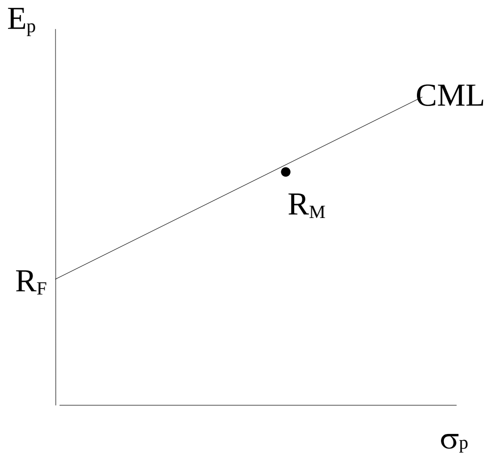
1. (0,75 puntos) Dentro del marco que establece el modelo de valoración de activos CAPM, demuestre que la CML es un caso particular de la SML.

En primer lugar, vamos a demostrar que, de acuerdo con la CML, cualquier cartera eficiente está perfectamente correlacionada con la cartera de mercado. Esto es $\rho_{eM} = 1$.



Con la introducción del activo libre de riesgo, las carteras eficientes son las formadas mediante la combinación de la cartera de mercado y el activo libre de riesgo:

$$\tilde{R}_e = (1-x)\, R_F + x\,\tilde{R}_M$$

El riesgo de cualquier cartera eficiente será:

$$\sigma_e^2 = x^2 \sigma_M^2 \quad \rightarrow \quad \sigma_e = x\, \sigma_M$$

Como $\rho_{eM} = \dfrac{\sigma_{eM}}{\sigma_e \sigma_M}$, nos queda por obtener la expresión de la covarianza entre cualquier cartera eficiente y la cartera de mercado:

$$\text{cov}\,(\tilde{R}_e, \tilde{R}_M) = \text{cov}\,[(1-x)\, R_F + x\,\tilde{R}_M, \tilde{R}_M] = x\,\text{cov}\,(\tilde{R}_M, \tilde{R}_M) = x\,\sigma_M^2$$

Por tanto, el coeficiente de correlación entre cualquier cartera eficiente y la cartera de mercado será:

$$\rho_{eM} = \frac{\sigma_{eM}}{\sigma_e \sigma_M} = \frac{x\sigma_M^2}{x\sigma_M \sigma_M} = 1$$

- Vamos, ahora, a demostrar que la CML es un caso particular de la SML. Recordemos que la CML expresa la relación entre rentabilidad espera y riesgo para carteras eficientes (*e*), mientras que la SML expresa esa misma relación pero para cualquier activo o cartera (*i*):

CML $\rightarrow$ $E(\tilde{R}_e) = R_F + \frac{E(\tilde{R}) - R_F}{\sigma_M} \sigma_e$

SML $\rightarrow$ $E(\tilde{R}_i) = R_F + [E(\tilde{R}_M) - R_F] \beta_i$

Si la cartera *i* es eficiente, y dado que $\beta_i = \frac{\text{cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M)}{\sigma^2(\tilde{R}_M)}$, entonces:

$$E(\tilde{R}_e) = R_F + [E(\tilde{R}_M) - R_F] \beta_e = R_F + [E(\tilde{R}_M) - R_F] \frac{\text{cov}(\tilde{R}_e, \tilde{R}_M)}{\sigma^2(\tilde{R}_M)}$$

Como ya sabemos: $\sigma_{eM} = \rho_{eM} \sigma_e \sigma_M$. Por tanto:

$$E(\tilde{R}_e) = R_F + [E(\tilde{R}_M) - R_F] \frac{\rho_{eM}\sigma_e\sigma_M}{\sigma_M^2} = \{\rho_{eM} = 1\} = R_F + \frac{E(\tilde{R}) - R_F}{\sigma_M} \sigma_e$$

Luego, hemos obtenido la CML. Así, se demuestra que la CML es un caso particular de la SML cuando la cartera que estamos valorando es una cartera eficiente.

2. (0,75 puntos) En el contexto del CAPM, el precio por unidad de riesgo beta (prima por riesgo del mercado en la SML) se estima en un 3%. Si existe una cartera eficiente con la mitad de riesgo total (medido por la desviación típica) que la cartera de mercado, ¿cuál sería la prima por riesgo de esta cartera? Justifique su respuesta.

