

B.2. Propagación de la luz en un medio

B.2.1. Introducción

El procesado de la información por medio de componentes fotónicos se basa en la propagación, generación y modulación (conmutación) de la información mediante haces de luz. Debemos conocer como se propaga la luz a través de un medio y como afectan las propiedades de estos medios a la propagación. Veremos la propagación en un medio uniforme y a continuación discutiremos las fórmulas de Fresnel que nos describen la reflexión y refracción. Ya hemos visto materiales cristalinos con estructuras anisótropas y materiales amorfos con estructuras isotrópicas. Veremos que la anisotropía o isotropía de dichos materiales afecta profundamente a sus propiedades ópticas. Para comprender bien la propagación de ondas ópticas debemos comenzar con las ecuaciones de Maxwell y la ecuación de ondas que de ahí se deriva.

B.2.2. Ecuaciones de Maxwell y la ecuación de ondas

Recordemos que la luz o las ondas de luz son un subconjunto de las ondas electromagnéticas que cubren todo el espectro desde la longitud de onda kilométrica hasta la longitud de onda de décimas de Angstroms. Aunque la física de las ondas electromagnéticas es toda la misma, independientemente de la longitud de onda, cada longitud de onda tiene una aplicación determinada (rayos X, rayos UV, espectro visible, etc).

La banda óptica del espectro electromagnético hace referencia a longitudes de onda desde $0,3\mu\text{m}$ a $15\mu\text{m}$. Donde está incluida la banda visible. Recordemos además que la óptica se puede estudiar desde el punto de vista geométrico suponiendo que el rayo de luz es una línea que se desplaza a través de una lente y sufre una refracción. Pero si el índice de refracción varía a lo largo de una distancia comparable a la longitud de onda ya no es válida la óptica geométrica y debemos utilizar la teoría de ondas electromagnéticas. En nuestro caso utilizaremos ambas teorías siempre que nos sea posible.

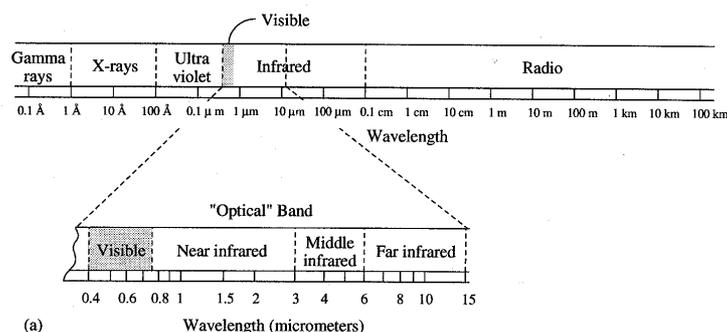


Fig. B.2.1: Espectro electromagnético; la radiación óptica va desde $\lambda = 0,3\mu\text{m}$ a $15\mu\text{m}$.

Las propiedades de los campos electromagnéticos en un medio se describen por las cuatro ecuaciones de Maxwell. Estas ecuaciones representan el comportamiento del campo eléctrico (\vec{E} medido en V/m) y del campo magnético (\vec{H} medido en A/m). Las ecuaciones de Maxwell son:

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \text{ (Ley de Faraday)} \quad (\text{B.2.1})$$

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J} \text{ (Ley de Ampere)} \quad (\text{B.2.2})$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \text{ (Ley de Gauss eléctrica)} \quad (\text{B.2.3})$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \text{ (Ley de Gauss magnética)} \quad (\text{B.2.4})$$

donde \vec{J} y ρ son la densidad de corriente (A/m^2) y de carga (C/m^3) respectivamente, \vec{D} es el desplazamiento del campo eléctrico (C/m^2) y \vec{B} el flujo del campo magnético o inducción magnética (Wb/m^2 o T -Tesla-). Las ecuaciones de Maxwell se completan con otras tres ecuaciones donde intervienen los parámetros que caracterizan a los distintos medios materiales en donde están presentes los campos, como son la constante dieléctrica ϵ (F/m), la permeabilidad magnética μ (H/m) y la conductividad eléctrica σ (Ω^{-1} o S):

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (\text{B.2.5})$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{B.2.6})$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (\text{B.2.7})$$

Cuando en un punto del espacio se produce un campo eléctrico variable con el tiempo, dichas variaciones originan como se puede observar en la segunda ley de Maxwell un campo magnético también variable. A su vez, como se ve en la primera ley de Maxwell, este campo magnético variable da origen a un campo eléctrico. Estos campos eléctrico y magnético variables, consecuencia uno del otro, sin que pueda existir ninguno de ellos aisladamente, se propagan por el espacio constituyendo las ondas electromagnéticas.

Todo lo que conocemos sobre ondas electromagnéticas se deduce a partir de estas ecuaciones. Nosotros sólo queremos conocer la ecuación que describe la propagación de las ondas electromagnéticas en un material. Tengamos en cuenta la relación entre la densidad de corriente y el campo eléctrico $\vec{J} = \sigma \vec{E}$. Tomando el rotacional de la primera ecuación de Maxwell obtenemos:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) = 0 \quad (\text{B.2.8})$$

y teniendo en cuenta que,

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \quad (\text{B.2.9})$$

y que para un material neutro ($\rho=0$) se cumple que $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, obtenemos después de sustituir $\nabla \times \vec{B}$ por la segunda ecuación de Maxwell:

$$\nabla^2 \vec{E} = \epsilon\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \sigma\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{B.2.10})$$

Esta expresión representa una onda propagándose con disipación y cuya solución general es (hemos supuesto que los materiales a tratar no tienen propiedades magnéticas por lo que su permeabilidad es igual a la del vacío μ_0):

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(k\vec{r} - \omega t)} \quad (\text{B.2.11})$$

donde k viene dada por:

$$-k^2 = -\epsilon\mu_0\omega^2 - \sigma\mu_0 i\omega \quad (\text{B.2.12})$$

o

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r + i \frac{\sigma\mu_0}{\omega}} \quad (\text{B.2.13})$$

donde $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$ es la velocidad de la luz, y ϵ_r es la constante dieléctrica relativa ($\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$),

Aunque estamos usando la notación compleja los campos son reales y vienen representados por la parte real de la onda compleja. En general, k será un número complejo y en el espacio libre (vacío) donde $\sigma=0$ y $\epsilon=\epsilon_0$ ($\epsilon_r = 1$):

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\text{B.2.14})$$

En un medio, la velocidad de fase v ($= \omega/k$) se modifica al dividir la velocidad de luz en el vacío c por un índice de refracción complejo, n_r :

$$v = \frac{c}{n_r} \quad (\text{B.2.15})$$

Donde n_r viene dado por:

$$n_r = \sqrt{\epsilon_r + i \frac{\sigma\mu_0}{\omega}} \quad (\text{B.2.16})$$

con lo que:

$$k = \frac{\omega}{c} \cdot n_r \quad (\text{B.2.17})$$

Podemos representar el índice de refracción complejo por su parte real y su parte imaginaria

$$n_r = n_r' + in_r'' \quad (B.2.18)$$

de forma que

$$k = \frac{n_r' \omega}{c} + i \frac{n_r'' \omega}{c} = k_{real} + i \cdot \frac{\alpha}{2} \quad (B.2.19)$$

De esta forma el campo eléctrico propagándose en dirección z se puede poner como:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{-\frac{n_r'' \omega z}{c}} \cdot e^{i\omega \left(\frac{n_r' z}{c} - t \right)} = \vec{E}_0 \cdot e^{-\frac{\alpha z}{2}} \cdot e^{i(k_{real} z - \omega t)} \quad (B.2.20)$$

Por tanto la velocidad de la onda se reduce por n_r' de forma que vale c/n_r' y su amplitud también se amortigua por la segunda exponencial con argumento real (se atenúa un factor igual a $\exp(-2\pi n_r'' z)$ por longitud de onda). La atenuación de la onda está relacionada con la absorción de energía electromagnética. El coeficiente de absorción (también llamado constante de atenuación) α se define como:

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{n_r'' \omega}{c} \quad (B.2.21)$$

En ausencia de absorción ($n_r''=0$), $n_r' = n_r$, y el índice de refracción se denominará simplemente n_r . El coeficiente de absorción se puede medir para todos los materiales y da información sobre n_r'' . En ausencia de absorción la parte real de k , k_{real} coincide con k :

$$k_{real} = \frac{\omega}{c} \cdot n_r' \quad (B.2.22)$$

Repetiendo los mismos pasos sobre la tercera ecuación de Maxwell podemos calcular la ecuación de ondas del campo magnético \vec{H} . La expresión obtenida es:

$$\nabla^2 \vec{H} = \epsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + \sigma \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (B.2.23)$$

y cuya solución es similar a la del campo eléctrico:

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(kr - \omega t)} \quad (B.2.24)$$

La fase tanto en la expresión de E como de H, $(k \cdot r - \omega \cdot t)$ puede escribirse de distintas formas equivalentes. En dicha expresión el término $k \cdot r$ corresponde al producto escalar de dos vectores, $\vec{k} \cdot \vec{r}$, un vector \vec{k} llamado vector de onda (cuyo módulo es $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ en el vacío o $k = \omega/c \cdot n_r$ en un medio) orientado en la dirección de propagación y el vector de posición \vec{r} , (x, y, z). Tomando \vec{s} , como un vector unitario también en la dirección de propagación:

$$\vec{k} = k \vec{s} \quad (B.2.25)$$

De esa forma el término de fase podrá escribirse también como $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} - \omega \cdot t)$ donde ahora k representa el módulo del vector de onda y $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}$ es el producto escalar de los vectores $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{s}}$.

La fase también puede escribirse como $(\omega \cdot t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ pues la parte real (que es la que nos interesa pues los campos son reales) es un coseno, el cual es independiente del signo del argumento. Por la misma razón, el término de fase $(\omega \cdot t - \mathbf{k}_{\text{real}} \cdot \mathbf{z})$, también podría escribirse como $(\mathbf{k}_{\text{real}} \cdot \mathbf{z} - \omega \cdot t)$.

B.2.2.1. Transversalidad de las ondas luminosas.

