1. Demuestre que, para proyectos de inversión simples, los criterios del VAN y la TIR llegan a la misma decisión en lo que se refiere a la valoración de los proyectos.

Un proyecto de inversión simple es aquél en el que todos los flujos netos de caja presentan signo positivo, excepto el desembolso inicial que, por definición, tiene signo negativo. Su esquema temporal es el siguiente:

-D	F_1	F_2	F_3	...	F_n
0	1	2	3	...	n

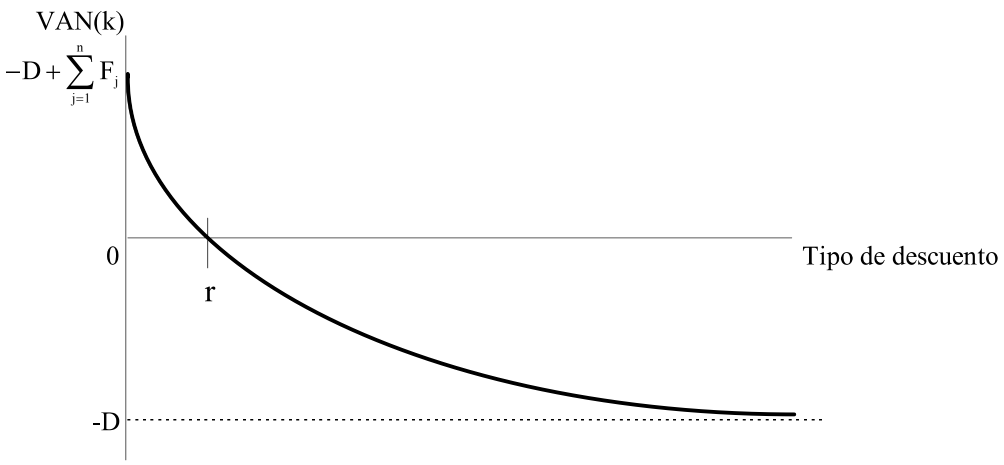
Para simplificar, vamos a suponer que el coste de capital es constante e igual a k. Entonces, la expresión del valor actual neto será:

$$VAN(k) = -D + \sum_{j=1}^{n} \frac{F_j}{(1+k)^j} = -D + \sum_{j=1}^{n} F_j (1+k)^{-j}$$

Analicemos la anterior función:

- $k = 0 \Rightarrow VAN(0) = -D + \sum_{j=1}^{n} F_j$
- $k \to \infty \Rightarrow VAN(\infty) \to -D$
- $\dfrac{\delta VAN(k)}{\delta k} = \sum_{j=1}^{n} - j F_j (1+k)^{-j-1} < 0$, ya que $F_j>0$ y $(1+k)>0$.
- $\dfrac{\delta^2 VAN(k)}{\delta k^2} = \sum_{j=1}^{n} - j(-j-1) F_j (1+k)^{-j-2} = \sum_{j=1}^{n} j(j+1) F_j (1+k)^{-j-2} > 0$

De esto se deduce que la función VAN(k) para las inversiones simples es monótona decreciente, es asintótica en el eje de abcisas a (–D) y tiene un único punto de corte con el eje de abcisas. Su representación gráfica es, por tanto, la siguiente:

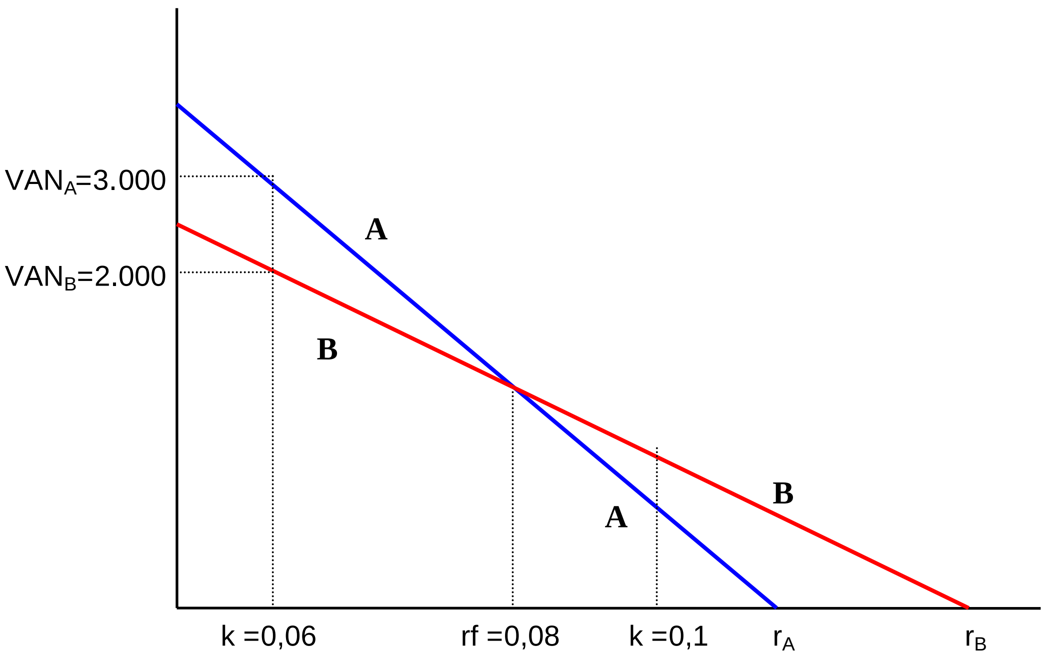


2. Se han valorado los proyectos de inversión simples y con idénticos desembolso A y B mediante el criterio del VAN obteniendo, para un coste de oportunidad del capital del 6%, un VAN de 3000 u.m para A y de 2000 u.m para B. La TIR (tasa interna de rendimiento) de la inversión diferencia de A menos B es del 8%.

a) **Establezca la ordenación jerárquica mediante el criterio de la TIR.**
b) **¿Cuál será la ordenación que obtendremos con el criterio del VAN si el coste de oportunidad del capital usado es del 10%?**
c) **¿Se puede afirmar con seguridad que el proyecto A tendrá una duración superior al proyecto B?**
d) **¿Existe tasa de Fisher? ¿Cuál será su valor?**

Represente gráficamente las funciones VAN de ambos proyectos.

De acuerdo con los datos que nos dan, la representación gráfica de la función VAN de los proyectos A y B sería la siguiente.



a) **Establezca la ordenación jerárquica mediante el criterio de la TIR.**

De acuerdo con el criterio TIR: $r_B > r_A$, por lo que el mejor proyecto es el B.

b) **¿Cuál será la ordenación que obtendremos con el criterio del VAN si el coste de oportunidad del capital usado es del 10%?**

Como se observa en el gráfico, para un coste de capital del 10% tenemos que:

$VAN_B > VAN_A$, por lo que el mejor proyecto será el B.

c) ¿Se puede afirmar con seguridad que el proyecto A tendrá una duración superior al proyecto B?

Con los datos disponibles no es posible realizar esta afirmación con seguridad.

d) ¿Existe tasa de Fisher? ¿Cuál será su valor?

Sí existe tasa de Fisher. Su valor es igual a la TIR de la inversión diferencia: 8%.

PROBLEMA 1

Sean dos activos financieros A y B cuyos rendimientos esperados son del 15% y del 7% respectivamente y cuyas desviaciones típicas son de 30% y del 10% respectivamente. La correlación entre ambos es perfecta y positiva.

Si no se permiten ventas al descubierto determine:

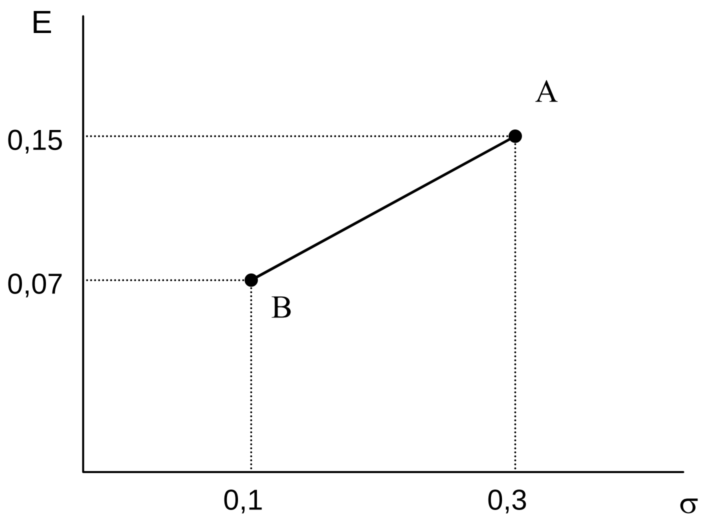
- **a) La cartera de mínimo riesgo global**
- **b) El conjunto de carteras eficientes.**
- **c) El conjunto de carteras de varianza mínima.**

