \ Y_{t-\tau}) = \text{E}(Y_t \ Y_{t-\tau})$$

Para el valor τ =0 , la autocovarianza de orden cero es realmente la varianza.

Autocovarianza de orden cero (varianza)*:*

$$\gamma_0 = \text{E}(Y_t \ Y_t) = \text{E}\left(\phi_1 \ Y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \ \varepsilon_{t-1} \right)^2 =$$

$$=\text{E}(\phi_1^2 \ Y_{t-1}^2 + \varepsilon_t^2 + \theta_1^2 \ \varepsilon_{t-1}^2 + 2\phi_1 \ Y_{t-1} \ \varepsilon_t - 2 \ \phi_1 \ \theta_1 \ Y_{t-1} \ \varepsilon_{t-1} - 2 \ \theta_1 \ \varepsilon_t \ \varepsilon_{t-1}) =$$

$$= \phi_1^2 \ \text{E}(Y_{t-1}^2)+\text{E}(\varepsilon_t^2)+\theta_1^2 \text{E}(\varepsilon_{t-1}^2) + 2\phi_1 \ \text{E}(Y_{t-1} \ \varepsilon_t) - 2\phi_1 \ \theta_1 \ \text{E}(Y_{t-1} \ \varepsilon_{t-1}) - 2 \ \theta_1 \ \text{E}(\varepsilon_t \ \varepsilon_{t-1}) =$$

$$= \phi_1^2 \ \gamma_0 + \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2 \ \sigma_\varepsilon^2 + 2\phi_1 \ 0 - 2 \ \phi_1 \ \theta_1 \ \sigma_\varepsilon^2 - 2 \ \theta_1 \ 0$$

Despejando la varianza γ_0 se tiene:

$$\gamma_0 = \frac{1+\theta_1^2 - 2\theta_1 \phi_1}{1-\phi_1^2} \ \sigma_\varepsilon^2$$

Autocovarianza de orden uno:

$$\gamma_1 = \mathrm{E}(Y_t \ Y_{t-1}) = \mathrm{E}((\phi_1 \ Y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \ \varepsilon_{t-1}) Y_{t-1}) =$$

$$= \phi_1 \mathrm{E}(Y_{t-1}^2) + \mathrm{E}(\varepsilon_t \ Y_{t-1}) - \theta_1 \ \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1} \ Y_{t-1}) =$$

$$= \phi_1 \ \gamma_0 + \ 0 \ - \ \theta_1 \ \sigma_\varepsilon^2 =$$

$$= \phi_1 \ \gamma_0 \ - \ \theta_1 \ \sigma_\varepsilon^2$$

Autocovarianza de orden dos:

$$\gamma_2 = \mathrm{E}(Y_t \ Y_{t-2}) = \mathrm{E}((\phi_1 \ Y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \ \varepsilon_{t-1}) Y_{t-2}) =$$

$$= \phi_1 \ \mathrm{E}(Y_{t-1} \ Y_{t-2}) + \mathrm{E}(\varepsilon_t \ Y_{t-2}) - \theta_1 \ \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1} \ Y_{t-2}) =$$

$$= \phi_1 \ \gamma_1 \ + 0 + \ \theta_1 \ \ 0 \ = \ \phi_1 \ \gamma_1$$

Autocovarianza de orden tres:

$$\gamma_3 = \mathrm{E}(Y_t \ Y_{t-3}) = \mathrm{E}((\phi_1 \ Y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \ \varepsilon_{t-1}) Y_{t-3}) =$$

$$= \phi_1 \ \mathrm{E}(Y_{t-1} \ Y_{t-3}) + \mathrm{E}(\varepsilon_t \ Y_{t-3}) - \theta_1 \ \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1} \ Y_{t-3}) =$$

$$= \phi_1 \ \gamma_2 \ + 0 + \ 0 \ = \ \phi_1 \ \gamma_2$$

Sustituyendo γ_2 por su valor se obtiene:

$$\gamma_3 = \ \phi_1^2 \ \gamma_1$$

Procediendo de forma análoga, se deduce la función de autocovarianza para un modelo ARMA(1,1), que cumple:

$$\gamma_\tau = \ \phi_1^{\tau-1} \ \gamma_1 \qquad \text{para todo} \ \ \tau > 1$$

La limitación principal de la función de autocovarianza es que depende de las unidades de medida de las distintas series objeto del análisis. Con el fin de superar esta limitación, se utiliza en su lugar la función de autocorrelación.