Vamos a aplicar la primera y la segunda ley de Maxwell a los campos eléctrico y magnético obtenidos anteriormente tomando, para simplificar, E_0 y H_0 constantes. Supondremos el caso de una onda plana propagándose en la dirección indicada por el vector unitario $\vec{\mathbf{s}} = \alpha \hat{\mathbf{i}} + \beta \hat{\mathbf{j}} + \gamma \hat{\mathbf{k}}$. Si aplicamos la segunda ley de Maxwell y teniendo en cuenta la definición del rotacional:

$$\nabla \times \vec{\mathbf{H}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}} \quad (\text{B.2.26})$$

La componente x se podrá escribir:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (\text{B.2.27})$$

Las distintas componentes de los campos eléctrico y magnético tienen las siguientes expresiones:

$$H_z = H_{0z} e^{i[\mathbf{k}(\alpha\hat{\mathbf{i}} + \beta\hat{\mathbf{j}} + \gamma\hat{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{r} - \omega t]} \quad (\text{B.2.28})$$

$$H_y = H_{0y} e^{i[\mathbf{k}(\alpha\hat{\mathbf{i}} + \beta\hat{\mathbf{j}} + \gamma\hat{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{r} - \omega t]} \quad (\text{B.2.29})$$

$$E_x = E_{0x} e^{i[\mathbf{k}(\alpha\hat{\mathbf{i}} + \beta\hat{\mathbf{j}} + \gamma\hat{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{r} - \omega t]} \quad (\text{B.2.30})$$

con expresiones similares para las demás componentes.

A partir de las expresiones del campo eléctrico y magnético y teniendo en cuenta que $\frac{\partial E_x}{\partial t} = -i\omega E_x$ llegamos a que:

$$\beta H_z - \gamma H_y = -\epsilon \frac{\omega}{k} E_x \quad (\text{B.2.31})$$

Para las componentes y y z:

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (\text{B.2.32})$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (\text{B.2.33})$$

Por lo que operando de la misma forma se llega a que:

$$\gamma H_x - \alpha H_z = -\varepsilon \frac{\omega}{k} E_y \quad (\text{B.2.34})$$

$$\alpha H_y - \beta H_z = -\varepsilon \frac{\omega}{k} E_z \quad (\text{B.2.35})$$

Las tres ecuaciones a las cuales hemos llegado se pueden describir en una única ecuación, si se tiene en cuenta que los primeros miembros son las componentes del producto vectorial $\vec{\mathbf{H}} \times \vec{\mathbf{s}}$ cambiadas de signo, donde $\vec{\mathbf{s}}$ es el vector unitario en la dirección de propagación:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{H}} \times \vec{\mathbf{s}} &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ H_x & H_y & H_z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix} = (\gamma H_y - \beta H_z) \hat{\mathbf{i}} + (\alpha H_z - \gamma H_x) \hat{\mathbf{j}} + (\beta H_z - \alpha H_y) \hat{\mathbf{k}} = \\ &= \varepsilon \cdot \frac{\omega}{k} [E_x \hat{\mathbf{i}} + E_y \hat{\mathbf{j}} + E_z \hat{\mathbf{k}}] \end{aligned} \quad (\text{B.2.36})$$

por lo que las tres ecuaciones equivalen a la ecuación vectorial:

$$\vec{\mathbf{H}} \times \vec{\mathbf{s}} = \varepsilon \frac{\omega}{k} \vec{\mathbf{E}} \quad (\text{B.2.37})$$

O bien teniendo en cuenta que:

$$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{n_r} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}} = v \quad (\text{B.2.38})$$

$$\vec{\mathbf{H}} \times \vec{\mathbf{s}} = \varepsilon v \vec{\mathbf{E}} \quad (\text{B.2.39})$$

Si se parte de la primera ley de Maxwell y se sigue el mismo procedimiento se llega a que:

$$\vec{s} \times \vec{E} = \frac{1}{\epsilon v} \vec{H} \quad (\text{B.2.40})$$

O, en función de \vec{B} :

$$\vec{s} \times \vec{E} = \frac{\omega}{k} \vec{B} \quad (\text{B.2.41})$$

Las ecuaciones obtenidas indican que en la propagación, \vec{H} y \vec{E} son siempre perpendiculares entre sí, y que ambos lo son a la dirección de propagación \vec{s} , lo que demuestra que las ondas electromagnéticas son transversales, formando los vectores \vec{E} , \vec{H} y \vec{s} un triedro trirrectángulo directo. De las mismas ecuaciones se deduce que \vec{E} y \vec{H} van en fase ya que ambos se anulan y se hacen máximos simultáneamente como se indica en la siguiente figura:

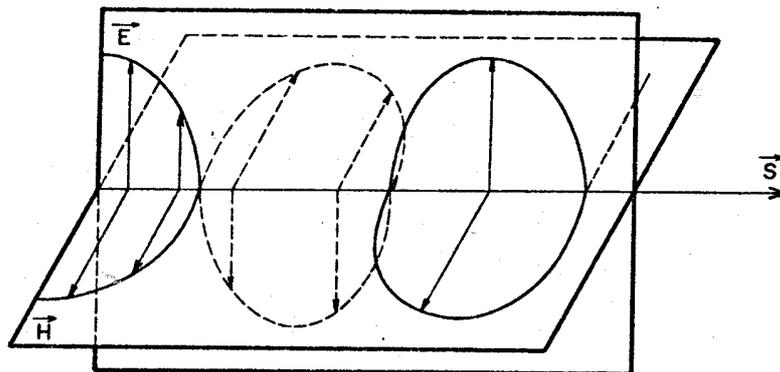


Fig. B.2.2: Los vectores \vec{E} , \vec{H} y \vec{s} forman un triedro trirrectángulo directo.

B.2.2.2. Otras relaciones importantes.

Se pueden demostrar varias relaciones entre el campo eléctrico y magnético y la energía y potencia asociadas a las ondas electromagnéticas. La densidad de energía asociada al campo eléctrico y magnético viene dada por:

$$E_{\text{densidad}} = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) \quad (\text{B.2.42})$$

donde $\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$ es la densidad de energía asociada al campo eléctrico y $\frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$ la asociada al campo magnético.

La densidad de potencia asociada a la radiación viene dada por el vector de Poynting, \vec{S} :

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (\text{B.2.43})$$

Las propiedades macroscópicas de un material se representan por el índice de refracción real e imaginario. En general, conforme se propaga la onda estos parámetros pueden variar al atravesar un cambio de material. Para resolver los campos eléctricos y magnéticos al atravesar un contorno necesitamos conocer las condiciones de contorno. Si z es perpendicular al plano que separa las dos regiones, entonces las componentes normales de D y B en el límite entre las dos regiones están relacionadas de la siguiente manera (dos últimas ecuaciones de Maxwell):

$$(\vec{D}(z^+) - \vec{D}(z^-)) \cdot \hat{k} = \sigma_s \quad (\text{B.2.44})$$

$$(\vec{B}(z^+) - \vec{B}(z^-)) \cdot \hat{k} = 0 \quad (\text{B.2.45})$$

donde \hat{k} es el vector unitario y z^+ y z^- son los puntos a un lado y a otro de la región de contorno. Aquí σ_s es la densidad de carga superficial sobre el contorno. Además las componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético se relacionan (primeras dos ecuaciones de Maxwell) según las siguientes expresiones:

$$\hat{k} \times (\vec{E}(z^+) - \vec{E}(z^-)) = 0 \quad (\text{B.2.46})$$

$$\hat{k} \times (\vec{H}(z^+) - \vec{H}(z^-)) = \vec{J}_s \quad (\text{B.2.47})$$

donde \vec{J}_s es la densidad de corriente circulando a lo largo de esa superficie.

Si tenemos un frente de ondas plano viajando en dirección z , entonces los campos E y B están en el plano x - y ($E_z = H_z = 0$) y se relacionan por la primera ecuación de Maxwell según las siguientes expresiones:

$$E_y = -\frac{\omega}{k} B_x \quad (\text{B.2.48})$$

$$E_x = \frac{\omega}{k} B_y \quad (\text{B.2.49})$$

B.2.3. Polarización de la luz

Hasta ahora sólo hemos visto al resolver la ecuación de ondas que el campo magnético y eléctrico son perpendiculares a la dirección de propagación. La orientación precisa del campo eléctrico es lo que se conoce como polarización de la onda electromagnética. Para todos los componentes fotónicos la polarización es de vital importancia ya que el funcionamiento del dispositivo dependerá del control de dicha polarización.

Supongamos una onda plana monocromática propagándose en dirección z. La polarización se define para el campo eléctrico que en notación compleja será:

$$\vec{E}(z, t) = \text{Re}[\vec{A} \exp(i(\omega t - kz))] \quad (\text{B.2.50})$$

donde \vec{A} es un vector complejo en el plano x-y. Para ver la evolución temporal del campo eléctrico veamos sus dos componentes E_x y E_y :

$$E_x = A_x \cos(\omega t - kz + \delta_x) \quad (\text{B.2.51})$$

$$E_y = A_y \cos(\omega t - kz + \delta_y) \quad (\text{B.2.52})$$

donde el vector \vec{A} es:

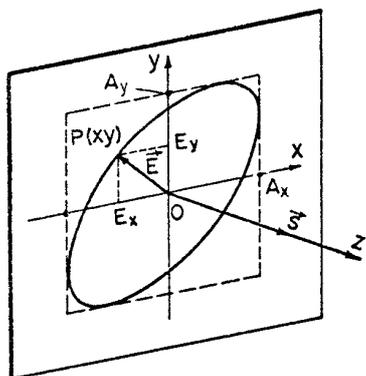
$$\vec{A} = A_x e^{i\delta_x} \hat{i} + A_y e^{i\delta_y} \hat{j} \quad (\text{B.2.53})$$

y donde A_x y A_y son números reales positivos. Desarrollando los cosenos y aplicando relaciones trigonométricas llegamos a:

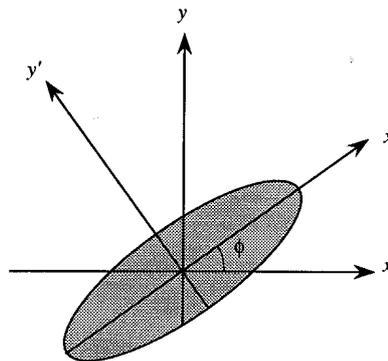
$$\cos^2(\omega t - kz + \delta_x) + \cos^2(\omega t - kz + \delta_y) - 2 \cos \delta \cos(\omega t - kz + \delta_x) \cos(\omega t - kz + \delta_y) = \sin^2 \delta \quad (\text{B.2.54})$$

donde $\delta = \delta_y - \delta_x$. En esta expresión trigonométrica podemos sustituir las expresiones de los campos eléctricos E_x y E_y :

$$\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 - 2 \frac{\cos \delta}{A_x A_y} E_x E_y = \sin^2 \delta \quad (\text{B.2.55})$$



(a)



(b)

Fig. B.2.3: (a) Elipse de polarización. (b) Cambio de ejes de x-y a x'-y'.