Conteste a las cuestiones anteriores suponiendo que las ventas al descubierto están permitidas.

Suponga ahora que los activos del ejemplo son los dos únicos activos arriesgados del mercado y que se encuentran en el mismo en las mismas proporciones. Si el rendimiento del activo sin riesgo es del 3%, obtenga:

- **a) Las expresiones de la CML y SML del mercado.**
- **b) La parte del riesgo no diversificable del activo A y del activo B.**

La representación gráfica de la línea de combinación de A y B, de acuerdo con los datos que nos proporciona el enunciado cuando **no existe la posibilidad de realizar ventas en descubierto** sería la siguiente:



a) La cartera de mínimo riesgo global

Sería la cartera formada únicamente con el activo B.

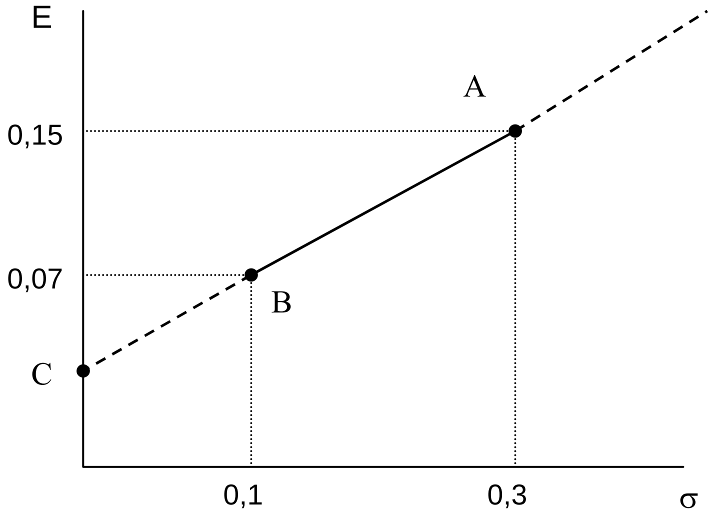
b) El conjunto de carteras eficientes.

Todas las carteras que pueden formarse combinando los activos A y B son eficientes, ya que para cada nivel de riesgo ofrecen la mayor rentabilidad esperada.

c) El conjunto de carteras de varianza mínima.

Todas las carteras que pueden formarse combinando los activos A y B forman parte del conjunto de mínima varianza, ya que para cada nivel de rentabilidad esperada soportan el menor nivel de riesgo.

En el caso de que las **ventas en descubierto estuvieran permitidas**, la representación gráfica de la línea de combinación de A y B sería la siguiente:



a) La cartera de mínimo riesgo global

Sería la cartera C, pues tendría varianza igual a cero. Vamos a determinar la composición de la cartera C:

$$\sigma_p^2 = x \cdot \sigma_A^2 + (1-x) \cdot \sigma_B^2 + 2x(1-x)\sigma_A \sigma_B \rho_{A,B} = 0$$

Dado que $\rho_{A,B} = +1$, entonces la expresión de la varianza será:

$$\sigma_p^2 = \left[x\sigma_A + (1-x)\sigma_B\right]^2 = 0 \quad ; \qquad \sigma_p = \left[x\sigma_A + (1-x)\sigma_B\right] = 0$$

$$\sigma_p = x(0,3) + (1-x)(0,1) = 0 \qquad ; \qquad x = -0,5$$

Por tanto, la cartera de mínimo riesgo será: $R_p = -0,5R_A + 1,5R_B$

b) El conjunto de carteras eficientes.

