

Electromagnetismo 2º curso Licenciatura en Química

I. EL CAMPO ELECTROSTÁTICO.

1. Campo electrostático.

1. 1. Introducción al electromagnetismo.
1. 2. Ley de Coulomb. Principio de superposición.
1. 3. Campo eléctrico.
1. 4. Flujo del campo eléctrico. Teorema de Gauss.
1. 5. Líneas de campo.

Bibliografía: Griffiths, Tipler, Serway.

2. Potencial electrostático.

2. 1. Potencial electrostático.
2. 2. Potencial de una distribución finita de cargas.
2. 3. El campo electrostático como gradiente de un potencial.
2. 4. Superficies equipotenciales.
2. 5. Energía electrostática.
2. 6. Condensadores.
2. 7. Energía almacenada en un condensador.

Bibliografía: Feynman, Griffiths, Tipler.

3. Desarrollo multipolar del campo eléctrico. Dipolos.

3. 1. Desarrollo multipolar del campo eléctrico.
3. 2. Potencial y campo de un dipolo.
3. 3. Acción de un campo eléctrico externo sobre un dipolo eléctrico.

Bibliografía: Feynman, Griffiths.

4. El campo electrostático en medios materiales.

4. 1. Polarización de un medio dieléctrico.
4. 2. Cargas de polarización.
4. 3. Desplazamiento eléctrico.
4. 4. Medios lineales.
4. 5. El condensador con dieléctrico.
4. 6. Conductores en equilibrio electrostático.

Bibliografía: Feynman, Griffiths, Tipler.

II. EL CAMPO MAGNETOSTÁTICO.

5. Campo magnético.

5. 1. Corriente eléctrica y ley de Ohm.
5. 2. Introducción a la interacción magnética.
5. 3. Fuerza de Lorentz. Campo magnético.
5. 4. Ley de Biot-Savart.
5. 5. Teorema de Ampère.

Bibliografía: Griffiths, Tipler.

6. Desarrollo multipolar del campo magnético.

6. 1. Dipolo magnético.
6. 2. Acción de un campo magnético externo sobre un dipolo magnético.

Bibliografía: Griffiths, Feynman.

7. El campo magnetostático en los medios materiales.

- 7. 1. Imanación.
- 7. 2. Paramagnetismo.
- 7. 3. Diamagnetismo.
- 7. 4. Ferromagnetismo.
- 7. 5. Corrientes de magnetización. Campo excitación magnética.
- 7. 6. Medios lineales. Susceptibilidad y permeabilidad magnéticas.

Bibliografía: Feynman, Griffiths, Tipler.

III. CAMPOS VARIABLES CON EL TIEMPO

8. Campos variables con el tiempo.

- 8. 1. Ley de Faraday.
- 8. 2. Fuerza electromotriz asociada al movimiento.
- 8. 3. Campos eléctricos inducidos.
- 8. 4. Autoinducción.
- 8. 5. Circuito RL.
- 8. 6. Energía magnética.
- 8. 7. Corriente de desplazamiento y Ley de Ampère generalizada.

Bibliografía: Griffiths, Tipler, Serway.

9. Ecuaciones de Maxwell y ondas electromagnéticas.

- 9. 1. Introducción.
- 9. 2. Las ecuaciones de Maxwell en el vacío.
- 9. 3. Ondas electromagnéticas.
- 9. 4. Energía y momento de las ondas electromagnéticas.

Bibliografía: Griffiths, Tipler, Feynman.

BIBLIOGRAFÍA

- Paul A. Tipler y G. Mosca, FÍSICA (vol. 2), Ed. Reverté, Barcelona, 2005.
- R.P. Feynman, R.B. Leighton y M. Sands, FÍSICA, Addison Wesley Iberoamericana, 1987.
- D.J. Griffiths, INTRODUCTION TO ELECTRODYNAMICS, Prentice Hall, 1981.
- R.A. Serway y J.W. Jewett, FÍSICA, Thomson, 2003.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

La evaluación se basará en un examen escrito con una puntuación máxima de 10 puntos. El examen constará de una serie de cuestiones cortas, de carácter teórico y numérico.

Adicionalmente, a la nota del examen se le sumará la nota obtenida en la resolución de algunos de los problemas del boletín, ya sea en el aula o en casa. A lo largo de cada tema el profesor indicará los problemas que se pueden entregar, estableciendo un plazo máximo de entrega (en general de una semana). La puntuación máxima que se puede obtener resolviendo problemas es de 2.5 puntos.

Tema 1. Campo electrostático



1.1. Introducción al electromagnetismo.

1.2. Ley de Coulomb. Principio de superposición.

1.3. Campo eléctrico.

1.4. Flujo del campo eléctrico. Teorema de Gauss.

1.5. Líneas de campo.

- En la naturaleza existen cuatro tipos de interacciones:

- Fuerte.
- Electromagnética.
- Débil.
- Gravitatoria.

- La interacción electromagnética es responsable de:

- Enlace químico.
- Luz.
- Tecnología basada en la electricidad y electrónica.
- Rozamiento
- ...

- Carga eléctrica

- El origen de la interacción electromagnética está en las cargas.
- Hay cargas positivas y negativas.
- La carga eléctrica se conserva.
- La carga eléctrica está cuantizada: $q = \pm ne$ $n=0,1,2,\dots$
 $e=1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

- La interacción electromagnética se describe en términos de los campos eléctrico y magnético.

1.1. Introducción al electromagnetismo.

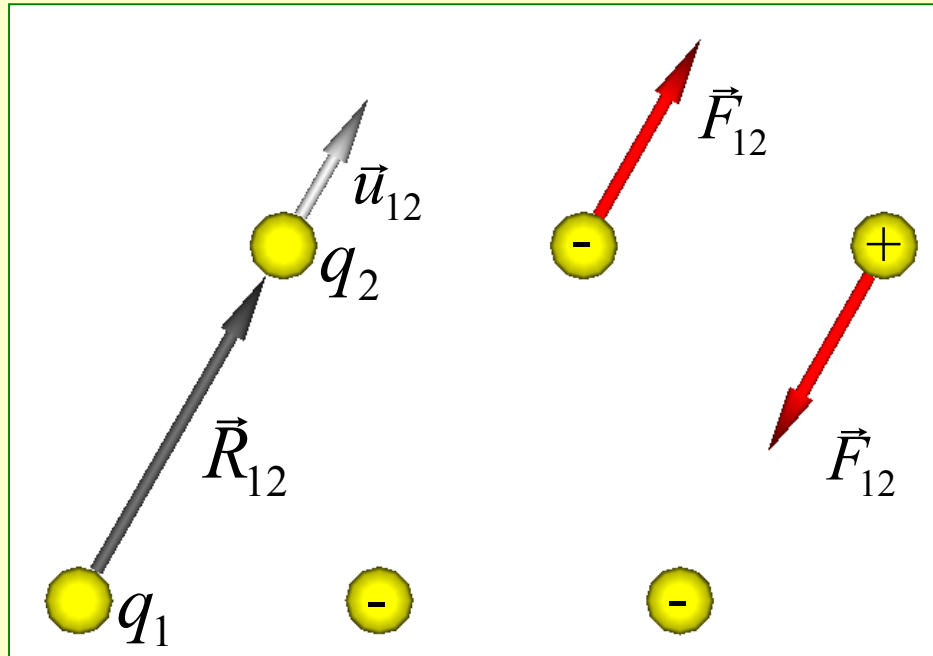


1.2. Ley de Coulomb. Principio de superposición.

1.3. Campo eléctrico.

1.4. Flujo del campo eléctrico. Teorema de Gauss.

1.5. Líneas de campo.

Ley de Coulomb

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{R_{12}^2} \vec{u}_{12}$$

$$[q] = C$$

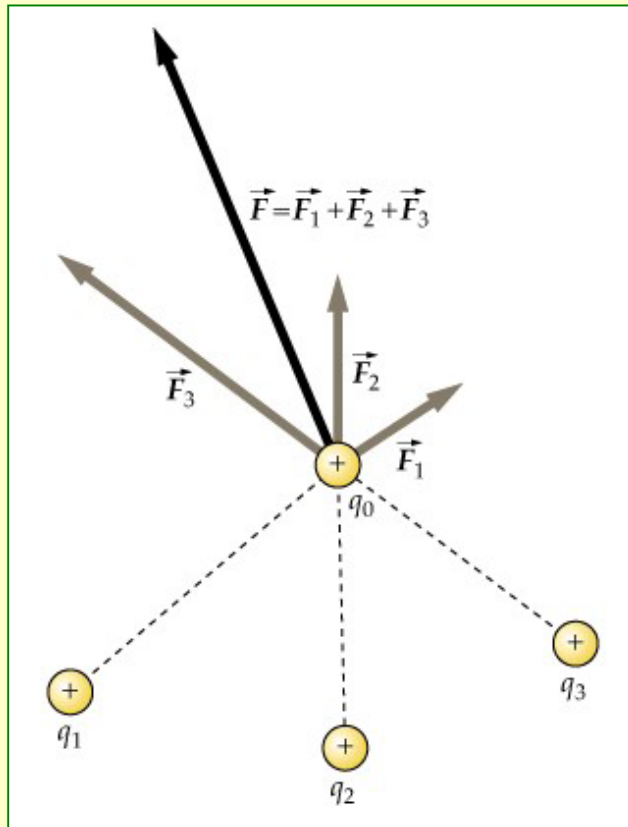
$$\vec{u}_{12} = \frac{\vec{R}_{12}}{R_{12}}$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$$

Permitividad del espacio libre

A veces se utiliza la constante k:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$$

Principio de superposición

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots \vec{F}_N = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

1.1. Introducción al electromagnetismo.



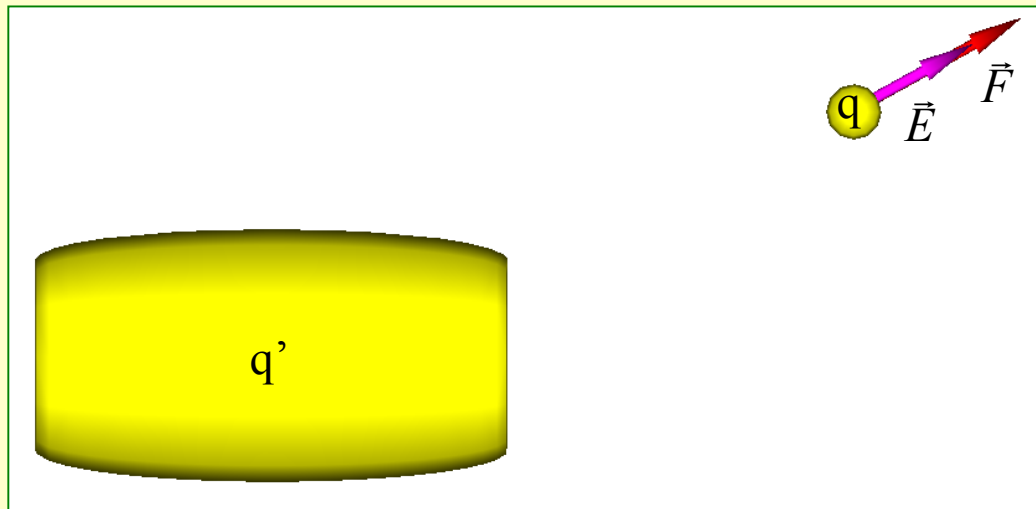
1.2. Ley de Coulomb. Principio de superposición.

1.3. Campo eléctrico.

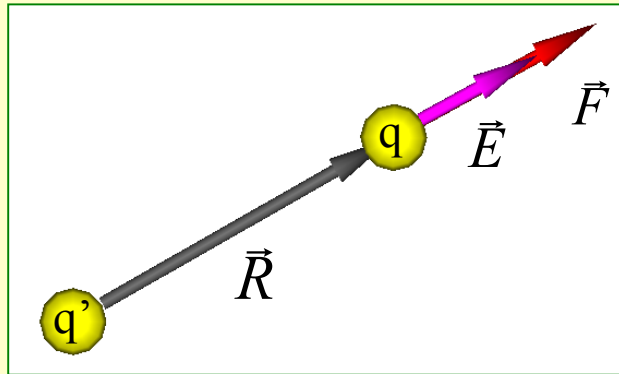
1.4. Flujo del campo eléctrico. Teorema de Gauss.

1.5. Líneas de campo.

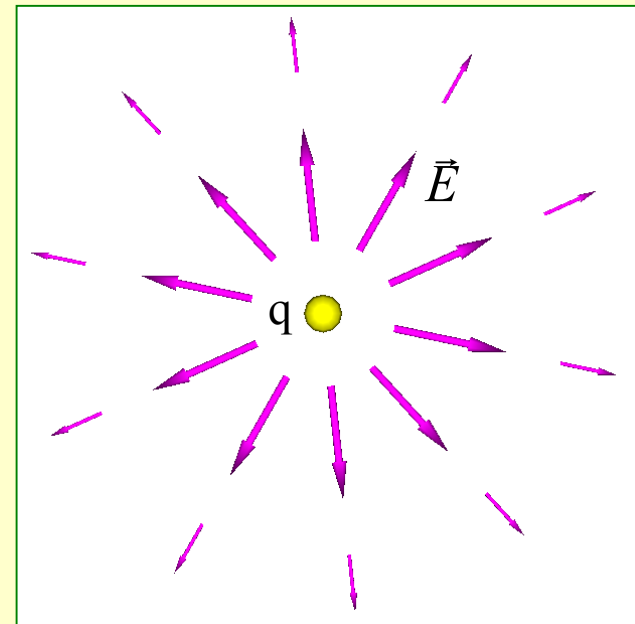
Campo eléctrico: definición



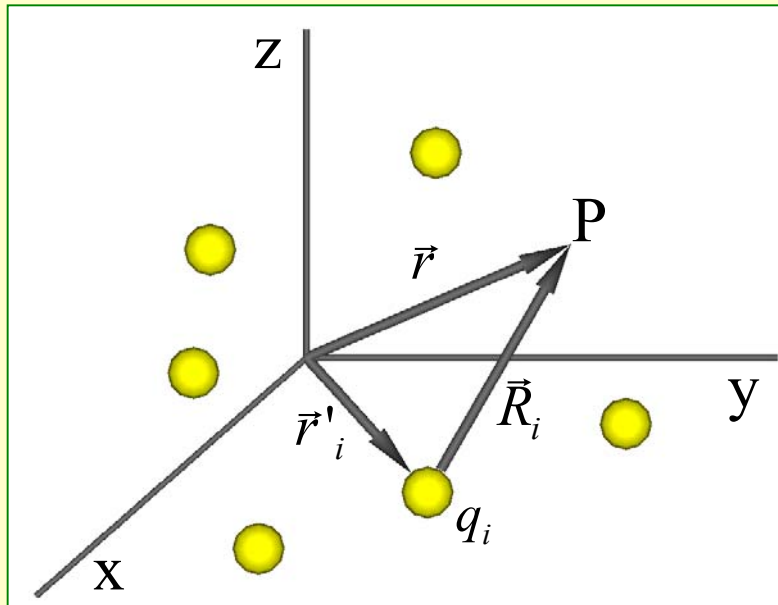
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Ejemplo: Campo eléctrico de una carga puntual

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{q} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{R^2} \vec{u}_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{R^2} \vec{u}_R$$



Campo eléctrico de un conjunto de cargas puntuales



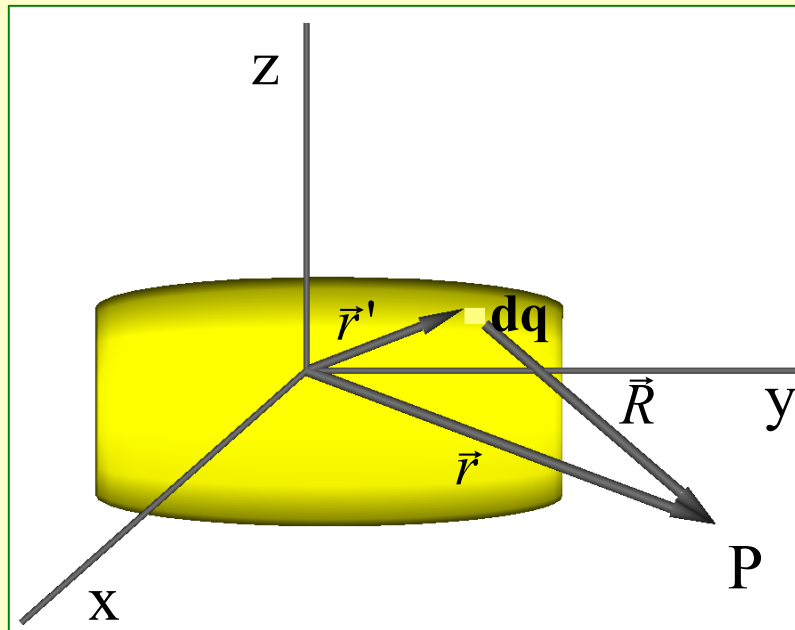
Notación:

$\vec{r}$: Punto P del espacio donde se calcula el campo.
 $\vec{r}'_i$: Punto de la distribución de carga.
 $\vec{R}_i$: Vector que une la carga con el punto campo.

$$\vec{r} = \vec{r}'_i + \vec{R}_i$$

$$\vec{R}_i = \vec{r} - \vec{r}'_i$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{F}_i}{q} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{R_i^2} \vec{u}_{R_i}$$

Campo eléctrico de una distribución de cargas:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{R^2} \vec{u}_R$$

Distribución:

Volúmica:	$dq = \rho d\tau'$	$\rho = \rho(\vec{r}')$	$[\rho] = C/m^3$
Superficial:	$dq = \sigma dA'$	$\sigma = \sigma(\vec{r}')$	$[\sigma] = C/m^2$
Lineal:	$dq = \lambda dl'$	$\lambda = \lambda(\vec{r}')$	$[\lambda] = C/m$

1.1. Introducción al electromagnetismo.

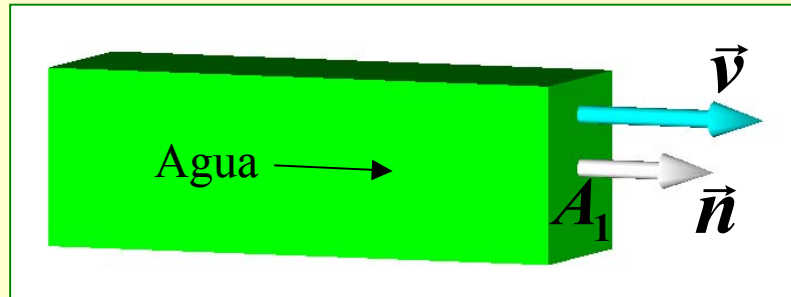
1.2. Ley de Coulomb. Principio de superposición.

 1.3. Campo eléctrico.

1.4. Flujo del campo eléctrico. Teorema de Gauss.

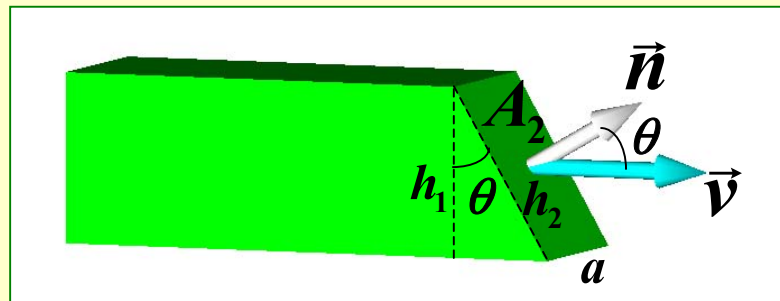
1.5. Líneas de campo.

Flujo



$$\Phi = vA_1$$

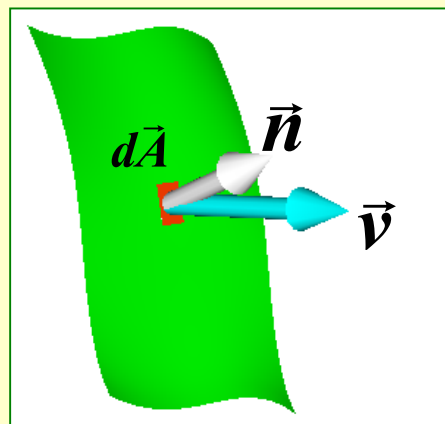
$$[\Phi] = m^3/s \quad (\text{¡Flujo de agua!})$$



$$\Phi = vA_1$$

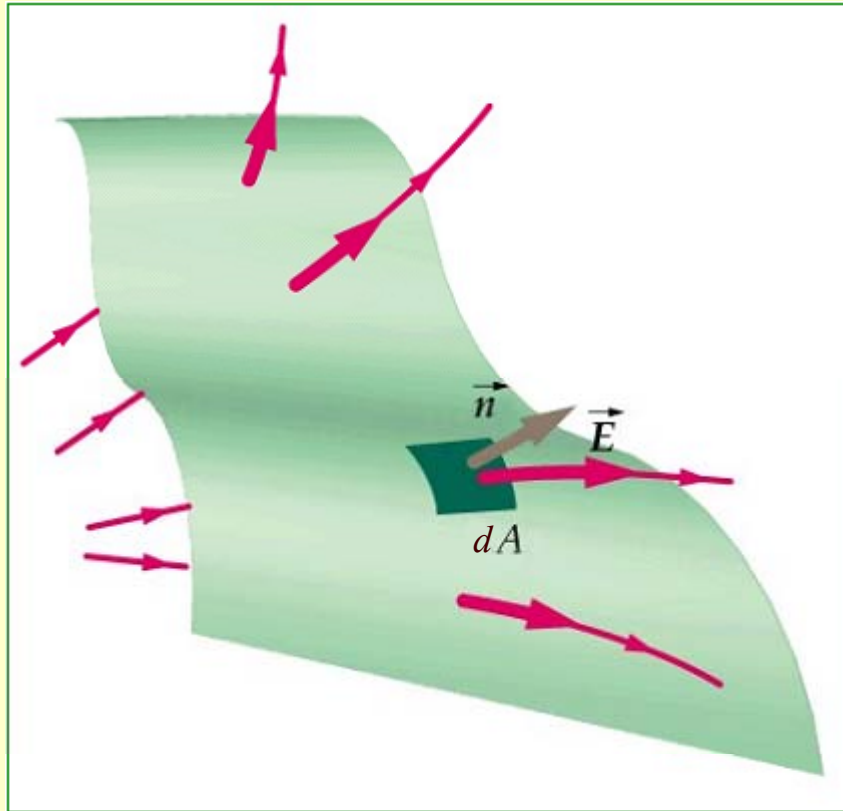
$$A_1 = h_1 a = h_2 \cos \theta a = A_2 \cos \theta$$

$$\Phi = vA_2 \cos \theta = \vec{v} \cdot \vec{A}_2$$



$$d\Phi = \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

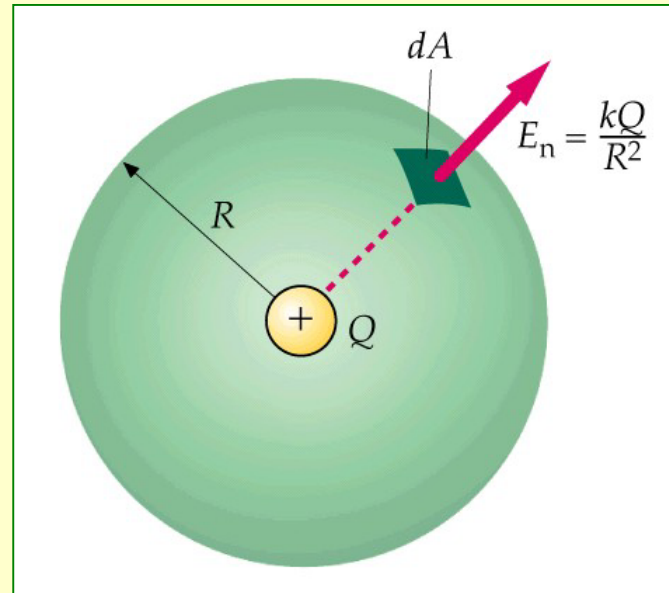
$$\Phi = \int_A \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

Flujo del campo eléctrico.

Definición:

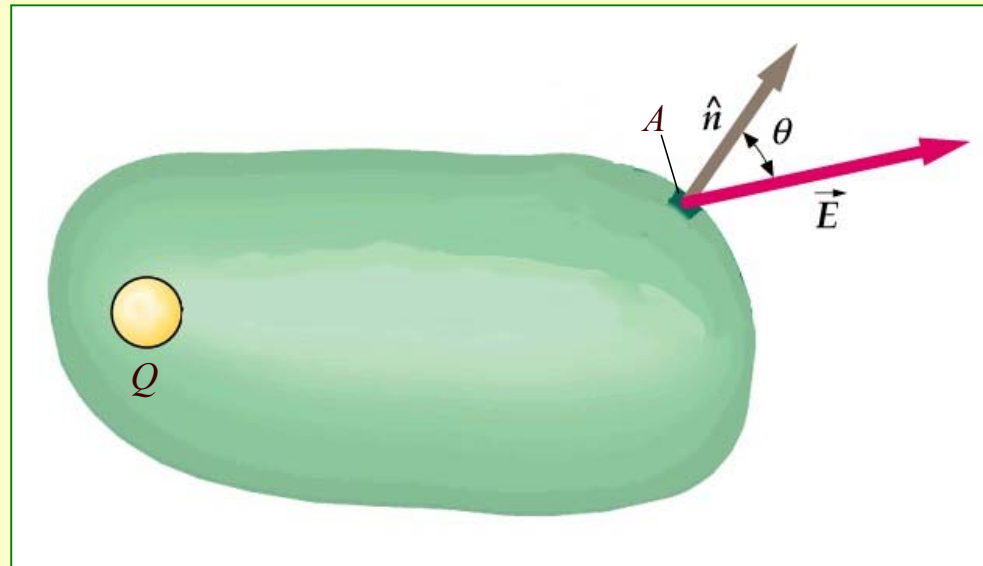
$$\Phi = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Ejemplo :



$$\Phi = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_A E dA = E \int_A dA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

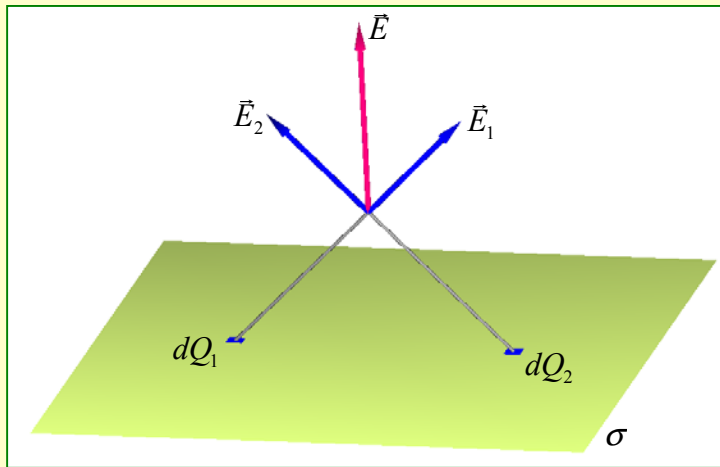
¡El flujo únicamente depende de la carga encerrada!

Teorema de Gauss.

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

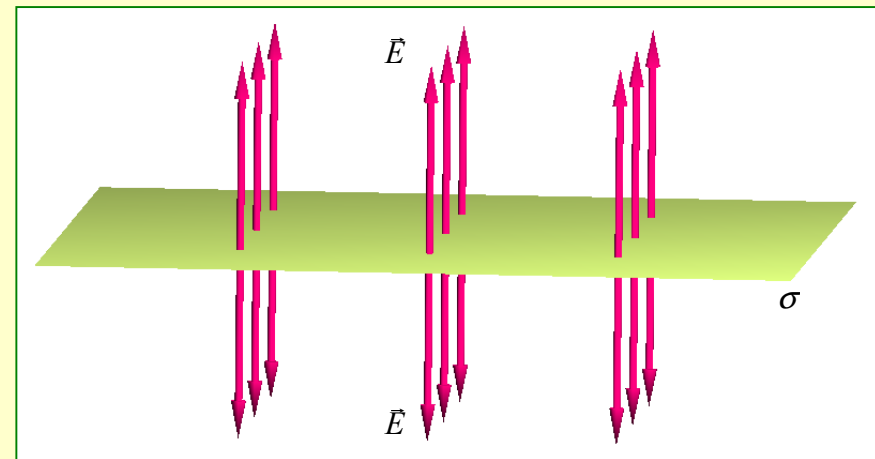
Teorema de Gauss
(en forma integral)

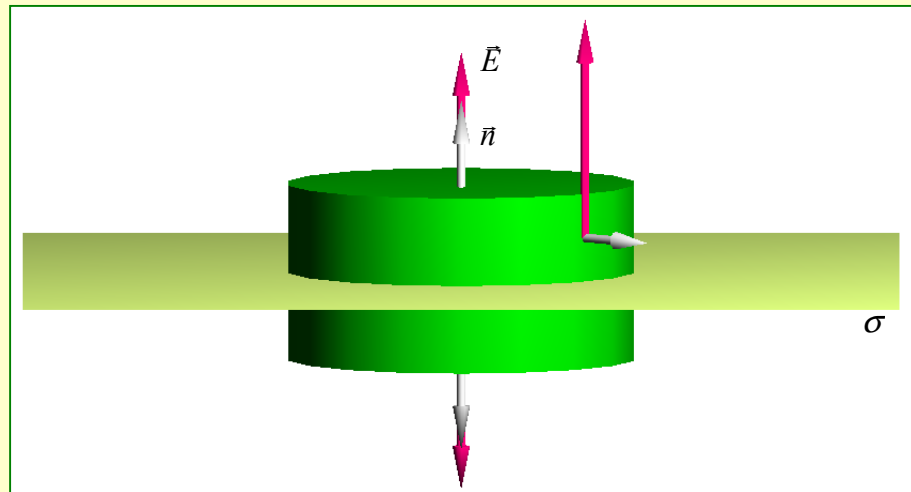
Ejemplo: Plano infinito cargado con densidad de carga superficial σ



Primero hay que estudiar la simetría...

...y deducir la dirección
del campo eléctrico





A continuación se aplica el T. de Gauss, escogiendo una superficie apropiada.

$$Q = \sigma A_B$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \oint \vec{E} d\vec{A} = \overbrace{\int_{B_1} \vec{E} \cdot d\vec{A}}^{\vec{E} \parallel \vec{A}} + \overbrace{\int_{B_2} \vec{E} \cdot d\vec{A}}^{\vec{E} \parallel \vec{A}} + \overbrace{\int_L \vec{E} \cdot d\vec{A}}^{\vec{E} \perp \vec{A}} = \\ &= \int_{B_1} E dA + \int_{B_2} E dA = EA_B + EA_B = 2EA_B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{Q}{\epsilon_0} \\ 2EA_B &= \frac{\sigma A_B}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Campo de un plano cargado

1.1. Introducción al electromagnetismo.

1.2. Ley de Coulomb. Principio de superposición.

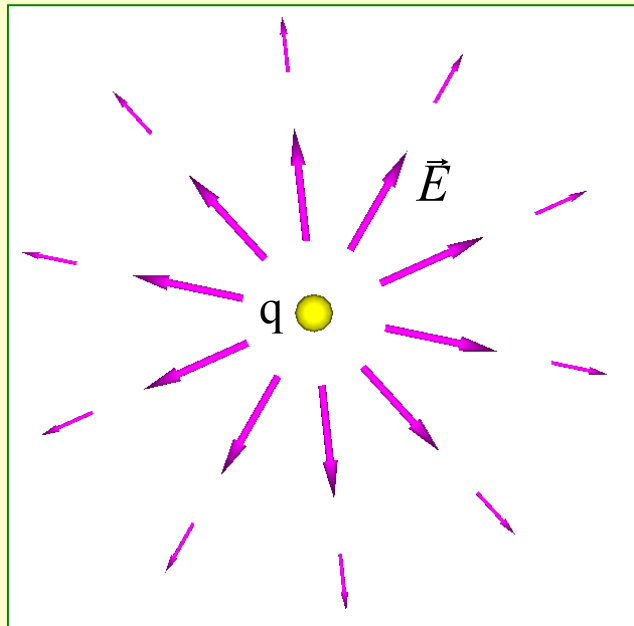
1.3. Campo eléctrico.

1.4. Flujo del campo eléctrico. Teorema de Gauss.

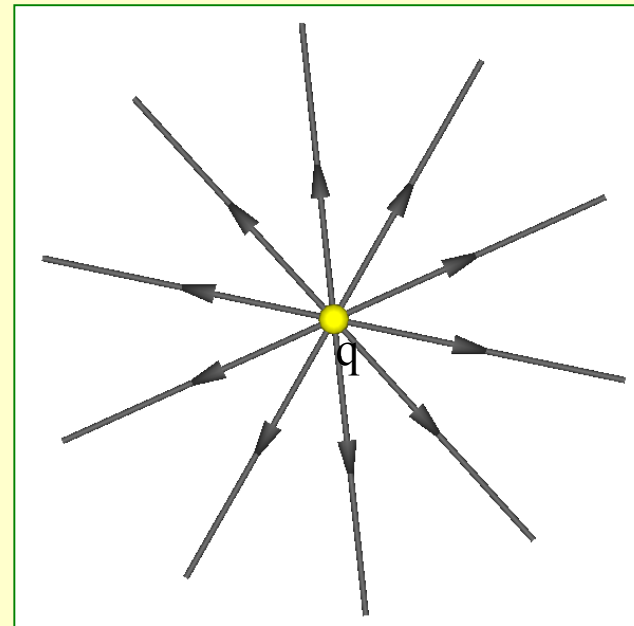


1.5. Líneas de campo.

Líneas de campo:



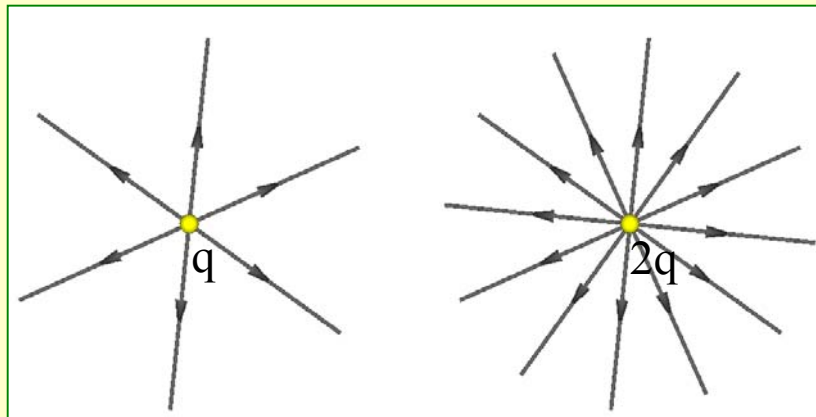
Representación con vectores campo



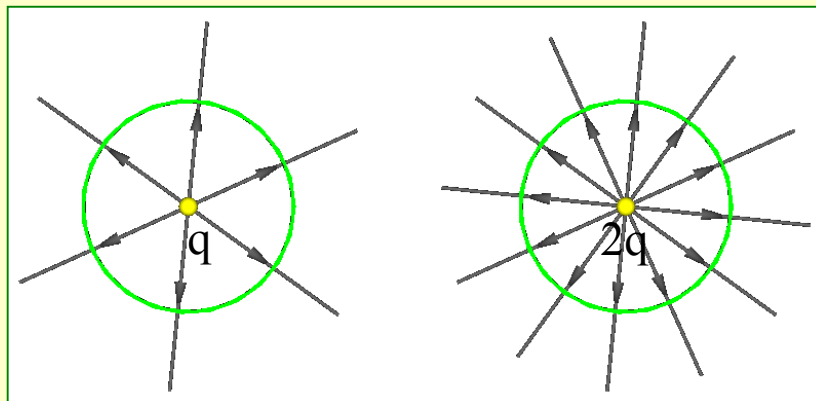
Representación con líneas de campo

Las líneas de campo se dibujan tangentes al campo eléctrico.