Esto es la ecuación de una elipse y representa la elipse de polarización. Diremos que la onda está polarizada elípticamente. Los ejes principales de dicha elipse no estarán sobre los ejes x e y. Podemos girar el eje coordenado de forma que los nuevos ejes x' e y' coincidan con los de la elipse. Entonces la ecuación de la elipse se simplifica y queda como:

$$\left(\frac{E_{x'}}{a}\right)^2 + \left(\frac{E_{y'}}{b}\right)^2 = 1 \tag{B.2.56}$$

donde a y b son los ejes principales de la elipse y $E_{x'}$ y $E_{y'}$ son las componentes del campo eléctrico en dichos ejes. El ángulo ϕ entre x y x' nos permite calcular la longitud de los semiejes a y b y así obtener la siguiente relación:

$$\tan(2\phi) = \frac{2A_x A_y}{A_x^2 - A_y^2} \cos \delta \tag{B.2.57}$$

Dado que E_x y E_y dependen del tiempo, el vector \vec{E} gira en el plano x-y.

Tendremos las siguientes posibilidades.

- $\delta=0$ o π : En ese caso la luz está polarizada linealmente y la elipse degenera en una línea.
- $\delta>0$: El vector campo eléctrico gira en el sentido de las agujas del reloj. Si la magnitud de E_x y E_y es la misma la luz estará polarizada circularmente. Un observador que vea venir el rayo de luz hacia si dirá que el rayo tiene polarización levógira.
- $\delta<0$: El vector campo eléctrico gira en contra del sentido de las agujas del reloj. Si la magnitud de E_x y E_y es la misma la luz estará polarizada circularmente. Un observador que vea venir el rayo de luz hacia si dirá que el rayo tiene polarización dextrógira.

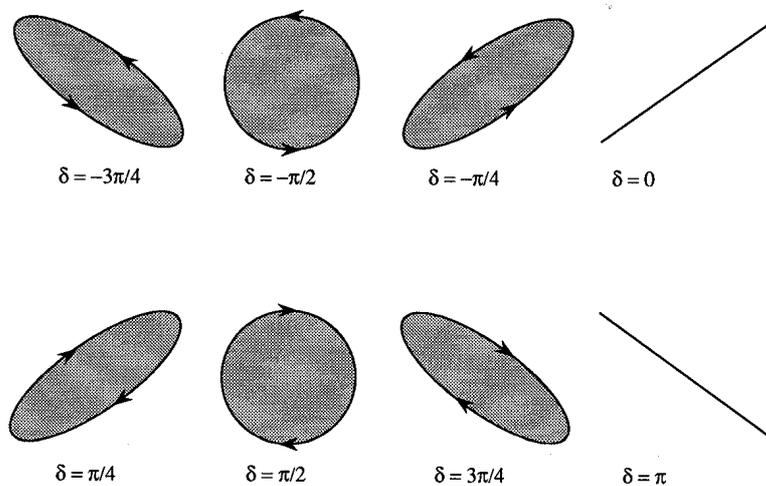


Fig. B.2.4: Estados de polarización para diferentes ondas. Las amplitudes del campo eléctrico son $E_x = A_x \cos(\omega t - kz)$ y $E_y = A_y \cos(\omega t - kz + \delta)$.

Para comprender mejor la diferencia entre estos distintos tipos de polarización en la siguiente figura se muestran los campos eléctrico y magnético de una onda electromagnética plana linealmente polarizada (a) y una onda polarizada circularmente (b) ambas propagándose en la dirección de eje z.

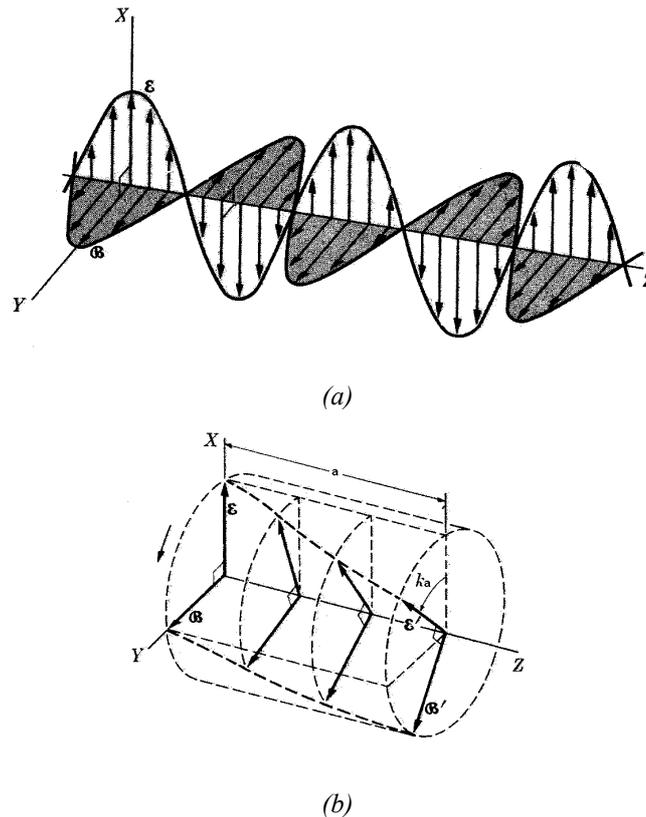


Fig. B.2.5: (a) Polarización lineal. (b) Polarización circular.

En el ejemplo que ilustra el caso de polarización lineal el campo eléctrico oscila en el plano XZ y el magnético en el plano YZ. La representación de la variación temporal del campo eléctrico sobre el plano XY es una línea recta.

En el caso de polarización circular los campos eléctrico y magnético giran alrededor de la dirección de propagación siguiendo una trayectoria circular. Según el sentido de rotación de los campos, la polarización circular será dextrógira o levógira. La polarización elíptica se obtiene cuando las amplitudes de las dos componentes ortogonales de cada campo son distintas.

Los componentes fotónicos aprovechan la polarización de la luz para su propio beneficio. Algunos de los dispositivos son capaces de añadir un desfase entre E_x y E_y mediante un pequeño campo eléctrico lo que altera la polarización de la luz que atraviesa ese dispositivo. Podremos modular la luz modificando su polarización.

El cristal líquido modifica la intensidad de un haz luminoso cambiando su polarización de forma que la luz con una polarización determinada es transmitida a través del dispositivo y la de cualquier otra polarización reflejada.

B.2.4. Propagación en el medio: fórmulas de Fresnel.

Vamos a analizar brevemente las leyes de reflexión y refracción que describen la propagación de la luz de un medio dieléctrico no conductor a otro. Cada medio posee un índice de refracción diferente (ϵ diferente), no poseen propiedades magnéticas ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$) y el

plano que separa ambos medios es el plano $y = 0$. Estudiaremos el caso en que una onda plana linealmente polarizada proveniente del semiespacio $y > 0$ incide sobre la superficie límite entre ambos medios. El plano de incidencia es el plano x - y . Estudiaremos dos casos i) cuando el campo eléctrico es perpendicular al plano de incidencia y ii) cuando el campo eléctrico está en el plano de incidencia.

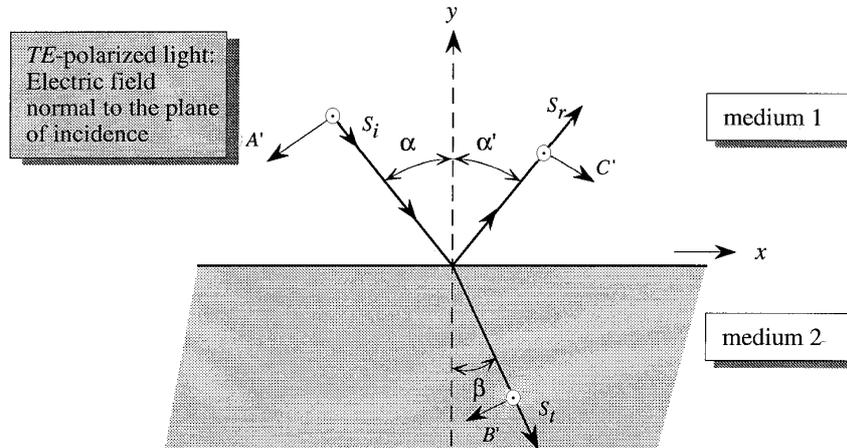


Fig. B.2.6: Propagación de una onda luminosa de un medio menos denso a uno más denso. El campo eléctrico es perpendicular al plano del dibujo (plano de incidencia). Las amplitudes del campo magnético son A' , B' y C' para la onda incidente, refractada y reflejada. Los tres vectores correspondientes al campo eléctrico de amplitudes A , B y C (que no se muestran) están en la dirección positiva del eje z , es decir, dirigidos hacia el lector.

i) El campo eléctrico es perpendicular al plano de incidencia

En este caso el campo eléctrico está en la dirección de z . Esto se llama una onda transversal eléctrica o TE ya que el campo eléctrico es normal al plano de incidencia. Tendremos una onda incidente y una reflejada en el semiespacio $y > 0$ (medio 1) y una onda refractada en el semiespacio $y < 0$ (medio 2). En el medio 1 podemos decir:

$$E_z = Ae^{ik_1(x\sin\alpha - y\cos\alpha)} + Ce^{ik_1(x\sin\alpha' + y\cos\alpha')} \quad (B.2.58)$$

y en el medio 2

$$E_z = Be^{ik_2(x\sin\beta - y\cos\beta)} \quad (B.2.59)$$

y donde α , α' y β son los ángulos de incidencia, reflexión y refracción respectivamente. Dado que el plano $y = 0$ es el plano que separa ambas regiones, las componentes tangenciales (z) del campo eléctrico en uno y otro medio deberán ser iguales al llegar a dicho plano, es decir, $\hat{\mathbf{k}} \times (\mathbf{E}(z^+) - \mathbf{E}(z^-)) = 0$. Por tanto, aplicando dicha condición de contorno en $y = 0$:

$$Ae^{ik_1x\sin\alpha} + Ce^{ik_1x\sin\alpha'} = Be^{ik_2x\sin\beta}$$

Como esta expresión es cierta para cualquier x deberán igualarse todos los términos de fase, es decir:

$$\alpha = \alpha' \quad (B.2.60)$$

$$k_1 \sin \alpha = k_2 \sin \beta \quad (\text{B.2.61})$$

La primera de estas expresiones nos da la ley de la reflexión y la segunda la ley de refracción (Ley de Snell), sabiendo que $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{k_2}{k_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{B.2.62})$$

Además:

$$A + C = B$$

La segunda condición de contorno para resolver las incógnitas A, B y C se obtiene aplicando la condición de contorno para las componentes tangenciales del campo magnético (eje x). Teniendo en cuenta que \vec{E} , \vec{H} y \vec{s} forman un conjunto de tres vectores perpendiculares dextrógiro podemos obtener la componente x del campo magnético de cada una de las ondas (incidente, reflejada y refractada) aplicando la relación entre el campo magnético y el eléctrico vista anteriormente ($\vec{s} \times \vec{E} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \vec{H}$) y teniendo en cuenta el sentido de las proyecciones de los vectores H sobre el eje x podemos escribir:

$$H_x = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}} \cos \alpha e^{ik_1 x \sin \alpha} \left[A e^{-ik_1 y \cos \alpha} + C e^{ik_1 y \cos \alpha} \right] \quad (\text{B.2.63})$$

$$H_x = -\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_0}} \cos \beta e^{ik_1 x \sin \alpha} B e^{ik_2 y \cos \beta} \quad (\text{B.2.64})$$

donde se ha aplicado que $\alpha = \alpha'$ y que $k_1 \sin \alpha = k_2 \sin \beta$.