Todas las carteras que pueden formarse combinando los activos A y B son eficientes. Partiendo de la cartera C, serían todas aquellas carteras para las que se cumpla que:

$x_A \geq -0{,}5$ y $x_B \leq 1{,}5$

c) El conjunto de carteras de varianza mínima.

Todas las carteras que pueden formarse combinando los activos A y B forman parte del conjunto de mínima varianza.

Suponga ahora que los activos del ejemplo son los dos únicos activos arriesgados del mercado y que se encuentran en el mismo en las mismas proporciones. Si el rendimiento del activo sin riesgo es del 3%, obtenga:

a) Las expresiones de la CML y SML del mercado.

Dado que son los únicos activos arriesgados del mercado, la cartera de mercado estará formada únicamente por ellos. Por tanto:

$$E(R_M) = (0{,}5)R_A + (0{,}5)R_B = (0{,}5)(0{,}15) + (0{,}5)(0{,}07) = 0{,}11$$

$$\sigma_M = (0{,}5)\sigma_A + (0{,}5)\sigma_B = (0{,}5)(0{,}3) + (0{,}5)(0{,}1) = 0{,}2$$

La expresión de la CML del mercado será:

$$E(\tilde{R}_e) = R_F + \frac{E(\tilde{R}_M) - R_F}{\sigma_M} \cdot \sigma_e = 0{,}03 + \frac{0{,}11 - 0{,}03}{0{,}2} \cdot \sigma_e$$

$$E(\tilde{R}_e) = 0{,}03 + 0{,}4 \cdot \sigma_e$$

La expresión de la SML del mercado será:

$$E(\tilde{R}_i) = R_F + \left[E(\tilde{R}_M) - R_F\right]\beta_i = 0{,}03 + \left[0{,}11 - 0{,}03\right]\beta_i$$

$$E(\tilde{R}_i) = 0{,}03 + 0{,}08\beta_i$$

b) La parte del riesgo no diversificable del activo A y del activo B.

Para determinar el riesgo diversificable del activo A (y también del B) debemos construir una cartera eficiente con la misma rentabilidad esperada que el activo A. La diferencia entre la desviación típica del activo A y de la cartera eficiente será la parte del riesgo del activo A que puede ser diversificado.

El rendimiento esperado del activo A es $E(\tilde{R}_A) = 0{,}15$, por lo que $E(\tilde{R}_e) = 0{,}15$.

La cartera que para ese nivel de rentabilidad esperada soporta el menor riesgo es una cartera eficiente: $\widetilde{R}_B = x\widetilde{R}_M + (1-x)R_F$

La composición de una cartera eficiente con el mismo rendimiento esperado que el activo A será:
$E(\widetilde{R}_p) = xE(\widetilde{R}_M) + (1-x)R_F$
0,15 = x (0,11) + (1–x) (0,03)
x = 1,5

Por tanto, el riesgo total de la cartera (desviación típica) será:
$\sigma_e^2 = x^2\sigma_M^2$; $\sigma_e = x\sigma_M = 1{,}5(0{,}2) = 0{,}3$

Con lo que el riesgo que podría ser eliminado sería: $\sigma_A - \sigma_e = 0{,}3 - 0{,}3 = 0$

Para el activo B el procedimiento sería el mismo. La composición de una cartera eficiente con el mismo rendimiento esperado que el activo B será:
$E(\widetilde{R}_p) = xE(\widetilde{R}_M) + (1-x)R_F$
0,07 = x (0,11) + (1–x) (0,03)
x = 0,5

Por tanto, el riesgo total de la cartera (desviación típica) será:
$\sigma_e^2 = x^2\sigma_M^2$; $\sigma_e = x\sigma_M = 0{,}5(0{,}2) = 0{,}1$

Con lo que el riesgo que podría ser eliminado sería: $\sigma_A - \sigma_e = 0{,}1 - 0{,}1 = 0$

En ambos casos el riesgo diversificable es cero. Este resultado es el esperado debido a que la correlación entre los activos A y B es +1, y la cartera de mercado es una combinación lineal de ellos.