<u>Función de autocorrelación</u> (AC).

Se entiende por AC a los sucesivos coeficientes de correlaciones de distintos órdenes de una variable con ella misma desfasada diferentes órdenes o períodos. La AC se define como:

$$\rho_\tau = \frac{\mathrm{cov}(Y_t \ Y_{t-\tau})}{\mathrm{var}(Y_t \ )} = \frac{E(Y_t \ Y_{t-\tau})}{E(Y_t \ )^2}$$

La AC proporciona información sobre la relación lineal entre dos observaciones de la misma serie separadas por τ unidades temporales.

La AC de orden uno: $$\rho_1 = \frac{E(Y_t\, Y_{t-1})}{E(Y_t\,)^2} = \frac{\phi_1\,\gamma_0 - \theta_1\,\sigma_\varepsilon^2}{\gamma_0} = \frac{(1-\phi_1\,\theta_1\,)(\phi_1\,-\theta_1\,)}{1+\theta_1^2-2\phi_1\,\theta_1}$$

La AC de orden dos: $$\rho_2 = \frac{E(Y_t\, Y_{t-2})}{E(Y_t\,)^2} = \frac{\phi_1\,\gamma_1}{\gamma_0} = \phi_1\,\rho_1$$

La AC de orden tres: $$\rho_3 = \frac{E(Y_t\, Y_{t-3})}{E(Y_t\,)^2} = \frac{\phi_1\,\gamma_1^2}{\gamma_0} = \phi_1^2\,\rho_1$$

Procediendo de forma análoga, se deduce la AC para un modelo ARMA(1,1), que es:

$$\rho_\tau = \phi_1^{\tau-1}\,\rho_1 \qquad \text{para todo } \tau > 1$$

<u>Función de autocorrelación parcial</u> (PAC).

La PAC describe las interelaciones entre las variables Y_t e $Y_{t-\tau}$ eliminando los efectos lineales de las variables: Y_{t-1} ; Y_{t-2} ; Y_{t-3} ; ... ; $Y_{t-\tau+1}$

$$\phi_{\tau\tau} = \text{corr}\,(Y_t\;\; Y_{t-\tau}\;.\; Y_{t-1}\;\; Y_{t-2}\; Y_{t-3}\;\ldots\;\; Y_{t-\tau+1})$$

Se entiende por PAC a los sucesivos coeficientes de correlación parcial de los distintos órdenes de una variable con ella misma desfasada diferentes órdenes o períodos.

En el caso de un modelo ARMA(1) estacionario e invertible. se puede obtener el modelo AR(∞) equivalente. En este caso, se pueden plantear infinitos modelos autoregresivos:

$$Y_t = \phi_{11}\,Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \phi_{21}\,Y_{t-1} + \phi_{22}\,Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \phi_{31}\,Y_{t-1} + \phi_{32}\,Y_{t-2} + \phi_{33}\,Y_{t-3} + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \phi_{41}\,Y_{t-1} + \phi_{42}\,Y_{t-2} + \phi_{43}\,Y_{t-3} + \phi_{44}\,Y_{t-4} + \varepsilon_t$$

...

...

En este caso, la función de autocorrelación parcial tiene infinitos valores distintos de cero y van decreciendo exponencialmente a partir del primer valor.

$$\phi_{11} = \rho_1 = \phi_1 + \frac{-\theta_1\,\sigma_\varepsilon^2}{\gamma_0} \qquad \text{para } \tau = 1$$

y en general $\phi_{\tau\tau} \neq 0$ para todo $\tau > 1$

Correlograma.