Dada una cartera no eficiente con igual rendimiento esperado que la cartera anterior y con un riesgo total medido por la desviación típica del 20%, ¿qué parte del riesgo total de esta cartera es diversificable si el riesgo de la cartera de mercado medido por la desviación típica es del 30%?

En el CAPM, la expresión de la SML es la siguiente:

$$E(\tilde{R}_i) = R_F + \left[E(\tilde{R}_M) - R_F\right] \cdot \beta_i$$

donde el enunciado nos dice que el precio por unidad de riesgo beta (prima por riesgo del mercado en la SML) es del 3%. Es decir:

$$\left[E(\tilde{R}_M) - R_F\right] = 0{,}03$$

Por otra parte, nos dicen que existe una cartera eficiente que cumple que $\sigma_e = 0{,}5\sigma_M$. De esta cartera nos piden que determinemos su prima por riesgo, esto es:

$$\text{Prima por riesgo} = \left[E(\tilde{R}_M) - R_F\right] \cdot \beta_e$$

Si la anterior cartera es eficiente, entonces debe estar formada por una combinación de la cartera de mercado y del activo sin riesgo:

$$\tilde{R}_e = (1 - x)\, R_F + x\, \tilde{R}_M$$

Calculamos la varianza (desviación típica) de esta carteta eficiente:

$$\sigma_e^2 = x^2 \sigma_M^2 \quad ; \qquad \sigma_e = x\sigma_M$$

de donde se obtiene que x = 0,5 y por tanto que la composición de la cartera eficiente será:

$$\tilde{R}_e = 0{,}5\, R_F + 0{,}5\, \tilde{R}_M$$

Una vez sabemos la composición de la cartera eficiente podemos calcular la beta de la cartera, ya que ésta no es más que la combinación lineal de los activos que la componen:

$$\beta_e = (1 - x)\, \beta_F + x\, \beta_M = x\, \beta_M = 0{,}5(1) = 0{,}5$$

Por tanto:

$$\text{Prima por riesgo} = \left[E(\tilde{R}_M) - R_F\right] \cdot \beta_e = (0{,}03)(0{,}5) = 0{,}015 = 1{,}5\%$$

Ahora nos dicen que existe una cartera no eficiente *p* que cumple que su rendimiento esperado es igual al rendimiento esperado de la cartera anterior [$E(\tilde{R}_p) = E(\tilde{R}_e)$] y que $\sigma_p = 0{,}2$. Además, se sabe que $\sigma_M = 0{,}3$. Nos preguntan qué parte del riesgo total de esta cartera (*p*) es diversificable. Es decir, qué parte de su desviación típica podría eliminarse mediante la diversificación.

Para saberlo, tan solo tenemos que restar a la desviación típica de la cartera *p* (no eficiente) la desviación típica de una cartera eficiente que tenga el mismo rendimiento esperado (la cartera anterior).

Calculamos la desviación típica de la anterior cartera: $\sigma_e = x\sigma_M = 0{,}5(0{,}3) = 0{,}15$.

Por tanto, la parte del riesgo total de la cartera (*p*) diversificable será:

$$\sigma_p - \sigma_e = 0{,}2 - 0{,}15 = 0{,}05$$

3. (0,5 puntos) En un contexto de racionamiento de capital se plantea la selección de la cartera de proyectos óptima considerando cuatro proyectos de inversión (A, B, C, D), pudiendo comenzar el proyecto A en el momento actual (t=0) y dentro de un año (t=1). Todos los proyectos son fraccionables y repetitivos y se consideran restricciones financieras para tres periodos (t=0, t=1 y t=2).

Los valores de la función objetivo del dual y de las variables del dual en el óptimo son los que se detallan en la siguiente tabla:

Z'*= 4.500	**u_0=0,2**	**u_1^h=200**
	u_1=0	**u_2^h=0**
	u_2=0,7	**u_3^h=100**
		u_4^h=0
		u_5^h=100

Teniendo en cuenta que las restricciones se han escrito por orden cronológico y los proyectos se han numerado por orden (1 el proyecto A, 2 el proyecto A en 1, 3 el proyecto B...), conteste a las siguientes cuestiones:

a) **Qué proyectos se realizan en el óptimo.**
b) **En qué periodo o periodos sobran recursos financieros.**
c) **Significado económico de u_0, u_1 y u_2.**

Para poder contestar debemos tener presente las relaciones existentes entre programa primal y dual:

PRIMAL		**DUAL**
$x_i > 0$	$\Leftrightarrow$	$u_i^h = 0$
$x_i = 0$	$\Leftrightarrow$	$u_i^h > 0$
$x_j^h > 0$	$\Leftrightarrow$	$u_j = 0$
$x_j^h = 0$	$\Leftrightarrow$	$u_j > 0$

a) Qué proyectos se realizan en el óptimo.

