Las matemáticas del cubo de Rubik

Ramón Esteban Romero[1]

Universitat Politècnica de València

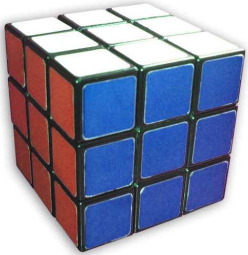
Burjassot, 7 de abril de 2011

Esquema

1. El cubo de Rubik
   - El cubo de Rubik
   - Notación
2. Grupos de permutaciones
   - Las simetrías del cuadrado
   - Permutaciones pares e impares
3. El grupo del cubo de Rubik
   - Algunas observaciones
   - Notación cíclica para el cubo de Rubik
   - Movimientos posibles e imposibles en el cubo de Rubik
   - Procedimientos interesantes y método de resolución
4. Otras cuestiones sobre el cubo de Rubik
   - El número de elementos del cubo de Rubik
   - Órdenes de elementos

El cubo de Rubik
El cubo de Rubik

El cubo de Rubik o cubo mágico es un rompecabezas mecánico inventado por el escultor y profesor de arquitectura húngaro Ernő Rubik el año 1974.



El cubo de Rubik
El cubo de Rubik

El cubo de Rubik consta de:

- 8 piezas-vértice de 3 colores,
- 12 piezas-arista de 2 colores,
- 6 piezas centrales y la estructura.

El cubo de Rubik

El cubo de Rubik

- Posición inicial: cada cara de un color.
- Juego: devolver el cubo a su posición inicial.
- 4 movimientos bastan para descomponer el cubo totalmente.
- Récord: 6,65 segundos, Feliks Zemdegs, Melbourne Summer Open, 2011.

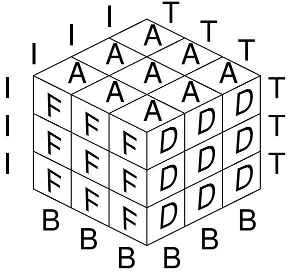
El cubo de Rubik
Notación

Caras:

A: Arriba
B: Bajo

D: Derecha
I: Izquierda

F: Frontal
T: Trasera



Podemos referirnos con esta notación a

- caras,
- piezas,
- posiciones.

El cubo de Rubik
Notación

Movimientos básicos:

A: Movimiento de la cara A 90° en sentido horario

B: Movimiento de la cara B 90° en sentido horario

D: Movimiento de la cara D 90° en sentido horario

I: Movimiento de la cara I 90° en sentido horario

F: Movimiento de la cara F 90° en sentido horario

T: Movimiento de la cara T 90° en sentido horario

(siempre vistos desde delante de la cara)

El cubo de Rubik
Notación

Movimientos básicos:

A: Movimiento de la cara A 90° en sentido horario

B: Movimiento de la cara B 90° en sentido horario

D: Movimiento de la cara D 90° en sentido horario

I: Movimiento de la cara I 90° en sentido horario

F: Movimiento de la cara F 90° en sentido horario

T: Movimiento de la cara T 90° en sentido horario

(siempre vistos desde delante de la cara)

Un movimiento del cubo es una secuencia de movimientos básicos. El movimiento identidad consiste en no mover ninguna pieza.

El cubo de Rubik
Notación

D^2: mover la cara D 180°.

D^3 o D^{-1}: mover la cara D 90° en sentido antihorario.

FD: primero efectuar el movimiento F, luego el movimiento D.

Los movimientos del cubo forman un grupo:

- la composición de dos movimientos es un movimiento,
- la composición de movimientos es asociativa,
- el movimiento identidad es elemento neutro,
- el inverso de un movimiento es otro movimiento.

El cubo de Rubik
Notación

D^2: mover la cara D 180°.

D^3 o D^{-1}: mover la cara D 90° en sentido antihorario.

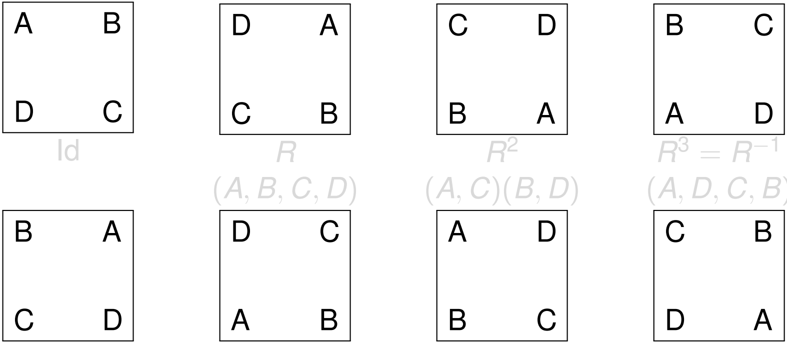
FD: primero efectuar el movimiento F, luego el movimiento D.