El número de líneas de campo por unidad de superficie es proporcional al campo:



$$\frac{n^{\circ} \text{ de líneas}}{\text{superficie}} \propto E$$

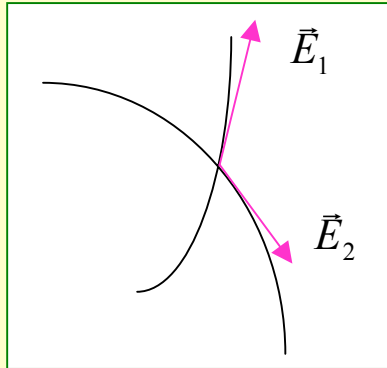


$$n^{\circ} \text{ de líneas} \propto E \cdot \text{superficie} = \Phi$$

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

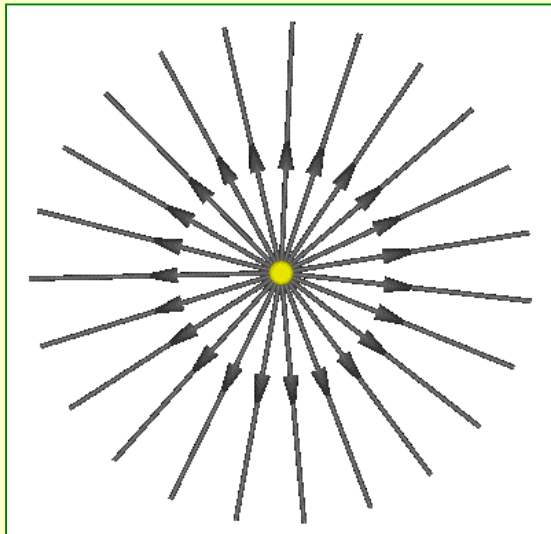
$$\Phi = \frac{2q}{\epsilon_0}$$

Las líneas de campo no pueden cruzarse...

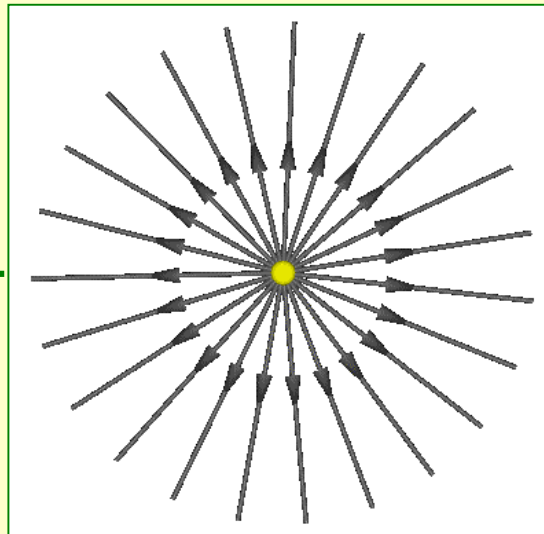


... ya que en ese caso tendríamos dos valores del campo en un mismo punto

Las líneas de campo no cumplen el principio de superposición



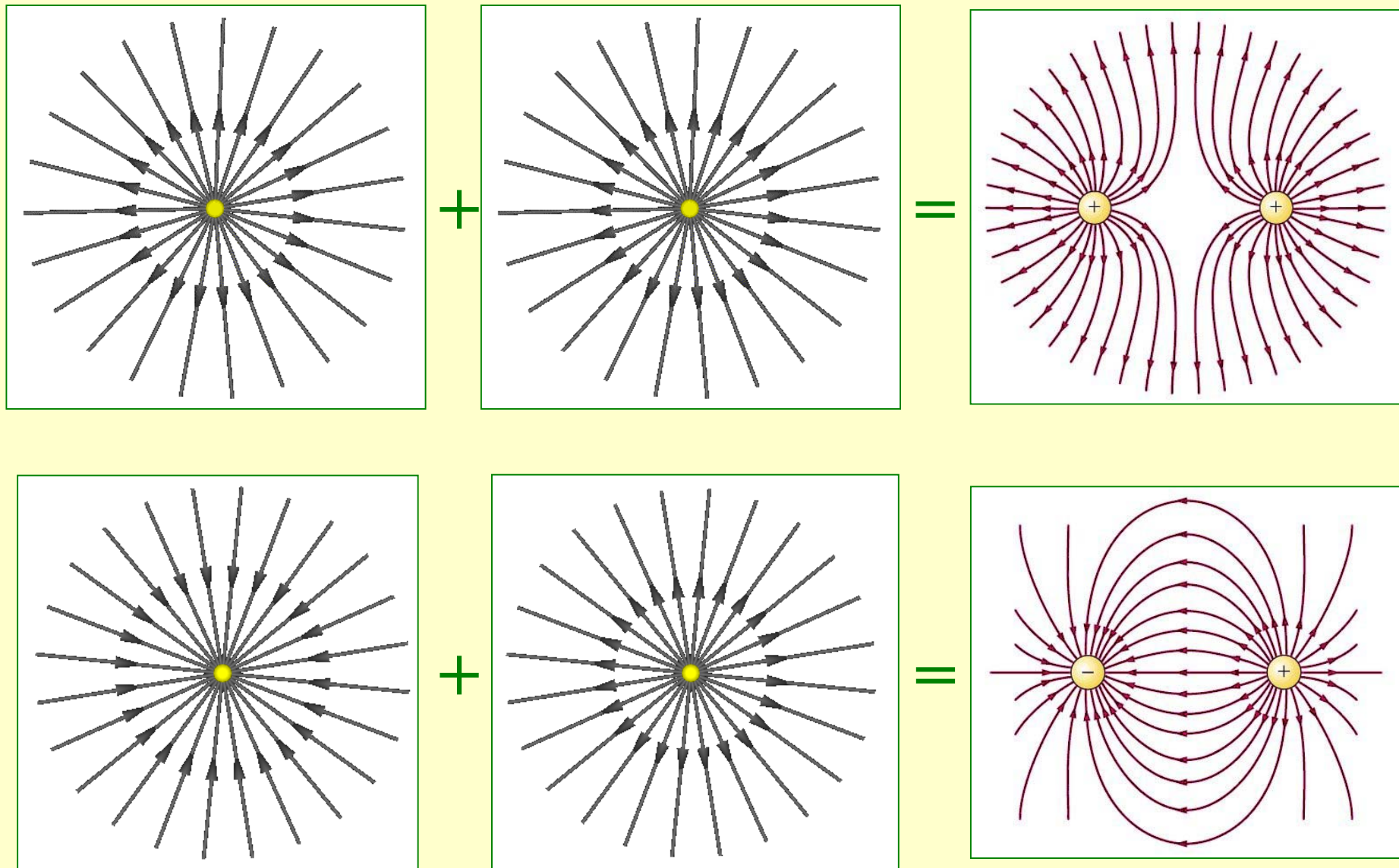
+



=

?

Hay que calcular el campo



Tema 2. Potencial electrostático



2.1. Potencial electrostático.

2.2. Potencial de una distribución finita de cargas.

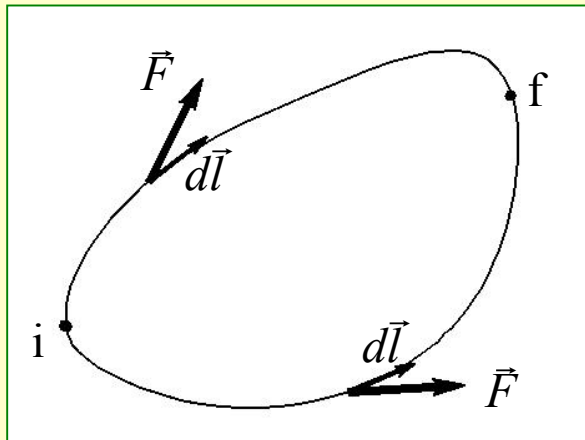
2.3. El campo electrostático como gradiente de un potencial.

2.4. Superficies equipotenciales.

2.5. Energía electrostática.

2.6. Condensadores.

- Trabajo a realizar para desplazar una carga en el seno de un campo electrostático:



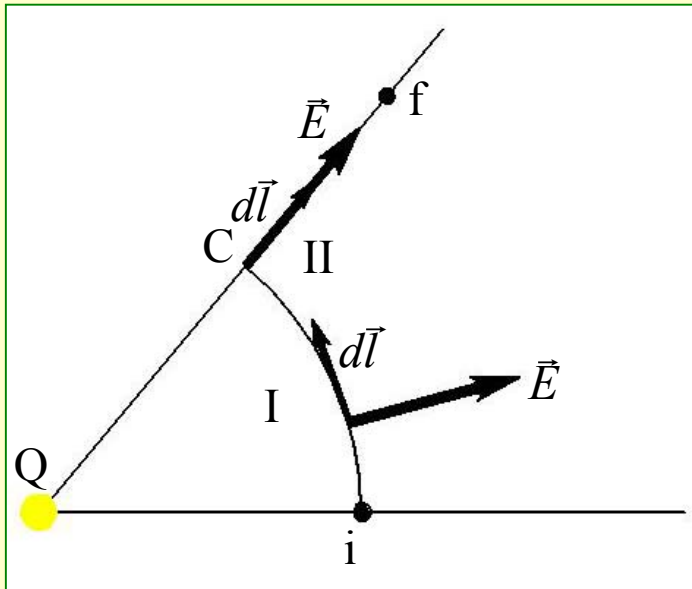
$$W_{if} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{F} = -q\vec{E}$$

$$W_{if} = -q \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- El trabajo no depende del camino:

1. Escojo un camino particular:

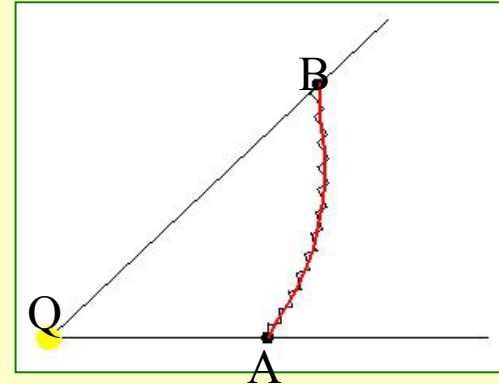
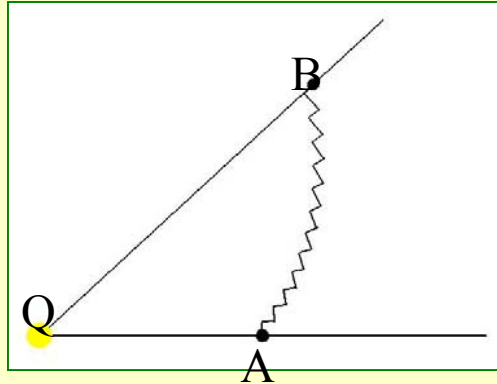


$$\begin{aligned} \text{En I: } \vec{E} d\vec{l} &= 0 \\ \text{En II: } \vec{E} d\vec{l} &= E dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{if} &= -q \int_{I+II} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -q \int_I \vec{E} \cdot d\vec{l} - q \int_{II} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -q \int_{II} E dr = \\ &= -q \int_C^f \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_C^f \frac{1}{r^2} dr = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-1}{r} \right]_C^f = \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_C} \right] \end{aligned}$$

¡Únicamente depende de las distancias radiales!

2. Generalizo para otros caminos:



El trabajo no depende del camino $\Rightarrow$ Puedo definir una energía potencial

$$W_{if} = U_f - U_i = \Delta U_{if}$$

Y una energía potencial por unidad de carga, el **potencial** V:

$$\Delta V_{if} = \frac{\Delta U_{if}}{q}$$

$$\Delta V_{if} = V_f - V_i = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- Unidades del potencial:

$$[V] = \frac{N}{C} m = \frac{J}{C} \equiv V$$

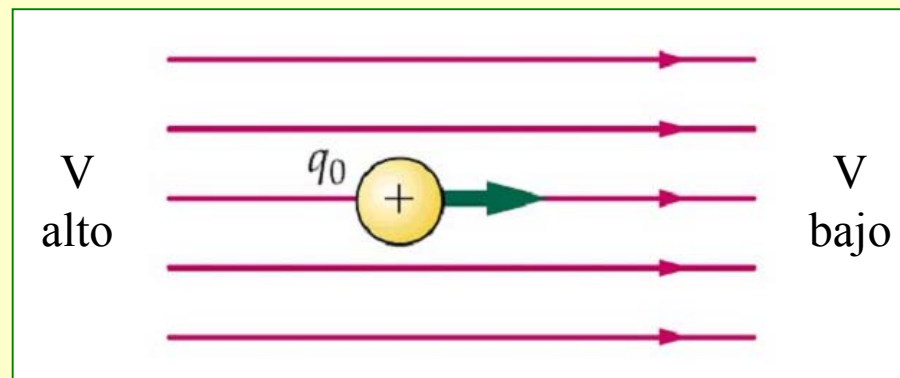
Voltio

Tan usado que hasta las unidades del campo se expresan en función del voltio

$$[E] = \frac{V}{m}$$

o interviene en la definición de la unidad de energía:

$$1eV = 1.6 \cdot 10^{-19} C \cdot V = 1.6 \cdot 10^{-19} J$$

- El potencial y las líneas de campo

2.1. Potencial electrostático.



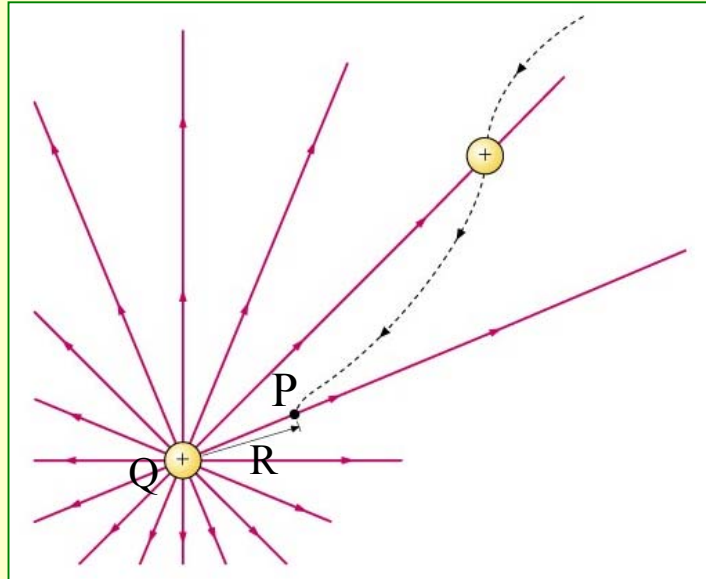
2.2. Potencial de una distribución finita de cargas.

2.3. El campo electrostático como gradiente de un potencial.

2.4. Superficies equipotenciales.

2.5. Energía electrostática.

2.6. Condensadores.

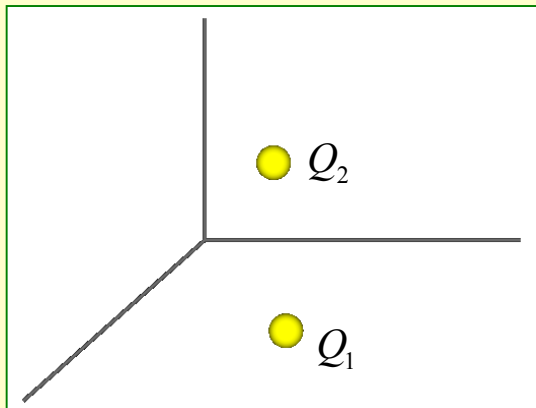
- Potencial de una carga puntual:

Escojo un origen de potencial

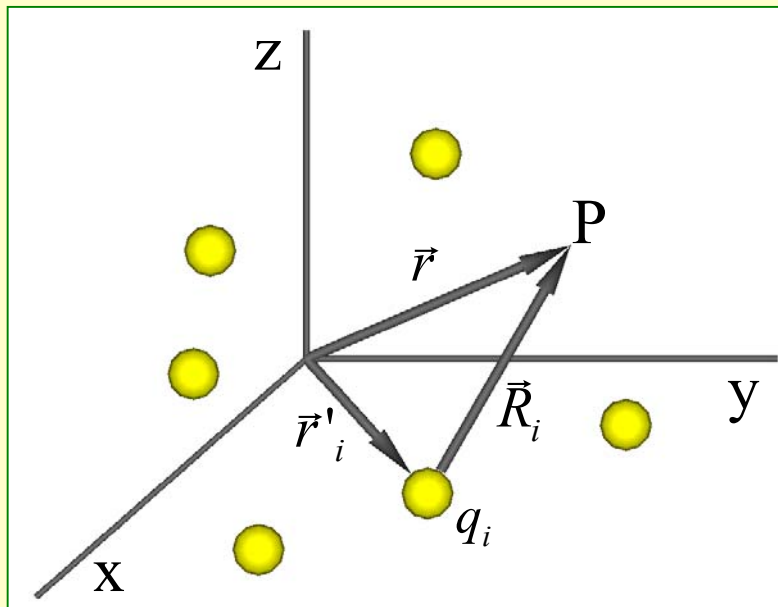
$$V_{\infty} = 0$$

$$\Delta V_{\infty R} = V_R - V_{\infty} = - \int_{\infty}^R \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{\infty} \right]$$

$$V_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

- Principio de superposición

$$\begin{aligned} \Delta V_{if} &= - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_i^f (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot d\vec{l} = \\ &= - \int_i^f \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} - \int_i^f \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = \Delta V_{if}^1 + \Delta V_{if}^2 \end{aligned}$$

Potencial de un conjunto de cargas puntuales

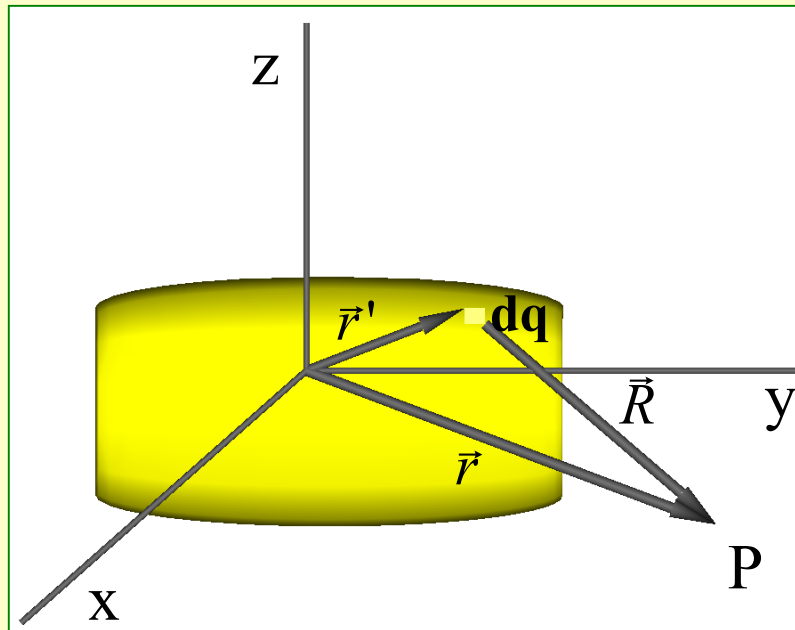
$\vec{r}$: Punto P del espacio donde se calcula el potencial.
 $\vec{r}'_i$: Punto de la distribución de carga.
 $\vec{R}_i$: Vector que une la carga con el punto campo.

$$\vec{r} = \vec{r}'_i + \vec{R}_i$$

$$\vec{R}_i = \vec{r} - \vec{r}'_i$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_N = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{R_i}$$

Potencial de una distribución de cargas



$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{R}$$



¡Sólo distribuciones finitas!

Distribución:

Volúmica:	$dq = \rho d\tau'$	$\rho = \rho(\vec{r}')$	$[\rho] = C/m^3$
Superficial:	$dq = \sigma dA'$	$\sigma = \sigma(\vec{r}')$	$[\sigma] = C/m^2$
Lineal:	$dq = \lambda dl'$	$\lambda = \lambda(\vec{r}')$	$[\lambda] = C/m$

2.1. Potencial electrostático.

2.2. Potencial de una distribución finita de cargas.

 2.3. El campo electrostático como gradiente de un potencial.

2.4. Superficies equipotenciales.

2.5. Energía electrostática.

2.6. Condensadores.

- ¿Cómo obtener el campo eléctrico a partir del potencial?

$$\Delta V_{if} = V_f - V_i = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Si i y f están muy próximos:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

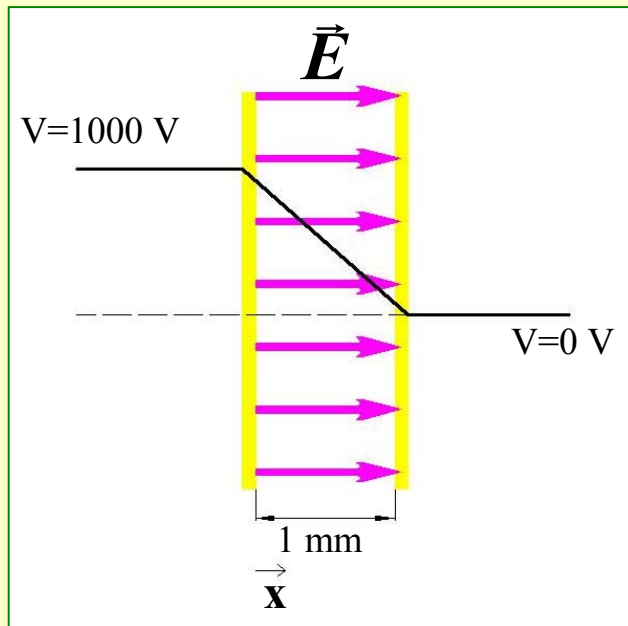
$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z \right) (dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z) \equiv \vec{\nabla} V \cdot d\vec{l}$$



$$\vec{\nabla} V \equiv \frac{\partial V}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$



- Ejemplo (condensador):

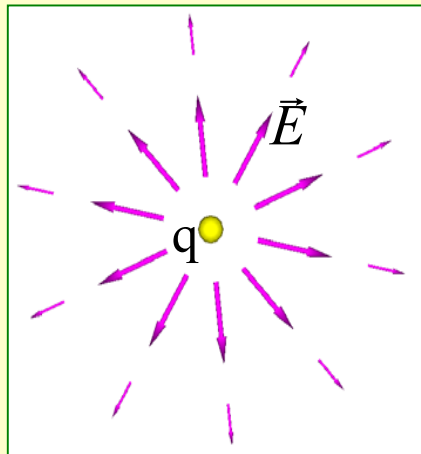
Fuera de las placas

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dx}\vec{i} = 0$$

Entre las placas

$$V = 1000 - 1000x \text{ V}$$

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dx}\vec{i} = 1000 \vec{i} \text{ V/m}$$



- Ejemplo: carga puntual en el origen

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

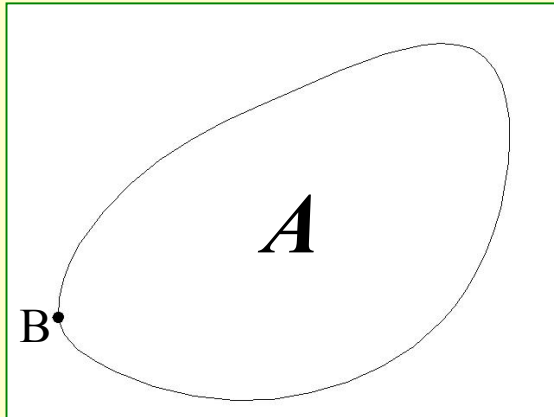
$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E_r dr$$

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r = -\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \right) \vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$$

Nota: En general, en esféricas:

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \vec{u}_\phi$$

- ¿Cómo es posible obtener un vector de un escalar?

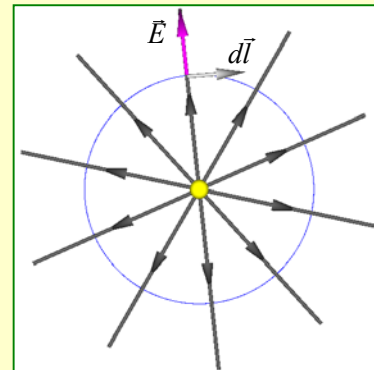


$$-\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_B - V_B = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Las componentes del campo no son independientes entre sí

- **Ejemplo:** carga puntual en el origen



- Hemos encontrado la 2ª ec. de Maxwell en el vacío:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

2.1. Potencial electrostático.

2.2. Potencial de una distribución finita de cargas.

2.3. El campo electrostático como gradiente de un potencial.



2.4. Superficies equipotenciales.

2.5. Energía electrostática.

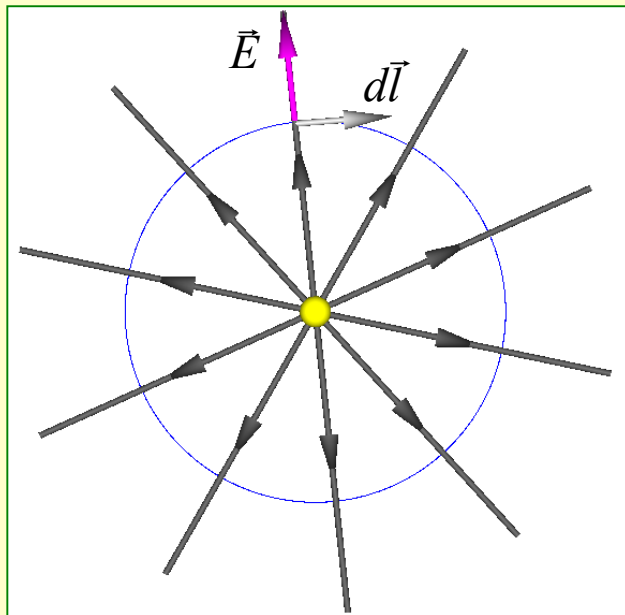
2.6. Condensadores.

- **Superficie equipotencial:** superficies donde el potencial es constante

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Si escogemos $d\vec{l}$ a lo largo de una equipotencial $\implies dV = 0 \implies \vec{E} \perp d\vec{l}$

- **Ejemplo:** carga puntual en el origen

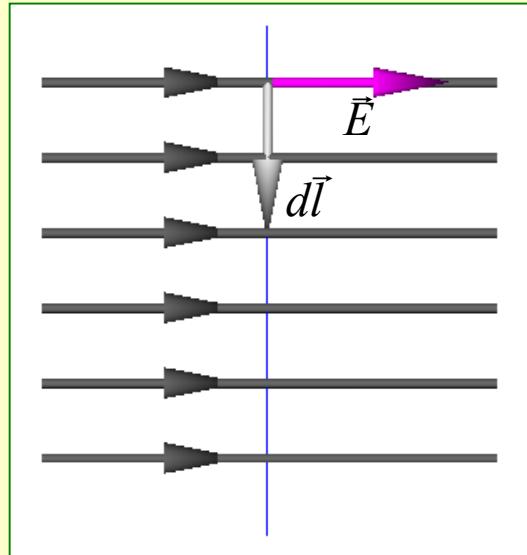


$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

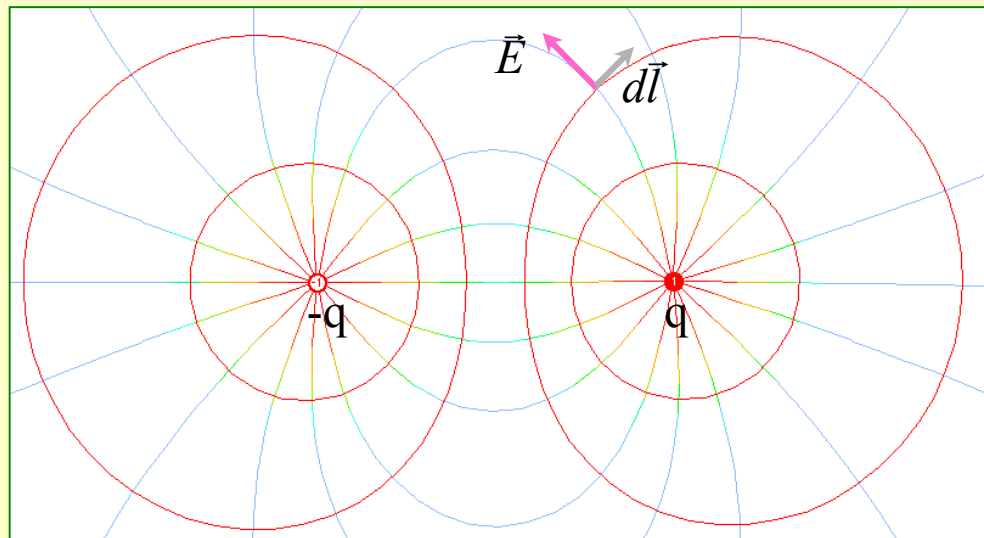
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$$

Lección 2. Potencial electrostático.

Ejemplo: campo uniforme



Ejemplo: cargas de distinto signo



2.1. Potencial electrostático.

2.2. Potencial de una distribución finita de cargas.

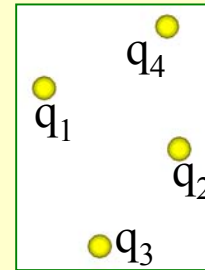
2.3. El campo electrostático como gradiente de un potencial.

2.4. Superficies equipotenciales.

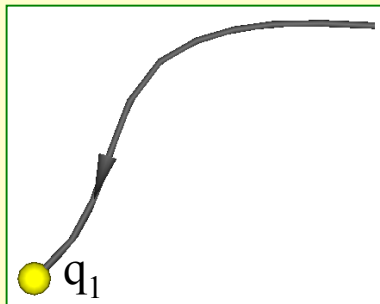
 2.5. Energía electrostática.

2.6. Condensadores.

¿Cuánto trabajo es necesario para disponer un sistema de cargas puntuales?

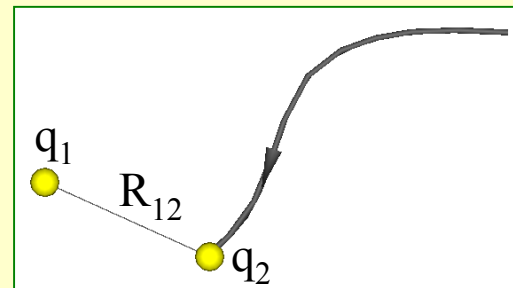


1)



$$W_1 = 0$$

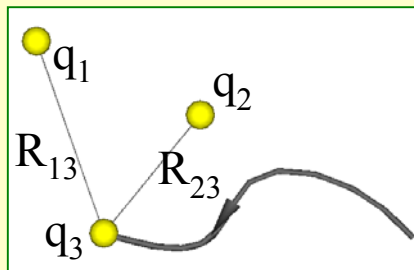
2)



$$W_2 = q_2 V_2^1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_1}{R_{12}}$$

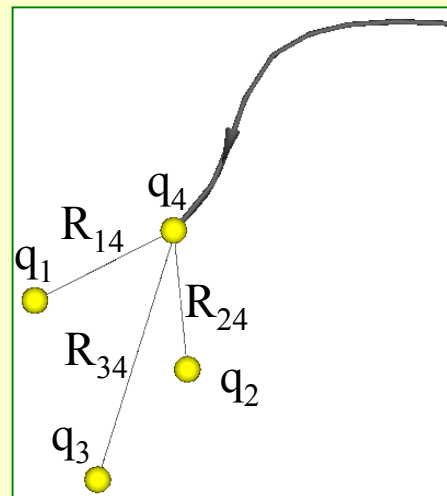
V_2^1 :
Potencial creado por la carga 1 en la posición de la carga 2

3)



$$W_3 = q_3 (V_3^1 + V_3^2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_3 \left(\frac{q_1}{R_{13}} + \frac{q_2}{R_{23}} \right)$$

4)



$$W_4 = q_4 (V_4^1 + V_4^2 + V_4^3) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_4 \left(\frac{q_1}{R_{14}} + \frac{q_2}{R_{24}} + \frac{q_3}{R_{34}} \right)$$

- El trabajo se almacena en forma de energía electrostática:

$$U = W_T = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{R_{12}} + \frac{q_1 q_3}{R_{13}} + \frac{q_1 q_4}{R_{14}} + \frac{q_2 q_3}{R_{23}} + \frac{q_2 q_4}{R_{24}} + \frac{q_3 q_4}{R_{34}} \right)$$

- Generalizando:

$$U = \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i > j}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j q_i}{R_{ij}}$$

(sumo todos los pares,
sin repetir ninguno)

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{R_{ij}}$$

(repito parejas, pero
divido por dos)

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{R_{ij}}}_{V(P_i)}$$

$V(P_i)$: Potencial en el punto P_i donde
está q_i debido a todas las cargas
menos a ella misma.

- Energía electrostática de un sistema de cargas puntuales:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(P_i)$$

- Y para una distribución continua:

$$U = \frac{1}{2} \int V dq$$

2.1. Potencial electrostático.

2.2. Potencial de una distribución finita de cargas.

2.3. El campo electrostático como gradiente de un potencial.

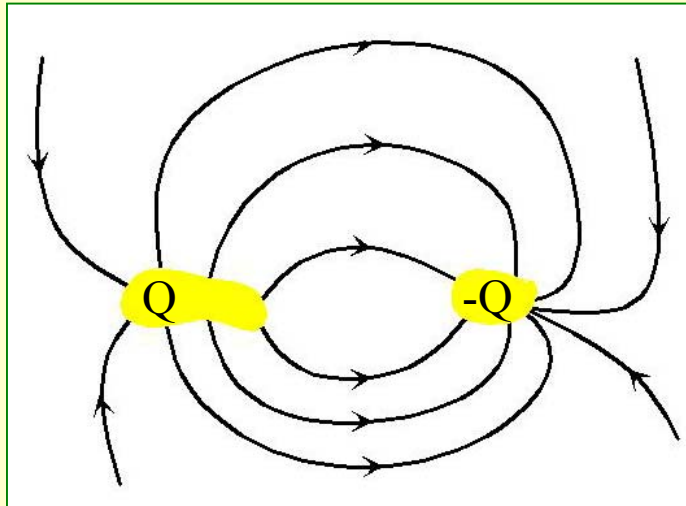
2.4. Superficies equipotenciales.

2.5. Energía electrostática.



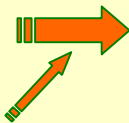
2.6. Condensadores.

- Condensador:

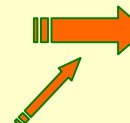


$$Q = C\Delta V$$

$$Q \rightarrow 2Q$$



$$\vec{E} \rightarrow 2\vec{E}$$



$$\Delta V \rightarrow 2\Delta V$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho d\tau'}{R^2} \vec{u}_R$$

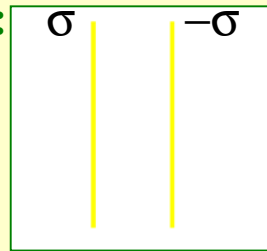
$$\Delta V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- Unidades:

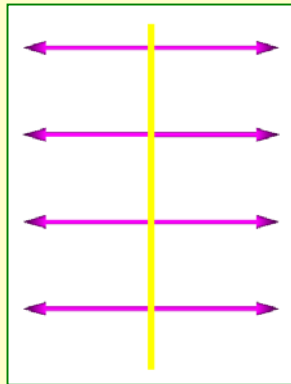
$$[C] = \frac{C}{V} \equiv F$$

$$\begin{aligned} 1\mu F &= 10^{-6} F \\ 1nF &= 10^{-9} F \\ 1pF &= 10^{-12} F \end{aligned}$$

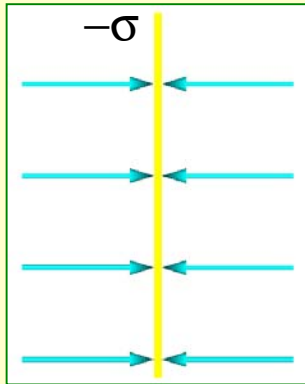
- Condensador plano:



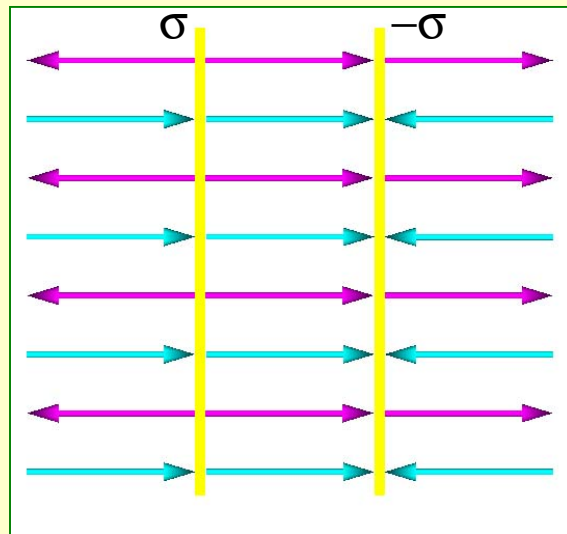
- ¿ Campo en su interior ?