Las variables de holgura del dual que toman valor igual a cero en la solución óptima son u_2^h (que corresponde al proyecto A cuando comienza en 1) y u_4^h (que corresponde al proyecto C). Por tanto son estas alternativas de inversión las únicas que se realizan en el óptimo.

b) En qué periodo o periodos sobran recursos financieros.

Si sobran recursos financieros en un periodo, la variable de holgura del primal correspondiente a ese periodo toma valor mayor que cero en el óptimo. Cuando una variable de holgura del primal toma valor mayor que cero, la correspondiente variable principal del dual toma valor igual cero. Por tanto, es en el periodo 1 cuando sobran recursos financieros.

c) Significado económico de u_0, u_1 y u_2.

Las variables principales del dual (u_j) representan el coste de oportunidad que soporta la empresa por tener limitadas las disponibilidades financieras a R_j um en cada uno de los intervalos del periodo de planificación. O lo que es lo mismo, u_j mide la rentabilidad marginal de los recursos financieros del periodo *j*, esto es, mide el incremento que se producirá en el Valor Actual Neto Total del programa (Z) si se incrementa en una unidad monetaria dichas disponibilidades financieras.

PROBLEMA 1 (1,25 puntos)

Sean los proyectos de inversión A y B, excluyentes entre sí, cuyas características financieras en términos nominales se explicitan en la siguiente tabla:

t	PROY. A	PROY. B
0	-14.000 €	-12.000 €
1	0 €	16.000 €
2	21.000 €	0 €

Supuesta una tasa de descuento nominal del 10,24% y un incremento en el índice general de precios del 3,5%, ambos anuales y constantes para el periodo de análisis, se pide:

a) **Valoración de ambos proyectos con los criterios VAN y TIR**
b) **Ordenación jerárquica mediante los criterios VAN y TIR. Determine, en su caso, la tasa de Fisher y analice el significado económico de los resultados obtenidos.**
c) **Rentabilidad relativa neta real del proyecto B**

SOLUCIÓN

a) Valoración de los Proyectos

Sea: k_N = 10,24% y g =4%

Valoración del Proyecto A

	-14.000	0	21.000
A)	0	1	2

$$VAN_A = -14.000 + \frac{0}{(1{,}1024)} + \frac{21.000}{(1{,}1024)^2} = 3.279{,}88\ €$$

$$TIR_A \Rightarrow -14.000 + \frac{0}{(1+r_A)} + \frac{21.000}{(1+r_A)^2} = 0 \rightarrow r_A = 22{,}47\%$$

Valoración del Proyecto B

	-12.000	16.000	0
B)	0	1	2

$$VAN_B = -12.000 + \frac{16.000}{(1{,}1024)} + \frac{0}{(1{,}1024)^2} = 2.513{,}78€$$

$$TIR_B \Rightarrow -12.000 + \frac{16.000}{(1+r_A)} + \frac{0}{(1+r_A)^2} = 0 \rightarrow r_B = 33{,}33\%$$

b) Ordenación jerárquica

Comparación de resultados

$$\left.\begin{cases} \text{TIR} \left.\begin{cases} \text{TIR}_A = 22{,}47\ \% \\ \text{TIR}_B = 33{,}33\% \end{cases}\right\} \rightarrow \text{TIR}_B > \text{TIR}_A \longrightarrow \text{Proyecto B} \\ \\ \text{VAN} \left.\begin{cases} \text{VAN}_A = 3.279{,}88\ € \\ \text{VAN}_B = 2.513{,}78\ € \end{cases}\right\} \rightarrow \text{VAN}_B < \text{VAN}_A \longrightarrow \text{Proyecto A} \end{cases}\right\} \rightarrow \boxed{\text{Diferente ordenación jerárquica}}$$