La condición de contorno para el campo magnético aplicada al plano $y=0$ que separa ambos medios:

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}} \cos \alpha \{-A + C\} = -\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_0}} \cos \beta B \quad (\text{B.2.65})$$

o

$$A - C = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} B \quad (\text{B.2.66})$$

A partir de ambas condiciones de contorno podemos deducir la primera fórmula de Fresnel para los valores de A, B y C correspondientes a las amplitudes del campo eléctrico:

$$2A = \left[1 + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \right] B = \left[1 + \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta \cos \alpha} \right] B \quad (\text{B.2.67})$$

$$2C = \left[1 - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \right] B = \left[1 - \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta \cos \alpha} \right] B \quad (B.2.68)$$

Esta primera fórmula de Fresnel nos da la intensidad del campo transmitido y reflejado para el caso de tener un campo eléctrico perpendicular al plano de incidencia.

ii) El campo eléctrico está en el plano de incidencia (el campo magnético es perpendicular al plano de incidencia).

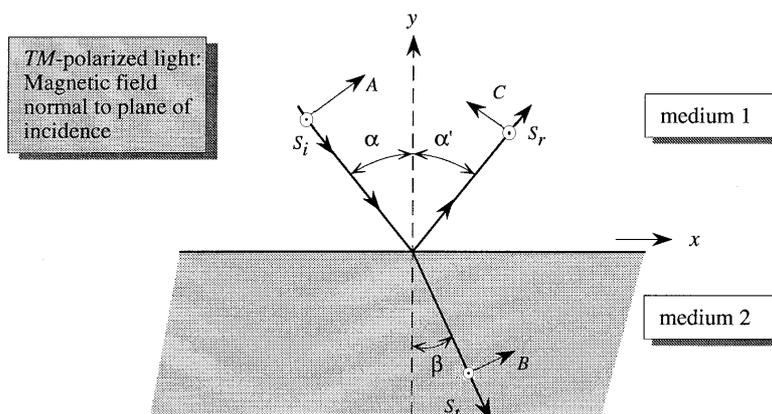


Fig. B.2.7: Propagación de una onda luminosa de un medio menos denso a uno más denso. El campo magnético es perpendicular al plano de incidencia. Las amplitudes correspondientes del campo eléctrico son A, B y C.

En este caso el vector de campo magnético \vec{H} está en la dirección z. A este tipo de onda se la llama transversal magnética o TM. La solución para el problema de la reflexión y la refracción sigue el mismo procedimiento, salvo que las condiciones de contorno las aplicamos a H_z en $y = 0$ y a E_x en $y = 0$. Si llamamos a las amplitudes del campo magnético de la onda incidente, reflejada y refractada A' , B' y C' , entonces obtenemos de la primera condición de contorno:

$$A' e^{ik_1 x \sin \alpha} + C' e^{ik_1 x \sin \alpha'} = B' e^{ik_2 x \sin \beta} \quad (B.2.69)$$

Si igualamos los términos de las fases entonces obtenemos las leyes de la reflexión y de la refracción, $\alpha = \alpha'$ y $k_1 \sin \alpha = k_2 \sin \beta$. Además se cumple,

$$A' + C' = B' \quad (B.2.70)$$

Para el campo eléctrico y teniendo en cuenta las relaciones entre las amplitudes del campo eléctrico (A, B, C) y las del campo magnético (A' , B' , C') obtenemos,

$$A + C = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} B \quad (B.2.71)$$

La segunda condición de contorno para resolver las incógnitas A, B y C se obtiene aplicando la condición de contorno para las componentes tangenciales del campo eléctrico (eje x). Teniendo en cuenta que \vec{E} , \vec{H} y \vec{s} forman un conjunto de tres vectores

perpendiculares dextrógiro ($\vec{H} \times \vec{s} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \vec{E}$) podemos obtener la componente x del campo eléctrico de cada una de las ondas (incidente, reflejada y refractada). Teniendo en cuenta el sentido de las proyecciones de los vectores E sobre el eje x podemos escribir:

$$E_x = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_1}} \cos \alpha e^{ik_1 x \sin \alpha} \left\{ A' e^{-ik_1 y \cos \alpha} - C' e^{ik_1 y \cos \alpha} \right\} \quad (\text{B.2.72})$$

$$E_x = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_2}} \cos \beta e^{ik_1 x \sin \alpha} B' e^{-ik_2 y \cos \beta} \quad (\text{B.2.73})$$

donde se ha aplicado que $\alpha = \alpha'$ y que $k_1 \sin \alpha = k_2 \sin \beta$.

Si aplicamos las condiciones de contorno sobre el campo eléctrico E_x para el plano $y=0$ (que separa ambos medios):

$$A' - C' = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \cdot B' \quad (\text{B.2.74})$$

Teniendo en cuenta las relaciones entre las amplitudes del campo eléctrico (A, B, C) y las del campo magnético (A', B', C') obtenemos,

$$(A-C) \cos \alpha = B \cos \beta \quad (\text{B.2.75})$$

Obsérvese que se produce un cambio de signo (C) y esto se debe a un cambio de fase de 180° en la onda reflejada.

A partir de ambas expresiones podemos deducir la relación entre los valores de A, B y C correspondientes a las amplitudes del campo eléctrico que nos proporcionará la segunda fórmula de Fresnel:

$$2A = \left[\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} + \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \right] B \quad (\text{B.2.76})$$

$$2C = \left[\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} - \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \right] B \quad (\text{B.2.77})$$

O bien teniendo en cuenta que $\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ y aplicando relaciones trigonométricas la segunda fórmula de Fresnel se puede describir de la siguiente forma:

$$A : B : C = \tan(\alpha + \beta) : \left(\frac{\tan(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} - \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \right) : \tan(\alpha - \beta) \quad (\text{B.2.78})$$

De las dos fórmulas de Fresnel deducimos que aunque las leyes de reflexión y refracción son las mismas con lo que respecta a los ángulos, existe una importante diferencia con lo que respecta a las amplitudes entre ambos tipos de polarización. Esto afecta directamente a efectos de polarización cuando un haz de luz incide sobre una superficie que separa dos medios.

B.2.4.1. Efectos de la polarización: Ley de Brewster

Vamos a considerar que un haz de luz incide de un medio menos denso a otro más denso ($n_{r2} > n_{r1}$ o bien $\epsilon_2 > \epsilon_1$) y queremos conocer como afecta el ángulo de incidencia a las amplitudes de las ondas reflejada y refractada (transmitida). La relación de amplitudes es:

$$\text{Transmitida:} \quad t = \frac{B}{A} \quad (\text{B.2.79})$$

$$\text{Reflejada:} \quad r = \frac{C}{A} \quad (\text{B.2.80})$$

Si consideramos luz polarizada tipo TE, a partir de las ecuaciones obtenidas anteriormente y tenemos en cuenta que $\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{n_{r2}}{n_{r1}}$:

$$r_{\text{TE}} = \frac{C}{A} = \frac{n_{r1} \cos \alpha - n_{r2} \cos \beta}{n_{r1} \cos \alpha + n_{r2} \cos \beta} = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (\text{B.2.81})$$

y para ángulos de incidencia pequeños donde $\sin(\alpha) \cong \alpha$, $\sin(\beta) \cong \beta$, $\cos(\alpha) \cong 1$, $\cos(\beta) \cong 1$ y, por tanto, la Ley de Snell se reduce a $\beta \approx \frac{n_{r1} \alpha}{n_{r2}}$:

$$r_{\text{TE}} \cong -\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = -\frac{n_{r2} - n_{r1}}{n_{r2} + n_{r1}} \quad (\text{B.2.82})$$

Como $n_{r2} > n_{r1}$ este valor es negativo. En el ángulo límite donde $\alpha \rightarrow 90^\circ$, tenemos que $r_{\text{TE}} \rightarrow -1$. La relación de amplitudes para la luz refractada es:

$$t_{\text{TE}} = \frac{B}{A} = \frac{2n_{r1} \cdot \cos \alpha}{n_{r1} \cdot \cos \alpha + n_{r2} \cos \beta} = \frac{2 \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (\text{B.2.83})$$

Para el caso de luz polarizada TM, a partir de las ecuaciones obtenidas anteriormente:

$$r_{\text{TM}} = \frac{C}{A} = \frac{n_{r2} \cdot \cos \alpha - n_{r1} \cos \beta}{n_{r2} \cdot \cos \alpha + n_{r1} \cos \beta} = \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} \quad (\text{B.2.84})$$

r_{TM} para ángulos α pequeños:

$$r_{TM} \cong \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \frac{n_{r_2} - n_{r_1}}{n_{r_2} + n_{r_1}} \quad (B.2.85)$$

Luego, para ángulos α pequeños el valor de r_{TM} es el mismo que el de r_{TE} salvo el signo. Como $n_{r_2} > n_{r_1}$ este valor es positivo.