Los movimientos del cubo forman un grupo:

- la composición de dos movimientos es un movimiento,
- la composición de movimientos es asociativa,
- el movimiento identidad es elemento neutro,
- el inverso de un movimiento es otro movimiento.

Grupos de permutaciones

Las simetrías del cuadrado



Id

R — (A, B, C, D)

R^2 — $(A, C)(B, D)$

$R^3 = R^{-1}$ — (A, D, C, B)

V — $(A, B)(C, D)$

H — $(A, D)(B, C)$

D_1 — (B, D)

D_2 — (A, C)

$$RV = (A, B, C, D)(A, B)(C, D) = (B, D) = D_1$$

Grupos de permutaciones
Las simetrías del cuadrado

Id	R	R^2	$R^3 = R^{-1}$
A B	D A	C D	B C
D C	C B	B A	A D
	(A, B, C, D)	$(A, C)(B, D)$	(A, D, C, B)

V	H	D_1	D_2
B A	D C	A D	C B
C D	A B	B C	D A
$(A, B)(C, D)$	$(A, D)(B, C)$	(B, D)	(A, C)

$$RV = (A, B, C, D)(A, B)(C, D) = (B, D) = D_1$$

Grupos de permutaciones
Las simetrías del cuadrado

A B	D A	C D	B C
D C	C B	B A	A D
Id	R	R^2	$R^3 = R^{-1}$
	(A, B, C, D)	$(A, C)(B, D)$	(A, D, C, B)

B A	D C	A D	C B
C D	A B	B C	D A
V	H	D_1	D_2
$(A, B)(C, D)$	$(A, D)(B, C)$	(B, D)	(A, C)

$$RV = (A, B, C, D)(A, B)(C, D) = (B, D) = D_1$$

Grupos de permutaciones
Las simetrías del cuadrado

A B D C	D A C B	C D B A	B C A D
Id	R	R^2	$R^3 = R^{-1}$
	(A, B, C, D)	$(A, C)(B, D)$	(A, D, C, B)
B A C D	D C A B	A D B C	C B D A
V	H	D_1	D_2
$(A, B)(C, D)$	$(A, D)(B, C)$	(B, D)	(A, C)

$$RV = (A, B, C, D)(A, B)(C, D) = (B, D) = D_1$$

Grupos de permutaciones
Las simetrías del cuadrado

	Id	R	R^2	R^3	V	H	D_1	D_2
Id	Id	R	R^2	R^3	V	H	D_1	D_2
R	R	R^2	R^3	Id	D_1	D_2	H	V
R^2	R^2	R^3	Id	R	H	V	D_2	D_1
R^3	R^3	Id	R	R^2	D_2	D_1	V	H
V	V	D_2	H	D_1	Id	R^2	R^3	R
H	H	D_1	V	D_2	R^2	Id	R	R^3
D_1	D_1	V	D_2	H	R	R^3	Id	R^2
D_2	D_2	H	D_1	V	R^3	R	R^2	Id

Grupos de permutaciones
Permutaciones pares e impares

- Llamamos trasposición a un ciclo de longitud 2.
- $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = (a_1, a_2)(a_1, a_3)\cdots(a_1, a_n)$
- La descomposición de una permutación como producto de trasposiciones no es única:

$$(1,2,3) = (4,5)(3,6)(1,2)(1,6)(4,5)(3,6) = (1,2)(1,3)$$

Sin embargo, no es posible que una trasposición admita una descomposición en número par de trasposiciones y otra en número impar de permutaciones.

Grupos de permutaciones

Permutaciones pares e impares

Definition

Una permutación es par (impar) si es producto de un número par (impar) de trasposiciones.

Teorema

- *El producto de dos permutaciones pares es par.*
- *El producto de dos permutaciones impares es par.*
- *El producto de una permutación par y una impar es impar.*
- *El producto de una permutación impar y una par es impar.*
- *La inversa de una permutación par es par.*
- *La inversa de una permutación impar es impar.*

El grupo del cubo de Rubik

Algunas observaciones

- El cubo de Rubik es un grupo de permutaciones de las 48 pegatinas no centrales del cubo.
- Las pegatinas de los vértices van a vértices, y las de las aristas van a aristas: las pegatinas de las aristas forman una órbita y las de los vértices forman otra órbita.
- Si nos fijamos en la acción de los movimientos sobre las pegatinas de los vértices, no es posible separar las tres pegatinas de cada vértice: constituyen un bloque para esta acción ($Bg = B$ o $B \cap Bg = \emptyset$). Lo mismo pasa con las aristas y sus dos pegatinas.