Determinación de la Tasa de Fisher

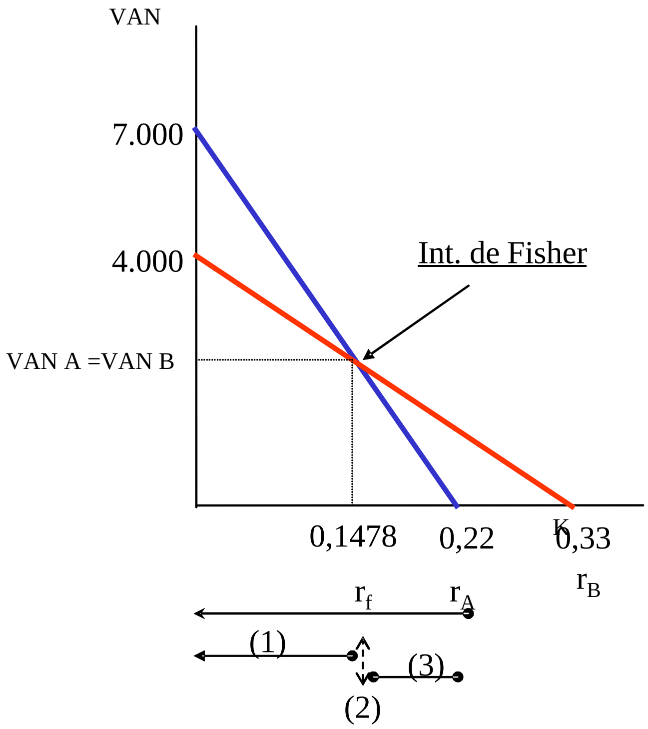
$$-14.000 + \frac{0}{(1+r_f)} + \frac{21.000}{(1+r_f)^2} = -12.000 + \frac{16.000}{(1+r_f)} + \frac{0}{(1+r_f)^2}$$

También denominada TIR de la inversión diferencia:

	-2.000	-16.000	21.000
A-B)	0	1	2

$$-2.000 + \frac{-16.000}{(1+r_f)} + \frac{21.000}{(1+r_f)^2} = 0 \rightarrow r_f = 14{,}78\%$$

Gráficamente:



VAN A (k=0)= 7.000
VAN A (k=0,22)= 0

VAN B (k=0)= 4.000
VAN B (k=0,33)= 0

Intervalo de análisis:

$[0\%, r_{min}\%[\Rightarrow [0\% ; 0{,}22\%[$	
(1)	$0\%, \leq k < 14{,}78\%$
(2)	$k = 14{,}78\%$
(3)	$14{,}78\%, < k < 22\%$

Intervalo de análisis: $[0\%, r_{min}\%[\Rightarrow [0\% ;22\%[$		**Orden de preferencia**		
		VAN	**TIR**	**Orden**
(1)	$0\%, \leq k < 14{,}78\%$	$VAN_B < VAN_A$	$TIR_B > TIR_A$	Discrepan
(2)	$k = 14{,}78\%$	$VAN_B = VAN_A$	$TIR_B > TIR_A$	Discrepan
(3)	$14{,}78\%, < k < 22\%$	$VAN_B > VAN_A$	$TIR_B > TIR_A$	Coinciden

Dado que nuestra tasa de actualización es el 10,24% nos encontramos en el intervalo (1) donde la ordenación es discrepante: el criterio VAN prefiere el proyecto A mientras que el criterio TIR prefiere el proyecto B.

c) Determinación de la rentabilidad relativa neta real del proyecto B

$$R_{n(real)} = r_{(real)} - k_{(real)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + r_{(nominal)}) = (1 + r_{(real)})(1 + g) \\ (1 + 0,33) = (1 + r_{(real)})(1 + 0,035) \rightarrow r_{(real)} = \dfrac{1,33}{1,035} - 1 = 28,50\% \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + k_{(nominal)}) = (1 + k_{(real)})(1 + g) \\ (1 + 10,24) = (1 + k_{(real)})(1 + 0,035) \rightarrow k_{(real)} = \dfrac{1,1024}{1,035} - 1 = 6,51\% \end{array} \right\}$$

$$R_{n(real)} = r_{(real)} - k_{(real)} = 0,2840 - 0,0651 = 0,2189 = 21,89\%$$

PROBLEMA 2 (1,5 puntos)

El Sr. Santiago Martín López, que dispone de algunos conocimientos en finanzas, ha diseñado sobre el papel una cartera (cartera A) combinando activos financieros. La desviación típica (σ_A) del rendimiento de su cartera es de 0,2 y su covarianza con el rendimiento de la cartera de mercado ($\sigma_{A,M}$) es de 0,04. Antes de realizar la inversión, decide hacer uso del servicio de consulta *on–line* de la empresa financiera Capital Más Líquido, servicio al cual está suscrito. El Sr. Santiago Martín López tan solo impone una condición al gestor que le atiende: no está dispuesto a soportar más riesgo total que una desviación típica del rendimiento de la cartera del 0,2. Siguiendo sus indicaciones, el gestor le propone una cartera eficiente (cartera B), cuya covarianza con el rendimiento de la cartera de mercado ($\sigma_{B,M}$) es del 0,05.