$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$



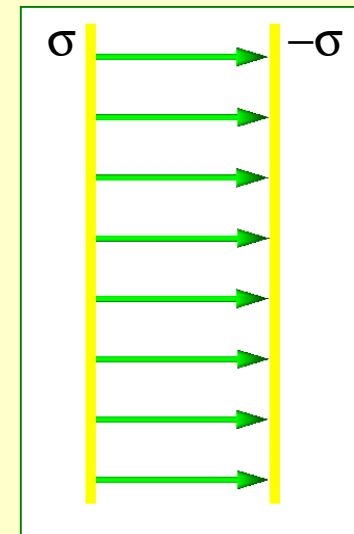
$$E = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$



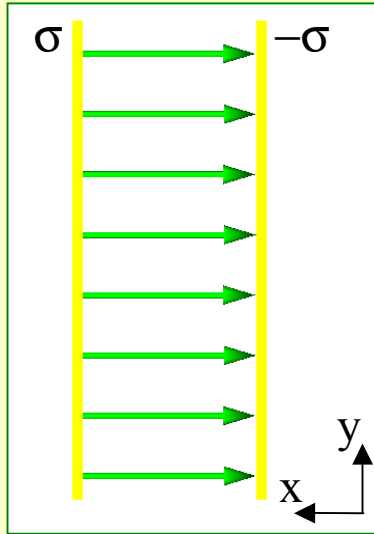
$$E = 0$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$E = 0$$



$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

- Diferencia de potencial:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\Delta V = V_+ - V_- = - \int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_0^d (-) E dx = Ed$$

$$\Delta V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{d}{A}$$

$$Q = \underbrace{\epsilon_0 \frac{A}{d}}_C \Delta V$$

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

- Ejemplo

Si $A = 1 \text{ cm}^2$, $d = 1 \text{ mm}$, aire

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = 8.84 \cdot 10^{-12} \frac{10^{-4}}{10^{-3}} = 9 \cdot 10^{-13} \text{ F} = 0.9 \text{ pF}$$



- Unidades de la permitividad:

Recordamos:

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{R_{12}^2}$$

$$[\epsilon_0] = \frac{C^2}{Nm^2}$$

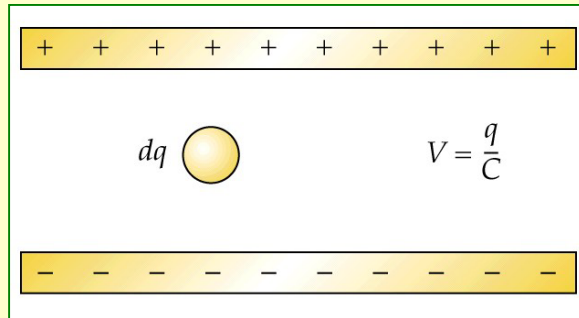
Pero ahora también:

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

$$[\epsilon_0] = \frac{F}{m}$$

Equivalencia:

$$[\epsilon_0] = \frac{F}{m} = \frac{C}{mV} = \frac{C^2}{mJ} = \frac{C^2}{Nm^2}$$

- Energía almacenada en un condensador:

$$dW = (V_+ - V_-)dq = \Delta V dq$$

$$W = \int_0^Q \Delta V dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2$$

Alternativamente:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_+ \sigma V^+ dA + \frac{1}{2} \int_- (-\sigma) V^- dA = \frac{1}{2} V^+ \int \sigma dA - \frac{1}{2} V^- \int \sigma dA = \\ &= \frac{1}{2} V^+ Q - \frac{1}{2} V^- Q = \frac{1}{2} Q \Delta V \end{aligned}$$

- Interpretación: energía del campo electrostático

$$U = \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} \sigma A E d = \frac{1}{2} E \epsilon_0 E A d = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \tau$$

$$u_E \equiv \frac{U}{\tau} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Tema 3. Desarrollo multipolar del campo eléctrico. Dipolos.

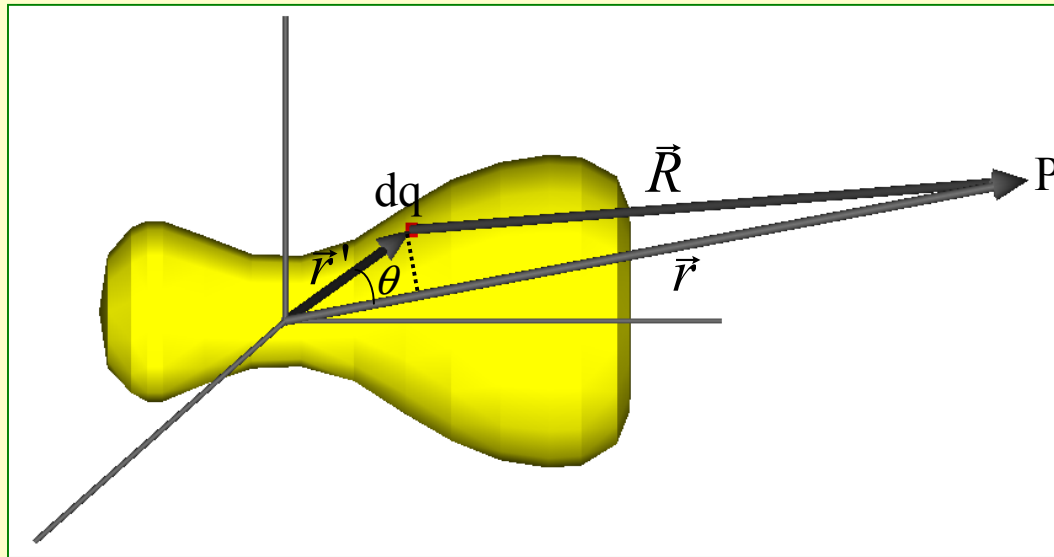


3.1. Desarrollo multipolar del campo eléctrico.

3.2. Potencial y campo de un dipolo.

3.3. Acción de un campo eléctrico externo sobre un dipolo eléctrico.

- Término monopolar

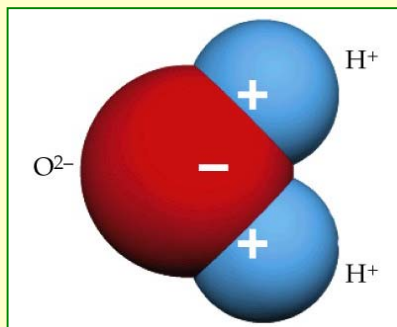


$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{R}$$

Si $r \gg r'$ $\Rightarrow R \simeq r$

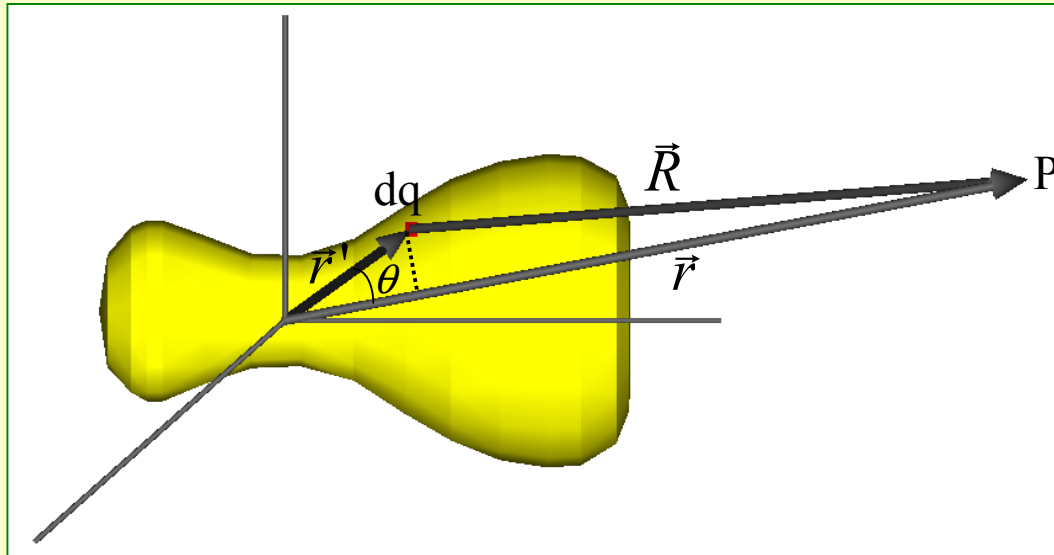
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

¿Y si $Q=0$?



$V=0$?! $\Rightarrow$ Necesidad de mejorar la aproximación

- Término dipolar



$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{R}$$

$$R \simeq r - r' \cos \theta = r - \vec{r}' \cdot \vec{u}_r$$

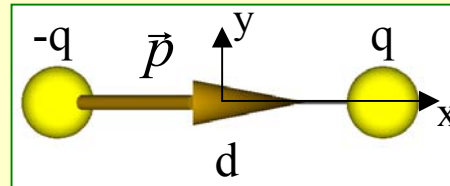
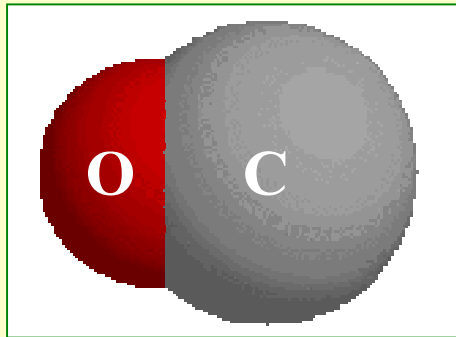
$$\frac{1}{R} \simeq \frac{1}{r - \vec{r}' \cdot \vec{u}_r} = \frac{1}{r(1 - \frac{\vec{r}' \cdot \vec{u}_r}{r})} \simeq \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{u}_r}{r}\right) = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{u}_r}{r^2}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{R} \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{u}_r}{r^2}\right) dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\frac{1}{r} \int dq}_Q + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{u}_r \cdot \underbrace{\int \vec{r}' \cdot dq}_{\vec{p}}$$

$$\vec{p} = \int \vec{r}' \cdot dq$$

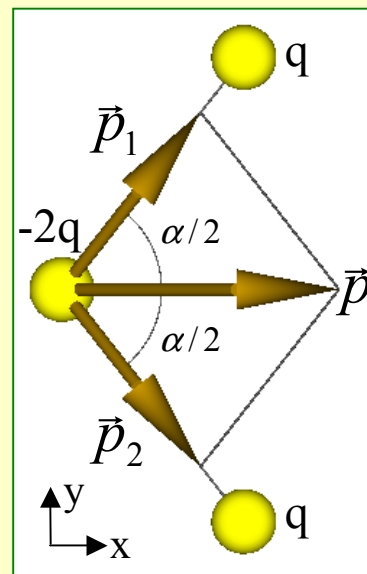
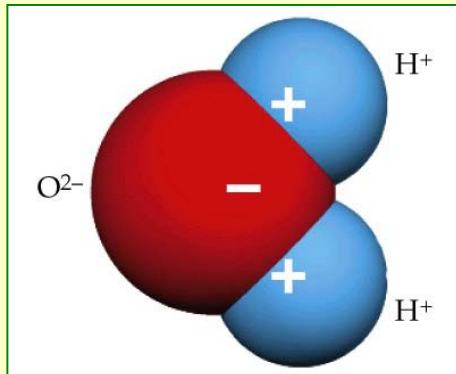
$$V = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}}_{\text{monopolar}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{p}}{r^2}}_{\text{dipolar}}$$

- Ejemplo: CO



$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i = q \frac{d}{2} \vec{i} - q \left(-\frac{d}{2}\right) \vec{i} = qd \vec{i}$$

- Ejemplo: H₂O

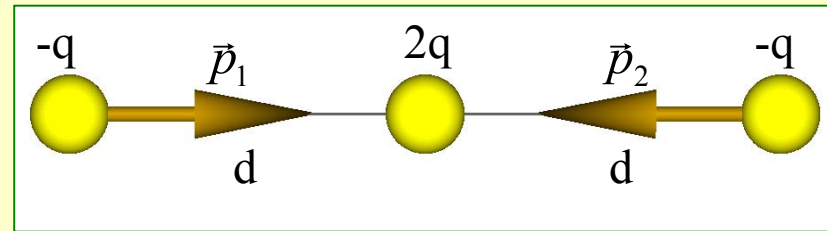
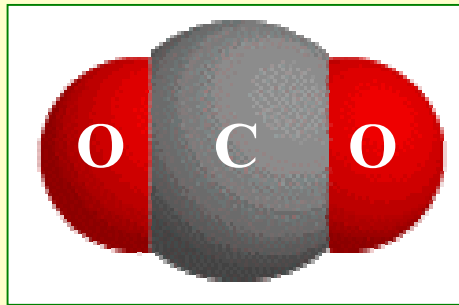


$$\vec{p}_1 = qd \left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \vec{i} + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \vec{j} \right]$$

$$\vec{p}_2 = qd \left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \vec{i} - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \vec{j} \right]$$

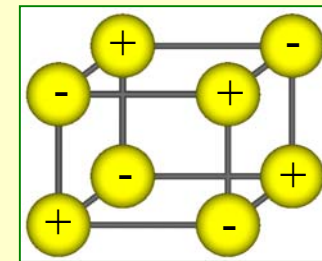
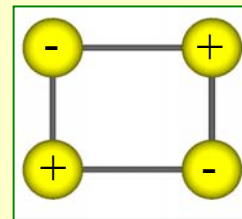
$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 2qd \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \vec{i}$$

- Ejemplo: CO₂

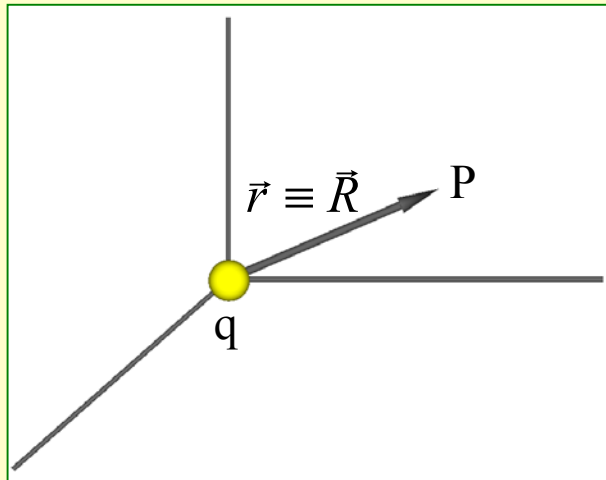


$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = qd\vec{i} - qd\vec{i} = 0$$

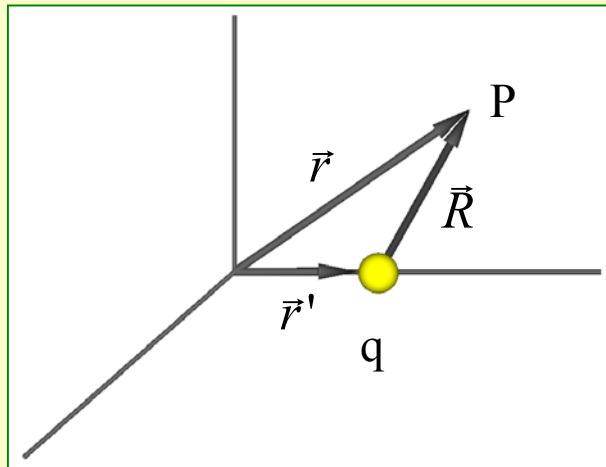
- Necesidad de otros términos:



$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{p}}{r^2} + \underset{\downarrow \frac{1}{r^3}}{\text{cuadrupolar}} + \underset{\downarrow \frac{1}{r^4}}{\text{octupolar}} + \dots$$

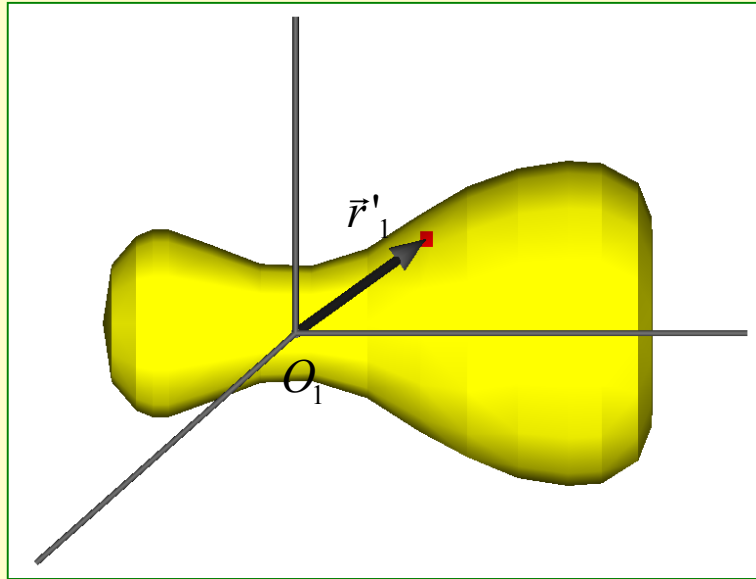
- Dependencia del desarrollo multipolar respecto al origen de coordenadas:**- Ejemplo:**

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

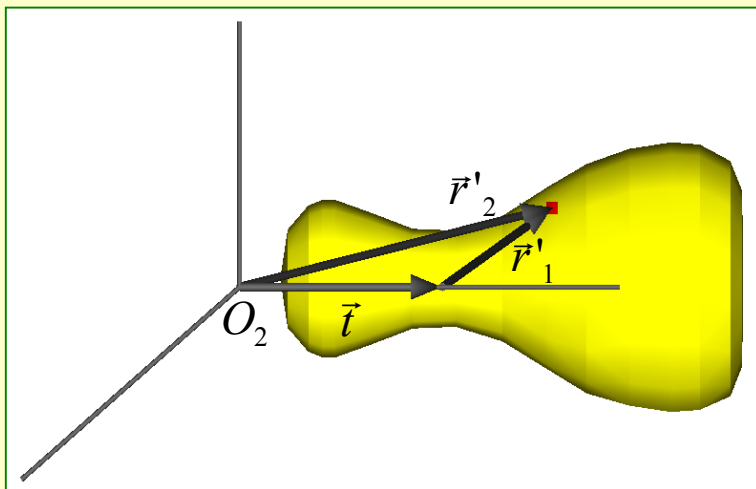


$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + \dots$$

- En particular, el momento dipolar depende del origen de coordenadas:



$$\vec{p}(O_1) = \int \vec{r}'(O_1) dq$$



$$\begin{aligned} \vec{p}(O_2) &= \int \vec{r}'(O_2) dq = \int (\vec{r}'(O_1) + \vec{t}) dq = \\ &= \int \vec{r}'(O_1) dq + \int \vec{t} dq = \vec{p}(O_1) + \vec{t}Q \end{aligned}$$

$$\text{Si } Q = 0 \Rightarrow \vec{p}(O_1) = \vec{p}(O_2)$$

SALVO si la carga total es cero

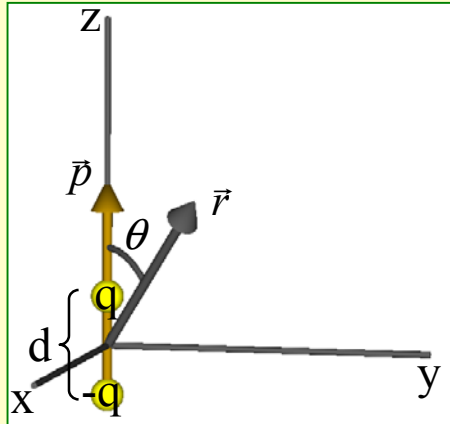
3.1. Desarrollo multipolar del campo eléctrico.



3.2. Potencial y campo de un dipolo.

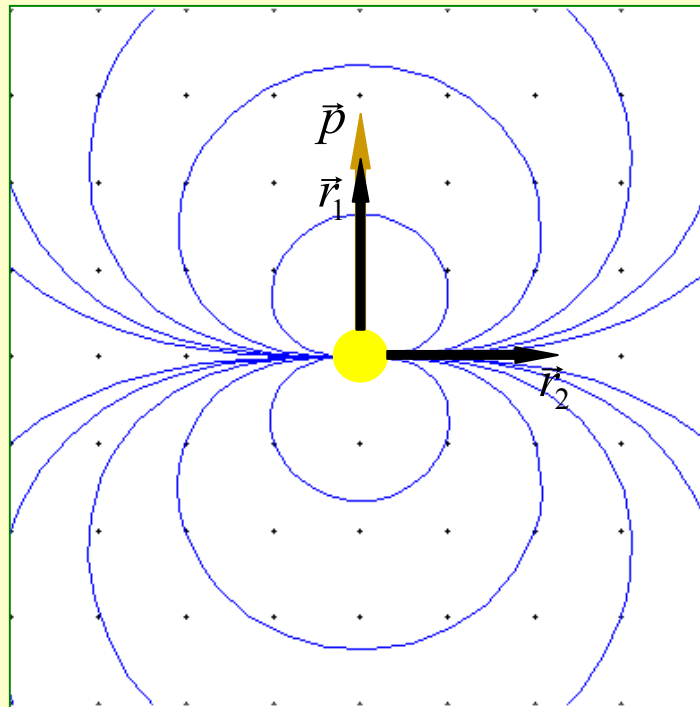
3.3. Acción de un campo eléctrico externo sobre un dipolo eléctrico.

- Potencial:



$$Q = q - q = 0$$

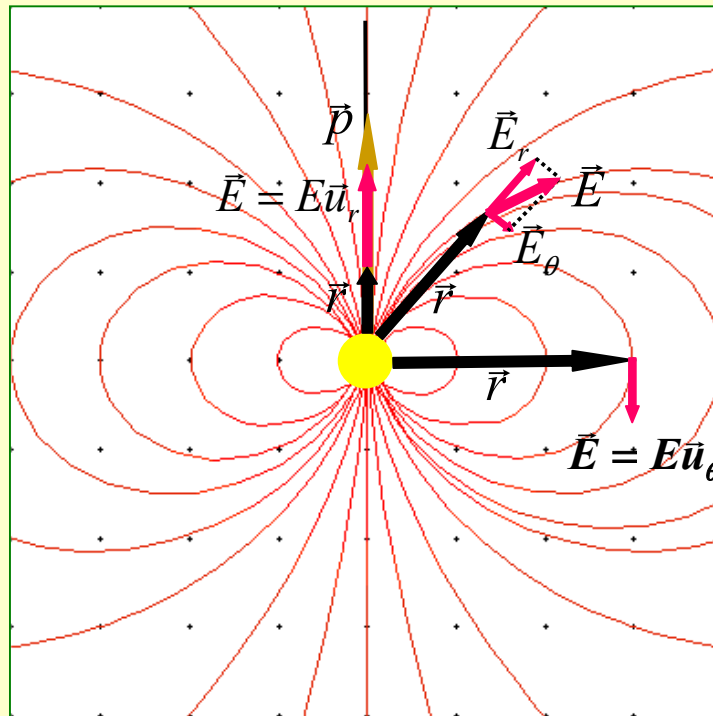
$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i = q \frac{d}{2} \vec{k} - q \left(-\frac{d}{2}\right) \vec{k} = qd \vec{k}$$



$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{p}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } \theta = 0 & \quad V = V_{max} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^2} \\ \text{Si } \theta = \frac{\pi}{2} & \quad V = V_{min} = 0 \end{aligned}$$

- Campo:



$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

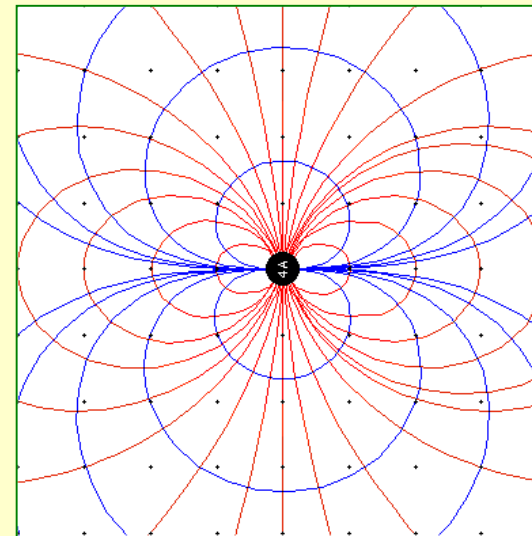
$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3}$$

$$E_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{u}_r)\vec{u}_r - \vec{p}}{r^3}$$

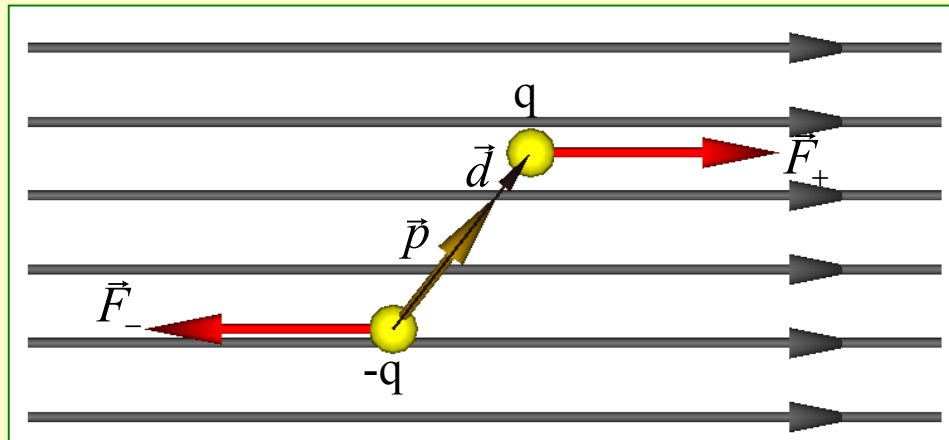
- Superficies equipotenciales y campo:



3.1. Desarrollo multipolar del campo eléctrico.

3.2. Potencial y campo de un dipolo.

 3.3. Acción de un campo eléctrico externo sobre un dipolo eléctrico.

- Campo uniforme

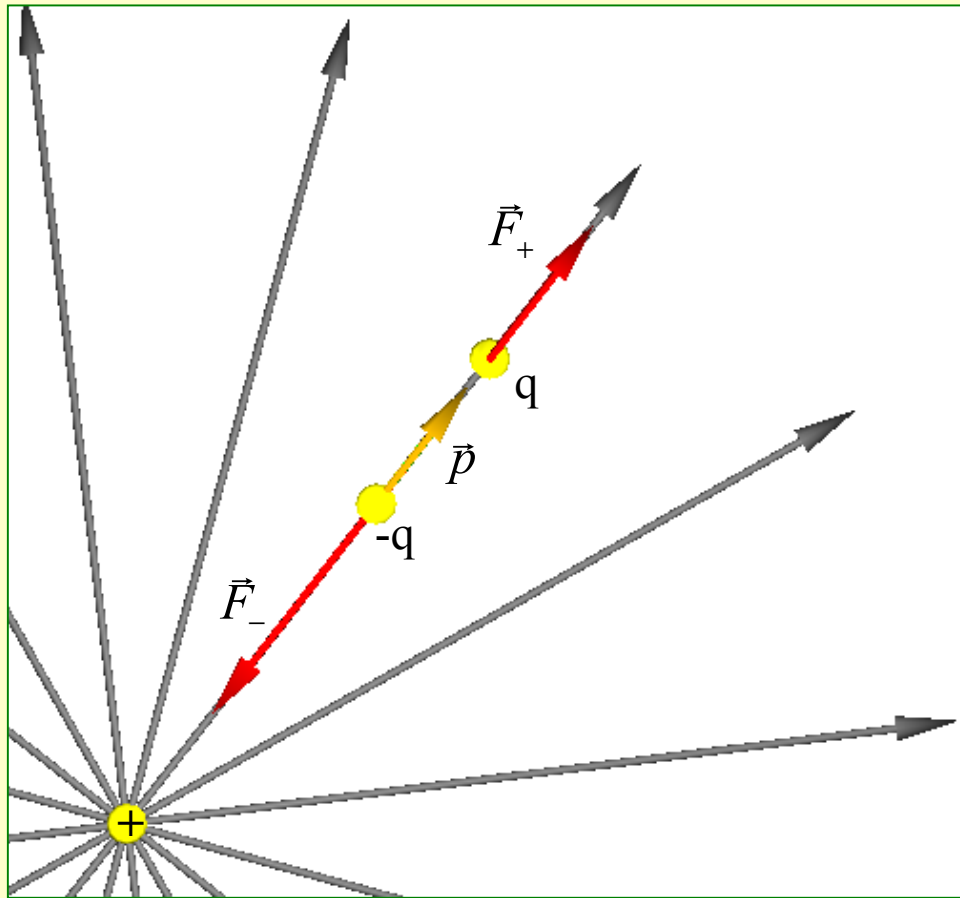
$$\vec{F}_+ = -\vec{F}_-$$

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = 0$$

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{d} \wedge (q\vec{E}) = \\ &= (q\vec{d}) \wedge \vec{E} = \vec{p} \wedge \vec{E}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U &= qV(+) - qV(-) = q[V(+) - V(-)] = q(-)\vec{E} \cdot (\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = \\ &= -q\vec{d} \cdot \vec{E} = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE \cos \theta\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}\text{Si } \theta = \frac{\pi}{2} & U = U_{max} = 0 \\ \text{Si } \theta = 0 & U = U_{min} = -pE\end{array}$$

- Campo no uniforme

$$\vec{F}_T = \vec{F}_+ + \vec{F}_- \neq 0$$

Tema 4. El campo electrostático en medios materiales



4.1. Polarización de un medio dieléctrico.

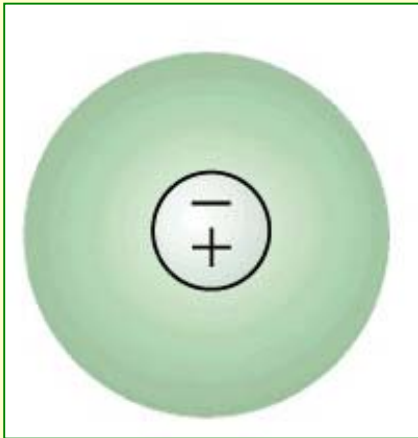
4.2. Cargas de polarización.

4.3. Desplazamiento eléctrico.

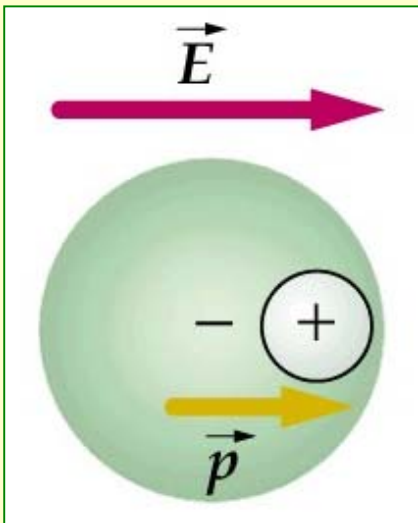
4.4. Medios lineales.

4.5. El condensador con dieléctrico.

4.6 Conductores en equilibrio electrostático.

- Materiales no polares: polarizabilidad

$$\vec{p} = 0 \text{ si } \vec{E} = 0$$



$$\vec{p} = \alpha \vec{E} \quad \alpha: \text{Polarizabilidad}$$

$$[\alpha] = \frac{[p]}{[E]} = \frac{Cm}{\frac{N}{C}} = \frac{C^2m}{N} = [\epsilon_0]m^3$$

4. El campo electrostático en medios materiales.

4.1. Polarización de un medio dieléctrico.

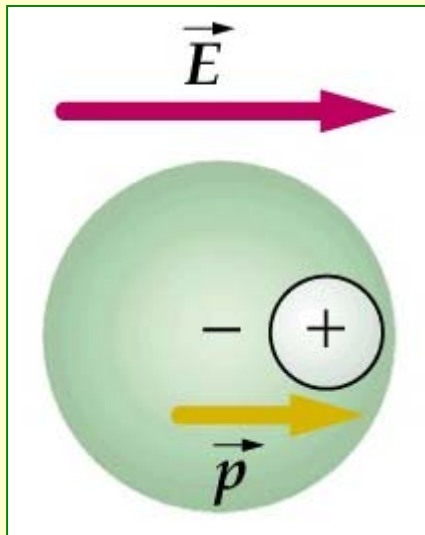
- **Ejemplo:** modelo para la polarizabilidad de un átomo.

Condición de equilibrio sobre la carga positiva: $E = E_-$

Recordatorio:

Campo dentro de una esfera de radio a , con carga Q uniformemente distribuida, a una distancia r de su centro.

$$\vec{E}_{esfera} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{a^3} \vec{u}_r$$



$$\vec{E}_- = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{a^3} \vec{u}_r = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{a^3} \vec{u}_r$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{a^3}$$

$$p = \underbrace{4\pi\epsilon_0 a^3}_{\alpha} E$$

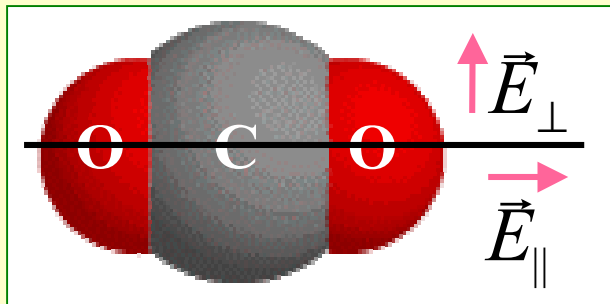
$$\alpha = 4\pi\epsilon_0 a^3$$

$\frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} (\text{\AA}^3)^1$		$\frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} (\text{\AA}^3)^1$	
He	0.21	Li	12
Ne	0.4	Na	27
Ar	1.6	K	34

¹<http://www.wild-turkey.mit.edu/chemicool>

- Generalización:

a) Molécula lineal.

 CO_2 :

$$\vec{E}_{\parallel}$$

$$\vec{p}_{\parallel} = \alpha_{\parallel} \vec{E}_{\parallel}$$

$$\vec{E}_{\perp}$$

$$\vec{p}_{\perp} = \alpha_{\perp} \vec{E}_{\perp}$$

$$\vec{E} \text{ general}$$

$$\vec{p} = \alpha_{\parallel} \vec{E}_{\parallel} + \alpha_{\perp} \vec{E}_{\perp}$$

b) En una molécula cualquiera la polarizabilidad es un tensor.

