

FUNDAMENTOS DE DIRECCIÓN FINANCIERA
TEMA 2- Parte III
CONCEPTO DE INVERSIÓN Y CRITERIOS PARA SU VALORACIÓN

CÁLCULO DE LOS FLUJOS NETOS DE CAJA Y TOMA DE DECISIONES DE INVERSIÓN PRODUCTIVA

Peculiaridades en el cálculo de los flujos netos de caja
(Dificultades y peculiaridades que plantea su determinación)

1. Flujo neto de caja versus beneficios
2. Descontar los flujos netos de caja incrementales
3. Flujos netos de caja nominales versus flujos netos de caja reales
4. Consideración de los impuestos en el cálculo de los flujos netos de caja

**FLUJO NETO DE CAJA
VERSUS BENEFICIOS**

Para valorar una inversión debe atenderse a la corriente monetaria o financiera y no a la económica o corriente de beneficios.

- el flujo neto de caja es una variable objetiva
- los proyectos de inversión son atractivos por la tesorería
- las decisiones de inversión y de financiación son dos caras de una misma moneda
- La consideración de los beneficios en lugar de los flujos netos de caja podría conducir a aceptar proyectos que financieramente no fueran rentables, y condujeran a reducir el valor de la empresa en el mercado



Son todos los flujos que se generan por la participación del nuevo proyecto en la empresa

FLUJO NETO DE CAJA INCREMENTAL	=	FLUJO NETO DE CAJA DE LA EMPRESA CON EL NUEVO PROYECTO	—	FLUJO NETO DE CAJA DE LA EMPRESA SIN EL NUEVO PROYECTO
--------------------------------	---	--	---	--

Consecuencia: Pueden aceptarse proyectos que individualmente considerados tuvieran un VAN<0. Ello es posible en proyectos con sinergias positivas (proyectos que contribuyen a un ahorro de costes o que permiten un mejor aprovechamiento de los canales de distribución, etc.)

Flujos de tesorería que deben incluirse en el cálculo del flujo neto de caja incremental

Hay que considerar:

- Los efectos derivados de la realización del proyecto (sean positivos o negativos)
- Incluir los costes de oportunidad que pueda suponer el proyecto
- Tener en cuenta las posibles necesidades de fondo de maniobra, (sobre todo al principio)
- El fondo de maniobra neto (capital circulante)
- Pagos ocasionados por los costes generales que sean consecuencia del proyecto

FONDO DE MANIOBRA	=	ACTIVO A CORTO	—	PASIVO A CORTO	≡	Parte del activo circulante que es financiado con pasivo fijo, generalmente Fondos Propios
		- Tesorería - Existencias - Clientes		- Proveedores - Créditos a corto		

Flujos de tesorería que NO deben incluirse en el cálculo del flujo neto de caja incremental

No se deben considerar:

- Los pagos ocasionados por los costes irre recuperables
- Los pagos ocasionados por costes financieros, si los hubiese

FLUJOS NETOS DE CAJA NOMINALES VERSUS FLUJOS NETOS DE CAJA REALES

Causa: INFLACION

La relación entre el tipo de interés nominal (i^n) y tipo de interés real (i^r), siendo α la inflación medida en tanto por uno, viene dada por la conocida ecuación de Fisher

$$(1 + i^n) = (1 + \alpha)(1 + i^r)$$

Para un solo período, tendríamos:



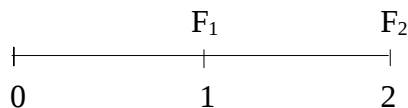
$$\frac{F_1}{1 + k_1} = \frac{F_1}{(1 + k_1^*)(1 + g_1)}$$

k_1 = coste de oportunidad nominal para el plazo de un año

k_1^* = coste de oportunidad real

g_1 = tasa de inflación de la economía para el año 1.

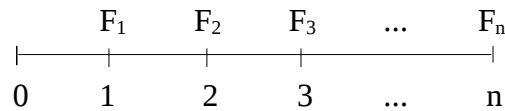
Para dos períodos:



$$\frac{F_2}{(1 + k_2)^2} = \frac{F_2}{(1 + k_2^*)^2 (1 + g_1)(1 + g_2)}$$

g_2 = tasa de inflación de la economía para el año 2.