El Sr. Santiago Martín López se plantea analizar la propuesta del gestor y compararla con su cartera inicial, para lo cual dispone, gracias a su suscripción, de la siguiente información de la cartera de mercado ($\tilde{R}_M$) y del activo libre de riesgo (R_F):

$$E\left(\tilde{R}_M\right) = 0{,}16 \quad ; \quad \sigma\left(\tilde{R}_M\right) = 0{,}25 \quad ; \quad R_F = 0{,}04.$$

Asumiendo que el modelo CAPM es válido, conteste a las siguientes cuestiones:

a) **¿Soporta el Sr. Santiago Martín López el mismo riesgo sistemático en ambos casos?**
b) **Asumiendo que la cartera compuesta por el gestor es eficiente, ¿ha cumplido el gestor la condición impuesta por el Sr. Santiago Martín López por lo que se refiere al riesgo?**
c) **Si el Sr. Santiago quisiera mantener la rentabilidad esperada de la cartera formada por él (cartera A) pero reducir al máximo posible el riesgo total de la carteras, ¿cuánto riesgo podría eliminar?**

SOLUCIÓN

a) ¿Soporta el Sr. Santiago Martín López el mismo riesgo sistemático en ambos casos?

$$\beta_A = \frac{\sigma_{A,M}}{\sigma_M^2} = \frac{0{,}04}{(0{,}25)^2} = 0{,}64$$

$$\beta_B = \frac{\sigma_{B,M}}{\sigma_M^2} = \frac{0{,}05}{(0{,}25)^2} = 0{,}8$$

No, soporta más riesgo sistemático si invierte en la cartera B.

b) Asumiendo que la cartera compuesta por el gestor es eficiente, ¿ha cumplido el gestor la condición impuesta por el Sr. Santiago Martín López por lo que se refiere al riesgo?

Si la cartera B es eficiente entonces estará construida combinando el activo libre de riesgo y la cartera de mercado: $\tilde{R}_B = x\tilde{R}_M + (1-x)R_F$

El rendimiento esperado de la cartera B será:
$E(\tilde{R}_B) = R_F + \left(\tilde{R}_M - R_F\right)\beta_B = 0{,}04 + \left(0{,}16 - 0{,}04\right)0{,}8 = 0{,}136$

A partir de este dato podemos determinar la composición de la cartera B será la siguiente:
$E(\tilde{R}_B) = xE(\tilde{R}_M) + (1-x)R_F$
0,135 = x (0,16) + (1–x) (0,04)
x = 0,8

Por tanto, la desviación típica de la cartera B será:

$\sigma_B^2 = x^2\sigma_M^2$; $\sigma_B = x\sigma_M = 0{,}8\left(0{,}25\right) = 0{,}2$

c) Si el Sr. Santiago quisiera mantener la rentabilidad esperada de la cartera formada por él (cartera A) pero reducir al máximo posible el riesgo total de la carteras, ¿cuánto riesgo podría eliminar?

El rendimiento esperado de la cartera A lo obtenemos a partir de la SML:
$E(\tilde{R}_A) = R_F + \left(\tilde{R}_M - R_F\right)\beta_A = 0{,}04 + \left(0{,}16 - 0{,}04\right)0{,}64 = 0{,}1168$

La cartera que para ese nivel de rentabilidad esperada soporta el menor riesgo es una cartera eficiente: $\tilde{R}_B = x\tilde{R}_M + (1-x)R_F$

La composición de una cartera eficiente con el mismo rendimiento esperado que la cartera A será:
$E(\tilde{R}_p) = xE(\tilde{R}_M) + (1-x)R_F$
0,1168 = x (0,16) + (1–x) (0,04)
x = 0,64

Por tanto, el riesgo total de la cartera (desviación típica) será:
$\sigma_p^2 = x^2\sigma_M^2$; $\sigma_p = x\sigma_M = 0{,}64\left(0{,}25\right) = 0{,}16$