- Densidad de momento dipolar:

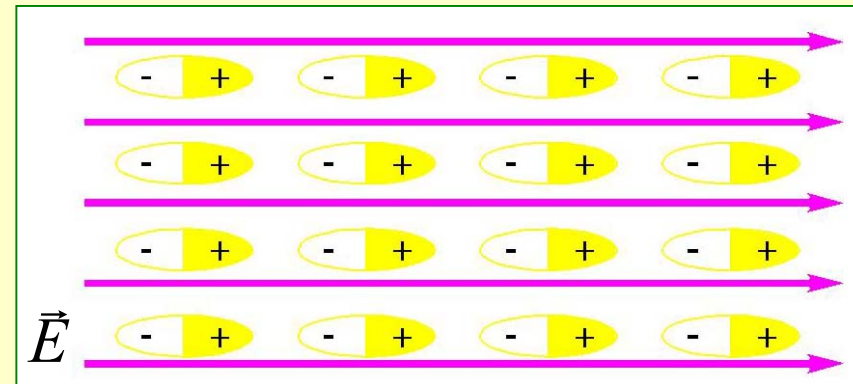
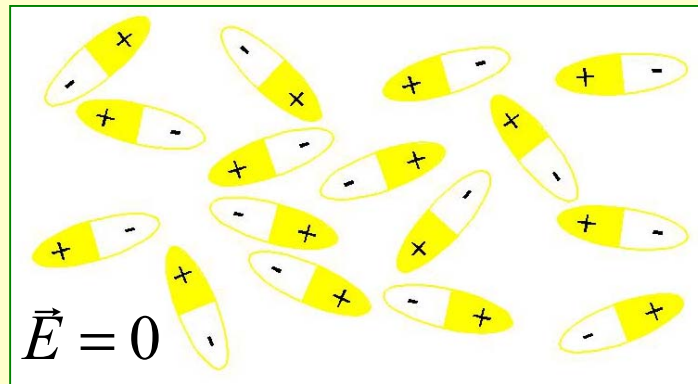
$$\vec{P} = N \vec{p}$$

N: N° de dipolos por unidad de volumen.

$$[P] = \frac{1}{m^3} m \cdot C = \frac{C}{m^2} = [\sigma]$$

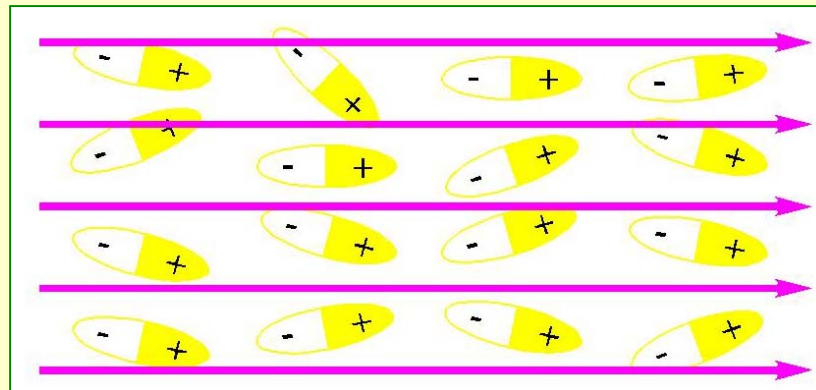
- Materiales polares

Idealmente:



$$\vec{\tau} = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

Teniendo en cuenta el efecto de la temperatura:



$$P = \frac{N p_0^2 E}{3kT}$$

P: Momento dipolar por unidad de volumen.

N: N° de dipolos por unidad de volumen.

 p_0 : Momento dipolar de cada dipolo.k: Constante de Boltzmann $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$.

T: Temperatura en grados Kelvin.

4.1. Polarización de un medio dieléctrico.



4.2. Cargas de polarización.

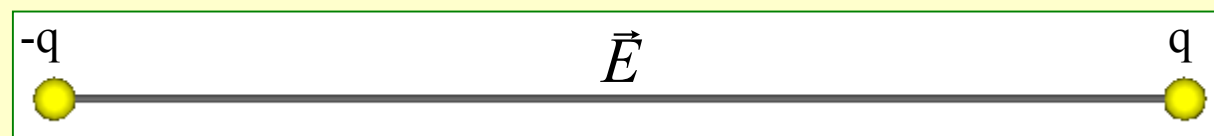
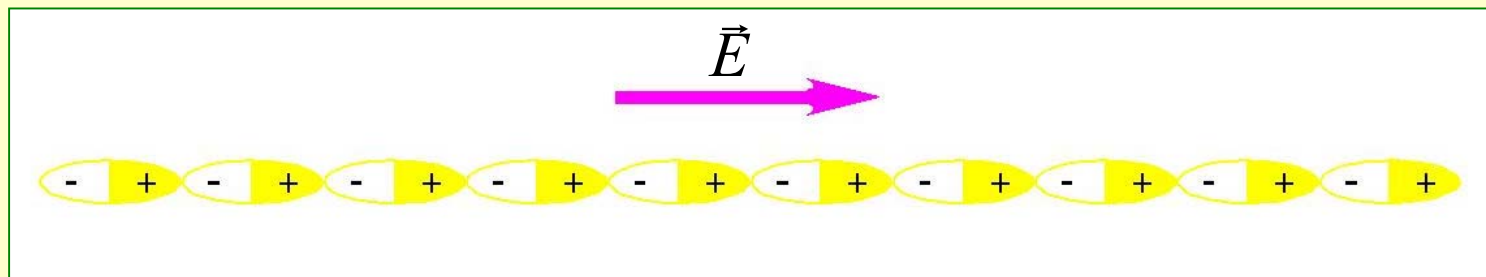
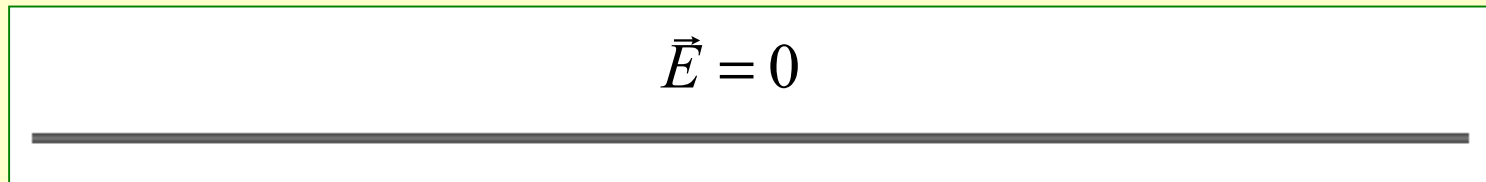
4.3. Desplazamiento eléctrico.

4.4. Medios lineales.

4.5. El condensador con dieléctrico.

4.6 Conductores en equilibrio electrostático.

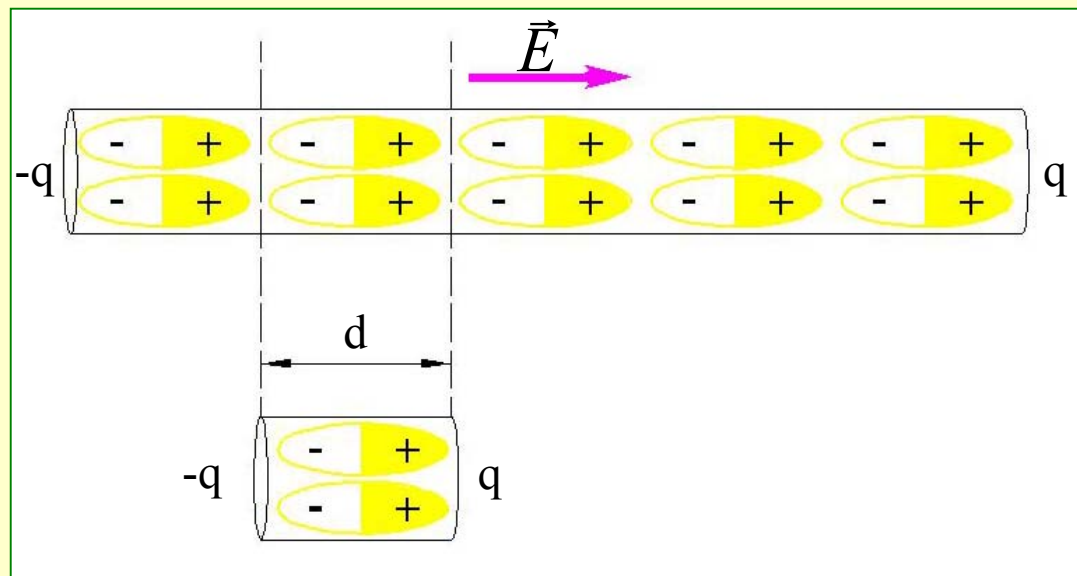
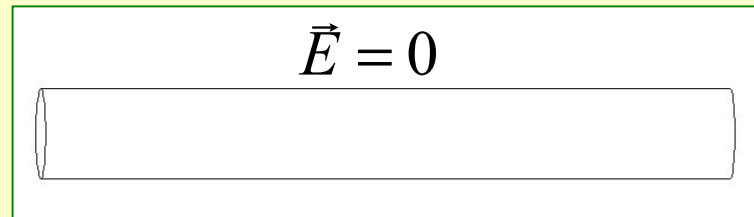
- **Ejemplo:** dieléctrico en forma de hilo



¡ No se ha desplazado ninguna carga!

A la carga que aparece en los extremos se le denomina carga de polarización.

- Densidad superficial de cargas de polarización:



$$\Delta p = PAd$$

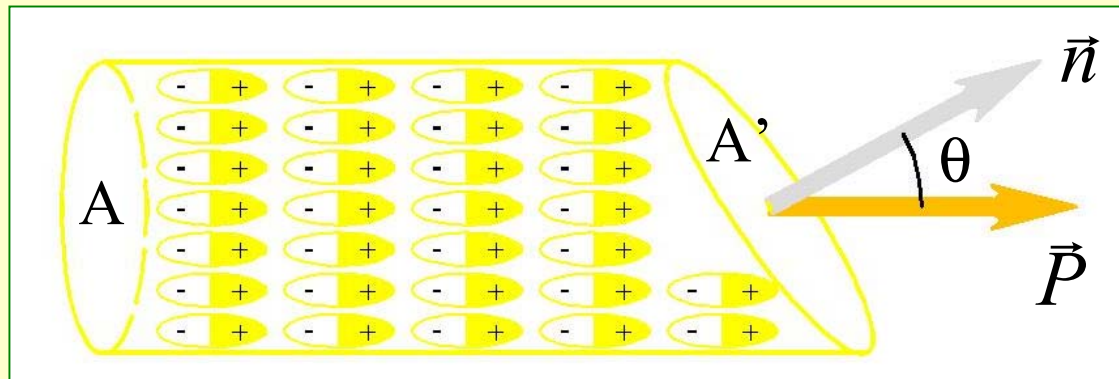
$$\Delta p = qd$$

$$PAd = qd$$

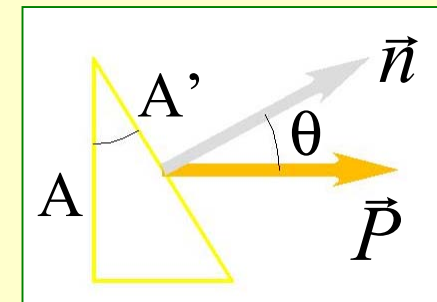
$$q = PA$$

$$\sigma_P = \frac{q}{A} = P$$

- **Densidad superficial de cargas de polarización (continuación):**



$$\sigma_P = \frac{q}{A'} = \frac{q}{A} \cos \theta = \frac{PA}{A} \cos \theta = P \cos \theta = \vec{P} \cdot \vec{n}$$



$$A = A' \cos \theta$$

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

- Si la polarización no fuese uniforme habría también una densidad de carga de polarización en volumen.

4.1. Polarización de un medio dieléctrico.

4.2. Cargas de polarización.

 4.3. Desplazamiento eléctrico.

4.4. Medios lineales.

4.5. El condensador con dieléctrico.

4.6 Conductores en equilibrio electrostático.

- Se define el vector desplazamiento eléctrico;

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

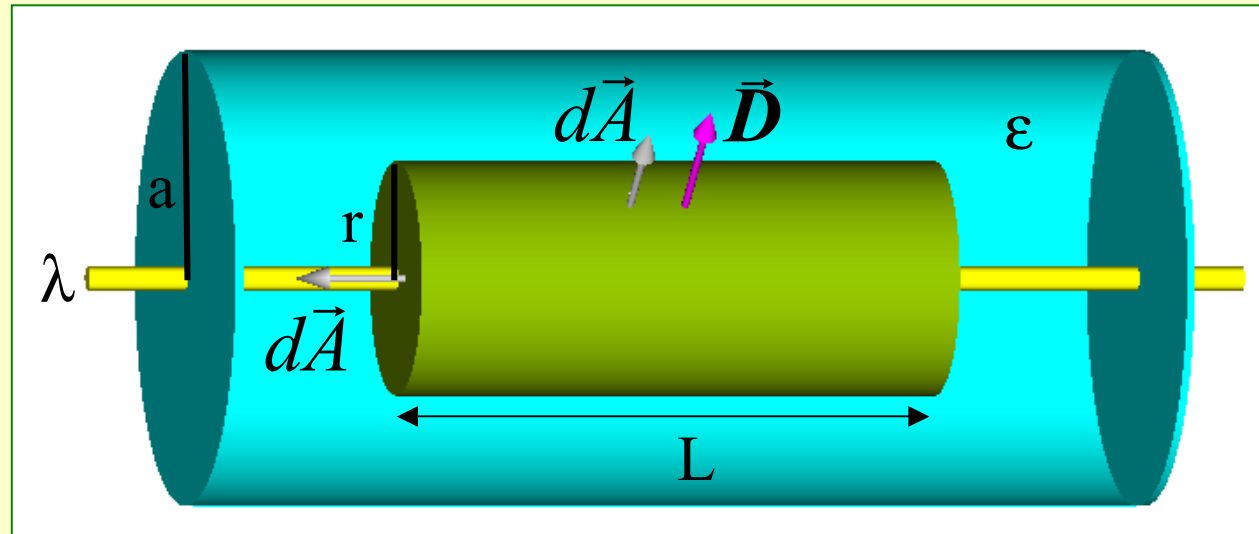
$$[D] = [P] = \frac{C}{m^2}$$

- Se puede demostrar que el desplazamiento cumple una ecuación análoga al T. de Gauss:

$$\int \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_l$$

- En la ecuación anterior se hace una distinción (artificial) entre carga libre, Q_l y cargas de polarización, Q_p . **En el cálculo del desplazamiento interviene sólo la carga libre.**

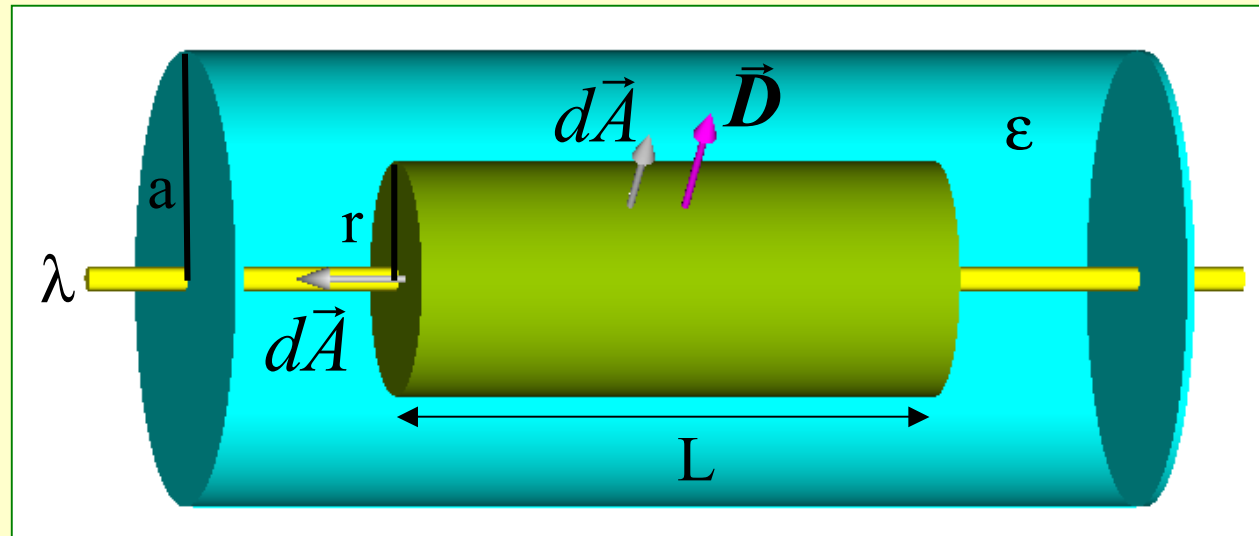
- **Ejemplo:** hilo cargado rodeado de cilindro dieléctrico con radio a



$$\int \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_l$$

Flujo:

$$\begin{aligned} \int \vec{D} \cdot d\vec{A} &= \underbrace{\int_{Bases} \vec{D} \cdot d\vec{A}}_{\vec{D} \perp d\vec{A}} + \underbrace{\int_{Lateral} \vec{D} \cdot d\vec{A}}_{\vec{D} \parallel d\vec{A}} = \\ &= \int_{lateral} D dA = D \int_{lateral} dA = D 2\pi r L \end{aligned}$$



Carga encerrada:

$$Q_l = \lambda L$$

Aplicación T. Gauss:

$$D 2\pi r L = \lambda L$$

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

$$\vec{D} = \frac{\lambda}{2\pi r} \vec{u}_r$$

Campo eléctrico fuera del cilindro ($r > a$):

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

¿Y dentro ($r < a$) ?

Aún no podemos dar la respuesta

4.1. Polarización de un medio dieléctrico.

4.2. Cargas de polarización.

4.3. Desplazamiento eléctrico.

 4.4. Medios lineales.

4.5. El condensador con dieléctrico.

4.6 Conductores en equilibrio electrostático.

- En los dieléctricos lineales:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

χ_e es la susceptibilidad eléctrica. Es adimensional.

- El desplazamiento resulta proporcional al campo:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$$

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

ϵ es la permitividad del medio.

$$[\epsilon] = [\epsilon_0] = \frac{F}{m}$$

- Es frecuente trabajar con la constante dieléctrica ϵ_r (adimensional)

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \chi_e$$

	ϵ_r
Vacío	1
Hidrógeno	1.00025
Aire	1.00059
Polietileno	2.26
Silicio	11.8
Agua	80.1

4.1. Polarización de un medio dieléctrico.

4.2. Cargas de polarización.

4.3. Desplazamiento eléctrico.

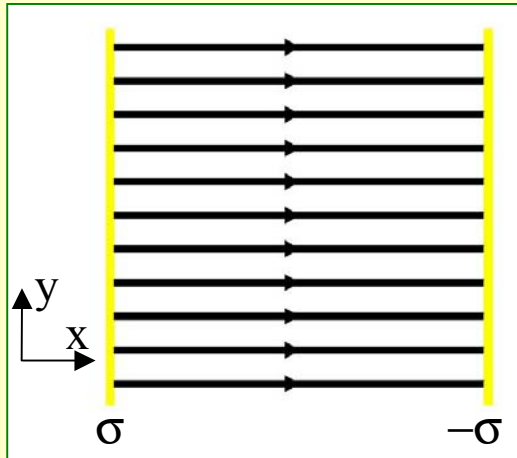
4.4. Medios lineales.



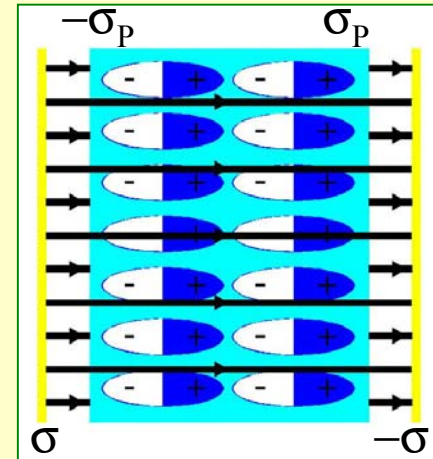
4.5. El condensador con dieléctrico.

4.6 Conductores en equilibrio electrostático.

- ¿Qué ocurre al introducir un dieléctrico en un condensador?

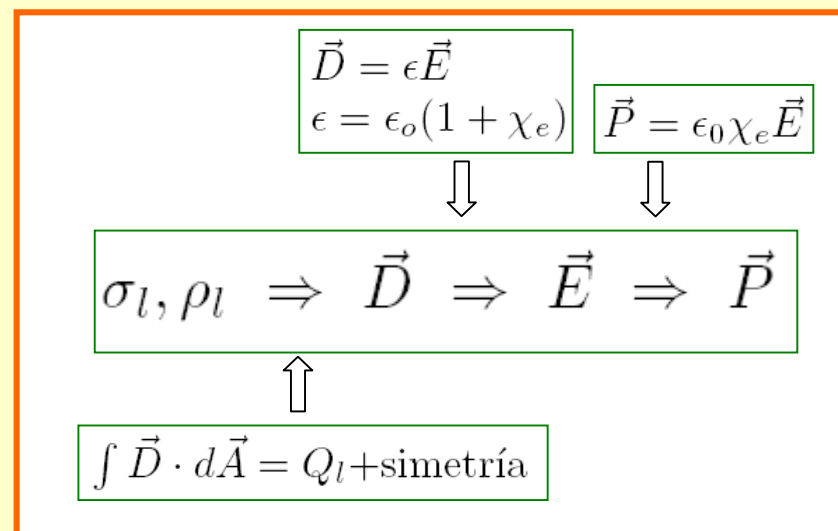


$$\vec{E}_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{i}$$

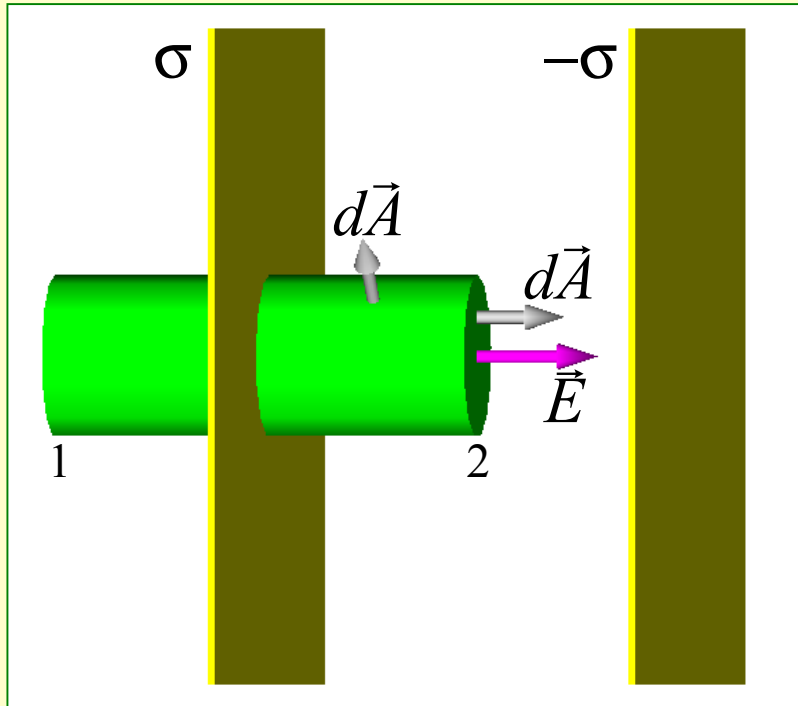


$$\vec{E}??$$

- Esquema de cálculo:



- Cálculo del vector desplazamiento:



$$\int \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_l$$

$$\begin{aligned} \int \vec{D} \cdot d\vec{A} &= \underbrace{\int_{Lateral} \vec{D} \cdot d\vec{A}}_{\vec{D} \perp d\vec{A}} + \underbrace{\int_{Base_1} \vec{D} \cdot d\vec{A}}_{\vec{D}=0} + \underbrace{\int_{Base_2} \vec{D} \cdot d\vec{A}}_{\vec{D} \parallel d\vec{A}} = \\ &= \int_{Base_2} D dA = D \int_{Base_2} dA = DA \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} D = \sigma \\ \vec{D} = \sigma \vec{i} \end{array} \right\}$$

$$Q_l = \sigma A$$

4. El campo electrostático en medios materiales.

4.5. El condensador con dieléctrico.

- Cálculo del campo eléctrico:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \sigma \vec{i}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon} \vec{i}$$

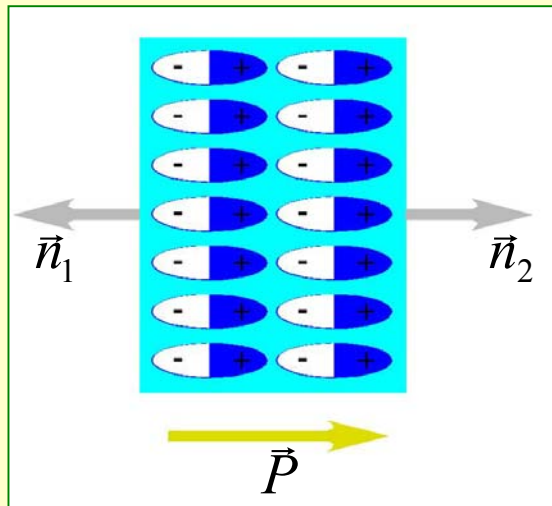
(menor que cuando no había dieléctrico:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{i})$$

- La polarización:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 \chi_e \frac{\sigma}{\epsilon} \vec{i}$$

- Las cargas de polarización:

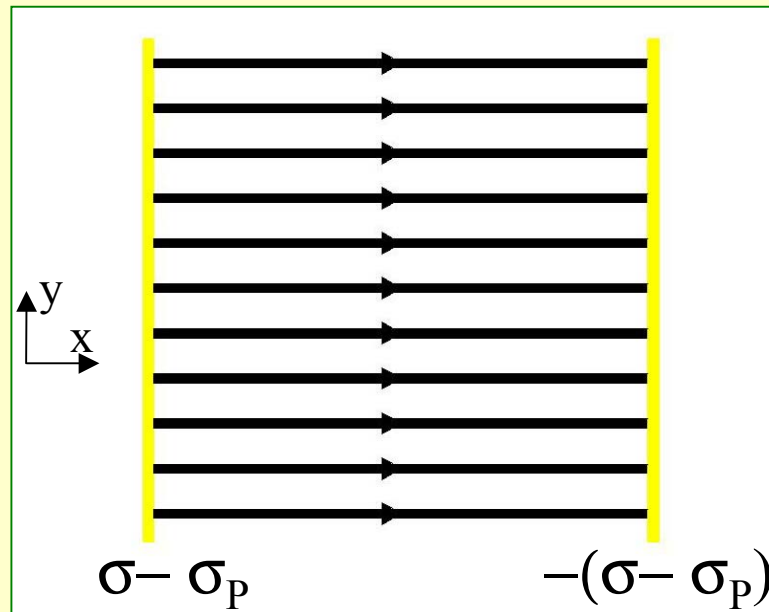


$$\sigma_{P_1} = \vec{P} \cdot \vec{n}_1 = -P \equiv -\sigma_P$$

$$\sigma_{P_2} = \vec{P} \cdot \vec{n}_2 = P \equiv \sigma_P$$

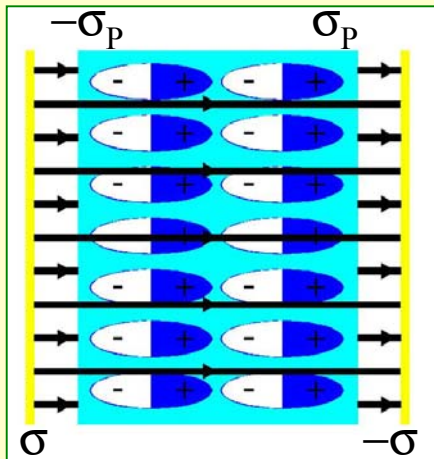
(no hay cargas de volumen)

- ¿ Son reales las cargas de polarización?



$$\begin{aligned}
 E &= \frac{\sigma - \sigma_P}{\epsilon_0} = \frac{\sigma - \epsilon_0 \chi_e \frac{\sigma}{\epsilon}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \left(1 - \frac{\epsilon_0 \chi_e}{\epsilon}\right)}{\epsilon_0} = \\
 &= \frac{\sigma (\epsilon - \epsilon_0 \chi_e)}{\epsilon \epsilon_0} = \frac{\sigma (\epsilon_0 + \epsilon_0 \chi_e - \epsilon_0 \chi_e)}{\epsilon \epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon}
 \end{aligned}$$

- ¿Cómo varía la capacidad del condensador?



$$V_- - V_+ = - \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_0^d E dl = -Ed = -\frac{\sigma}{\epsilon}d$$

$$V_+ - V_- = \Delta V = \frac{\sigma}{\epsilon}d$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma}{\epsilon}d} = \epsilon \frac{A}{d}$$

4. El campo electrostático en medios materiales. 4.6 Conductores en equilibrio electrostático.

4.1. Polarización de un medio dieléctrico.

4.2. Cargas de polarización.

4.3. Desplazamiento eléctrico.

4.4. Medios lineales.

4.5. El condensador con dieléctrico.



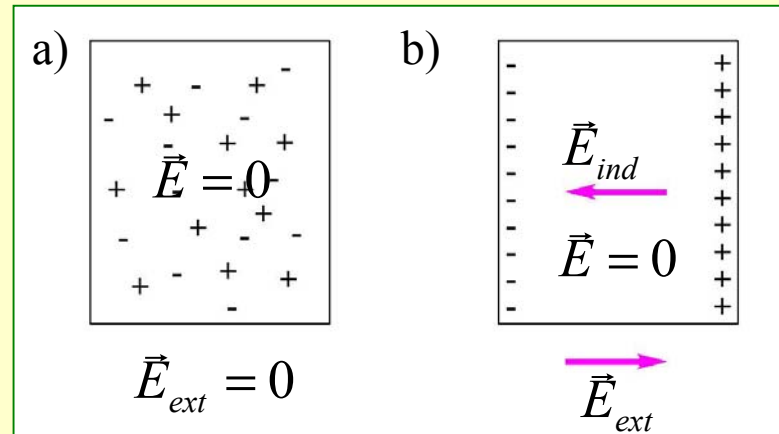
4.6 Conductores en equilibrio electrostático.

4. El campo electrostático en medios materiales. 4.6 Conductores en equilibrio electrostático.

- Los conductores tienen cargas libres en su interior

- Propiedades:

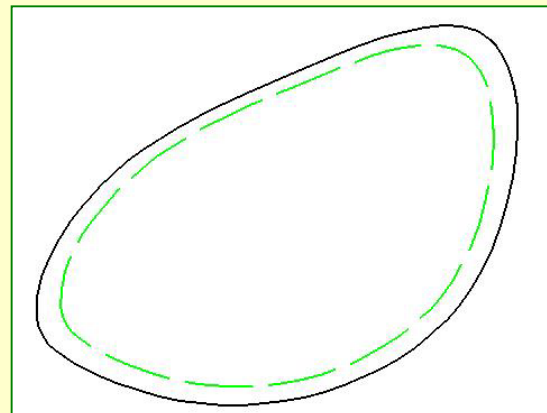
1. El campo eléctrico en su interior es nulo.



En b):

$$\vec{E} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_{ind} = 0$$

2. La carga **neta** en un conductor está situada en su superficie.

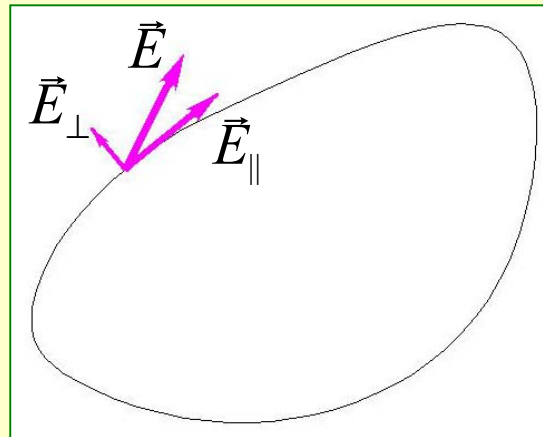


$$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = 0 \Rightarrow \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} = 0$$

4. El campo electrostático en medios materiales. 4.6 Conductores en equilibrio electrostático.

3. El campo en la superficie de un conductor es perpendicular a la superficie



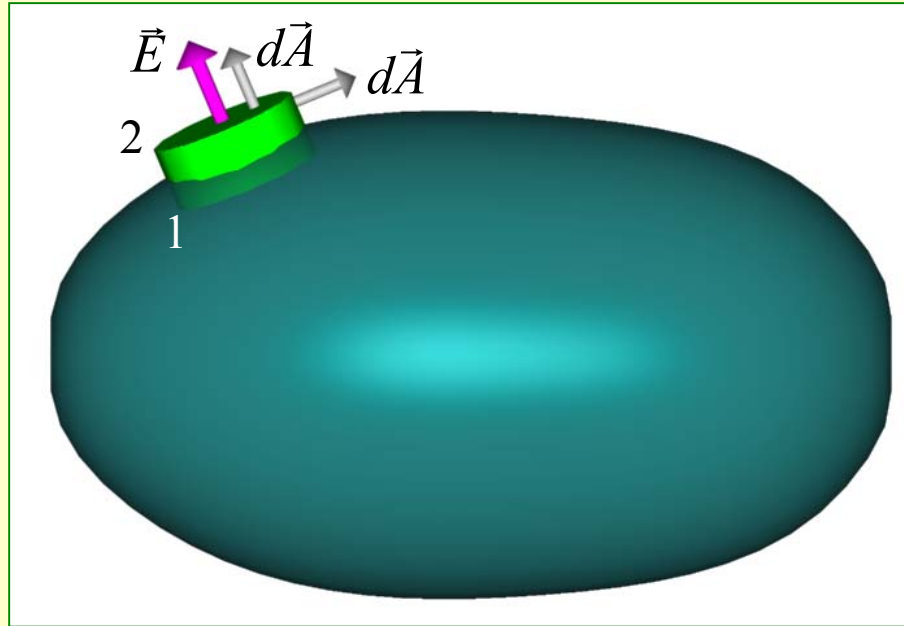
(Si existiera una componente tangencial, como en la figura, las cargas se redistribuirían.)

4. Todos los puntos del conductor están al mismo potencial:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \text{ ya que } \begin{cases} \text{dentro} & \vec{E} = 0 \\ \text{superficie} & \vec{E} \perp d\vec{l} \end{cases}$$

4. El campo electrostático en medios materiales. 4.6 Conductores en equilibrio electrostático.

4. El campo en el exterior viene dado por la densidad superficial de carga



$$\begin{aligned}\int_{cilindro} \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \underbrace{\int_{Lateral} \vec{E} \cdot d\vec{A}}_{\vec{E} \perp d\vec{A}} + \underbrace{\int_{Base_1} \vec{E} \cdot d\vec{A}}_{\vec{E}=0} + \underbrace{\int_{Base_2} \vec{E} \cdot d\vec{A}}_{\vec{E} \parallel d\vec{A}} = \\ &= \int_{Base_2} E dA = E \int_{Base_2} dA = EA_2\end{aligned}$$

$$EA_2 = \frac{Q}{\epsilon_0} = \sigma \frac{A_2}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

4. El campo electrostático en medios materiales. 4.6 Conductores en equilibrio electrostático.

6. El campo es mayor en las zonas con menor radio de curvatura.

Esfera de radio r , a potencial V :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

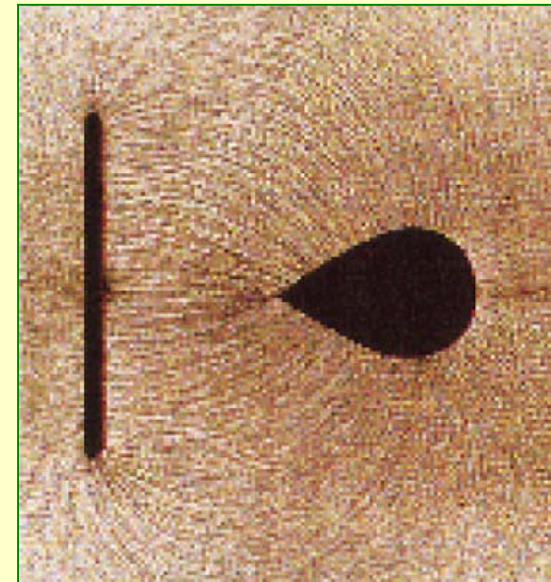
$$\sigma = \frac{q}{4\pi r^2} = \frac{V 4\pi\epsilon_0 r}{4\pi r^2} = \epsilon_0 \frac{V}{r}$$

En un conductor de forma arbitraria:



$$r \downarrow \Rightarrow \sigma \uparrow \Rightarrow E \uparrow$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



Tema 5. El campo magnetostático en el vacío



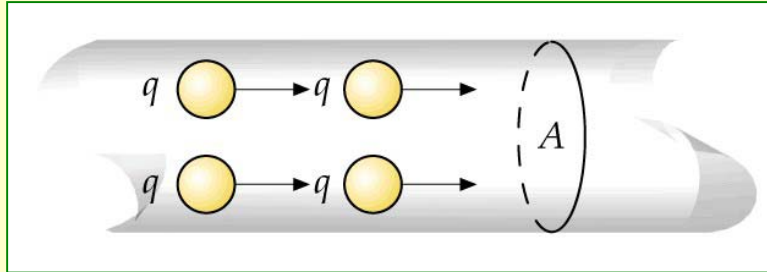
5.1. Corriente eléctrica y Ley de Ohm.