Es la representación gráfica de la función de autocorrelación y de la función de autocorrelación parcial que se acostumbra representar por las iniciales en inglés AC y PAC respectivamente. En el Gráfico 8.1 se representa el correlograma (AC y PAC) del modelo $Y_t = 0{,}7\ Y_{t-1} + \varepsilon_t - 0{,}3\ \varepsilon_{t-1}$

Gráfico 8.1 Correlograma del modelo $Y_t = 0{,}7\ Y_{t-1} + \varepsilon_t - 0{,}3\ \varepsilon_{t-1}$

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC
|*****	|*****	1	0.472	0.472
|***	.|**	2	0.330	0.138
|**	.|	3	0.231	0.041
|**	.|	4	0.162	0.013
|*	.|	5	0.113	0.009
|*	.|	6	0.079	0.006
.|	.|	7	0.044	0.004
.|	.|	8	0.038	0.003
.|	.|	9	0.029	0.003
.|	.|	10	0.018	0.002

En el Gráfico 8.2 se representa el correlograma (AC y PAC) del modelo

$Y_t = 0{,}7\ Y_{t-1} + \varepsilon_t + 0{,}3\ \varepsilon_{t-1}$

Gráfico 8.2 Correlograma del modelo $Y_t = 0{,}7\ Y_{t-1} + \varepsilon_t + 0{,}3\ \varepsilon_{t-1}$

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC
|*********	|*********	1	0,802	0,802
|******	**|	2	0,561	-0.225
|****	|*	3	0,393	0.067
|***	**|	4	0,275	-0.010
|**	.|	5	0,192	0.005
|*	.|	6	0,135	-0.002
.|	.|	7	0,094	0.004
.|	.|	8	0,066	-0.002
.|	.|	9	0,046	0.003
.|	.|	10	0,032	-0.001

Síntesis.

La característica más importante de una serie temporal estacionaria susceptible de ser modelizada a través de un modelo ARMA(1,1) es que la función de autocorrelación presenta infinitos valores distintos de cero que decrecen de forma

exponencial a partir del primer valor, mientras que la función de autocorrelación parcial tiene infinitos valores distintos de cero que decrecen de forma exponencial a partir del primer valor.

PROBLEMAS PROPUESTOS SOBRE EL MODELO ARMA

PROBLEMA 18.

Dado el modelo mixto autorregresivo y de medias móviles (ARMA)

Y_t = 1,8 Y_{t-1} - 0,8 Y_{t-2}+ ε_t - 1,6 ε_{t-1} + 0,6 ε_{t-2}

Se pide: indicar el orden de la parte AR y de la parte MA (identificar) del modelo.

PROBLEMA 19.

Dado el modelo

$$Y_t = 1{,}6\ Y_{t-1} - 0{,}63\ Y_{t-2} + \varepsilon_t - 0{,}7\ \varepsilon_{t-1}$$

Se pide: calcular la función de autocorrelación y la función de autocorrelación parcial.

PROBLEMA 20.

Dado el modelo

$$Y_t = 0{,}6\ Y_{t-1} + \varepsilon_t - 0{,}3\ \varepsilon_{t-1}$$

Se pide: calcular la función de autocorrelación y la función de autocorrelación parcial.

PROBLEMA 21.

Dada la función de autocorrelación (AC) y la función de autocorrelación parcial (PAC) siguiente:

ρ_1 = 0,472 ρ_2 = 0,330 ρ_3 = 0,231 ρ_4 = 0,162 ρ_5 = 0,113 ρ_6 = 0,079

ϕ_{11} = 0,472 ϕ_{22} = 0,138 ϕ_{33} = 0,041 ϕ_{44} = 0,013 ϕ_{55} = 0,003 ϕ_{66} = 0,002

proponga el modelo de la serie temporal que ha generado estos estadísticos (identifique el modelo).

PROBLEMA 22.

Dada la función de autocorrelación (AC) y la función de autocorrelación parcial (PAC) siguiente:

ρ_1 = 0,801 ρ_2 = 0,561 ρ_3 = 0,393 ρ_4 = 0,275 ρ_5 = 0,192 ρ_6 = 0,135

ϕ_{11} = 0,801 ϕ_{22} =-0,225 ϕ_{33} = 0,067 ϕ_{44} =-0,021 ϕ_{55} = 0,005 ϕ_{66} =-0,002

proponga el modelo de la serie temporal que ha generado estos estadísticos (identifique el modelo).