El Sr. Santiago podría eliminar: $\sigma_A - \sigma_p = 0{,}2 - 0{,}16 = 0{,}04$

PROBLEMA 3 (1,25 puntos)

La empresa IL TROVATORE, S.A. prevé las siguientes ventas, con sus costes correspondientes, para su plan estratégico de los próximos 4 años:

(€ nominales)	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4
Ventas	1.670.000 €	1.753.500 €	1.841.175 €	1.933.234 €
Coste de Producción	65%	65%	65%	65%

La empresa, a principio del año 1, está diseñando su plan estratégico y se está planteando realizar, a principio del año 2, una inversión de 200.000 euros que reduciría su coste de producción un 5%, pasando del 65% al 60%. Dicha inversión tendrá una vida útil según tablas fiscales de 4 años.

Como consecuencia de la realización de la anterior inversión las necesidades de fondo de maniobra también se reducirán en 25.000€ (t_1), 30.000€ (t_2) y 35.000€ (t_3), respectivamente, durante los 3 años siguientes.

La empresa sigue el método de amortización lineal para todos sus activos, y al final del año 4 (de su plan estratégico) el activo adquirido se dará de baja.

Se sabe que el tipo impositivo que soporta esta empresa es del 30%, la tasa anual de inflación prevista será del 2% y su coste de capital real del 10%.¿Aconsejaría la nueva inversión?

SOLUCIÓN

La nueva inversión supone un ahorro en su coste de producción de un 5% de su plan estratégico para los próximos años. Para determinar si es conveniente o no realizar la nueva inversión de 200.000 € debemos estimar su aportación de valor a partir de los FNC incrementales después de impuestos (Fdi) que genera.

Los Fdi de la nueva inversión van a venir dados por el ahorro en costes variables totales, reducción del Fondo de Maniobra (FM) y la variación del IS como consecuencia tanto de los menores gastos por costes variables totales como por la amortización de la inversión.

Efecto de la nueva inversión sobre BI del IS

Reducción de gastos por coste de producción ⇒ Incremento BI
Amortización nueva inversión ⇒ Reducción BI
Incremento / disminución patrimonial ⇒ Incremento / reducción BI

FNC incrementales

Reducción pagos por coste de producción ⇒ Incremento FNC
Reducción FM ⇒ Incremento FNC
+/- Variación IS ⇒ Disminución / Incremento FNC

<u>Cálculo del ahorro de Costes Variables Totales</u>

La realización del proyecto que estamos analizando supone una reducción de los Costes de Producción asociados a su plan estratégico del 65% al 60%. Por tanto, la cuantía del ahorro será:

	Año 1	**Año 2**	**Año 3**	**Año 4**
Ventas	1.670.000	1.753.500	1.841.175	1.933.234
Ahorro Coste de Producción (5% sobre Ventas)		87.675	92.059	96.662

<u>Efecto sobre la BI e IS</u>

Cuota de amortización = $\frac{200.000}{4}$ = 50.000€

VP (en t=4) = PV – VNC_f = PV – [VA – AA_{cf}] =
= 0 – [200.000 – (50.000 × 3)] = –50.000€

	Año 1	**Año 2**	**Año 3**	**Año 4**
+ Reducción Coste de Producción		87.675	92.059	96.662
– Amortización		50.000	50.000	50.000
– Disminución Patrimonial				50.000
= BI		37.675	42.059	-3.338
= IS (30% BI)		11.302,50	12.617,70	-1.001,40

<u>FNCdi incrementales</u>

	Año 1	**Año 2**	**Año 3**	**Año 4**
– Desembolso	200.000			
+ Reducción Coste de Producción		87.675	92.059	96.662
+ Reducción FM	25.000	30.000	35.000	
– Incremento IS		11.302,50	12.617,70	-1.001,40
= FNCdi	- 175.000	106.372,50	114.441,30	97.663,40

VAN de la nueva inversión

Calculamos el coste de oportunidad nominal mediante la ecuación de Fisher:

$(1+k_N) = (1+k_R)\ (1+g) = (1+0,1)\ (1+0,02) = 1,122$

$$\text{VAN} = -175.000 + \frac{106.372,50}{(1+0,122)} + \frac{114.441,30}{(1+0,122)^2} + \frac{97.663,40}{(1+0,122)^3} = 52.145,19\ €$$