5.2. Introducción a la interacción magnética.

5.3. Fuerza de Lorentz. Campo magnético.

5.4. Ley de Biot-Savart.

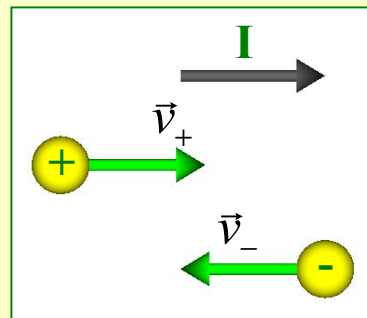
5.5. Teorema de Ampère.

Corriente eléctrica

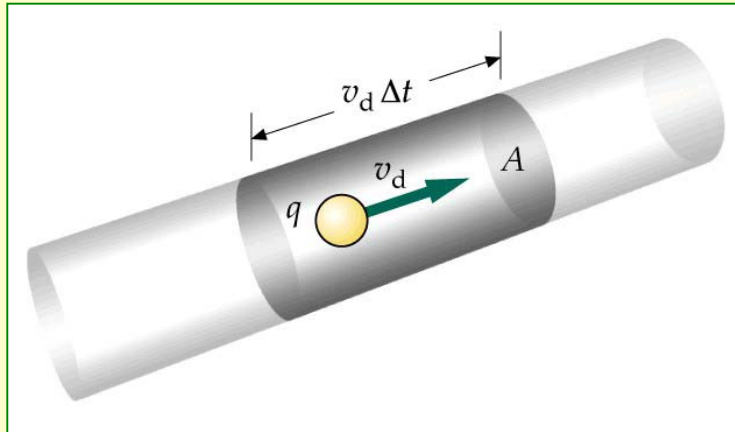
$$I = \frac{dq}{dt}$$

$$[I] = A$$

- Sentido de la corriente: el de las cargas positivas.



- Relación con los portadores de carga:



$$\rho = qn$$

$$[n] = m^{-3}$$

$$dq = \rho d\tau = \rho v_d dt A$$

$$I = \frac{dq}{dt} = \rho v_d A$$

- Vector densidad de corriente:

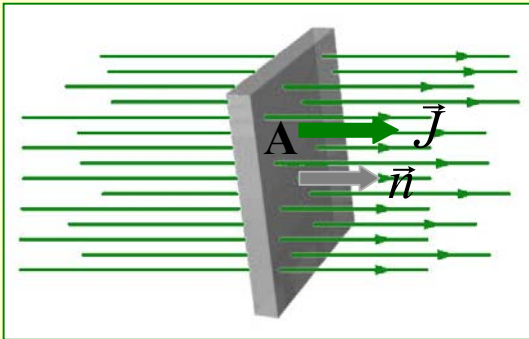
$$J = \rho v_d$$

$$[J] = \frac{C}{m^3} \frac{m}{s} = \frac{C}{m^2 s} = \frac{A}{m^2}$$

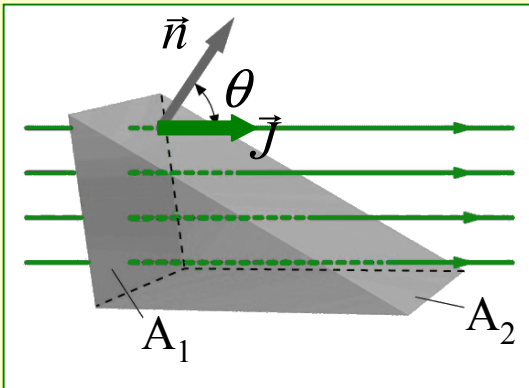
$$I = JA$$

$$\vec{J} = \rho \vec{v}_d$$

$$\vec{J} = \sum_i \rho_i \vec{v}_{d_i}$$

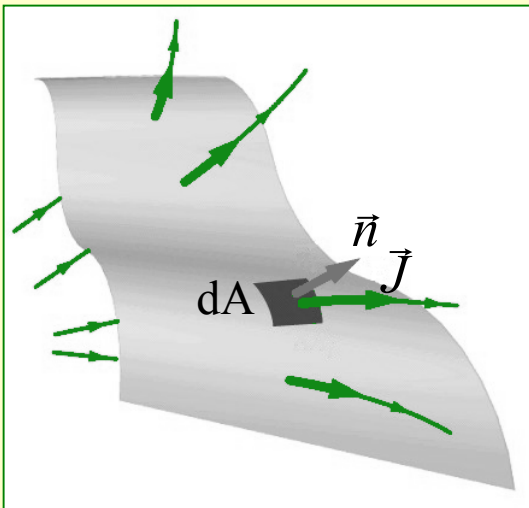


$$I = JA$$



$$I = JA_1 = JA_2 \cos \theta = \vec{J} \cdot \vec{A}_2$$

$$A_1 = A_2 \cos \theta$$



$$I = \int \vec{J} d\vec{A}$$

Ley de Ohm

- Ley de Ohm generalizada

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

σ es la conductividad



(no confundir con la densidad de carga superficial)

- Unidades:

$$[\sigma] = \frac{[J]}{[E]} = \frac{A/m^2}{V/m} = \frac{A}{Vm} = \Omega^{-1}m^{-1}$$

$$\Omega = \frac{V}{A}$$

Ω : Ohmios

- Resistividad:

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

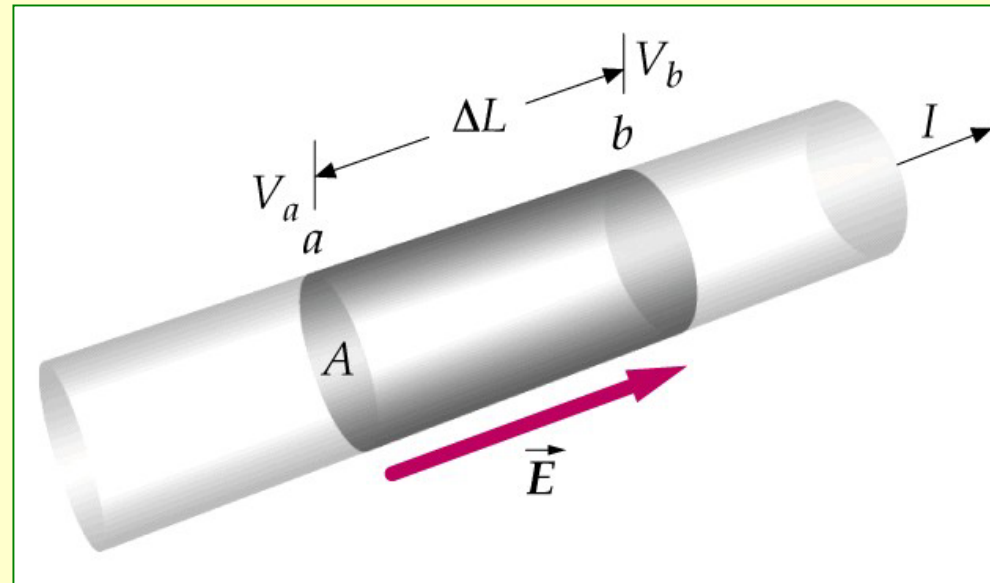
$$[\rho] = \Omega m$$



(no confundir con la densidad de carga de volumen)

Metales (Cu)	ρ	$\sim$	$10^{-8} \Omega m$
Semiconductores (Ge)	ρ	$\sim$	$0.1 \Omega m$
Aislantes (madera)	ρ	$\sim$	$10^{11} \Omega m$

- Caída de potencial a lo largo de un conductor:



$$\begin{aligned} V_b - V_a &= - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_a^b \frac{\vec{J}}{\sigma} \cdot d\vec{l} = - \int_a^b \frac{J}{\sigma} dl = \\ &= - \int_a^b \frac{I}{A\sigma} dl = - \frac{I}{A\sigma} L \end{aligned}$$

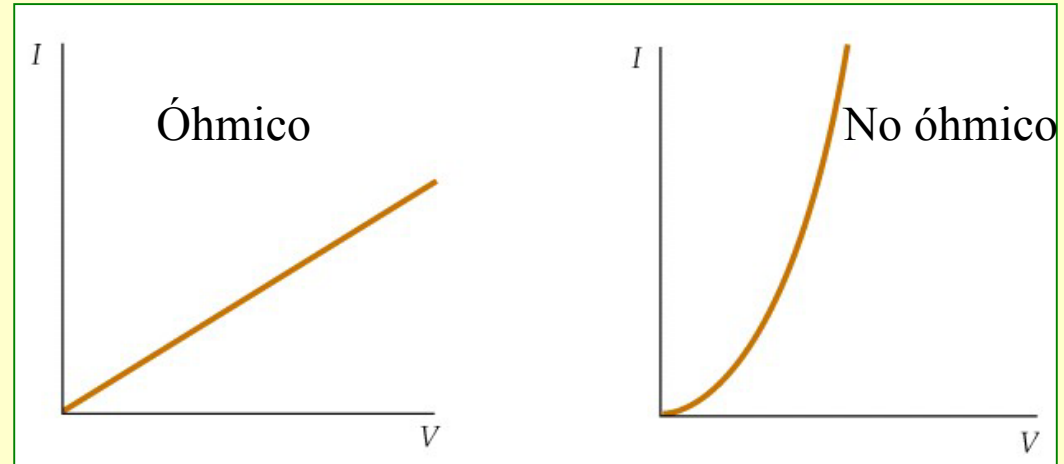
$$V_a - V_b = \frac{L}{A\sigma} I$$

- Resistencia

$$R = \frac{L}{\sigma A} = \rho \frac{L}{A}$$

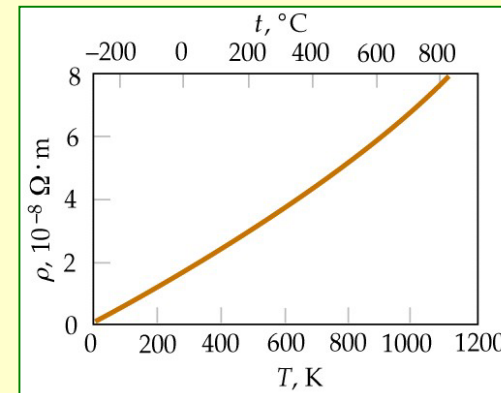
$$V_a - V_b = RI$$

$$[R] = \frac{V}{A} = \Omega$$

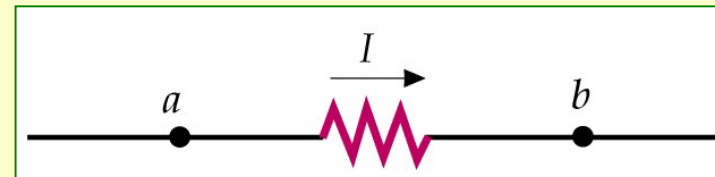


- Variación de la resistencia con la temperatura:

$$\rho = \rho_{20}[1 + \alpha(t_C - 20^\circ C)]$$



- La resistencia en los circuitos:



5.1. Corriente eléctrica y Ley de Ohm.



5.2. Introducción a la interacción magnética.

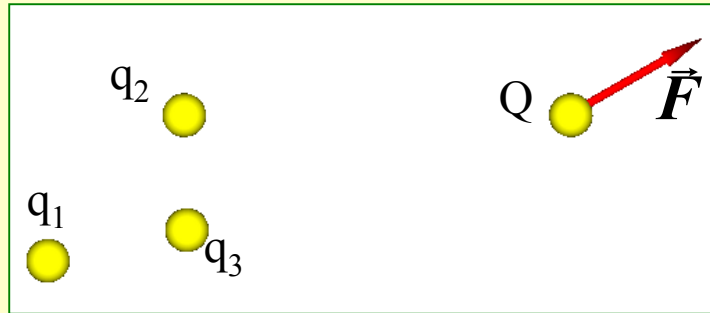
5.3. Fuerza de Lorentz. Campo magnético.

5.4. Ley de Biot-Savart.

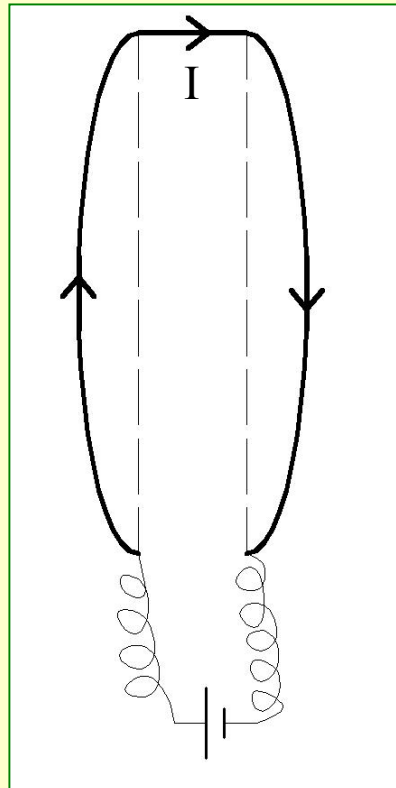
5.5. Teorema de Ampère.

Lección 5. El campo magnetostático en el vacío. 5.2. Introducción a la interacción magnética.

- Cuestión fundamental: fuerza entre las cargas.

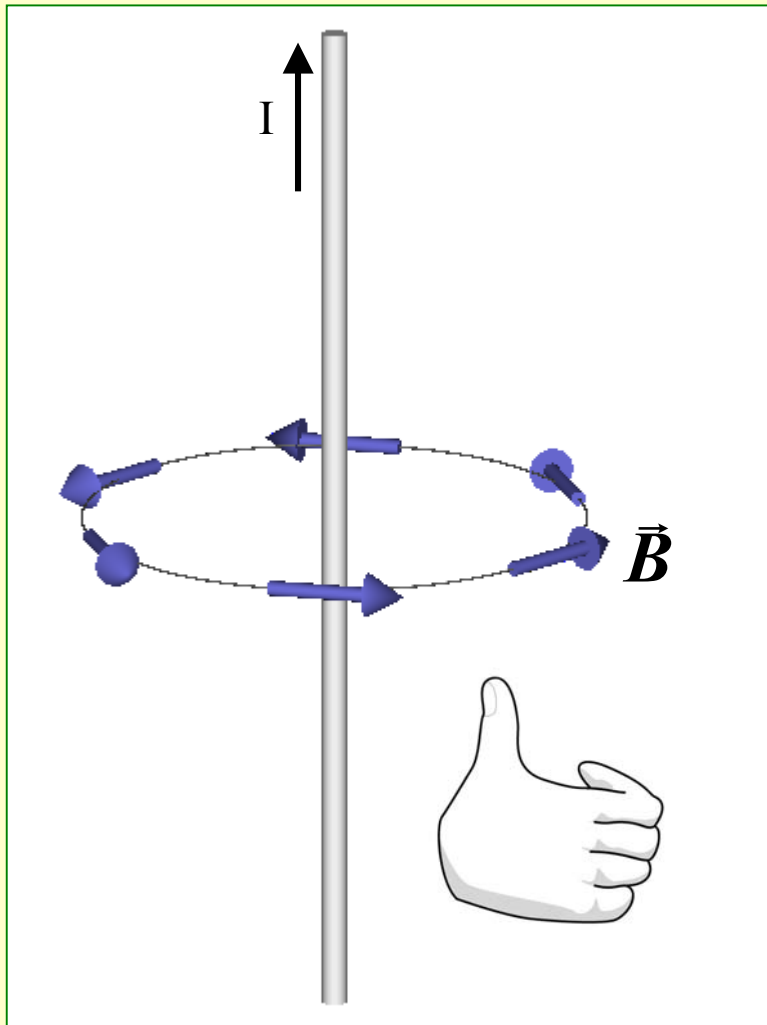


- Interacción magnética básica: fuerza entre corrientes.

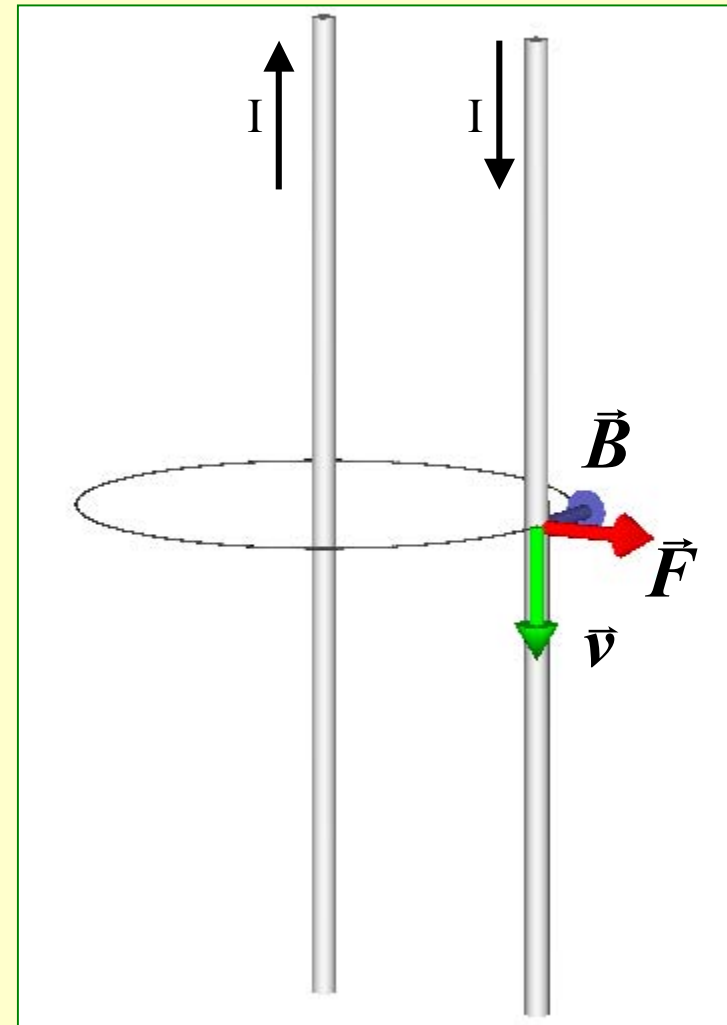


Lección 5. El campo magnetostático en el vacío. 5.2. Introducción a la interacción magnética.

- Una corriente crea un campo magnético...



... y el campo magnético efectúa una fuerza sobre la otra corriente.



5.1. Corriente eléctrica y Ley de Ohm.

5.2. Introducción a la interacción magnética.



5.3. Fuerza de Lorentz. Campo magnético.

5.4. Ley de Biot-Savart.

5.5. Teorema de Ampère.

- Fuerza magnética, campo magnético:

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

$\vec{B}$ es el vector de inducción magnética, vector de densidad magnética o simplemente **campo magnético**

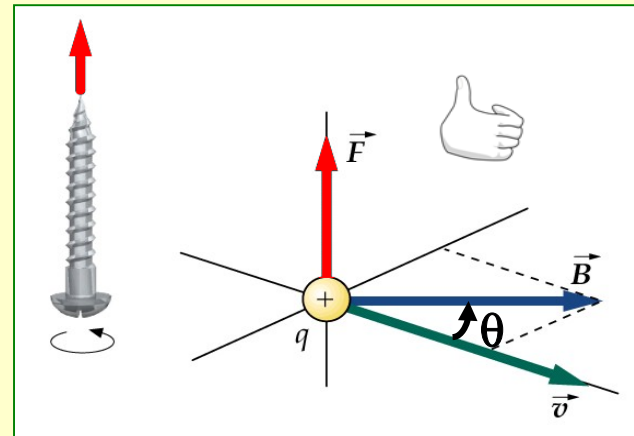
$$[B] = \frac{N}{C} \frac{s}{m} = \frac{N}{Am} \equiv T$$

$$1T = 10^4 G$$

- Dirección y sentido:

$$\vec{F} \perp \vec{B}, \vec{F} \perp \vec{v}$$

Sentido dado por la regla de la mano derecha o del tornillo

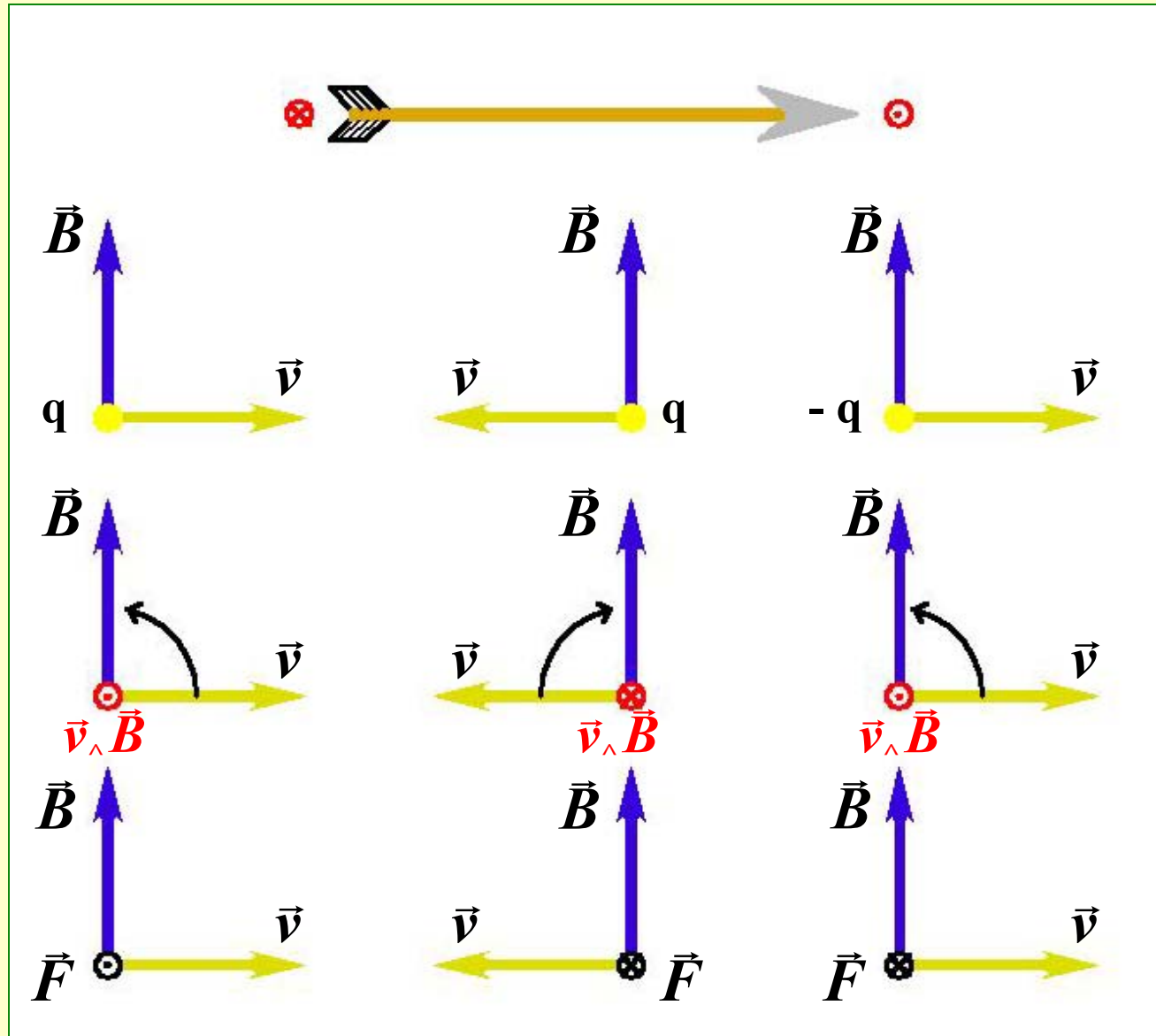


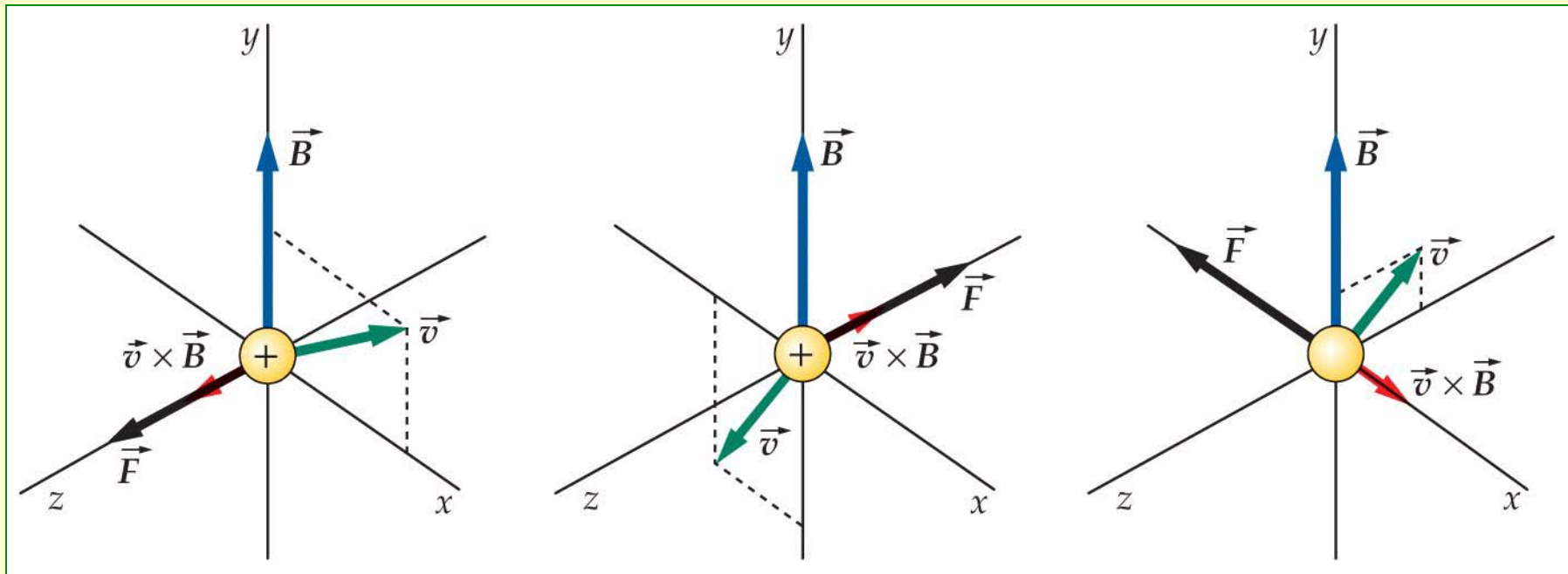
- Módulo:

$$F = qvB \sin \theta \quad \sin \theta = -1, \dots, 1$$

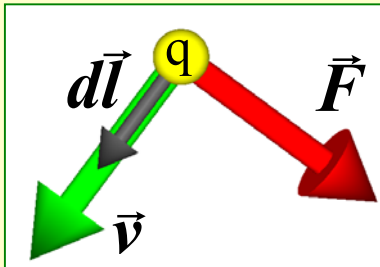
$$\text{Si } \vec{v} \parallel \vec{B} \quad \vec{F} = 0$$

- Ejemplos:





- El campo magnético no realiza trabajo sobre la carga:

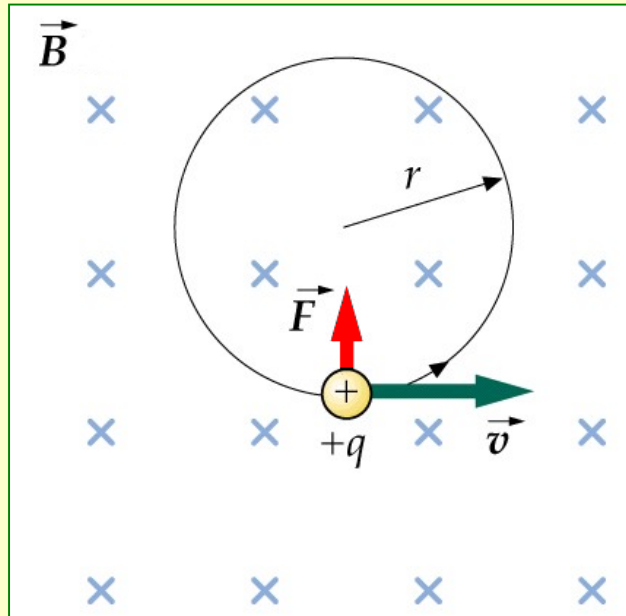


$$W = \int \vec{F}_m \cdot d\vec{l} = \int q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = 0$$

- Fuerza de Lorentz:

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

- **Ejemplo:** movimiento ciclotrónico.



$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

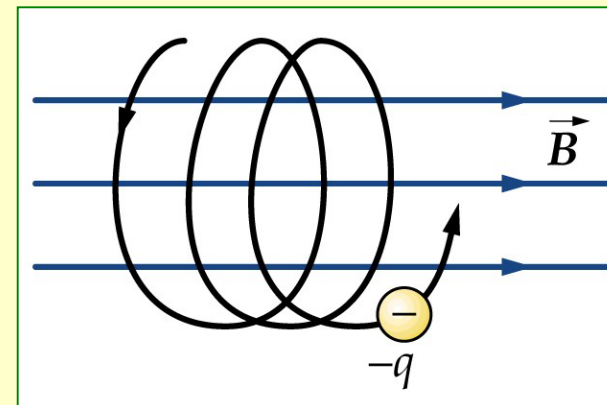
$$F = qvB = ma_c = m\omega^2 R = m \frac{v^2}{R}$$

$$qB = m \frac{v}{R}$$

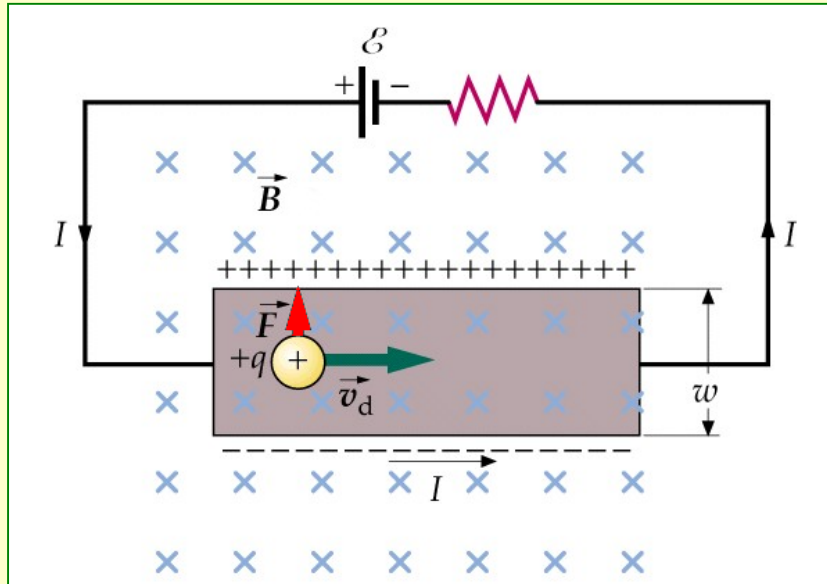
$$R = \frac{mv}{qB}$$

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{qB}{m}$$

- Si existe una componente de la velocidad en la dirección del campo:



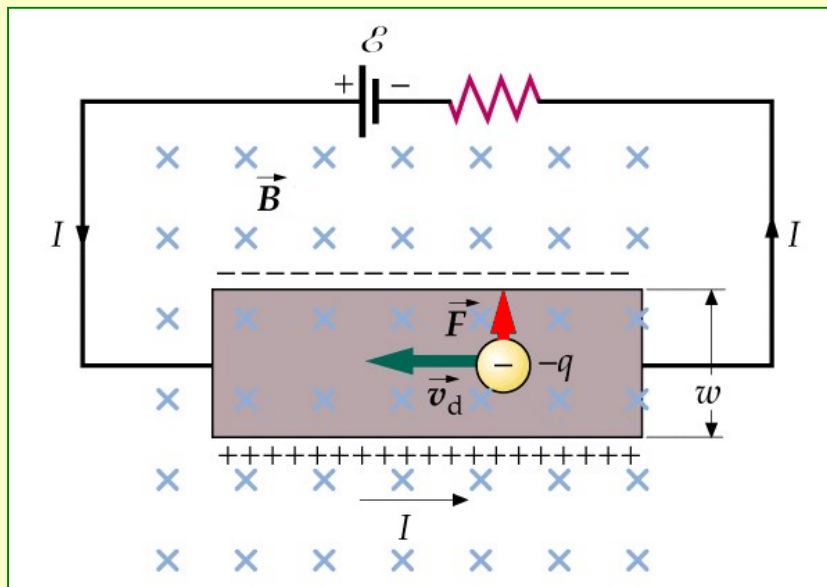
- **Ejemplo:** Efecto Hall.



$$V_H = Eh = v_d B h$$

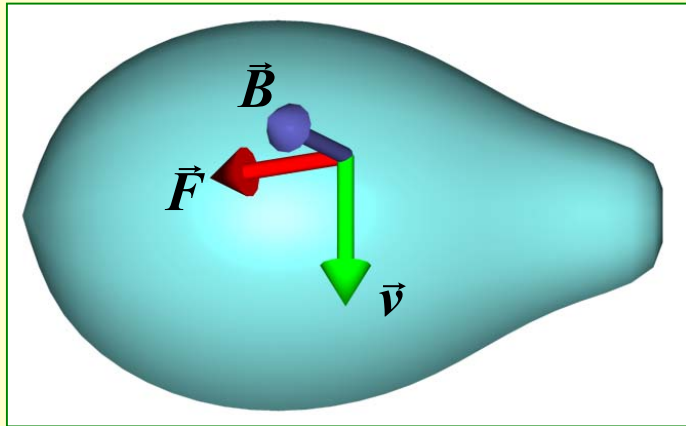


$$qE = qv_d B$$



$$\vec{F} = q\vec{v}_d \wedge \vec{B}$$

- Fuerza sobre una distribución de corrientes



$$\vec{F} = \int_{\tau} dq \vec{v} \wedge \vec{B} = \int_{\tau} \rho d\tau \vec{v} \wedge \vec{B} = \int_{\tau} \vec{J} \wedge \vec{B} d\tau$$

$$\vec{J} = \rho \vec{v}$$

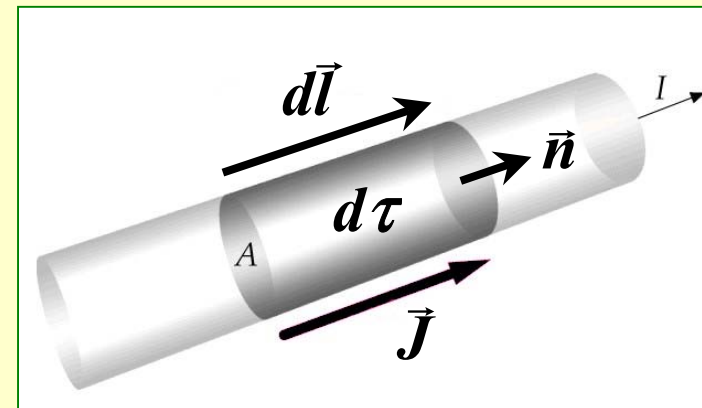
- Fuerza sobre una corriente filiforme

$$I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = JA$$

$$d\tau = A dl$$

$$J = I/A$$

$$\vec{J} = I/A \vec{n}$$



$$\vec{F} = \int_{\tau} \vec{J} \wedge \vec{B} d\tau = \int_{cable} \left(\frac{I}{A} \vec{n} \right) \wedge \vec{B} A dl = \int_{cable} (I \vec{n}) \wedge \vec{B} dl = \int_{cable} I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

5.1. Corriente eléctrica y Ley de Ohm.

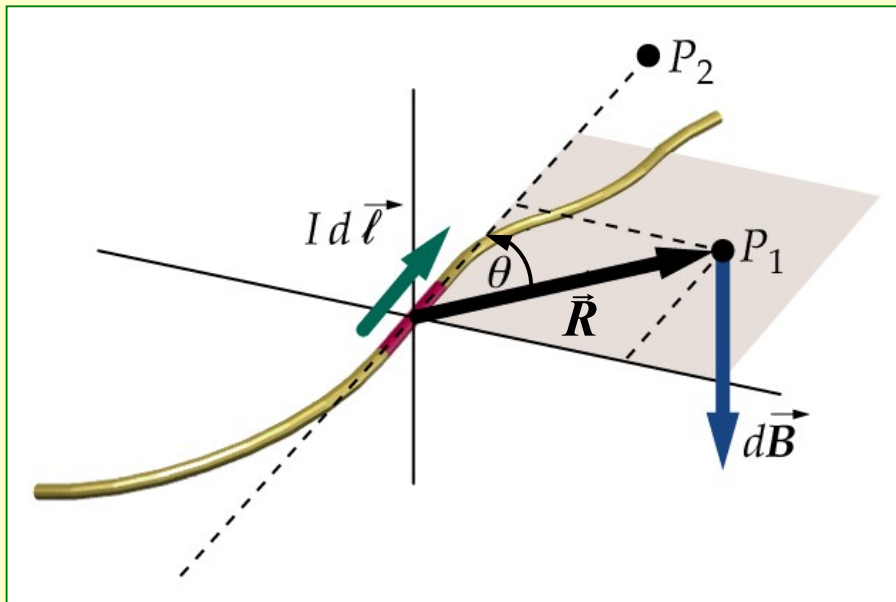
5.2. Introducción a la interacción magnética.