La relación de amplitudes para la luz refractada es:

$$t_{TM} = \frac{B}{A} = \frac{2n_{r_1} \times \cos \alpha}{n_{r_2} \times \cos \alpha + n_{r_1} \cos \beta} = \frac{2 \times \sin \beta \times \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)} \quad (B.2.86)$$

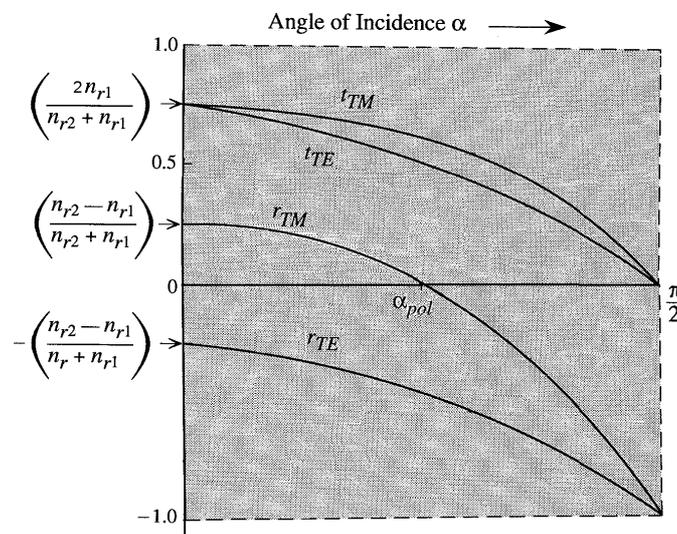


Fig. B.2.8: Relación de amplitudes de la onda reflejada y transmitida para los modos TE y TM en función del ángulo de incidencia para $n_{r_2} > n_{r_1}$.

Se puede comprobar que r_{TM} comienza, como hemos visto, con un valor positivo para $\alpha=0$ y va disminuyendo conforme aumenta α acabando en $r_{TM} = -1$ para $\alpha=90^\circ$. Existe por tanto un ángulo intermedio α_{pol} para el cual $r_{TM} = 0$. Dicho ángulo α_{pol} se llama ángulo de polarización.

En α_{pol} , la expresión de r_{TM} debe cambiar de signo por lo que se ha de producir un cambio de signo en el denominador de r_{TM} , ya que en ningún caso el numerador puede cambiar de signo ($\alpha - \beta < \pi/2$). Por tanto:

$$\alpha_{pol} + \beta = \pi/2 \quad (B.2.87)$$

$$\Rightarrow \sin \beta = \cos \alpha_{pol} \quad (B.2.88)$$

De la ley de la refracción también sabemos que

$$\sin \beta = \frac{n_{r_1}}{n_{r_2}} \sin \alpha_{pol} \quad (B.2.89)$$

de donde se deduce la Ley de Brewster

$$\tan \alpha_{pol} = \frac{n_{r2}}{n_{r1}} \tag{B.2.90}$$

Para luz no polarizada pasando de aire a vidrio encontramos (para el vidrio $n_{r2} = 1,5$ y para el aire $n_{r1} = 1$), $\alpha_{pol} = 57^\circ$, para agua ($n_{r2} = 1,33$) $\alpha_{pol} = 53^\circ$. Además como en ese ángulo $r_{TM} = 0$, el campo eléctrico de la onda reflejada no tiene componente paralela al plano de incidencia por lo que la onda reflejada está totalmente polarizada en un plano perpendicular al de incidencia. Además, como $\alpha_{pol} + \beta = \pi/2$, la onda reflejada y la refractada son perpendiculares. En consecuencia:

cuando los rayos reflejado y refractado son perpendiculares, el rayo reflejado está totalmente polarizado, siendo el campo eléctrico perpendicular al plano de incidencia.

La onda reflejada está linealmente polarizada ya que contiene oscilaciones del campo eléctrico contenidas dentro de un plano bien definido, perpendicular a la dirección de propagación y al plano de incidencia. Las oscilaciones del campo eléctrico de una luz no polarizada, por otra parte, pueden producirse en cualquiera de un infinito número de direcciones que son perpendiculares a la dirección de propagación.

Los sistemas TE y TM son ortonormales de forma que cualquier onda puede descomponerse como suma de una componente paralela al plano de incidencia (TM) y otra perpendicular al plano de incidencia (TE). Como, para $\alpha = \alpha_{pol}$ se cumple que $r_{TM} = 0$, la onda reflejada tiene únicamente componente perpendicular (r_{TE}). Por otra parte la onda transmitida tendrá una componente perpendicular al plano de incidencia (t_{TE}) y una componente paralela al plano de incidencia (t_{TM}). Los valores de r_{TE} , t_{TE} y t_{TM} pueden obtenerse utilizando la gráfica anterior.

Esto nos indica que podemos generar luz polarizada a partir de un haz de luz no polarizada haciéndola incidir sobre una superficie con ángulo α_{pol} . Aunque esto es cierto y la luz reflejada estará completamente polarizada, su intensidad, la cual será proporcional a r_{TE}^2 es pequeña. Por ejemplo, para luz no polarizada pasando de aire a vidrio, $\alpha_{pol} = 57^\circ$, por lo que $\beta = 33^\circ$ y $r_{TE}^2 = (0,4)^2 = 0,16$.

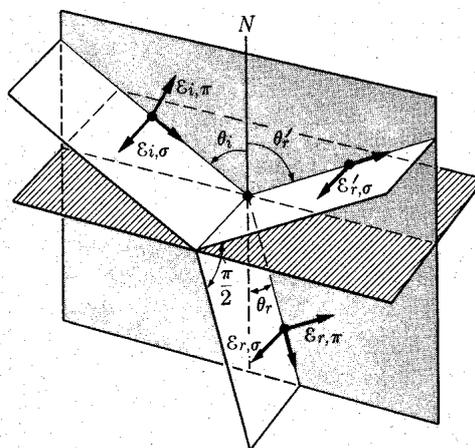


Fig. B.2.9: Polarización de una onda electromagnética por reflexión.

La luz refractada está parcialmente polarizada pero tendrá una mayor intensidad. Si luz no polarizada atraviesa una placa de vidrio en aire incidiendo con α_{pol} , entonces:

$$\frac{t_{TM}}{t_{TE}} = \frac{1}{\cos(\alpha_{pol} - \beta)} = \frac{1}{\cos(2\alpha_{pol} - \pi/2)} = \frac{1}{\sin(2\alpha_{pol})} = \frac{1 + \tan^2(\alpha_{pol})}{2 \cdot \tan(\alpha_{pol})} = \frac{n_r^2 + 1}{2n_r} \quad (B.2.91)$$

Por tanto después de un único paso ($n_r=1,5$) la relación entre las intensidades de las dos componentes, paralela (TM) y perpendicular al plano de incidencia (TE) es

$$\frac{t_{TM}^2}{t_{TE}^2} = 1,17 \quad (B.2.92)$$

Esta relación puede ser incrementada si la onda electromagnética se transmite a través de una serie de láminas delgadas y paralelas, con un ángulo de incidencia igual al de polarización. La onda transmitida tiene una componente perpendicular al plano de incidencia (TE) mucho menor, porque esta componente tiende a irse con la onda reflejada cada vez que ésta se refleja al pasar de una lámina a la siguiente. Luego la onda transmitida está casi totalmente polarizada y el campo eléctrico oscila en el plano de incidencia.

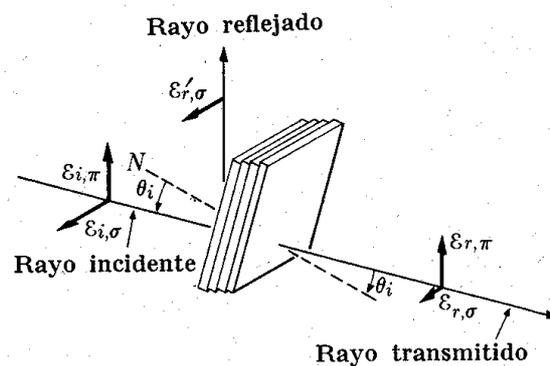


Fig. B.2.10: Polarización de una onda electromagnética por refracciones sucesivas.

Como se observa en la figura anterior, cuando una onda pasa a través de un medio limitado por caras planas paralelas, por simple aplicación de la Ley de Snell, la dirección de propagación del rayo emergente es paralela a la del rayo incidente. Si se tienen varias placas paralelas (como es nuestro caso), los rayos incidente y emergente siguen siendo paralelos.

B.2.4.2. Reflexión interna total y campos evanescentes

Supongamos ahora que la luz pasa de un medio más denso a uno menos denso (por simplicidad supondremos que es aire, $n_{r2} = 1$ y $n_{r1} = n_r > n_{r2}$). Entonces se cumple:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{n_r} \quad (B.2.93)$$

Como $\beta > \alpha$ ($n_r > 1$) y si se cumple que $n_r \sin \alpha > 1$,

entonces

$$\sin \beta > 1 \quad (\text{B.2.94})$$

y en ese caso β será imaginaria.

Los signos de r_{TE} y r_{TM} para pequeños valores de α son contrarios al caso $n_{r2} > n_{r1}$, de manera que r_{TE} empieza en un valor positivo y r_{TM} en uno negativo. Se puede comprobar que tanto r_{TE} como r_{TM} alcanzan 1 antes de $\alpha=90^\circ$, exactamente en α_{tot} , que cumple,

$$\sin \alpha_{tot} = \frac{1}{n_r} \quad (\text{B.2.95})$$

Para seguir después de α_{tot} necesitamos que el ángulo de refracción β tenga un valor complejo (ver B.2.95). Si el ángulo de incidencia es menor que α_{tot} entonces β va de 0° a 90° . Para ángulos mayores que α_{tot} , β deberá tomar valores complejos que serán de la forma:

$$\beta = 90^\circ \pm i\beta' \quad (\text{B.2.96})$$

Para ángulos $\alpha > \alpha_{tot}$ tenemos

$$\sin \beta = \sin(90^\circ \pm i\beta') = \cos(\pm i\beta') = \cosh \beta' > 1 \quad (\text{B.2.97})$$

Esto es consistente con la ley de refracción donde $\sin \beta = n_r \sin \alpha$ debe ser mayor que 1 cuando α es mayor que α_{tot} . Para r_{TE} y r_{TM} de las ecuaciones anteriores, tenemos que,

$$r_{TE} = -\frac{\sin(\alpha - 90^\circ \mp i\beta')}{\sin(\alpha + 90^\circ \pm i\beta')} = \frac{\sin(90^\circ \pm i\beta' - \alpha)}{\sin(90^\circ \pm i\beta' + \alpha)} = \frac{\cos(\alpha \mp i\beta')}{\cos(\alpha \pm i\beta')} = e^{i\gamma} \quad (\text{B.2.98})$$

$$r_{TM} = \frac{\tan(\alpha - 90^\circ \mp i\beta')}{\tan(\alpha + 90^\circ \pm i\beta')} = -\frac{\tan(90^\circ \pm i\beta' - \alpha)}{\tan(90^\circ \pm i\beta' + \alpha)} = \frac{\cot(\alpha \mp i\beta')}{\cot(\alpha \pm i\beta')} = e^{i\delta} \quad (\text{B.2.99})$$

Ambos coeficientes r_{TM} y r_{TE} tienen módulo unidad pero desfase variable. Este desfase es el cambio de fase de la onda reflejada totalmente. Como se puede observar en la siguiente figura, hay una diferencia entre los desfases producidos en el caso en que tengamos luz polarizada TE o luz polarizada TM. Esta diferencia de desfases puede ser aprovechada para generar luz polarizada elípticamente. La reflexión total es de suma importancia en la propagación en guías de onda.