PROBLEMA 2

Don José María Pardo se dedica al cultivo del champiñón desde hace muchos años. Acaba de inaugurar dos nuevas naves cuyo coste ha ascendido a 10.000€. Ahora tiene que decidir qué tipo de cultivo plantará en cada nave el próximo año. Ambas naves están preparadas para el cultivo del champiñón, setas, y hongos exóticos. La rentabilidad en términos netos por kilo cultivado es la siguiente:

CULTIVO	RENTABILIDAD
Champiñón	3€ / Kg.
Setas	7€ / Kg.
Hongos exóticos	15€ / Kg.

El Sr. José María estima que la producción por m^2 para las distintas especies es la siguiente:

CULTIVO	PRODUCCIÓN/M^2
Champiñón	160Kg./ m^2
Setas	120Kg./ m^2
Hongos exóticos	175Kg./ m^2

Dado el grado de humedad y temperatura que necesita cada especie, pueden plantarse conjuntamente en la misma nave el champiñón y las setas, pero ninguna de las anteriores especies se puede combinar con los hongos, ya que necesitan condiciones diferentes.

El coste inicial por m^2 que supone plantar cada especie en cada una de las naves es el siguiente:

CULTIVO	COSTE EN NAVE 1	COSTE EN NAVE 2
Champiñón	125€/ m^2	200€/ m^2
Setas	150€/ m^2	170€/ m^2
Hongos exóticos	200€/ m^2	100€/ m^2

El Sr. José María Pardo dispone de 200.000€ para llevar a cabo la plantación de este año. La superficie de plantación de cada nave es de 1.000 m^2.

Se pide:

a) **Plantee el problema matemático que permita determinar la superficie óptima de cada cultivo en cada una de las naves.**
b) **Si la solución óptima es cultivar 500 m^2 de hongos exóticos en la nave 1 y 1000m^2 del mismo cultivo en la nave 2, ¿cuál es el valor de la función objetivo? ¿Se agota la disponibilidad financiera?**

a) Plantee el problema matemático que permita determinar la superficie óptima de cada cultivo en cada una de las naves.

Definición de las variables principales:

x_1 = m^2 a plantar de champiñón en la nave 1
x_2 = m^2 a plantar de champiñón en la nave 2
x_3 = m^2 a plantar de setas en la nave 1
x_4 = m^2 a plantar de setas en la nave 2
x_5 = m^2 a plantar de hongos en la nave 1
x_6 = m^2 a plantar de hongos en la nave 2

La rentabilidad que genera cada cultivo por m^2 lo calculamos a partir de los datos que nos proporciona el enunciado:

VAN / m^2 de champiñones = producción/m^2 × rentabilidad por Kg. = 160 × 3 = 480€

VAN / m^2 de setas = producción/m^2 × rentabilidad por Kg. = 120 × 7 = 840€

VAN / m^2 de hongos = producción/m^2 × rentabilidad por Kg. = 175 × 15 = 2.625€

Planteamos el problema de programación que permite resolver el problema:

$$Max\ Z = 480x_1 + 480x_2 + 840x_3 + 840x_4 + 2.625x_5 + 2.625x_6$$
s.a.

Restricción financiera

$$125x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 170x_4 + 200x_5 + 100x_6 \leq 200.000$$

Restricción por tamaño de la nave

$$x_1 + x_3 + x_5 \leq 1.000$$
$$x_2 + x_4 + x_6 \leq 1.000$$

Restricciones de exclusión

$$x_1 \cdot x_5 = 0$$
$$x_3 \cdot x_5 = 0$$
$$x_2 \cdot x_6 = 0$$
$$x_4 \cdot x_6 = 0$$

Restricción de no negatividad

$$x_i \geq 0$$

c) Si la solución óptima es cultivar 500 m^2 de hongos exóticos en la nave 1 y 1000m^2 del mismo cultivo en la nave 2, ¿cuál es el valor de la función objetivo? ¿Se agota la disponibilidad financiera?

Dada la solución del problema primal, el valor de la función objetivo será:

$$Z^* = 500 \times 2.625 + 1.000 \times 2.625 = 3.937.500€$$

Respecto del consumo de recursos, substituimos los valores de la solución en la restricción financiera:

Consumo de recursos = 200 × 500 + 1.000 × 100 = 200.000€

Por tanto, no sobran recursos.