5.3. Fuerza de Lorentz. Campo magnético.



5.4. Ley de Biot-Savart.

5.5. Teorema de Ampère.

Ley de Biot-Savart:

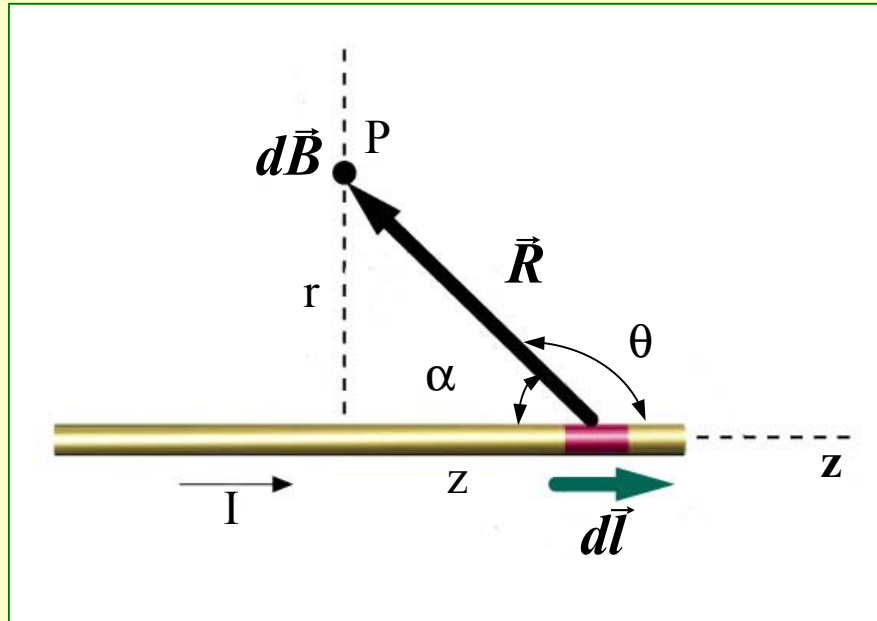
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}_R}{R^2}$$

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{T}{A} m = 4\pi 10^{-7} \frac{N}{A^2}$$



$$1 \text{ T} = 1 \frac{N}{Am}$$

- **Ejemplo:** campo de una corriente rectilínea indefinida



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}_R}{R^2}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \theta}{R^2} \vec{u}_\phi$$

$$\sin \theta = \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{r}{R}$$

$$R = \frac{r}{\sin \alpha}$$

$$dl = dz$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dz \sin \alpha}{\frac{r^2}{\sin^2 \alpha}} \vec{u}_\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dz \sin^3 \alpha}{r^2} \vec{u}_\phi$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^3 \alpha dz}{r^2} \vec{u}_\phi$$

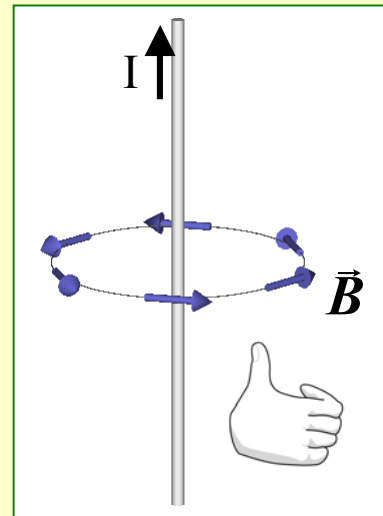
$$\tan \alpha = \frac{r}{z}$$

$$dz = -\frac{r}{\sin^2 \alpha} d\alpha$$

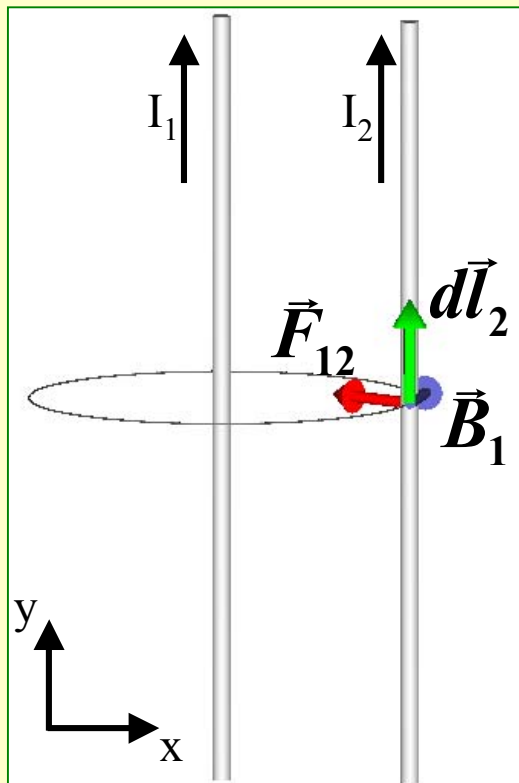
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{u}_\phi \int_{\pi}^0 \frac{\sin^3 \alpha}{r^2} \left(-\frac{r}{\sin^2 \alpha}\right) d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{u}_\phi [\cos \alpha]_{\pi}^0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\phi$$

- Conclusión:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\phi$$



- Fuerza entre dos cables:



$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

$$\vec{F}_{12} = \int I_2 d\vec{l}_2 \wedge \vec{B}_1 = I_2 \int dl_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} (-\vec{i}) = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \vec{i} L_2$$

$$\vec{f}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \vec{i}$$

5.1. Corriente eléctrica y Ley de Ohm.

5.2. Introducción a la interacción magnética.

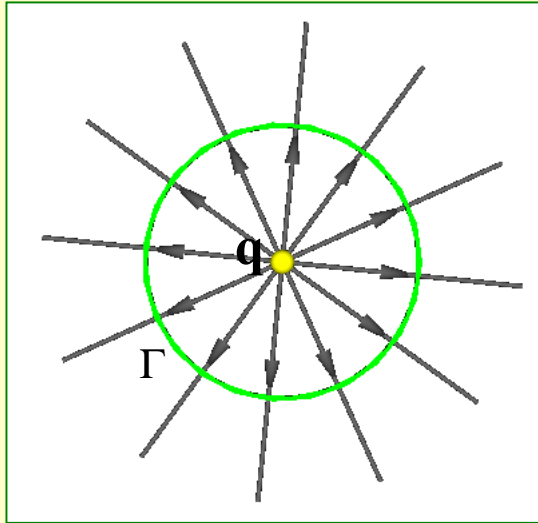
5.3. Fuerza de Lorentz. Campo magnético.

5.4. Ley de Biot-Savart.



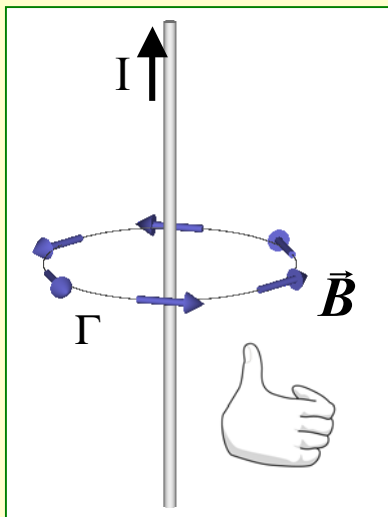
5.5. Teorema de Ampère.

- Circulación del campo electrostático:



$$\int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

- Circulación del campo magnetostático:



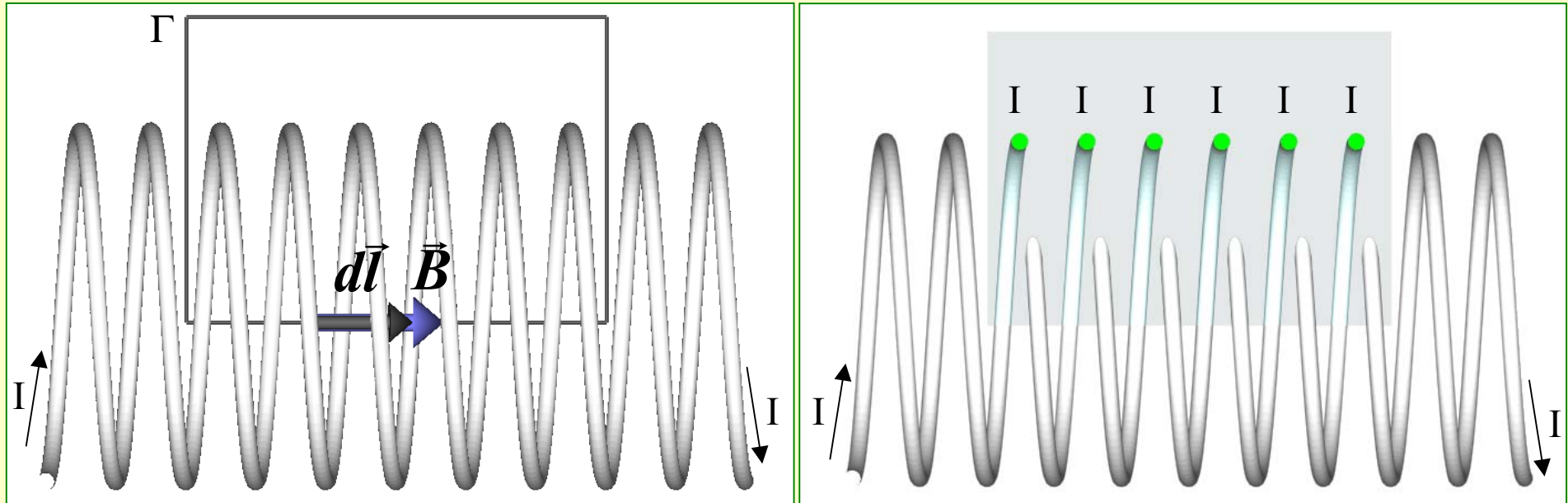
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_{\phi}$$

$$\int_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma} B dl = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\phi = \mu_0 I$$

$$\int_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

Teorema de Ampère

- Ejemplo: campo magnético de una bobina infinita.

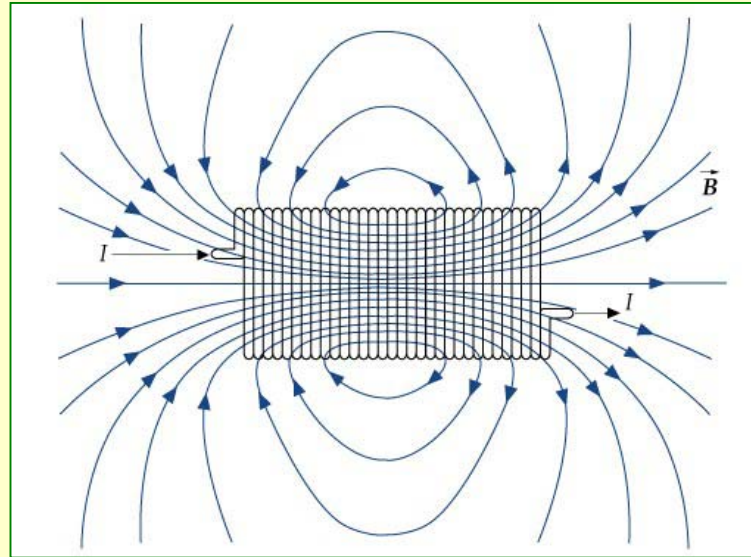


$$\int_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{dentro} B dl = BL = \mu_0 I_{enc} = \mu_0 \underbrace{I}_{\text{corriente de una espira}} \underbrace{n}_{\text{densidad de espiras}} \underbrace{L}_{n^{\circ} \text{ de espiras}}$$

$$B = \mu_0 n I$$

$$\vec{B} = \mu_0 n I \vec{k}$$

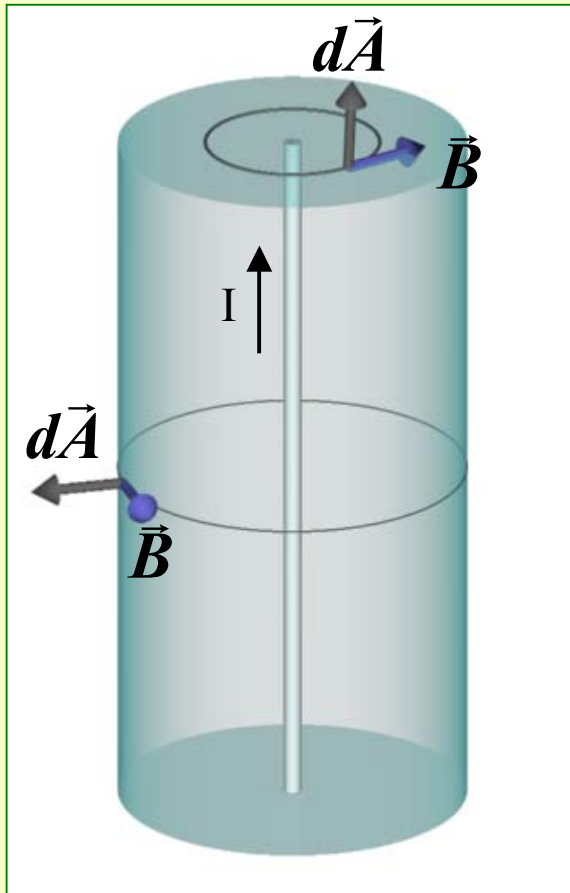
- Bobina real:



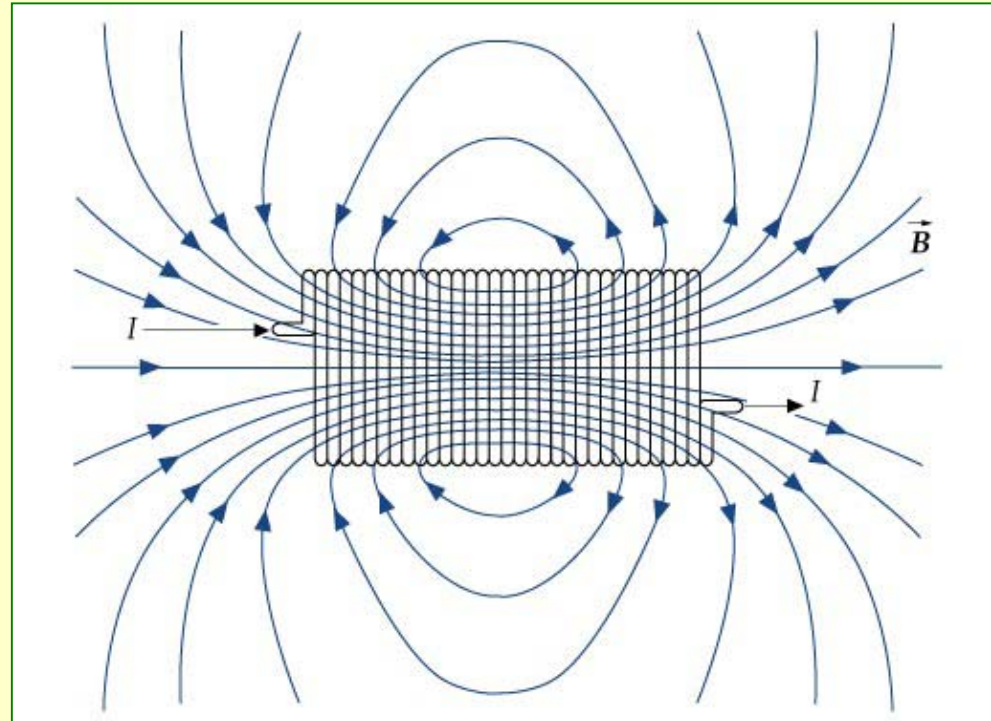
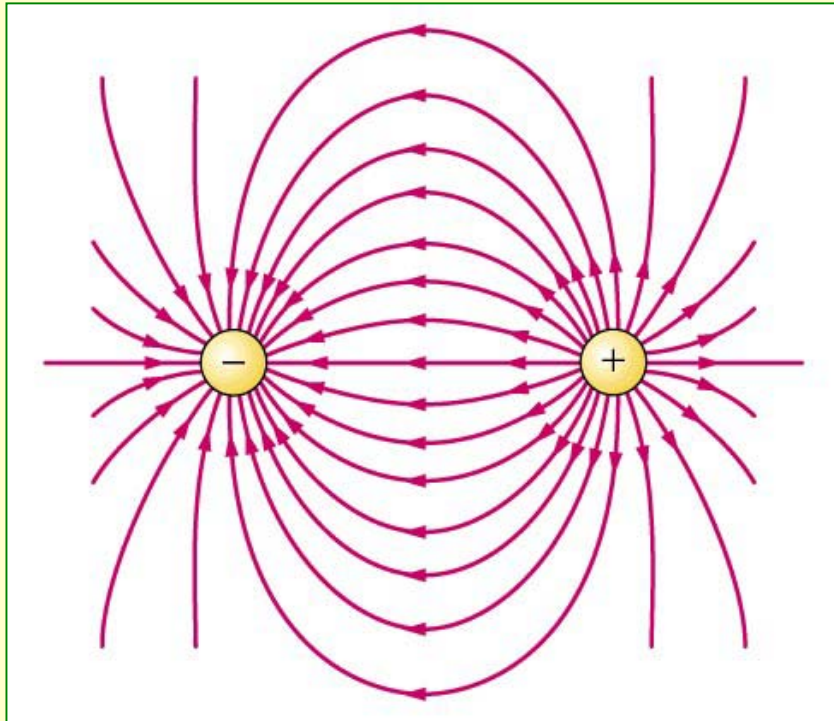
- Flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada:

$$\Phi_E = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

- Flujo del campo magnético a través de una superficie cerrada:



$$\Phi_B = \oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$



$$\Phi_E = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\Phi_B = \oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\int_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

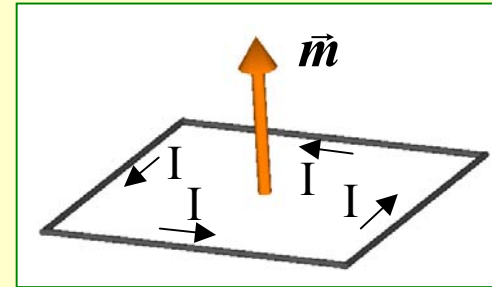
Tema 6. Desarrollo multipolar del campo magnético

⇒ 6.1. Dipolo magnético.

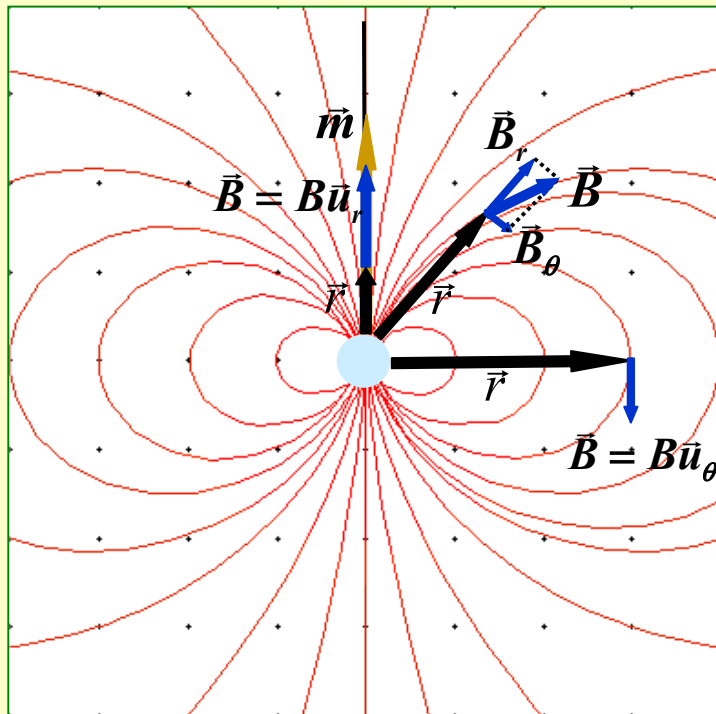
6.2. Acción de un campo magnético externo sobre un dipolo magnético.

- En el desarrollo multipolar del campo magnético nunca hay término monopolar.
- Dipolo magnético:

$$\vec{m} = I\vec{S}$$



- El campo magnético del dipolo magnético es análogo eléctrico del dipolo eléctrico:



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{u}_r)\vec{u}_r - \vec{m}}{r^3}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{u}_r)\vec{u}_r - \vec{p}}{r^3}$$

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos \theta}{r^3}$$

$$B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^3}$$

$$B_\phi = 0$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3}$$

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3}$$

$$E_\phi = 0$$

- El campo magnético del dipolo magnético es análogo eléctrico del dipolo eléctrico:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{u}_r)\vec{u}_r - \vec{m}}{r^3}$$

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos \theta}{r^3}$$

$$B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^3}$$

$$B_\phi = 0$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{u}_r)\vec{u}_r - \vec{p}}{r^3}$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3}$$

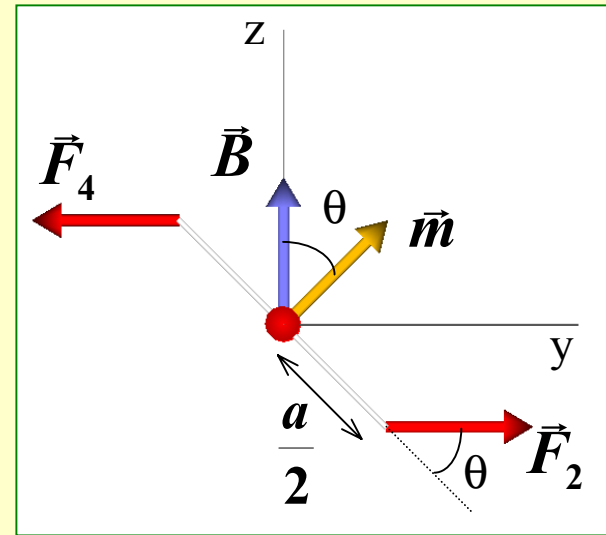
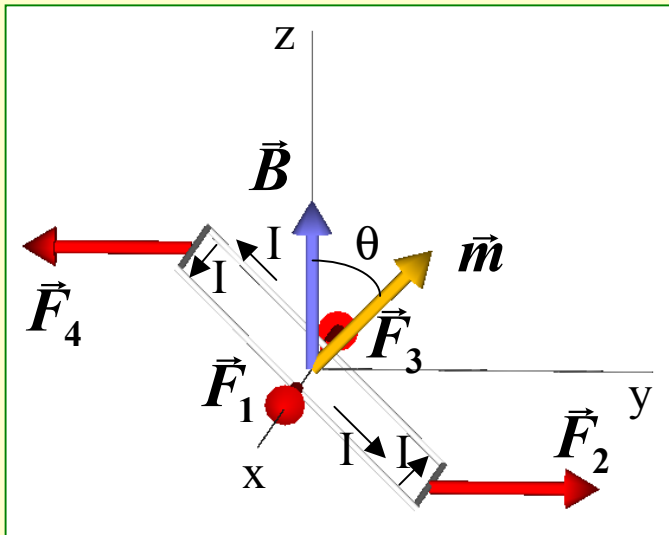
$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3}$$

$$E_\phi = 0$$

6.1. Dipolo magnético.

⇒ 6.2. Acción de un campo magnético externo sobre un dipolo magnético.

- Campo uniforme.



- La fuerza total es cero.
- Ni F_1 ni F_3 contribuyen a hacer girar la espira ($\vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 = 0$ $\vec{r}_3 \wedge \vec{F}_3 = 0$)
- El momento de giro vale:

$$\vec{\tau} = \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2 + \vec{r}_4 \wedge \vec{F}_4 = \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2 + (-\vec{r}_2) \wedge (-\vec{F}_2) = 2\vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2$$

con:

$$\vec{F}_2 = I \int d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

$$F_2 = I \int dl B \sin 90 = I a B$$

$$\tau = 2|\vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2| = 2 \frac{a}{2} I a B \sin \theta = m b \sin \theta$$

$$\vec{\tau} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

- El momento de la fuerza tiende a orientar el dipolo en la dirección del campo. Al hacer girar la espira el campo se realiza un trabajo:

$$dW = -\tau d\theta$$

La energía de la espira asociada al giro disminuye:

$$dU_{mec} = -dW = \tau d\theta = mB \sin \theta d\theta$$

$$U_{mec} = -mB \cos \theta = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

- Campo no uniforme.

- Aparece una fuerza neta:

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B})$$

Tema 7. Desarrollo multipolar del campo magnético



7.1. Imanación.

7.2. Paramagnetismo.

7.3. Diamagnetismo.

7.4. Ferromagnetismo.

7.5. Corrientes de magnetización. Campo excitación magnética.

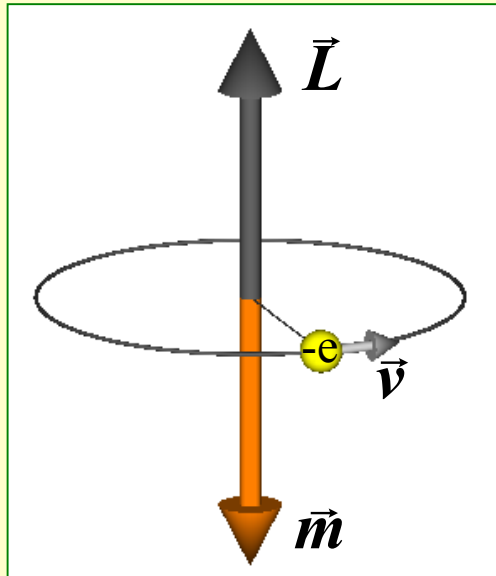
7.6. Medios lineales. Susceptibilidad y permeabilidad magnéticas.

- Relación entre momento angular y momento magnético:**- Momento magnético:**

$$m = \pi r^2 \frac{(-e)}{T}$$

$$v = \omega r = \frac{2\pi r}{T}$$

$$m = \pi r^2 (-e) \frac{v}{2\pi r} = -\frac{evr}{2}$$

**- Momento angular:**

$$L = m_e v r$$

- Relación entre ambos:

$$m = -\frac{eL}{2m_e}$$

$$\vec{m} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}$$

Momento asociado al mov. orbital

- Para el momento angular asociado al espín:

$$\vec{m} = -\frac{e}{m_e} \vec{S}$$

Momento asociado al espín

- En general:

$$\vec{m} = g \frac{q}{2m_q} \vec{J} \quad (g \text{ es el factor de Landé, adimensional})$$

- **Cuantización del momento magnético: magnetón de Bohr.**

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = \frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 6.6 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 2 \cdot \pi} = 9.23 \cdot 10^{-24} \text{ J/T} = 5.8 \cdot 10^{-5} \text{ eV/T}$$

- **Vector imanación:**

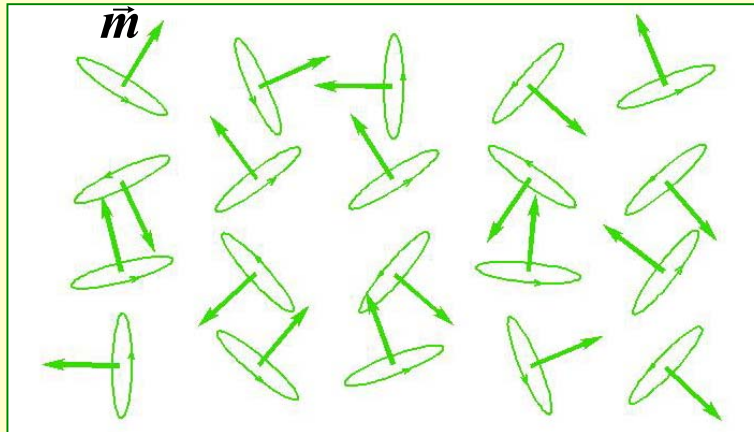
$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{d\tau}$$

$$[M] = \frac{Am^2}{m^3} = \frac{A}{m}$$

- 7.1. Imanación.
-  7.2. Paramagnetismo.
- 7.3. Diamagnetismo.
- 7.4. Ferromagnetismo.
- 7.5. Corrientes de magnetización. Campo excitación magnética.
- 7.6. Medios lineales. Susceptibilidad y permeabilidad magnéticas.

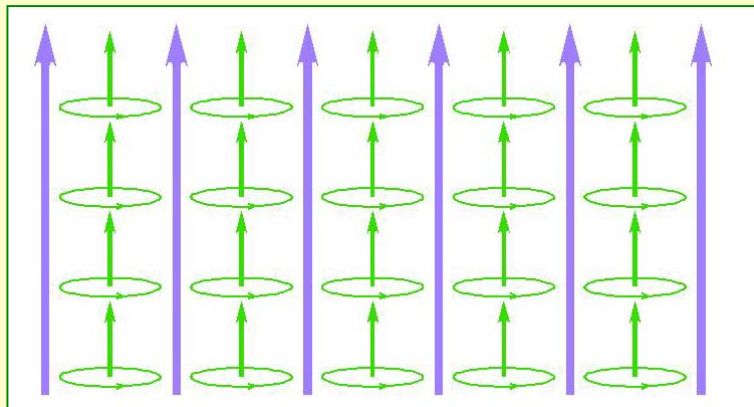
- **Substancias paramagnéticas:** {
- Existe momento magnético permanente.
 - La interacción entre los dipolos es débil.

- Sin campo magnético



$$M = 0$$

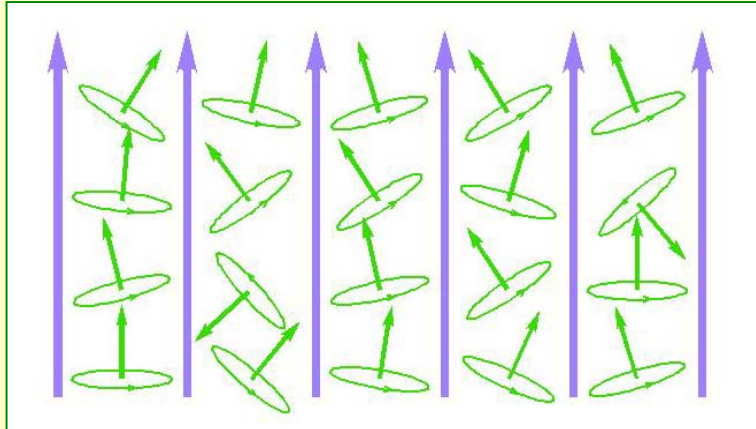
- Con campo magnético, idealmente.



$$\vec{\tau} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

$$M = Nm$$

- Con campo magnético y efecto de la temperatura.



- Energía de orientación de un dipolo:

$$U_{mec} = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

$$\Delta U_{mec} = 2mB$$

valores típicos:

$$m = 1 \mu_B$$

$$B = 1 \text{ T}$$

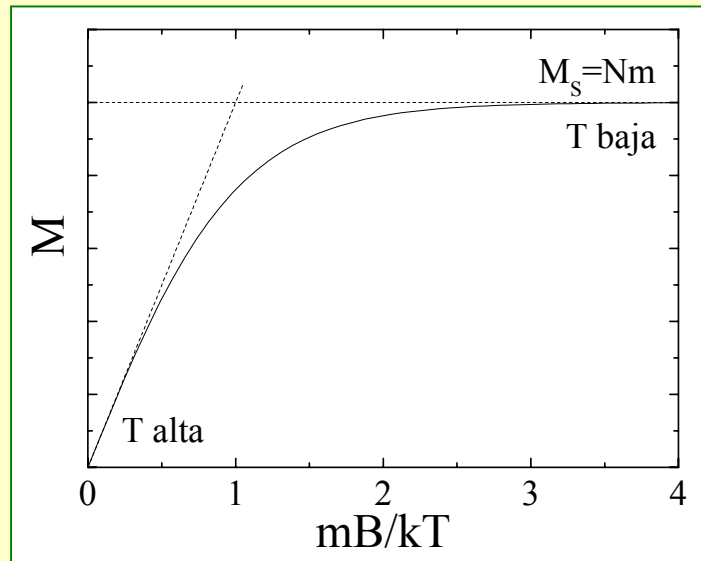
$$\Delta U_{mec} = 2mB = 1.2 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$$

- Energía térmica (T ambiente):

$$kT = 8.62 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K} \cdot 300 = 2.59 \cdot 10^{-2} \text{ eV}$$

¡Los dipolos están desordenados a T ambiente!

- En general:



$$M = Nm \tanh \frac{mB}{kT}$$

$$k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} = 8.62 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K}$$

Si $mB/kT \ll 1$ (campos pequeños)

$$M = \frac{Nm^2 B}{kT}$$

Ley de Curie

- Las sustancias paramagnéticas son **atraídas** por los campos magnéticos:

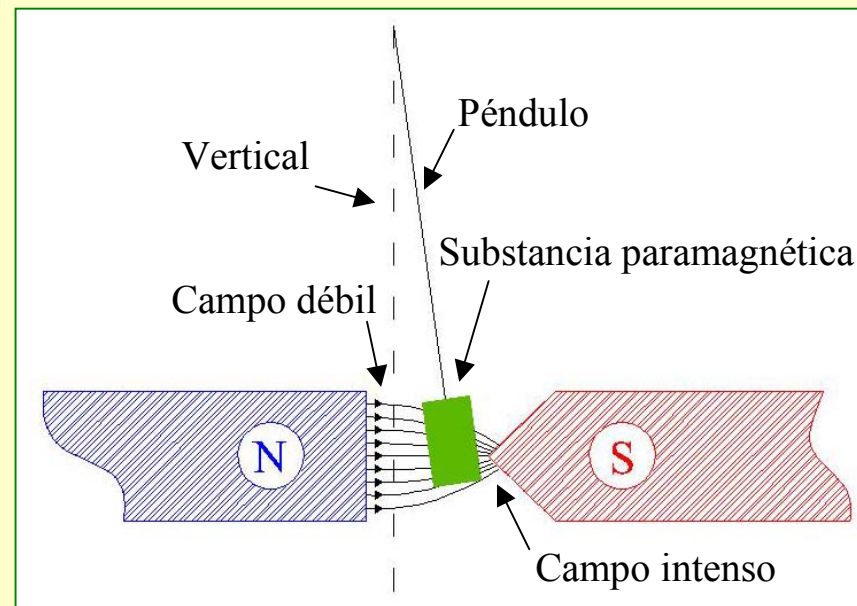
En una sustancia paramagnética la imanación y el campo magnético son paralelos

$$\vec{m} \parallel \vec{B}$$

La fuerza sobre cada dipolo viene dada por:

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B})$$

La fuerza tiene la dirección de aumento máximo del campo.