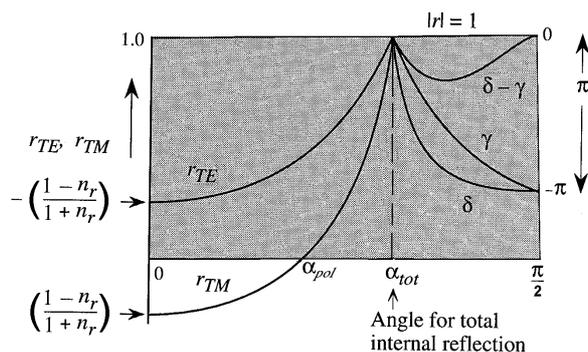


Fig. B.2.11: Relación de amplitudes en función del ángulo de incidencia para $n_{r1} = n_r > n_{r2} = 1$. También se muestra el cambio de ángulo producido con reflexión total.

En el caso de reflexión interna total, no existe un haz refractado y la totalidad de la energía electromagnética es reflejada. Sin embargo, los campos en el medio de menor índice de refracción (menos denso) no se anulan inmediatamente en la interfase. Existen unos campos evanescentes que penetran en el medio menos denso amortiguándose rápidamente, como vamos a ver a continuación.

Para luz polarizada TE bajo condiciones de reflexión total hemos visto que:

$$\beta = 90^\circ \pm i\beta' \tag{B.2.100}$$

$$\sin\beta = \cosh\beta' = n_r \sin\alpha \tag{B.2.101}$$

$$\cos\beta = \mp i \sinh\beta' \tag{B.2.102}$$

El campo eléctrico en general será

$$E_z = Be^{ik_2(x \sin\beta - y \cos\beta)} = Be^{ik_2(x \cosh\beta' \pm iy \sinh\beta')} \tag{B.2.103}$$

Sólo el signo negativo (que da como resultado $k_2 y \sinh\beta'$) tiene significado físico, ya que si no el campo tendería a infinito cuando $y \rightarrow -\infty$. Por tanto el campo en el medio menos denso vale:

$$E_z = Be^{k_2 y \sinh\beta'} e^{ik_2 x \cosh\beta'} \tag{B.2.104}$$

Esta es la onda evanescente que decrece exponencialmente conforme se aleja de $y=0$ (y es negativo en el medio menos denso). Como $k_2 \sinh\beta'$ es del orden de λ^{-1} , la onda desaparece en unos pocos longitudes de onda. Aun así esta onda se aprovecha en dispositivos como acopladores, interruptores, etc.

B.2.5. La propagación de ondas en cristales

Ya hemos visto que un cristal posee propiedades anisótropas. Esto se traduce en que si la luz se propaga en diferentes direcciones verá diferentes índices de refracción y se propagará con diferente velocidad. Estas propiedades anisótropas se utilizan en gran cantidad de dispositivos ópticos, tanto pasivos como activos. Como elementos pasivos cabe destacar las placas de cuarto de onda que modifican la polarización de la luz. Los elementos activos que

aprovechan la anisotropía de los cristales son los cristales líquidos, dispositivos acústico-ópticos, etc. Vamos a ver en este apartado la propagación de la luz en medios anisótropos.

En un medio isótropo la propagación de ondas de luz se caracteriza por una constante dieléctrica independiente de la dirección. En cristales esto no es así. El desplazamiento eléctrico \vec{D} y el campo eléctrico \vec{E} se relacionan por el tensor de constante dieléctrica dado a continuación.

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_{xx}E_x + \epsilon_{xy}E_y + \epsilon_{xz}E_z \\ D_y &= \epsilon_{yx}E_x + \epsilon_{yy}E_y + \epsilon_{yz}E_z \\ D_z &= \epsilon_{zx}E_x + \epsilon_{zy}E_y + \epsilon_{zz}E_z \end{aligned} \quad (\text{B.2.105})$$

o, de forma abreviada:

$$D_i = \sum_j \epsilon_{ij} E_j \quad (\text{B.2.106})$$

cumpliéndose que $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$, por lo que sus nueve componentes se reducen a seis independientes.

Un concepto muy utilizado para describir la propagación de una onda es el elipsoide de Fresnel. La densidad de energía asociada al campo eléctrico viene dada por $\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$ donde:

$$E \cdot D = \sum_{ij} \epsilon_{ij} E_i E_j = K \quad (\text{B.2.107})$$

$$K = \sum_{ij} \epsilon_{ij} E_i E_j = \epsilon_{xx} E_x^2 + \epsilon_{yy} E_y^2 + \epsilon_{zz} E_z^2 + 2\epsilon_{xy} E_x E_y + 2\epsilon_{xz} E_x E_z + 2\epsilon_{yz} E_y E_z \quad (\text{B.2.108})$$

Si en la ecuación anterior prescindimos de factores dimensionales y ponemos $E_x = X$, $E_y = Y$ y $E_z = Z$ tendremos la ecuación:

$$\epsilon_{xx} X^2 + \epsilon_{yy} Y^2 + \epsilon_{zz} Z^2 + 2\epsilon_{xy} XY + 2\epsilon_{xz} XZ + 2\epsilon_{yz} YZ = K \quad (\text{B.2.109})$$

que referida a un sistema cartesiano X, Y, Z es una elipsoide. Como este elipsoide sólo tiene en su ecuación términos de 2º grado, está referida a ejes con origen en su centro. Por tanto, mediante un simple giro del triedro de referencia podemos referirla a sus propios ejes de simetría X', Y' y Z' , modificándose todos los coeficientes del primer miembro pero no el término independiente, con lo que la ecuación tomará la forma:

$$\epsilon_x X'^2 + \epsilon_y Y'^2 + \epsilon_z Z'^2 = K \quad (\text{B.2.110})$$

donde $X' Y' Z'$ representan las componentes de E respecto a estos nuevos ejes, y ϵ_x , ϵ_y y ϵ_z las componentes del tensor de constante dieléctrica una vez diagonalizado. Las relaciones entre el desplazamiento eléctrico D y el campo eléctrico E en este sistema de referencia se simplifican, convirtiéndose en:

$$\begin{aligned} D_{X'} &= \epsilon_x E_{X'} \\ D_{Y'} &= \epsilon_y E_{Y'} \\ D_{Z'} &= \epsilon_z E_{Z'} \end{aligned} \quad (\text{B.2.111})$$

Las constantes ϵ_x , ϵ_y y ϵ_z se llaman *constantes dieléctricas principales*. En las direcciones de los ejes del elipsoide, que siempre existen físicamente en cualquier punto del cristal, los vectores D y E son paralelos, como se deduce de la ecuación anterior.

Si, en el elipsoide anterior hacemos una reducción de escala tomando como nueva $x = X'/\sqrt{K}$, y análogamente para las demás coordenadas, se obtiene un elipsoide homotético del anterior:

$$\epsilon_x x^2 + \epsilon_y y^2 + \epsilon_z z^2 = 1 \quad (\text{B.2.112})$$

que se llama **elipsoide de Fresnel**, de semiejes $1/\sqrt{\epsilon_x}$, $1/\sqrt{\epsilon_y}$ y $1/\sqrt{\epsilon_z}$.

Si ahora tenemos en cuenta la relación $n_r = \sqrt{\epsilon/\epsilon_0}$ y en lugar de tomar las coordenadas cartesianas en sustitución de las componentes de E , se toman las de D teniendo en cuenta que $E = [\epsilon]^{-1} \cdot D$, siendo las componentes de $[\epsilon]^{-1}$ las recíprocas $1/\epsilon_x$, $1/\epsilon_y$, $1/\epsilon_z$, con los correspondientes cambios de escala se llegaría al elipsoide:

$$\frac{x^2}{n_{rx}^2} + \frac{y^2}{n_{ry}^2} + \frac{z^2}{n_{rz}^2} = 1 \quad (\text{B.2.113})$$

donde n_{rx} , n_{ry} y n_{rz} son los índices de refracción principales. Dicha elipsoide que tiene como semiejes los índices de refracción principales n_{rx} , n_{ry} y n_{rz} recibe el nombre de **elipsoide de índices**.

Tanto los experimentos como la teoría (basada en las ecuaciones de Maxwell y en la discusión anterior) muestran que

en un medio anisótropo, a cada dirección de propagación de una onda electromagnética plana corresponden dos posibles estados de polarización mutuamente perpendiculares, cada uno de los cuales se propaga con diferente velocidad.

De este modo, cualquiera que sea el estado inicial de polarización, cuando una onda electromagnética penetra en una sustancia anisótropa, se separa en dos ondas, polarizadas en direcciones perpendiculares y que se propagan con diferentes velocidades. No ocurre así en un material isótropo en que podemos tener una polarización arbitraria en el plano perpendicular a la dirección de propagación.

A continuación vamos a ver cómo se puede determinar la velocidad y estado de polarización de la luz propagándose en un cristal en una dirección determinada a partir del elipsoide de índices. Para hacerlo se utiliza un método geométrico sugerido por el físico francés Agustín Fresnel.