El grupo del cubo de Rubik

Algunas observaciones

El grupo del cubo de Rubik no es abeliano: $FD \neq DF$.

El grupo del cubo de Rubik
Notación cíclica para el cubo de Rubik

- Adaptamos la notación de ciclos para que respete los bloques (piezas)

$$F = (FA, FD, FB, FI)(ADF, DBF, BIF, IAF)$$

- Torcer un vértice en sentido horario (antihorario):

$$(ADF, DFA, FAD) = (ADF)_+ \quad (ADF, FAD, DFA) = (ADF)_-$$

- Torcer una arista: $(AF, FA) = (AF)_+$
- Ciclos con torsión:

$$(ADF, DBF, DFA, BFD, FAD, FDB) = (ADF, DBF)_+$$
$$(AF, BF, FA, FB) = (AF, BF)_+$$

El grupo del cubo de Rubik

Notación cíclica para el cubo de Rubik

$$\begin{aligned} FD &= (FA, FD, FB, FI)(ADF, DBF, BIF, IAF) \\ &\quad \cdot (FD, AD, TD, BD)(ADF, TDA, BDT, FDB) \\ &= (FA, FD, FB, FI)(FD, AD, TD, BD) \\ &\quad \cdot (ADF, DBF, BIF, IAF)(ADF, TDA, BDT, FDB) \\ &= (FA, AD, TD, BD, FD, FB, FI) \\ &\quad \cdot (ADF)_{+}(DBF, BIF, IAF, TDA, BDT)_{-}. \end{aligned}$$

El grupo del cubo de Rubik
Movimientos posibles e imposibles en el cubo de Rubik

Cada movimiento básico es un producto de un 4-ciclo de vértices y un 4-ciclo de aristas: es una permutación par de las piezas del cubo.

$$F = (FA, FD, FB, FI)(ADF, DBF, BIF, IAF)$$

Teorema

Cada uno de los movimientos del cubo induce una permutación par en el conjunto de las piezas del cubo.

Por tanto, es imposible intercambiar solo dos vértices del cubo o solo dos aristas del cubo, porque una trasposición es una permutación impar.

El grupo del cubo de Rubik

Movimientos posibles e imposibles en el cubo de Rubik: torsiones de vértices

Fijamos una orientación para los vértices:

$$\{ADF, ATD, AIT, AFI, BFD, BDT, BTI, BIF\}$$

El movimiento A los traslada a

$$\{AFI, AIT, ATD, ADF, BFD, BDT, BTI, BIF\}$$

(igual orientación).

El grupo del cubo de Rubik

Movimientos posibles e imposibles en el cubo de Rubik: torsiones de vértices

Fijamos una orientación para los vértices:

$$\{ADF, ATD, AIT, AFI, BFD, BDT, BTI, BIF\}$$

El movimiento F los traslada a

$$\{DBF, ATD, AIT, DFA, IFB, BDT, BTI, IAF\},$$

o sea,

$$\{DFA, ATD, AIT, IAF, DBF, BDT, BTI, IFB\}.$$

La torsión de las piezas es $(2, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 2)$ (múltiplo de 3).

El grupo del cubo de Rubik

Movimientos posibles e imposibles en el cubo de Rubik: torsiones de vértices y aristas

Teorema

La torsión total de los vértices es múltiplo de 3.

Análogamente,

Teorema

La torsión total de las aristas es múltiplo de 2.

Es imposible obtener $(ADF)_+$, $(ADF)_-(AFI)_-$ o $(AF)_+$ con movimientos del cubo.

El grupo del cubo de Rubik
Procedimientos interesantes y método de resolución

$$P_1(F, D) = (F^2 D^2)^3 = (AF, BF)(AD, BD).$$

¿Y si queremos permutar $(DF, IF)(AD, BD)$?

1. Con F giramos a una posición en la que DF, IF pasan a AF, BF, respectivamente,
2. efectuamos $P_1(F, D)$,
3. deshacemos el movimiento F (efectuamos F^{-1}).

Entonces $F(F^2 D^2)^3 F^{-1} = (DF, IF)(AD, BD)$.

Definición

$h^{-1}gh$ es el conjugado de g por h.