7.1. Imanación.

7.2. Paramagnetismo.



7.3. Diamagnetismo.

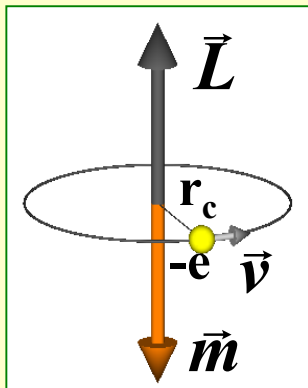
7.4. Ferromagnetismo.

7.5. Corrientes de magnetización. Campo excitación magnética.

7.6. Medios lineales. Susceptibilidad y permeabilidad magnéticas.

- **Substancias diamagnéticas:** {
 - No existe momento magnético permanente.
 - Presente en todas las substancias, pero sólo es apreciable en substancias que no son ni paramagnéticas ni ferromagnéticas.
- **Origen del diamagnetismo:**

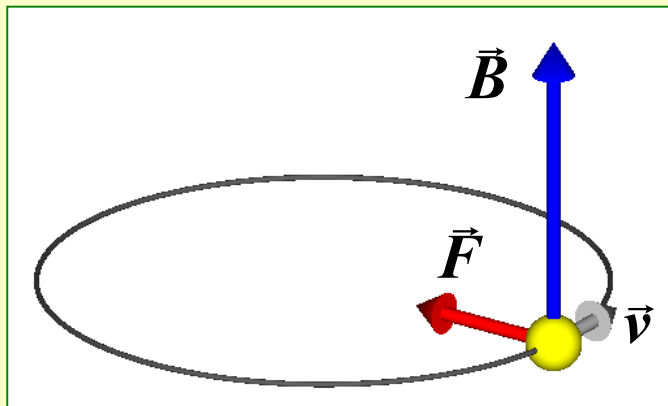
- **NOTA:** Estudiando el campo eléctrico inducido que aparece al crear el campo B, se demuestra que se comunica al electrón la energía cinética y el momento angular necesario para orbitar a la misma distancia radial con un pequeño cambio en la velocidad. En este tema estudiamos el fenómeno desde el punto de vista de las fuerzas.



Sin campo:

$$\vec{m} = -\frac{e}{2m_e}\vec{L} = -\frac{evr_c}{2}\vec{k}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r_c^2} = m_e\frac{v^2}{r_c}$$



Con campo:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r_c^2} + ev'B = m_e\frac{v'^2}{r_c}$$

$$ev'B = \frac{m_e}{r_c}(v'^2 - v^2) = \frac{m_e}{r_c}(v' + v)(v' - v)$$

$$ev'B = \frac{2m_ev'}{r_c}\Delta v$$

$$\Delta v = \frac{eBr_c}{2m_e}$$

$$\Delta \vec{m} = -\frac{e r_c}{2} \Delta v \vec{k} = -\frac{e^2 r_c^2}{4 m_e} \vec{B}$$

- Esta ec. es valida en la Méc. Cuántica interpretando el valor de r_c como un valor medio

$$\langle r_c^2 \rangle = \langle x^2 + y^2 \rangle = \frac{2}{3} \langle r^2 \rangle$$

$$\Delta \vec{m} = -\frac{e^2 \langle r^2 \rangle}{6 m_e} \vec{B}$$

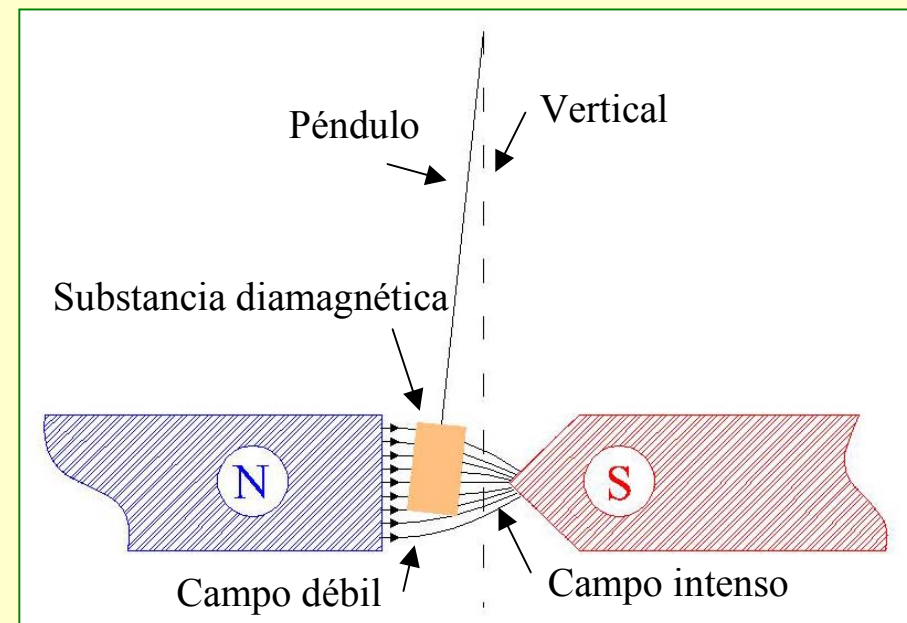
- Las sustancias diamagnéticas son **repelidas** por los campos magnéticos:

- En una sustancia paramagnética la imanación y el campo magnético son antiparalelos

- La fuerza sobre cada dipolo viene dada por:

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B})$$

- La fuerza tiene la dirección de disminución máxima del campo.



7.1. Imanación.

7.2. Paramagnetismo.

7.3. Diamagnetismo.

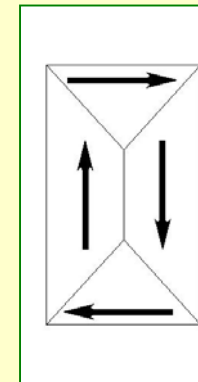
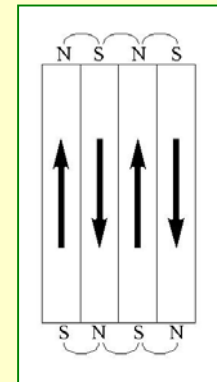
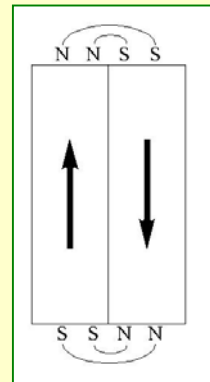
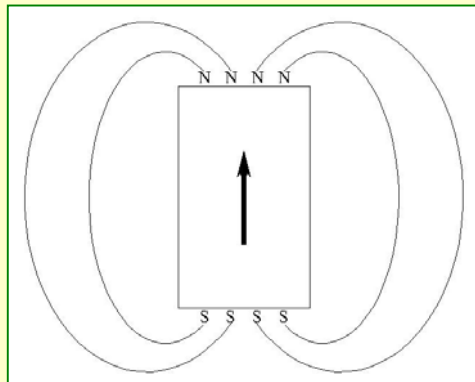


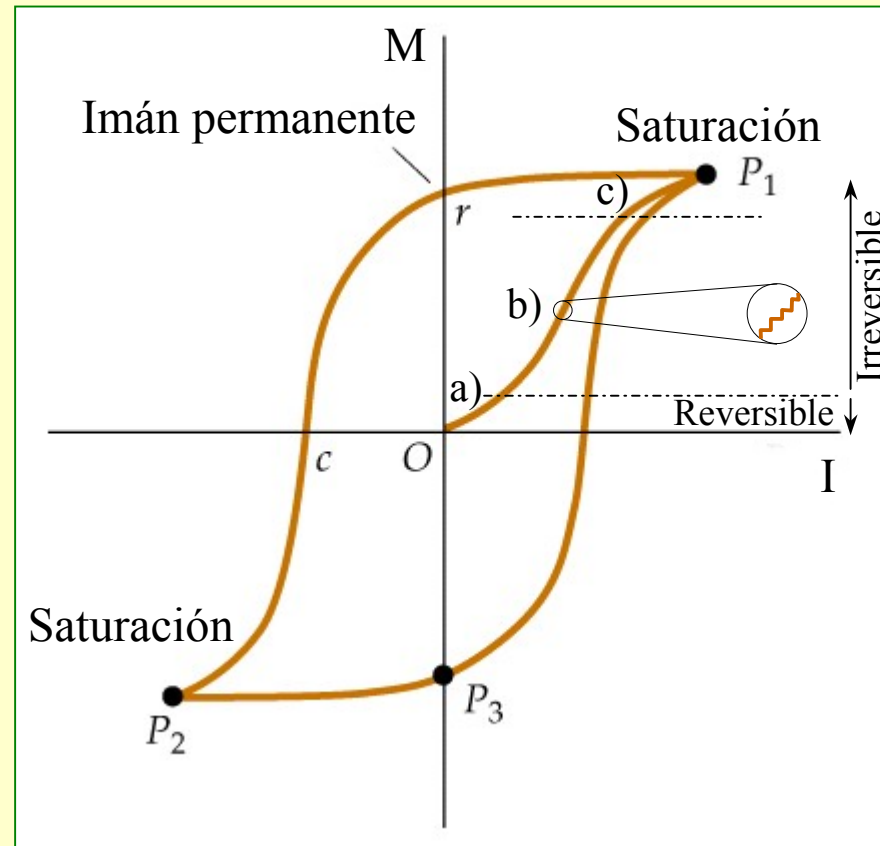
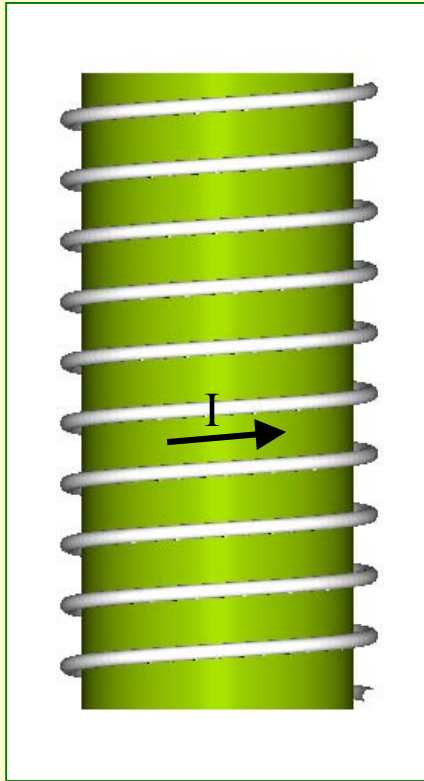
7.4. Ferromagnetismo.

7.5. Corrientes de magnetización. Campo excitación magnética.

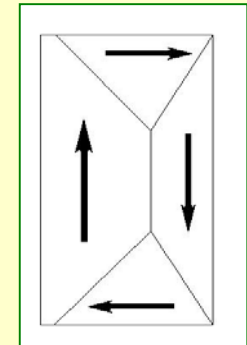
7.6. Medios lineales. Susceptibilidad y permeabilidad magnéticas.

- **Substancias ferromagnéticas:** materiales altamente no lineales en los que es posible que exista imanación aún cuando no hay campo magnético externo aplicado.
- **Origen del ferromagnetismo:**
 - Asociado al espín de átomos con orbitales internos incompletos.
 - Fenómeno puramente cuántico, relacionado con el Ppo. de Exclusión de Pauli.
 - La **interacción de intercambio** hace que los espines tengan **tendencia a alinearse paralelamente**.
 - La imanación se pierde a una temperatura crítica, llamada de **temperatura de Curie**.
- **Dominios:**
 - Regiones microscópicas donde los momentos magnéticos están alineados.
 - La dirección de alineamiento varía de un dominio a otro para disminuir la energía total del sistema.

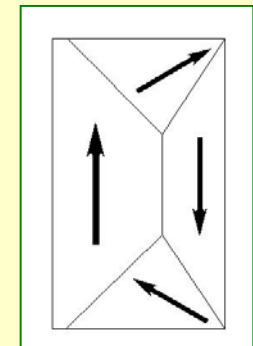


- Curva de histéresis:

a),b)

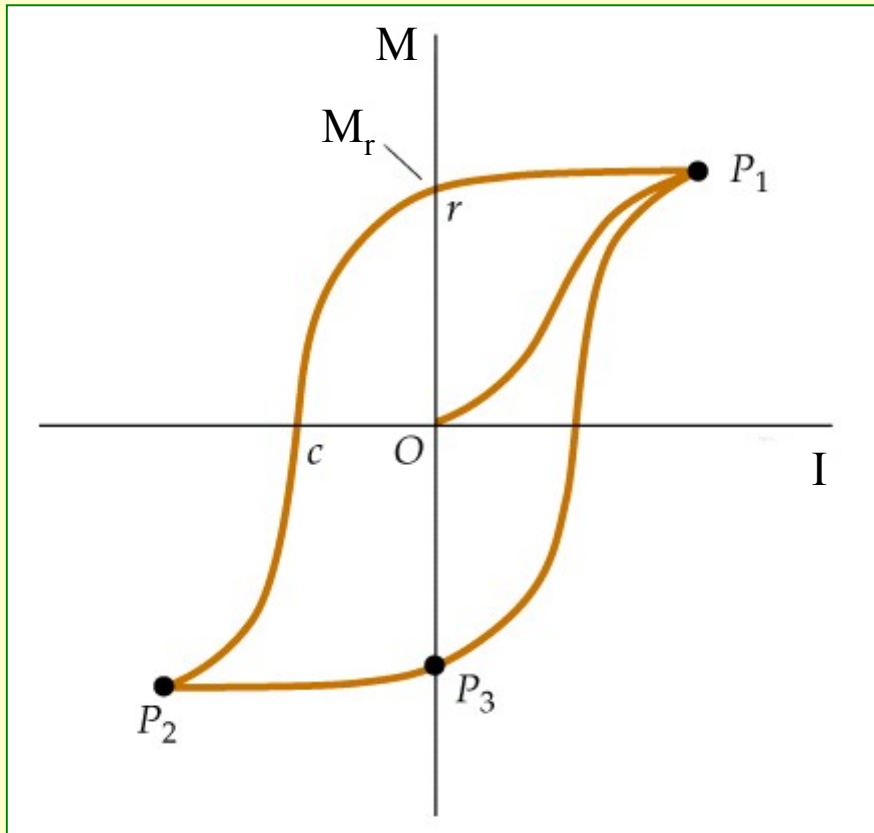


c)

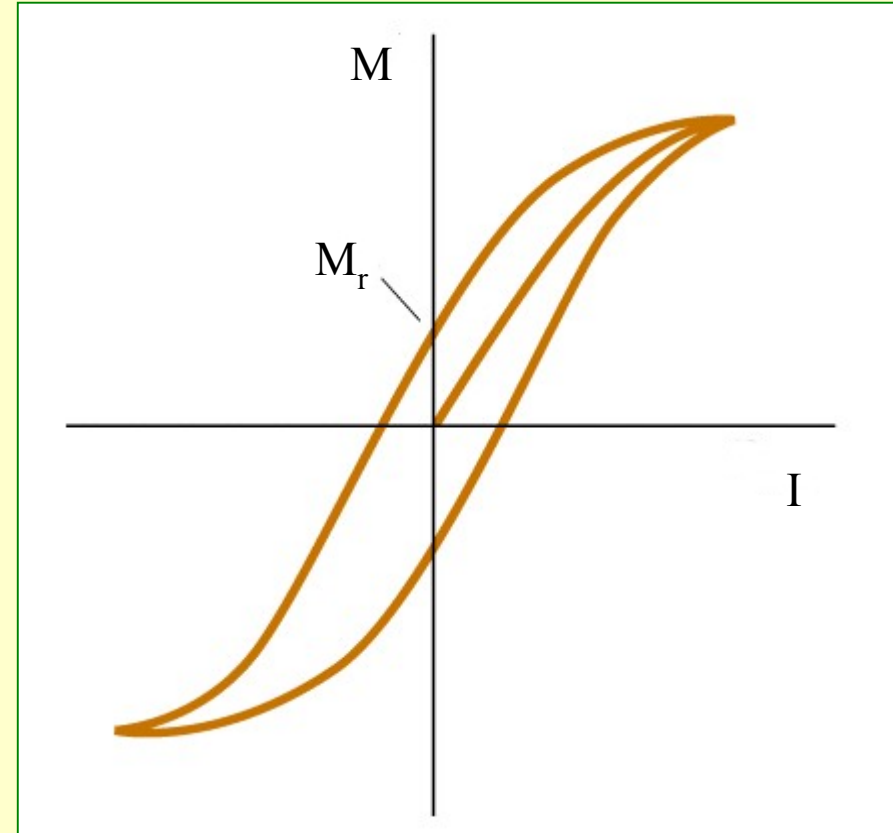


El área encerrada por la curva de histéresis es proporcional a la energía disipada en forma de calor en el proceso de imanación .

- Variedad de materiales ferromagnéticos:



Material magnéticamente duro
(Alnico, $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$, SmCo_5 , ...)



Material magnéticamente blando
(Permalloys)

7.1. Imanación.

7.2. Paramagnetismo.

7.3. Diamagnetismo.

7.4. Ferromagnetismo.



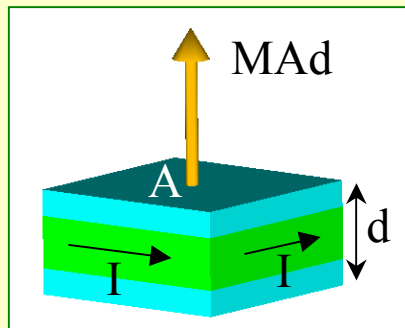
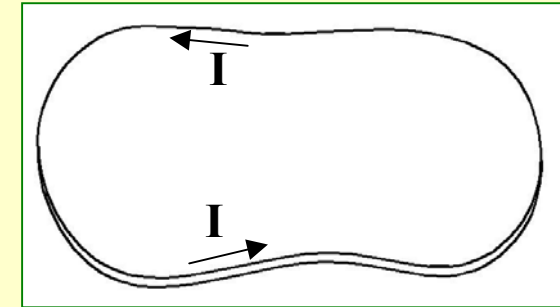
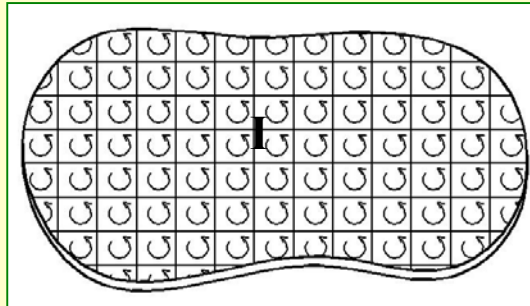
7.5. Corrientes de magnetización. Campo excitación magnética.

7.6. Medios lineales. Susceptibilidad y permeabilidad magnéticas.

- El campo creado por un cuerpo magnetizado puede ser descrito como debido a una corriente K_m a lo largo de la superficie del material y una corriente J_m de volumen

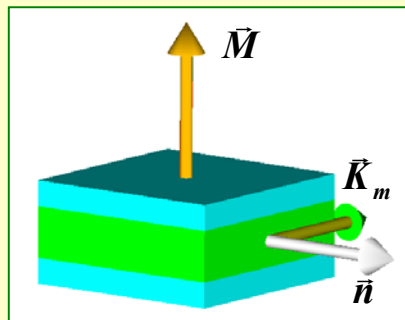
Corriente superficial de magnetización

Figura plana con magnetización M y espesor d :



$$MA d = I A$$

$$I = M d$$



$$K_m = \frac{I}{d} = M$$

$$\vec{K}_m = \vec{M} \wedge \vec{n}$$

Campo excitación magnética

- Definimos el campo excitación magnética como:

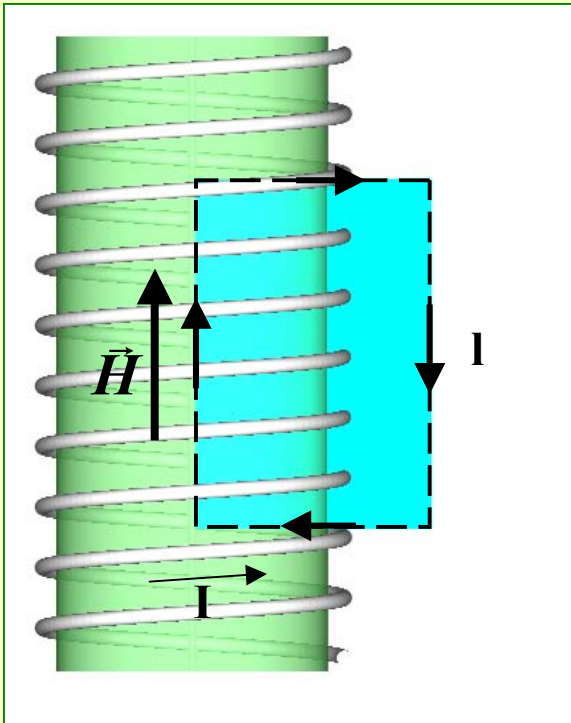
$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

$$[H] = \left[\frac{B}{\mu_0} \right] = [M] = \frac{A}{m}$$

- Resulta conveniente distinguir entre las corrientes de magnetización y el resto, que llamaremos libres. El campo excitación magnética cumple:

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{l,enc}$$

- **Ejemplo:** Cálculo de la excitación magnética generada por una corriente I circulando por una espira arrollada sobre un cilindro de material paramagnético.



a)

$$r \leq R$$

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = Hl$$

$$I_{enc} = NlI$$

$$Hl = NlI$$

$$\vec{H} = NI\vec{k}$$

$$\vec{M}, \vec{B} = ?$$

b)

$$r > R$$

$$\vec{H} = 0$$

$$\vec{M} = 0$$

$$\vec{B} = 0$$

7.1. Imanación.

7.2. Paramagnetismo.

7.3. Diamagnetismo.

7.4. Ferromagnetismo.

7.5. Corrientes de magnetización. Campo excitación magnética.

 7.6. Medios lineales. Susceptibilidad y permeabilidad magnéticas.

- En medios lineales se define la **susceptibilidad magnética** χ_m :

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

χ_m es adimensional

Material	χ_m
Diamagnético	
Bismuto	$-1.6 \cdot 10^{-4}$
Oro	$-3 \cdot 10^{-5}$
Cobre	$-9.6 \cdot 10^{-6}$
Agua	$-9.0 \cdot 10^{-6}$
Paramagnético	
Oxígeno	$1.9 \cdot 10^{-6}$
Aluminio	$2.1 \cdot 10^{-5}$
Tungsteno	$7.8 \cdot 10^{-5}$

- En un medio lineal la inducción y la excitación magnéticas son proporcionales:

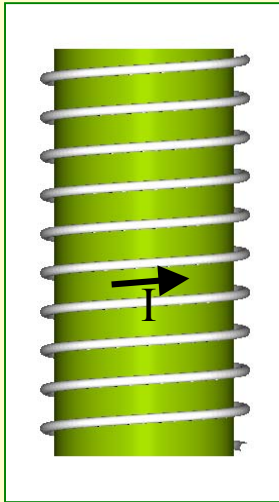
$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H}$$

$$\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$$

μ es la **permeabilidad** del material

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

- **Ejemplo:** Cálculo de B y H en el interior del cilindro del ejemplo anterior.



Vimos que:

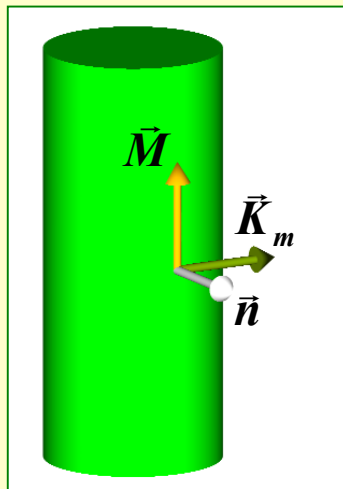
$$r \leq R$$

$$\vec{H} = NI\vec{k}$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu NI\vec{k}$$

$$\vec{M} = \chi_m\vec{H} = \chi_m NI\vec{k}$$

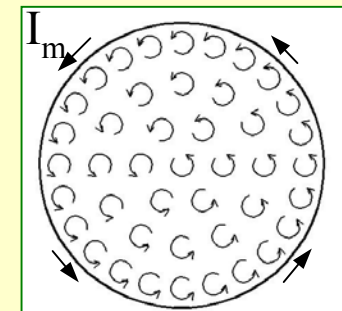
- Podemos calcular las corrientes de magnetización



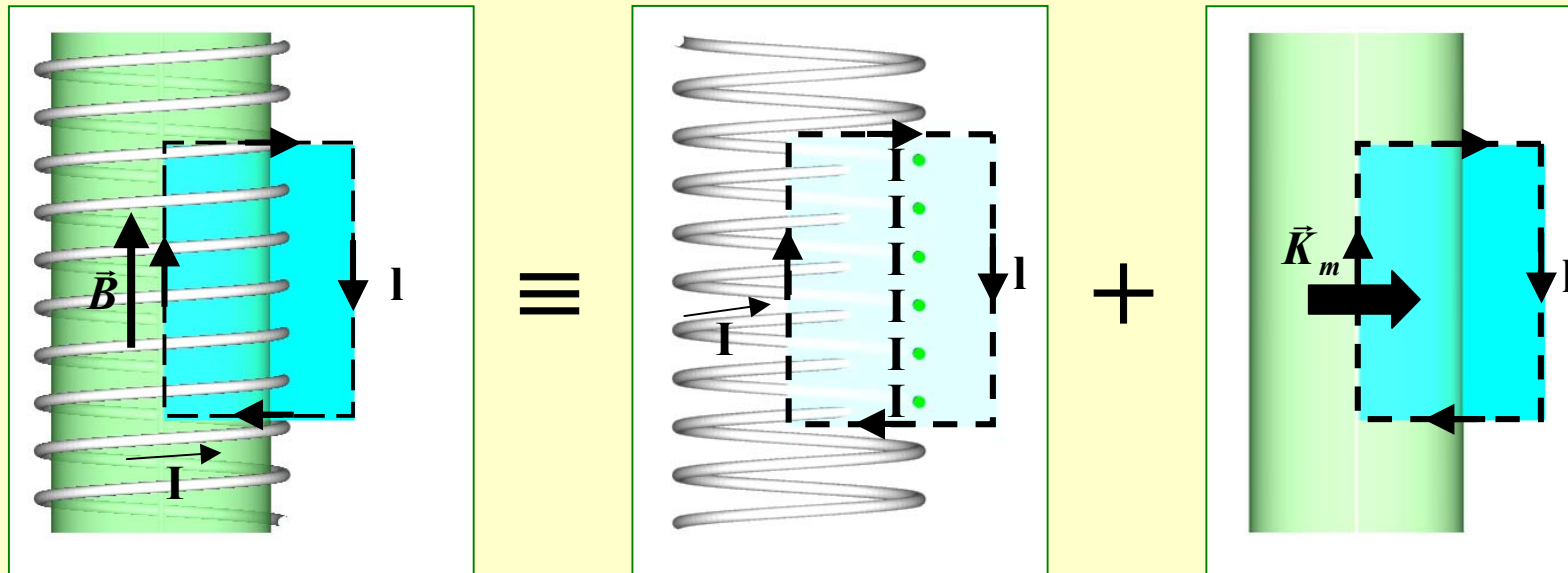
$$\vec{J}_m = \vec{\nabla} \wedge \vec{M} = 0$$

$$\vec{K}_m = \vec{M} \wedge \vec{n}$$

$$\vec{K}_m = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & \vec{u}_\phi & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & M_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = M_z \vec{u}_\phi = \chi_m NI \vec{u}_\phi$$



- Con fines didácticos, una vez conocidas todas las corrientes podemos recalcular el campo:

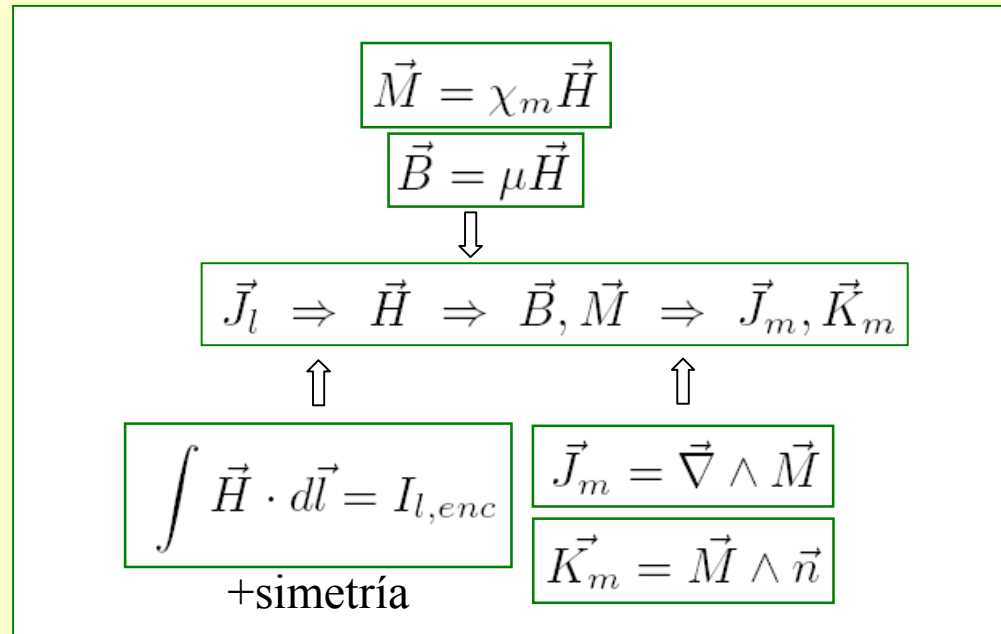


$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

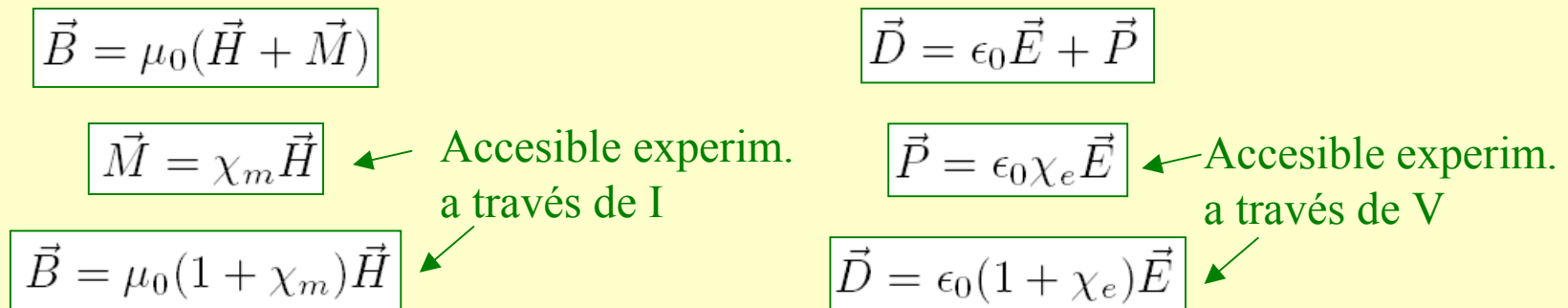
$$Bl = \mu_0 [NlI + K_m l] = \mu_0 [NlI + \chi_m NIl] = \mu_0 NIl(1 + \chi_m) = \mu NIl$$

$$\vec{B} = \mu NI \vec{k}$$

- Esquema del razonamiento seguido:



- Comparación de la descripción de los campos eléctrico y magnético en los medios materiales:



T.8. Campos variables con el tiempo



8.1. Ley de Faraday.

8.2. F.e.m. asociada al movimiento.

8.3. Campos eléctricos inducidos.

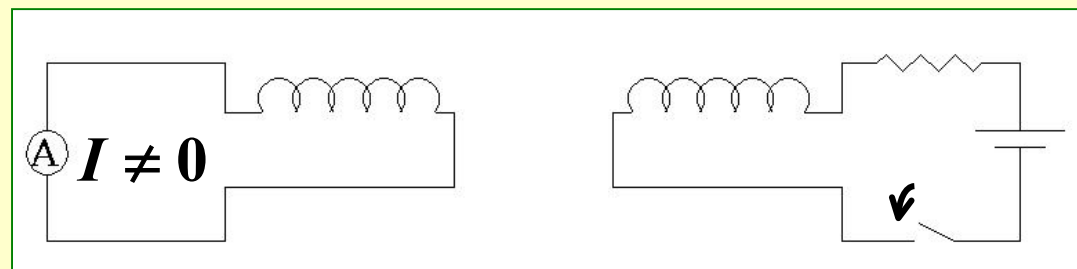
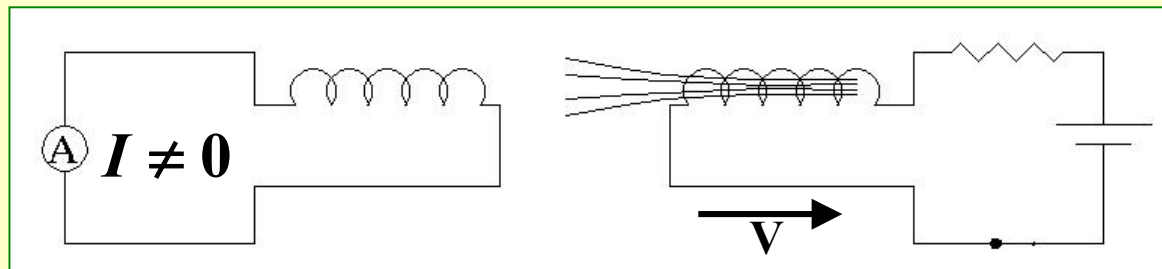
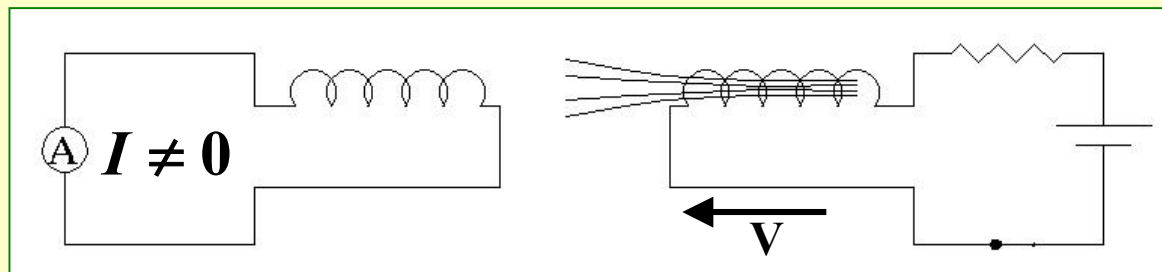
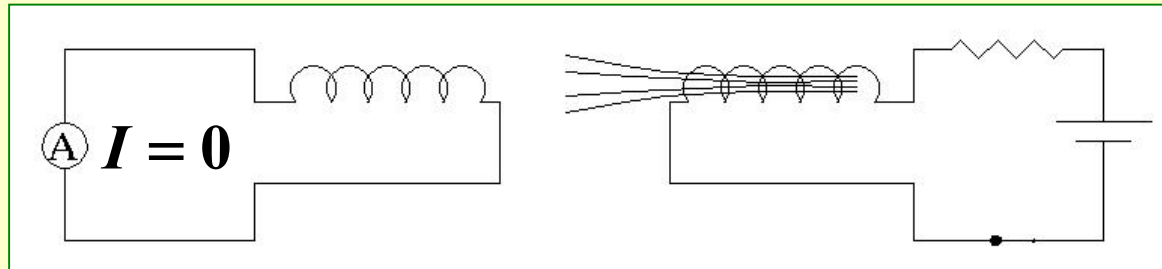
8.4. Autoinducción.