Para calcular la polarización dibujamos un plano perpendicular a la dirección de propagación k por el centro C del elipsoide de índices. La intersección del plano con el elipsoide es una elipse. Las direcciones de ejes principales de la elipse AA' y BB' determinan los planos de polarización de la onda para la dirección de propagación dada siendo paralelas a las componentes D_a y D_b del vector de desplazamiento eléctrico. Las longitudes de los semiejes de la elipse CA y CB dan los índices de refracción n_a y n_b para cada polarización y, por tanto, la velocidad de la luz con ambas polarizaciones que será c/n_a y c/n_b .

Si la luz se propaga a lo largo del eje x la luz estará polarizada a lo largo de los ejes y y z con velocidades c/n_{ry} y c/n_{rz} .

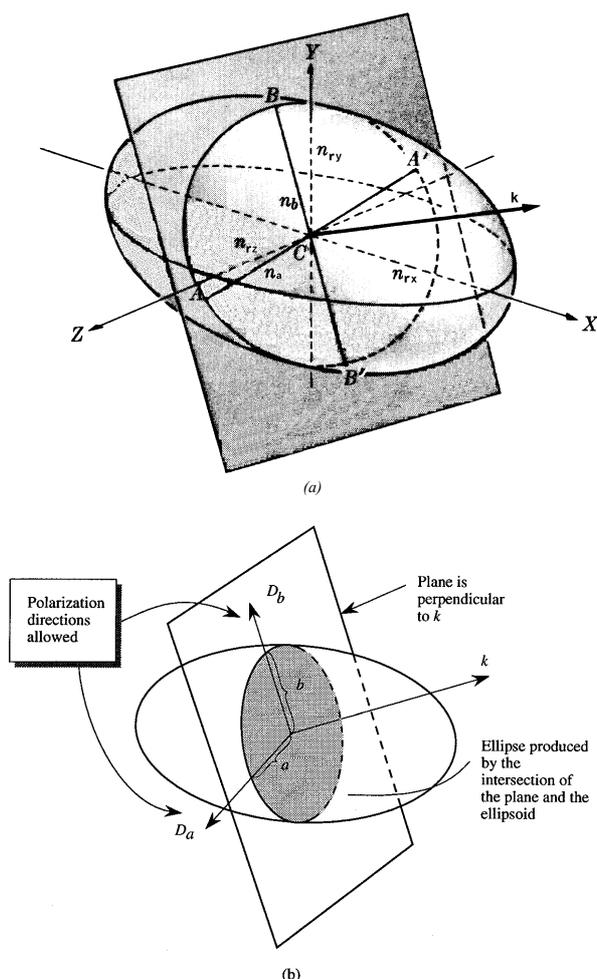


Fig. B.2.12: (a) Construcción geométrica para obtener la polarización de la onda. (b) Direcciones de polarización permitidas. Estas son paralelas a las componentes D_a y D_b del vector de desplazamiento eléctrico.

Los medios isotrópicos se caracterizan por el hecho de que los tres índices principales de refracción son iguales, es decir, $n_{rx} = n_{ry} = n_{rz}$. El elipsoide de índices es una esfera y el índice de refracción es el mismo en todas las direcciones. Por consiguiente, no existe una dirección especial de polarización, ya que todas las intersecciones son circunferencias.

Otro caso especial es aquel en que dos de los tres índices de refracción principales son iguales, por ejemplo $n_{ry} = n_{rz} \neq n_{rx}$. La dirección que corresponde al índice desigual n_{rx} , se llama eje óptico; éste es un eje de simetría del cristal. Por esta razón estas sustancias se denominan **cristales uniáxicos**. Cuando $n_{ry} = n_{rz} < n_{rx}$, el cristal se llama positivo; cuando $n_{ry} = n_{rz} > n_{rx}$ se llama negativo. El elipsoide de índices de un cristal uniáxico es un elipsoide de

revolución alrededor del eje óptico. Por las propiedades geométricas de un elipsoide de revolución sabemos que la intersección con un plano que pasa por su centro C y es perpendicular a la dirección de propagación k , es una elipse, uno de cuyos ejes (CO) es siempre igual a $n = n_{ry} = n_{rz}$ y está dirigido perpendicularmente a la dirección de propagación y al eje óptico, mientras que el otro eje (CE) tiene una longitud n_e que varía entre n y n_{rx} y está en el plano determinado por la dirección de propagación y el eje óptico. En este caso podemos definir dos ondas: ordinaria y extraordinaria.

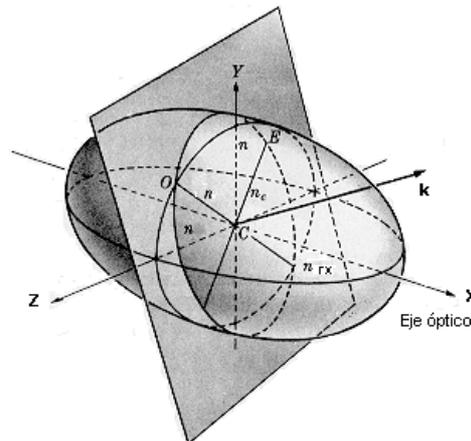


Fig. B.2.13: Direcciones de polarización de los rayos ordinario y extraordinario en un cristal uniaxial para una dirección arbitraria de propagación.

La onda ordinaria está polarizada linealmente en el plano determinado por CO y k y es por lo tanto perpendicular al plano determinado por la dirección de propagación y el eje óptico. La onda ordinaria se propaga en todas las direcciones con la misma velocidad c/n . Por tanto, se comporta como una onda en un medio isótropo siendo ésta la razón de su denominación.

La onda extraordinaria está polarizada linealmente en el plano determinado por CE y k ó (lo que es lo mismo) por la dirección de propagación y el eje óptico; pero su velocidad v_e depende de la dirección de propagación, variando entre c/n y $v_x = c/n_{rx}$ (correspondientes a índices de refracción n y n_{rx} respectivamente) al variar dicha dirección, manteniéndose siempre en el plano perpendicular a ésta.

Cuando las ondas se propagan según el eje óptico, la elipse de intersección es una circunferencia de radio n y las dos ondas se propagan con la misma velocidad c/n . Esto puede considerarse como otra definición de eje óptico; el eje óptico es la dirección según la cual hay una sola velocidad de propagación. Cuando las ondas se propagan perpendicularmente al eje óptico, la elipse de intersección tiene por semiejes n_{rx} y n y la onda extraordinaria tiene la velocidad v_x .

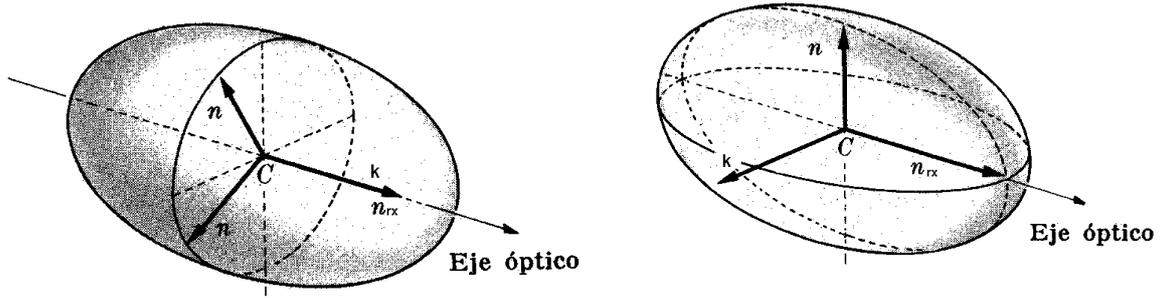


Fig. B.2.14: Direcciones de polarización de los rayos ordinario y extraordinario en un cristal uniaxial para una propagación (a) paralela, (b) perpendicular al eje óptico,

Los componentes fotónicos serán en general materiales uniaxiales. Estos materiales son los más utilizados para la modulación de la luz. Si en un cristal uniaxial, la luz se propaga en una dirección diferente de la del eje óptico, se generará un desfase entre las dos polarizaciones debido a que la velocidad de propagación es diferente. Este retraso se puede aprovechar para diseñar dispositivos que puedan modificar la polarización de la luz. Si además podemos modificar el índice de refracción activamente entonces podremos modular la señal luminosa.

Si tenemos una onda luminosa propagándose en una dirección k (dentro del plano x - y) y con un ángulo θ con el eje óptico (eje x) del material entonces las dos componentes del desplazamiento estarán alineadas a lo largo de los semiejes principales de la elipse de corte con el elipsoide de índices del material. La onda polarizada en dirección z es la onda ordinaria y la onda polarizada perpendicularmente a ella es la extraordinaria. Se cumple que:

$$\frac{1}{n_e^2(\theta)} = \frac{\cos^2 \theta}{n^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_{rx}^2} \tag{B.2.114}$$

Si la onda se propaga a lo largo del eje x (eje óptico, $\theta = 0$), $n_e(\theta) = n$ y si se propaga a lo largo del eje y , $n_e(\theta) = n_{rx}$.

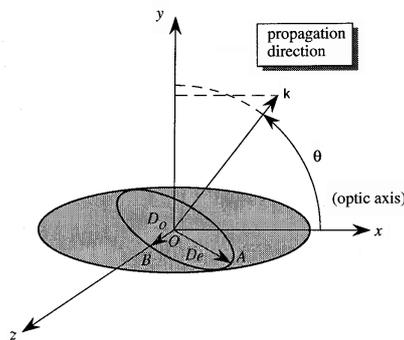


Fig. B.2.15: Polarización de un haz óptico propagándose en dirección k y formando un ángulo θ con el eje óptico.

En el caso más general de tres índices de refracción diferentes ($n_{ry} \neq n_{rz}$, $n_{rx} \neq n_{rz}$ y $n_{rx} \neq n_{ry}$), se puede probar que hay dos direcciones para las cuales las velocidades de

propagación de dos ondas polarizadas son iguales. Estas direcciones, también llamadas ejes ópticos, son perpendiculares a los planos cuyas intersecciones con el elipsoide de índices son circunferencias. Las sustancias en las cuales estos ejes existen se llaman **biáxicas**.

B.2.6. Modulación de la luz por control de la polarización

En optoelectrónica es de vital importancia el control de la intensidad de la luz. Estamos todos familiarizados con el uso de transparencias sobre las cuales es posible escribir. En aquellos sitios en que escribimos estamos modulando (o modificando) la intensidad de la luz que atraviesa la transparencia por lo que nuestra escritura puede ser vista como un sistema óptico sencillo. La necesidad de "transparencias programables" cae dentro del área de la tecnología de visualización. Las pantallas de cristal líquido (utilizadas por ejemplo en calculadoras) son dispositivos ya conocidos que funcionan como transparencias programables. Los moduladores de luz también se pueden utilizar para comunicaciones ópticas y para comparar imágenes. Existen además sugerencias para utilizar estos dispositivos para multiplicar matrices por matrices y matrices por vectores.