El grupo del cubo de Rubik
Procedimientos interesantes y método de resolución

$A^{-1}B$ traslada AF, BF a AD, BD, respectivamente. F traslada FI, FD a AF, BF, respectivamente. Por tanto,

$$A^{-1}BF(F^2D^2)^3F^{-1}B^{-1}A = (FI, FD)(AF, BF).$$

Mediante conjugados adecuados, podremos obtener todos los posibles productos de dos trasposiciones.

El grupo del cubo de Rubik

Procedimientos interesantes y método de resolución

$A^{-1}B$ traslada AF, BF a AD, BD, respectivamente. F traslada FI, FD a AF, BF, respectivamente. Por tanto,

$$A^{-1}BF(F^2D^2)^3F^{-1}B^{-1}A = (FI, FD)(AF, BF).$$

Mediante conjugados adecuados, podremos obtener todos los posibles productos de dos trasposiciones.

El grupo del cubo de Rubik
Procedimientos interesantes y método de resolución

¿Y si queremos un 3-ciclo?
Notemos que $(1,2,3) = (1,2)(2,3) = (1,2)(4,5) \cdot (1,3)(4,5)$.
Como sabemos obtener los productos de dos trasposiciones, podemos obtener nuestro 3-ciclo.
Con esta misma técnica:

Teorema

Es posible obtener cualquier permutación par de aristas con movimientos legales del cubo.

El grupo del cubo de Rubik

Procedimientos interesantes y método de resolución

¿Y si queremos un 3-ciclo?
Notemos que $(1,2,3) = (1,2)(2,3) = (1,2)(4,5)\cdot(1,3)(4,5)$.
Como sabemos obtener los productos de dos trasposiciones, podemos obtener nuestro 3-ciclo.
Con esta misma técnica:

Teorema

Es posible obtener cualquier permutación par de aristas con movimientos legales del cubo.

El grupo del cubo de Rubik

Procedimientos interesantes y método de resolución

$$(AF, FB)(AD, BD) \cdot (AF, BF)(AD, BD) = (AF)_+(FB)_+.$$

Como

$$B^2 FDAD^{-1} B^2 (F^2 D^2)^3 B^2 DA^{-1} D^{-1} F^{-1} B^2 = (AF, FB)(AD, BD),$$

entonces

$$B^2 FDAD^{-1} B^2 (F^2 D^2)^3 B^2 DA^{-1} D^{-1} F^{-1} B^2 (F^2 D^2)^3 = (AF)_+(FB)_+.$$

Teorema

Es posible torcer dos aristas con movimientos legales del cubo.

El grupo del cubo de Rubik
Procedimientos interesantes y método de resolución

Consideremos el conmutador

$$\begin{aligned} P_2(F,D) &= FDF^{-1}D^{-1} \\ &= (ADF, AFI)_+(DBF, DTB)_-(AF, DF, DB). \end{aligned}$$

y su cuadrado y su cubo:

$$\begin{aligned} P_3(F,D) = (P_2(F,D))^2 &= (ADF)_+(AFI)_+(DBF)_-(TBD)_- \\ &\cdot (AF, DB, DF) \\ P_4(F,D) = (P_2(F,D))^3 &= (ADF, FIA)(BDT, DBF). \end{aligned}$$

El grupo del cubo de Rubik
Procedimientos interesantes y método de resolución

$$P_3(F,D) = \big(P_2(F,D)\big)^2 = (ADF)_+(AFI)_+(DBF)_-(TBD)_- \cdot (AF, DB, DF)$$

$$P_4(F,D) = \big(P_2(F,D)\big)^3 = (ADF, FIA)(BDT, DBF).$$

- Con conjugados de movimientos P_4 podemos colocar los vértices en su sitio si forman una permutación par.
- Con conjugados de movimientos P_3 podemos orientar los vértices (tal vez moviendo las aristas).
- Con conjugados de movimientos P_1 podemos colocar (si forman una permutación par) y orientar las aristas.

El grupo del cubo de Rubik
Procedimientos interesantes y método de resolución

¿Y si las permutaciones inicial de vértices y aristas son ambas impares?
Efectuamos primero A y nos queda una permutación par de vértices y par de aristas.

El grupo del cubo de Rubik

Procedimientos interesantes y método de resolución

Es habitual que los métodos de resolución del cubo se sigan varias etapas, de manera que en cada una de las etapas vayamos colocando varios elementos del cubo de Rubik y no modifiquemos los que estén resueltos antes, como hemos visto antes.