8.5. Circuito RL.

8.6. Energía magnética.

8.7. Corriente de desplazamiento y ley de Ampère generalizada.

- Introducción:

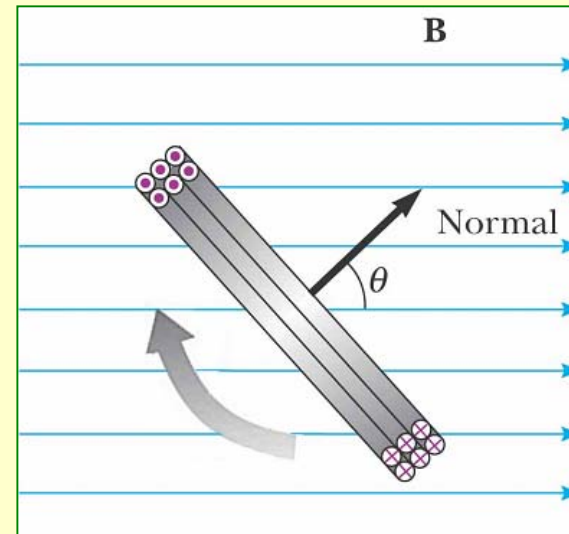
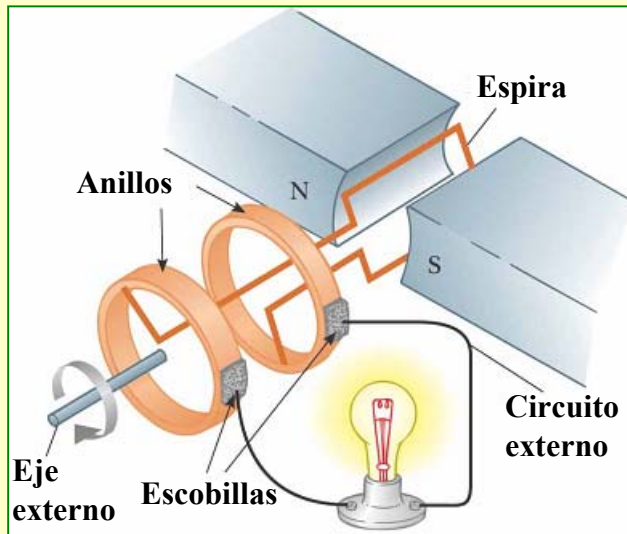


$$\epsilon = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Ley de Faraday.

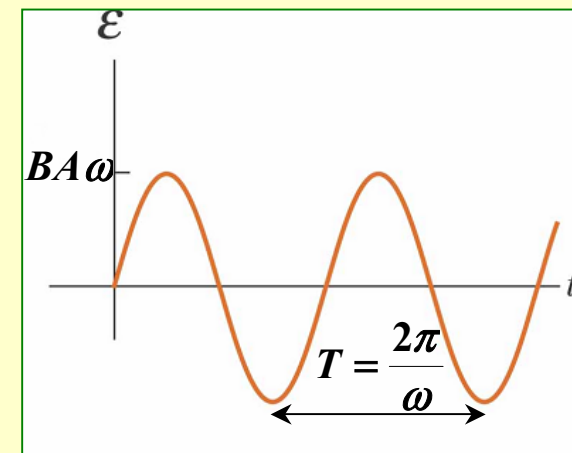
$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Ejemplo: generador de corriente alterna.

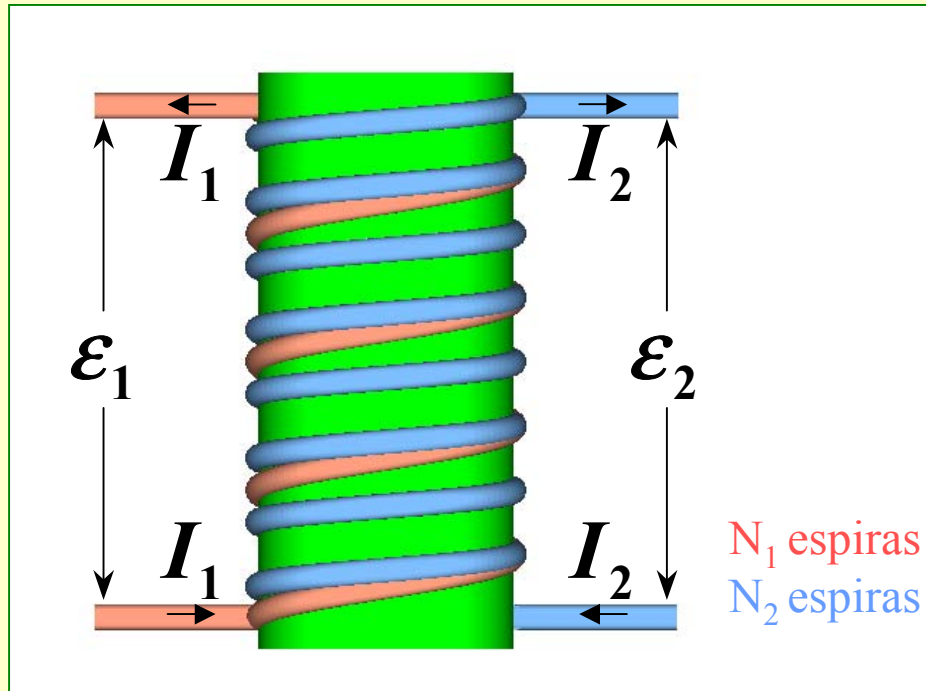


$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int B dA \cos \theta = BA \cos \theta = BA \cos \omega t$$

$$\epsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -BA\omega(-)\sin \omega t = BA\omega \sin \omega t$$



- **Ejemplo:** transformador.



- Aplicando la ley de Faraday:

$$\epsilon_1 = -\frac{d\Phi_{B1}}{dt} = -N_1 \frac{d\Phi_{espira}}{dt}$$

$$\epsilon_2 = -\frac{d\Phi_{B2}}{dt} = -N_2 \frac{d\Phi_{espira}}{dt}$$

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

- La conservación de la energía nos ayuda a deducir información sobre las intensidades:

$$P_1 = P_2$$

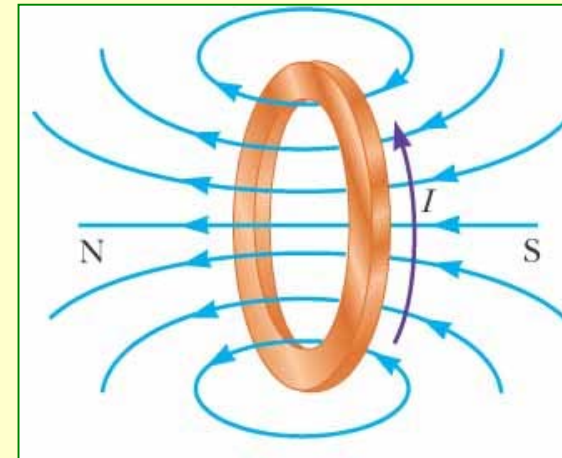
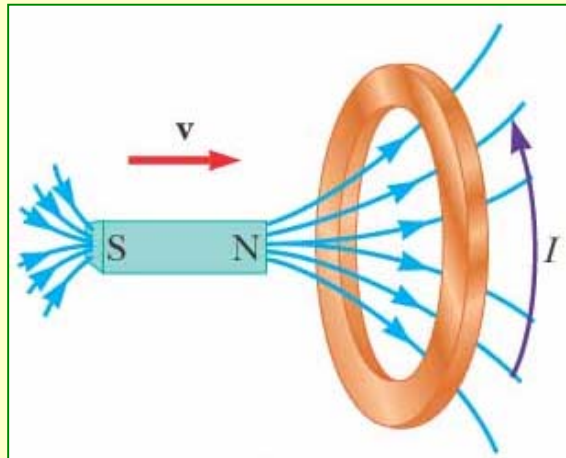
$$I_1 \epsilon_1 = I_2 \epsilon_2 = I_2 \frac{N_2}{N_1} \epsilon_1$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

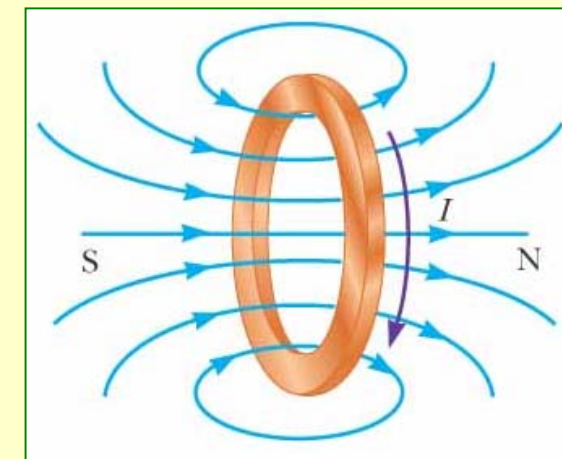
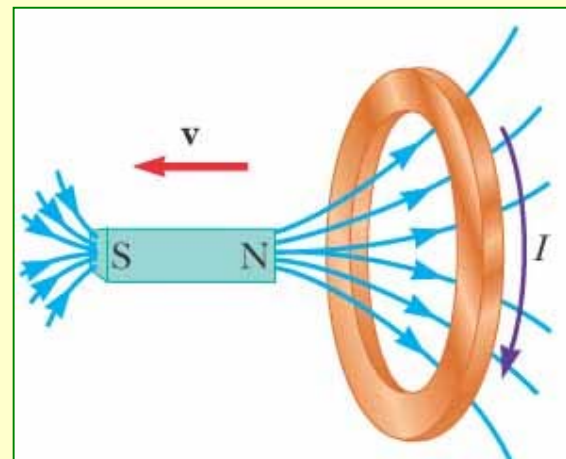
- Interpretación del signo de la ley de Faraday: **ley de Lenz**.

“La f.e.m. y la corriente inducidas poseen un sentido tal que tienden a oponerse a la variación que las produce.”

a)



b)



8.1. Ley de Faraday.



8.2. F.e.m. asociada al movimiento.

8.3. Campos eléctricos inducidos.

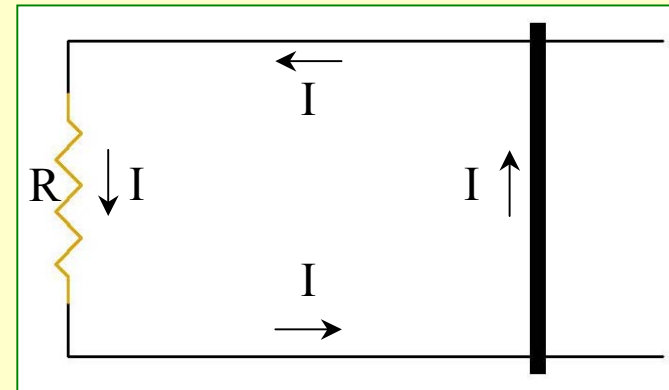
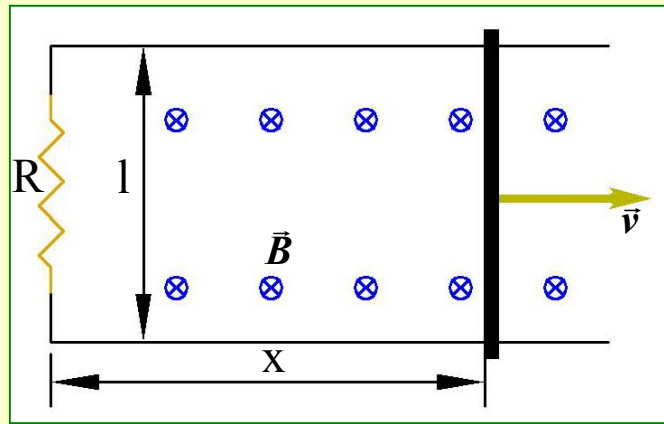
8.4. Autoinducción.

8.5. Circuito RL.

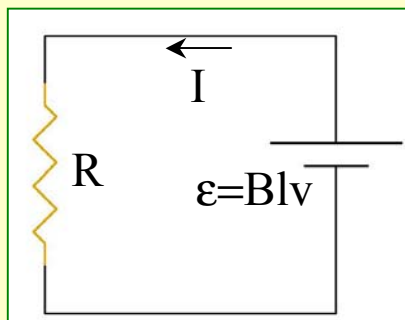
8.6. Energía magnética.

8.7. Corriente de desplazamiento y ley de Ampère generalizada.

- Variación del flujo de B asociada al movimiento de una parte del circuito.



- Cálculo de la corriente inducida:



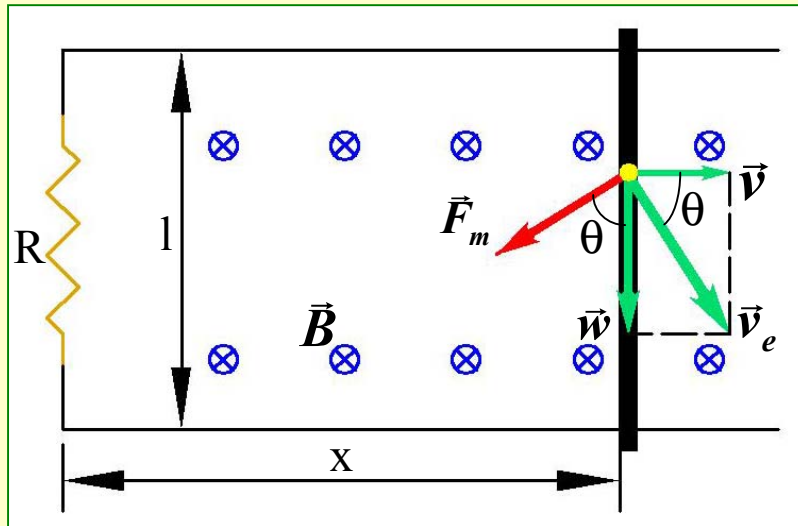
$$\epsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = BA = Blx$$

$$\epsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -Bl\frac{dx}{dt} = -Blv$$

$$i = \frac{Blv}{R}$$

- Pero, ¿cuál es el origen de la f.e.m.?



-La velocidad v_e del electrón es la suma de la velocidad v de la varilla y la velocidad de arrastre w dentro de la varilla.

-La componente vertical de F_m es la responsable del arrastre de los electrones.

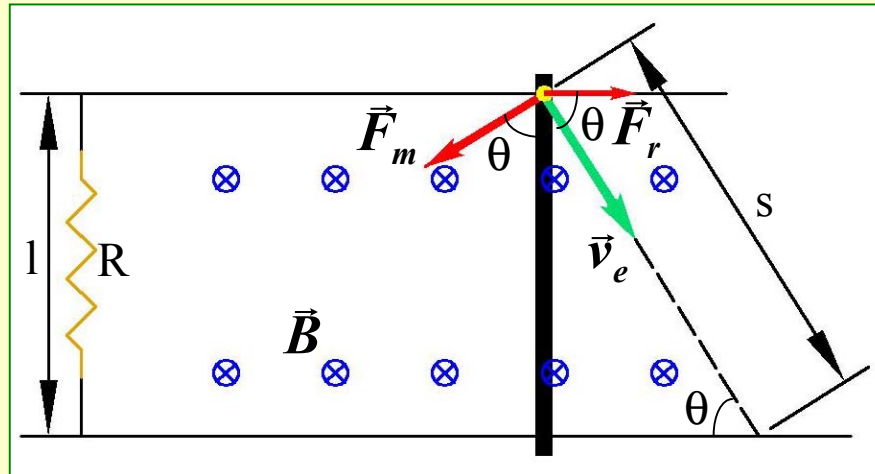
- La fuerza electromotriz es la integral de camino de la fuerza por unidad de carga (f) a lo largo del circuito.

$$v = v_e \cos \theta$$



$$\epsilon = \oint \vec{f} \cdot d\vec{l} = \oint v_e B dl \cos \theta = vBl$$

- ¿Y quién hace el trabajo?



- Si el electrón no se acelera hacia la izquierda es porque la varilla ejerce sobre él una fuerza $\vec{F}_r$ hacia la derecha

$$F_r = F_m \sin \theta = ev_e B \sin \theta$$

El trabajo realizado por la fuerza que mueve la varilla es la integral de $\vec{F}_r$ a lo largo de la **trayectoria** del electrón (en oposición a a lo largo del circuito).

$$W = \int \vec{F}_r \cdot d\vec{r} = \int F_r dr \cos \theta = \int F_m \sin \theta \cos \theta dr = F_m \sin \theta \cos \theta s = ev_e B \cos \theta l = evBl$$

El trabajo por unidad de carga es vBl .

$$s \sin \theta = l$$

$$v = v_e \cos \theta$$

La fuerza que desplaza la varilla realiza el trabajo.

8.1. Ley de Faraday.

8.2. F.e.m. asociada al movimiento.



8.3. Campos eléctricos inducidos.

8.4. Autoinducción.

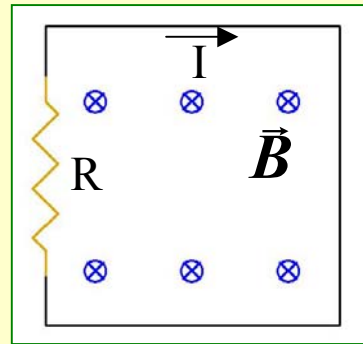
8.5. Circuito RL.

8.6. Energía magnética.

8.7. Corriente de desplazamiento y ley de Ampère generalizada.

- Aún estando el circuito en reposo se produce una f.e.m si el flujo de $\vec{B}$ varía:

- **Ejemplo:**



$$B = B_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

¿ Quién impulsa las cargas en esta situación?

- Hemos de admitir la existencia de un campo eléctrico inducido por el flujo variable.

Vamos a verlo:

$$\epsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\epsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$-\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

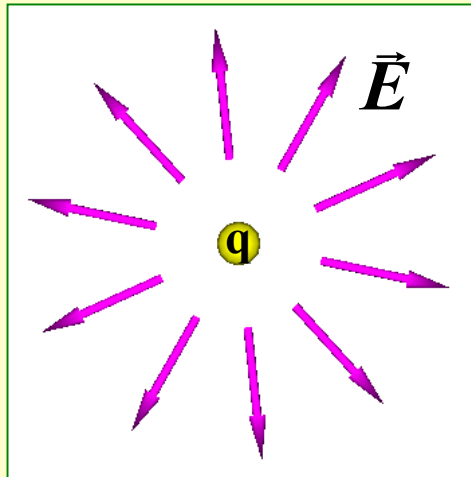
Ley de Faraday

- El campo eléctrico inducido tiene propiedades muy diferentes del electrostático:
 - No es conservativo.
 - Sus fuentes son las variaciones de $\mathbf{B}$, no las cargas. A diferencia del campo electrostático:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

-Comparación:

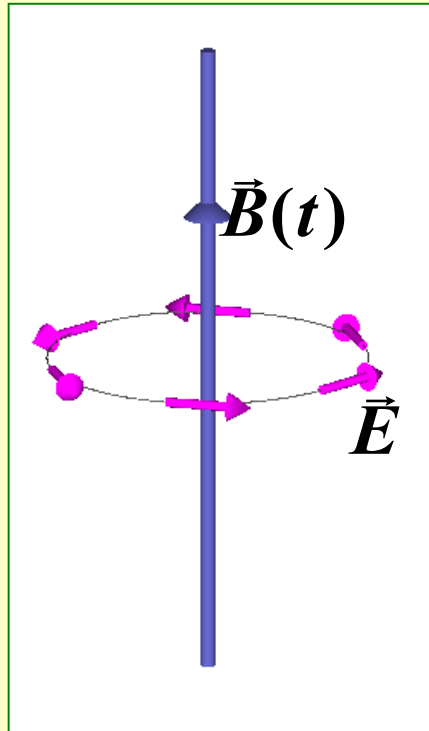
**Campo
electrostático**



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

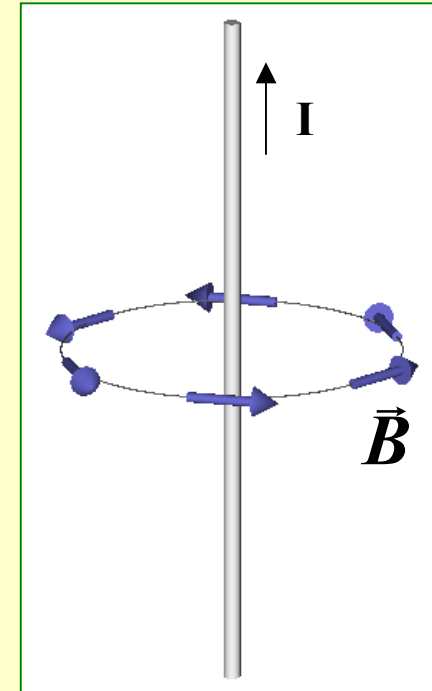
**Campo eléctrico
inducido**



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

**Campo
magnetostático**



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

8.1. Ley de Faraday.

8.2. F.e.m. asociada al movimiento.

8.3. Campos eléctricos inducidos.

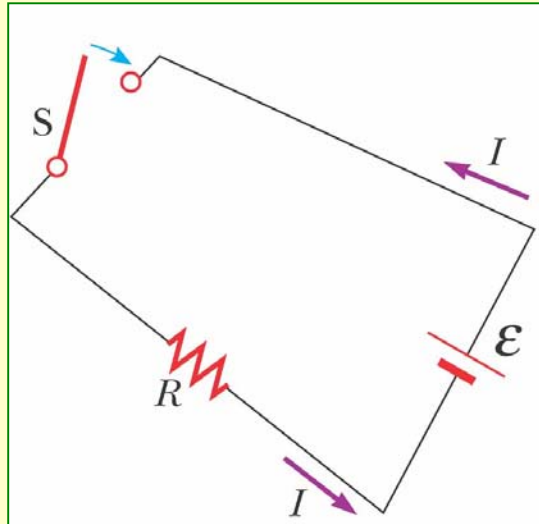


8.4. Autoinducción.

8.5. Circuito RL.

8.6. Energía magnética.

8.7. Corriente de desplazamiento y ley de Ampère generalizada.



Al conectar el circuito la propia corriente del circuito genera una variación de flujo magnético, y por tanto una fuerza (contra) electromotriz.

- Para caracterizar el flujo autoinducido se define el coeficiente de autoinducción L :

$$\Phi_{auto} = LI$$

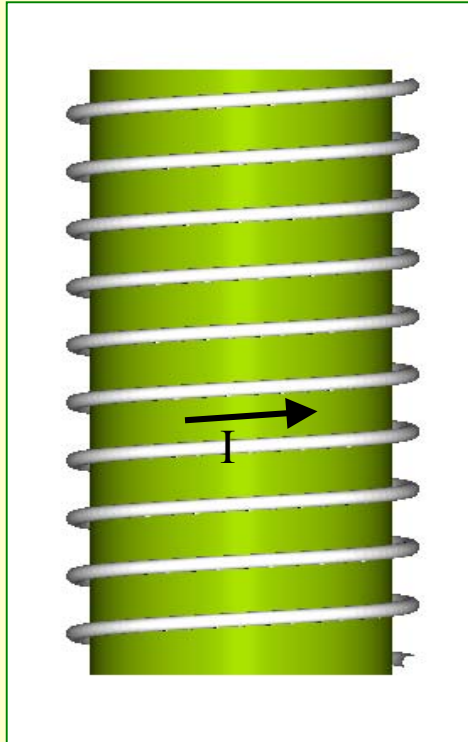
$$\epsilon_{auto} = -\frac{d\Phi_{auto}}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

- Unidades:

$$[L] = \frac{V}{A}s = \Omega s = H$$

(Henrios)

- **Ejemplo:** Autoinducción de una bobina de N vueltas, radio a y longitud l .



$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

$$\begin{aligned} \Phi_B &= \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = N \int_{\text{espira}} \vec{B} \cdot d\vec{A} = N \int_{\text{espira}} B dA = \\ &= N B A = N \mu_0 \frac{N}{l} I \pi a^2 = \frac{\mu_0 N^2 \pi a^2}{l} I \end{aligned}$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 \pi a^2}{l}$$

La autoinducción depende de la geometría (tamaño y forma) del circuito.

- Símbolo de una autoinducción en un circuito:



8.1. Ley de Faraday.

8.2. F.e.m. asociada al movimiento.

8.3. Campos eléctricos inducidos.

8.4. Autoinducción.

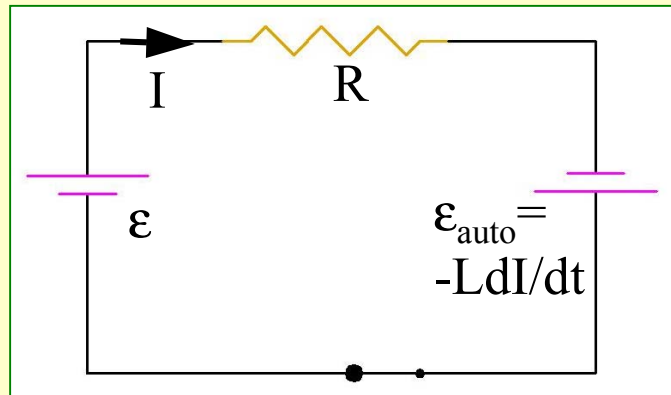
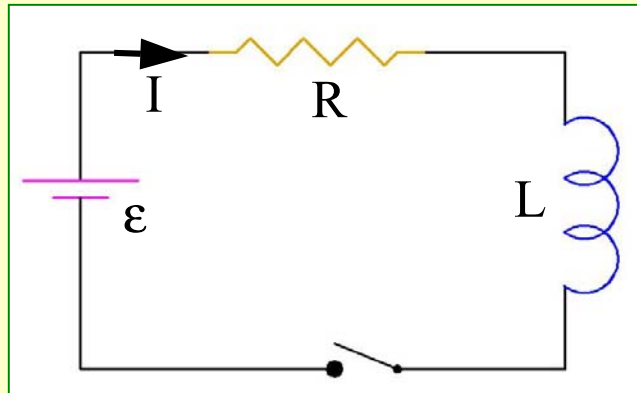


8.5. Circuito RL.

8.6. Energía magnética.

8.7. Corriente de desplazamiento y ley de Ampère generalizada.

- Vamos a estudiar la variación temporal de la corriente en un circuito típico:



$$-\epsilon + IR - \epsilon_{auto} = 0$$

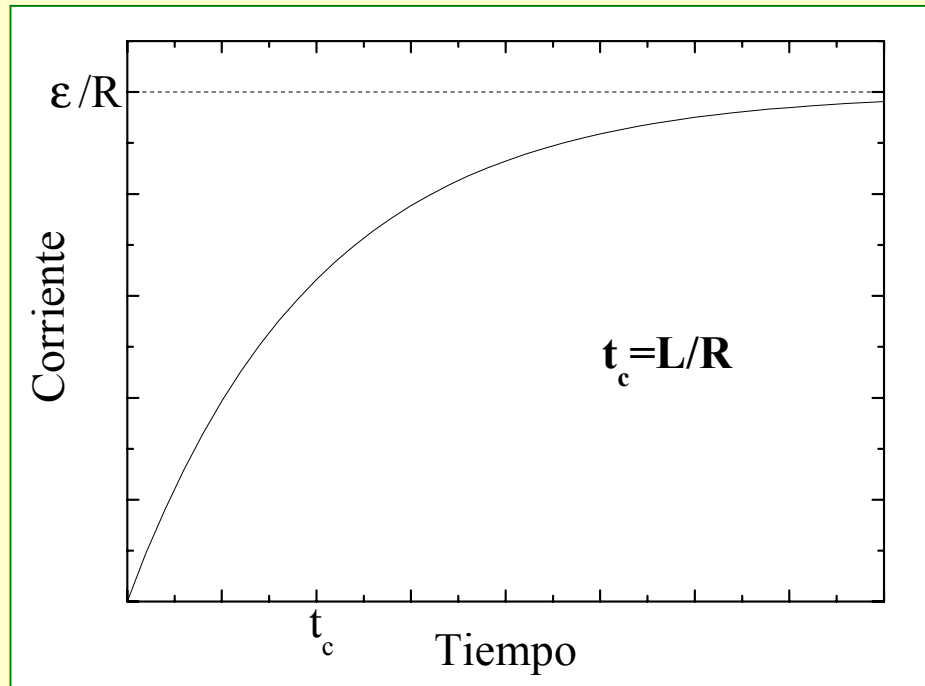
$$-\epsilon + IR + L \frac{dI}{dt} = 0$$

$$L \frac{dI}{dt} = \epsilon - IR$$

$$L \frac{dI}{\epsilon - IR} = dt$$

$$\int_0^I L \frac{dI}{\epsilon - IR} = \int_0^t dt$$

$$\left[L \ln(\epsilon - IR) \left(-\right) \frac{1}{R} \right]_0^I = t$$



$$-\frac{L}{R} \ln \frac{\epsilon - IR}{\epsilon} = t$$

$$\frac{\epsilon - IR}{\epsilon} = e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$I = \frac{\epsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

$$t_c = \frac{L}{R}$$

8.1. Ley de Faraday.

8.2. F.e.m. asociada al movimiento.

8.3. Campos eléctricos inducidos.

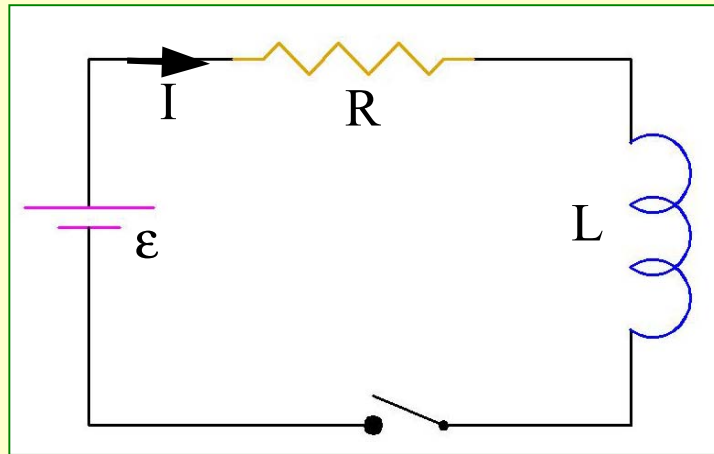
8.4. Autoinducción.

8.5. Circuito RL.

 8.6. Energía magnética.

8.7. Corriente de desplazamiento y ley de Ampère generalizada.

- Estudiamos la energía necesaria para establecer una corriente en un circuito. Para ello hacemos un balance energético en el circuito que acabamos de estudiar:



$$\epsilon = IR + L \frac{dI}{dt}$$

Potencia consumida
en R

$$\epsilon I = I^2 R + LI \frac{dI}{dt}$$

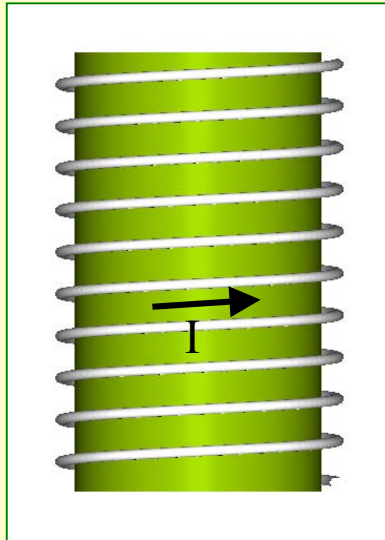
Potencia
proporcionada por
el generador

Identificamos
como energía por
unidad de tiempo
almacenada en la
autoinducción

$$\frac{dU_m}{dt} = LI \frac{dI}{dt}$$

$$U_m = \int_0^t \frac{dU_m}{dt} dt = \int_0^t LI \frac{dI}{dt} dt = \frac{1}{2} LI^2$$

- Para una bobina esta expresión tiene la forma:



$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 \pi a^2}{l}$$

$$U_m = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 \pi a^2}{l} \left(\frac{Bl}{\mu_0 N} \right)^2 = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \pi a^2 l$$

$$\frac{U_m}{V} = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Energía magnética almacenada por unidad de volumen.

- Esta última expresión tiene carácter general.
- La expresión de la energía asociada al campo magnético es análoga a la asociada al campo eléctrico, según vimos al estudiar el condensador:

$$\frac{U_e}{V} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2$$

8.1. Ley de Faraday.

8.2. F.e.m. asociada al movimiento.

8.3. Campos eléctricos inducidos.

8.4. Autoinducción.

8.5. Circuito RL.

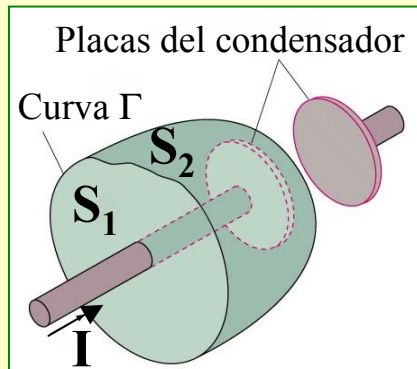
8.6. Energía magnética.

 8.7. Corriente de desplazamiento y ley de Ampère generalizada.

- En situaciones de alta simetría utilizábamos el T. de Ampère para deducir el campo magnético.

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

- En su momento dijimos que sólo era válido para corrientes estacionarias. Vamos a demostrarlo con un ejemplo donde hay acumulación de carga (y por tanto corrientes no estacionarias).



- Si escogemos S_1 :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

- Si escogemos S_2 :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

??

- Maxwell solucionó el problema introduciendo la corriente de desplazamiento:

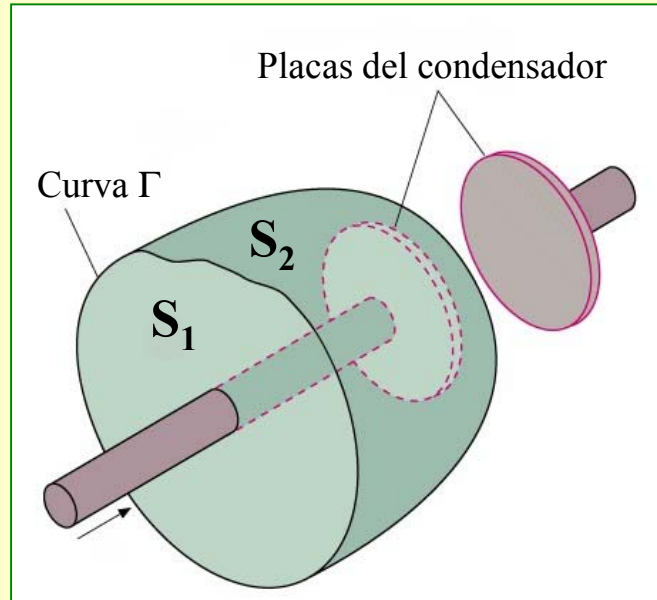
$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

de modo que:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_{enc} + I_d) = \mu_0 I_{enc} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

- La introducción de la corriente de desplazamiento devuelve la coherencia:



$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(I_{enc} + I_d) = \mu_0 I_{enc} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

- Si escogemos la superficie S_1 :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} = \mu_0 \frac{dQ}{dt}$$

- Si escogemos la superficie S_2 :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \mu_0 \frac{dQ}{dt}$$



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Obtenemos el mismo resultado con las dos superficies.

- Una consecuencia importante es que los campos eléctricos variables generan campos magnéticos:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

**Campo magnético
inducido**