La técnica más utilizada es la utilización conjunta de polarizadores con un dispositivo activo que modifica la polarización de la luz. Podemos por ejemplo colocar dos polarizadores a ambos lados de un elemento activo. Este elemento activo es un cristal (o cristal líquido) que tiene dos índices de refracción, n_{re} y n_{r0} , diferentes para las ondas ordinaria y extraordinaria. Además mediante una perturbación externa se puede modificar la diferencia entre n_{re} y n_{r0} . Esta alteración puede producirse aplicando un campo eléctrico externo y utilizando un efecto llamado efecto electro-óptico que será tratado con posterioridad en este tema.

Vamos a considerar primeramente el caso de un modulador electro-óptico basado en cristales tales como el niobato de litio. Más adelante consideraremos el caso de un cristal líquido nemático girado. Supongamos que entra luz linealmente polarizada en el cristal y que los ejes x e y son los ejes de polarización. En general las dos direcciones tienen índices de refracción diferente y por tanto se genera una diferencia de fase entre ambas polarizaciones. Supongamos que las dos señales de entrada vienen dadas por:

$$E_x = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i\omega t} \tag{B.2.115}$$

$$E_y = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i\omega t} \tag{B.2.116}$$

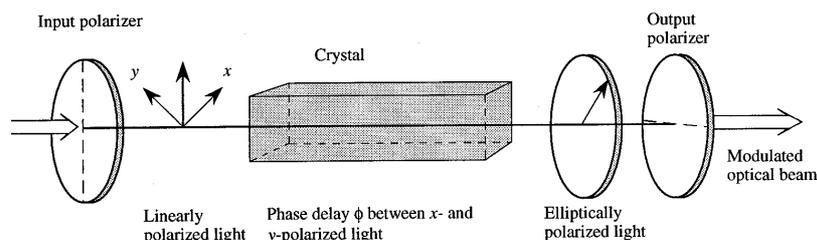


Fig. B.2.16: Esquema de cómo el cambio en la polarización producido por un cristal puede modificar la intensidad de un haz luminoso.

Después de la transmisión a través del modulador, la onda que emerge tendrá una polarización general dada por

$$E_x = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i\omega t + i\theta_1} \quad (\text{B.2.117})$$

$$E_y = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i\omega t + i\theta_2} \quad (\text{B.2.118})$$

con una diferencia de fase dada por $\phi = \theta_2 - \theta_1$. Si $\phi = 90^\circ$, el haz de salida estará polarizado circularmente y si $\phi = 180^\circ$ estará polarizado linealmente con un ángulo de 90° con respecto al haz de entrada. Si el haz de salida pasa entonces por un polarizador a 90° con respecto al polarizador de entrada, la relación de modulación vendrá dada por (si suponemos que no hay pérdidas por absorción),

$$\frac{I_{out}}{I_{in}} = \sin^2 \frac{\phi}{2} \quad (\text{B.2.119})$$

Por tanto si podemos controlar ϕ con un campo eléctrico, podemos modular la intensidad.

Propiedades de modulación y polarización de un nemático girado.

Tal y como se estudio con anterioridad, el cristal líquido es un material que posee un orden de largo alcance a lo largo de alguna dirección. Además, como el material está constituido por moléculas con forma de barra o de disco, presenta una fuerte anisotropía entre n_{re} y n_{r0} . Tal y como se comentó, en un cristal líquido nemático, es posible introducir un giro en el orden en que las moléculas están alineadas utilizando dos placas transparentes previamente frotadas en una dirección determinada. Como consecuencia, el eje óptico del cristal líquido cambia de un punto a otro, cambiando también la dirección de las polarizaciones correspondientes a los rayos ordinario y extraordinario.

Para describir como se propaga la luz (es decir, cómo cambia la polarización) a través de un cristal nemático girado se utiliza la llamada **aproximación adiabática**. Esta aproximación supone que el giro se produce de forma suave. La aproximación se puede suponer correcta ya que un giro de 90° se produce a lo largo de varias micras (distancia grande comparada con la longitud de onda) y por tanto la luz responde teniendo en cuenta los índices de refracción y los ejes de polarización locales. Por tanto la polarización de la luz va variando de forma suave conforme viaja a lo largo del cristal.

A partir de la aproximación adiabática, podemos observar que existen dos causas del cambio en la polarización en un cristal líquido nemático girado: i) como consecuencia de la diferencia entre n_{re} y n_{r0} , la diferencia de fase entre los dos rayos provoca un cambio de la polarización. Este efecto lo hemos descrito en el punto anterior y produce una modulación de la luz descrita por la expresión que ya hemos visto; ii) además, debido al giro en el cristal se produce una rotación de la polarización. Es este último efecto el que más se aprovecha en dispositivos de cristal líquido.

De acuerdo con la aproximación adiabática, si el ángulo de giro es de 90° (o 270°) de la placa frotada superior a la inferior y si la luz incidente está polarizada como una de las dos ondas, la extraordinaria o la ordinaria, tendremos las siguientes posibilidades:

- i) Si el polarizador de salida está en la misma dirección que el polarizador de entrada la intensidad de salida será cero.
- ii) Si el polarizador de salida está girado 90° con respecto al de entrada la luz atraviesa el sistema.

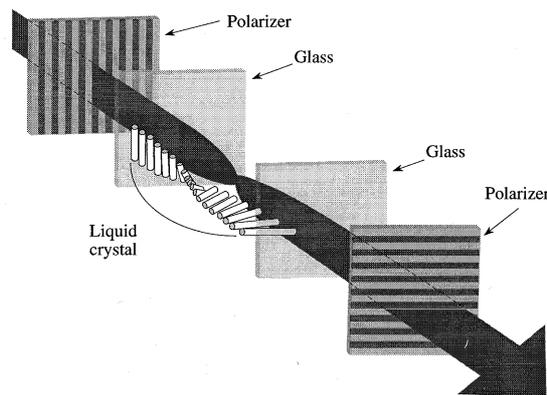


Fig. B.2.17: Esquema de un cristal líquido nemático girado. Con la aproximación adiabática si el giro es suave la polarización de la luz simplemente sigue el giro.

Un estudio más detallado para el caso más general de que la luz no esté polarizada como onda ordinaria o extraordinaria, si no como combinación de ambas, da como resultado que la transmitancia viene dada por la siguiente expresión para un giro de 90° ,

$$T = \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\phi}{\pi} \right)^2} \right)}{1 + (\phi)^2} \quad (\text{B.2.120})$$

donde ϕ es la diferencia de fase producida debido a la diferencia entre los índices de refracción n_{re} y n_{r0} y para un dispositivo de grosor d ,

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_{re} - n_{r0}) d \quad (\text{B.2.121})$$

Si ϕ es mucho mayor que 180° entonces T tiende a cero.

Ya vimos que en un cristal uniaxial el eje óptico es el eje a lo largo del cual se propaga la luz con la misma velocidad independientemente de la polarización. El visualizador de cristal líquido depende de la capacidad de variar el eje óptico (también conocido como el director del cristal líquido) por medio de una perturbación externa (campo eléctrico). Consideremos los siguientes casos: a) el eje óptico es paralelo al polarizador de entrada (el índice de refracción es n_{re} para luz polarizada paralelamente al eje óptico). En este caso el valor de ϕ es máximo y la transmitancia T , para el caso que el polarizador de salida esté en paralelo con el polarizador de entrada, es mínima; b) una perturbación externa obliga al eje

óptico a orientarse a lo largo de la dirección de propagación de forma que no hay retraso en la propagación de la luz polarizada en diferentes direcciones. En este caso el cristal líquido es transparente, ya que la luz se propaga con su polarización inicial. Esto también se cumple para $\phi = 0$ en la ecuación anterior.

Por tanto alterando el eje óptico podemos cambiar el dispositivo de opaco a transparente, lo cual es lo que se supone hacen los dispositivos visualizadores de cristal líquido.

Efecto electro-óptico en cristales.

Acabamos de ver como dos polarizadores se pueden utilizar para bloquear o transmitir señales ópticas. Esto es de suma importancia en dispositivos ópticos “inteligentes” en los que se pueden cambiar sus propiedades ópticas (índice de refracción) mediante un estímulo externo. En principio, una gran variedad de estímulos externos tales como campos eléctricos, campos magnéticos, presión etc., pueden modificar las propiedades ópticas tales como el índice de refracción. Sin embargo, para aplicaciones ópticas la que más nos interesa es la utilización de campos eléctricos.

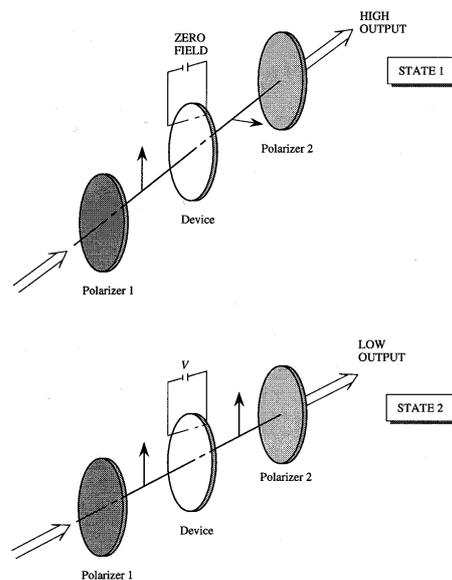


Fig. B.2.18: Posibles disposiciones de polarizadores y un dispositivo para controlar la intensidad luminosa mediante la polarización.

La idea es colocar dos polarizadores cruzados o paralelos delante y detrás de un dispositivo fotónico. Con un campo eléctrico podemos modificar el índice de refracción de nuestro componente (en realidad la diferencia de los índices de refracción $n_{re}-n_{r0}$) y así cambiar la polarización de la luz que lo atraviesa. De esta manera controlamos la intensidad de la luz que atraviesa todo el sistema. El efecto del campo eléctrico sobre las propiedades ópticas depende de la simetría del cristal y si las moléculas se pueden girar o no como en cristales líquidos. En cristales sólidos los átomos de la estructura están fijos y no se mueven físicamente, pero la “nube electrónica” en la capa más externa se distorsiona al aplicarle un

campo eléctrico externo. Esta distorsión se manifiesta como pequeños cambios de los índices de refracción.