El grupo del cubo de Rubik

Otro método de resolución

1. colocar las aristas de una cara (por ejemplo, A),
2. colocar los vértices de esa cara sin mover sus aristas,
3. colocar las aristas de la parte central (paralela a la cara), sin alterar la cara ya hecha,
4. orientar las aristas de la cara opuesta B sin mover las piezas de A ni la sección central,
5. colocar las aristas de B de manera que formen una permutación par si es necesario mediante un giro de B,
6. colocar en su sitio las aristas de B sin alterar las piezas de A ni la sección central,
7. colocar los vértices de B sin alterar los demás vértices ni las aristas y, finalmente,
8. orientar los vértices de B sin mover las demás caras.

Otras cuestiones sobre el cubo de Rubik
El número de elementos del cubo de Rubik

¿Cuántos elementos tiene el cubo de Rubik?

- Podemos ordenar las aristas de 12! maneras y los vértices de 8! maneras, pero la permutación total ha de ser par,
- podemos torcer las aristas de 2^{12} maneras, pero la torsión total ha de ser par,
- podemos torcer los vértices de 3^8 maneras, pero la torsión total ha de ser múltiplo de 3.

El número de posiciones distintas del cubo es

$$\frac{12! \cdot 8!}{2}$$

Otras cuestiones sobre el cubo de Rubik
El número de elementos del cubo de Rubik

¿Cuántos elementos tiene el cubo de Rubik?

- Podemos ordenar las aristas de 12! maneras y los vértices de 8! maneras, pero la permutación total ha de ser par,
- podemos torcer las aristas de 2^{12} maneras, pero la torsión total ha de ser par,
- podemos torcer los vértices de 3^8 maneras, pero la torsión total ha de ser múltiplo de 3.

El número de posiciones distintas del cubo es

$$\frac{12! \cdot 8!}{2} \cdot \frac{2^{12}}{2}$$

Otras cuestiones sobre el cubo de Rubik

El número de elementos del cubo de Rubik

¿Cuántos elementos tiene el cubo de Rubik?

- Podemos ordenar las aristas de 12! maneras y los vértices de 8! maneras, pero la permutación total ha de ser par,
- podemos torcer las aristas de 2^{12} maneras, pero la torsión total ha de ser par,
- podemos torcer los vértices de 3^8 maneras, pero la torsión total ha de ser múltiplo de 3.

El número de posiciones distintas del cubo es

$$\frac{12! \cdot 8!}{2} \cdot \frac{2^{12}}{2} \cdot \frac{3^8}{3}$$

Otras cuestiones sobre el cubo de Rubik
El número de elementos del cubo de Rubik

¿Cuántos elementos tiene el cubo de Rubik?

- Podemos ordenar las aristas de 12! maneras y los vértices de 8! maneras, pero la permutación total ha de ser par,
- podemos torcer las aristas de 2^{12} maneras, pero la torsión total ha de ser par,
- podemos torcer los vértices de 3^8 maneras, pero la torsión total ha de ser múltiplo de 3.

El número de posiciones distintas del cubo es

$$\frac{12!\cdot 8!}{2}\cdot\frac{2^{12}}{2}\cdot\frac{3^8}{3} = 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000 = 2^{27}\cdot 3^{14}\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11.$$

Otras cuestiones sobre el cubo de Rubik

El número de elementos del cubo de Rubik

Si desmontamos el cubo y lo montamos de nuevo, el número total de configuraciones es

$$\begin{aligned} 12! \cdot 8! \cdot 2^{12} \cdot 3^{8} &= 519\,024\,039\,293\,878\,272\,000 \\ &= 2^{29} \cdot 3^{15} \cdot 5^{3} \cdot 7^{2} \cdot 11, \end{aligned}$$

12 veces la cantidad anterior.
Si se desmonta el cubo al azar, la probabilidad de volver a la configuración inicial con movimientos legales del cubo es

$$\frac{1}{12}.$$

Otras cuestiones sobre el cubo de Rubik

Órdenes de elementos

- Si, partiendo de la configuración inicial, repetimos un movimiento, llega un momento en el que se vuelve a la configuración inicial. El número de repeticiones más pequeño es el orden del movimiento.
- El orden de un movimiento es el mcm de las longitudes de los ciclos en que se descompone (multiplicadas por 2 o 3 si son con torsión):

Otras cuestiones sobre el cubo de Rubik
Órdenes de elementos

- Los movimientos básicos tienen orden 4.
- $(F^2D^2)^3$ tiene orden 2.
- F^2D^2 tiene orden 6.
- El movimiento

$$\begin{aligned} FD = {} & (FA, AD, TD, BD, FD, FB, FI) \\ & \cdot (ADF)_+ (DBF, BIF, IAF, TDA, BDT)_- \end{aligned}$$

tiene orden $\mathrm{mcm}(7, 3, 15) = 105$.