En general, para n períodos:



$$VAN = -D + \sum_{j=1}^n \frac{F_j}{(1+k_j)^j} = -D + \sum_{j=1}^n \frac{F_j}{(1+k_j^*)^j \prod_{h=1}^j (1+g_h)}$$

CONSIDERACIÓN DE LOS IMPUESTOS EN EL CÁLCULO DE LOS FLUJOS NETOS DE CAJA

El impuesto que grava el Beneficio es una salida de tesorería (un pago)

CONSIDERACIÓN DE LA AMORTIZACIÓN EN EL CÁLCULO DE LOS FLUJOS NETOS DE CAJA

La amortización es un coste para la empresa, pero no supone ningún pago

RESUMEN

- Se ha de calcular el flujo neto de caja después de impuestos
- El impuesto se calcula a partir de la base imponible (ingresos-gastos), y no suele coincidir el momento del devengo con el momento del pago
- La base imponible no coincide en ningún caso con el flujo neto de caja, aunque supongamos ingresos y gastos al contado, siempre habrá gastos que no suponen salidas de caja, como la amortización
- El sistema de amortización seguido para el proyecto no afecta directamente al cálculo del flujo neto de caja, ya que nunca supone una salida de caja, pero si afecta al cálculo de la base imponible y por tanto al cálculo del impuesto (afectará al cálculo de la rentabilidad)

Interacciones de proyectos

- Casi todas las decisiones de capital implican que la empresa debe elegir entre dos o más alternativas posibles, que suelen presentarse como "mutuamente excluyentes"
- 3 Supuestos
 - distribución temporal óptima de las inversiones
 - elección entre equipos de corta y larga duración
 - determinación de la vida óptima de un equipo.

DISTRIBUCIÓN TEMPORAL ÓPTIMA DE LAS INVERSIONES

Un proyecto tenga un VAN positivo no significa que sea mejor realizarlo ahora

Si el proyecto de inversión puede realizarse en más de un momento del tiempo, es posible que tenga más valor en el futuro

Un proyecto con VAN negativo, puede resultar una inversión valiosa en el futuro

Ejemplo

Año de Ejecución	0	1	2	3	4	5
VAN_j	50	64'4	77'5	89'4	100	109'4
$VAN(\text{en } t_0),$ $k=10\%$	50	58'5	64'0	67'2	68'3	67'9

Cuanto más se tarda en ejecutar el proyecto, más dinero se gana.

Lo importante es determinar la fecha que maximiza el Valor Actual Neto de la inversión hoy VAN(en t_0). Para determinarlo, tenemos que descontar cada uno de los VAN_j de la primera fila al año t_0 :

$$VAN(\text{en } t_0) \text{ si se tala en el año } j = \frac{VAN_j}{(1+k)^j}$$

En la segunda fila se muestra el resultado de la anterior operación suponiendo un $k = 10\%$. La conclusión es que el momento óptimo para ejecutar el proyecto es el año 4, porque es el punto que maximiza el VAN^1 .

RESUMEN

1°. Calcular el VAN del proyecto para cada momento o fecha de realización.

$$VAN_j = \text{VAN del momento de realización } j, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

2°. Actualizar al momento inicial (t_0) cada uno de los VAN anteriores

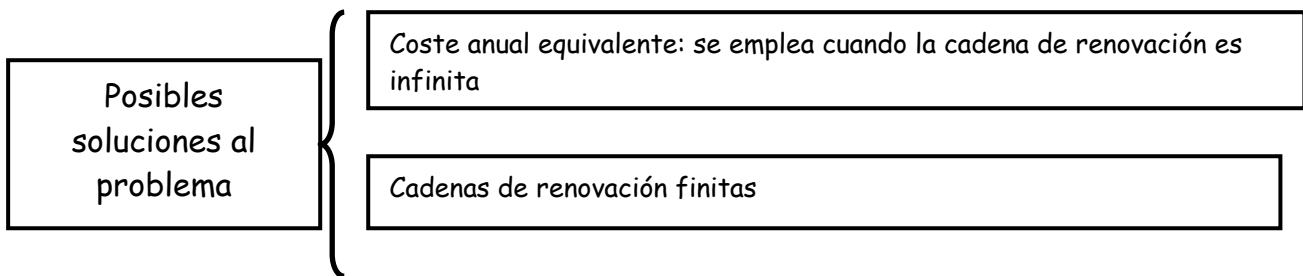
$$VAN_j^0 = \text{valor en } t_0 \text{ del VAN del proyecto de momento de realización } j$$

3°. Elegir el mayor de los VAN_j^0 .

ELECCIÓN ENTRE EQUIPOS DE CORTA Y LARGA DURACIÓN SI SE SUPONE EL REEMPLAZO DE LOS EQUIPOS

Generalmente un equipo cuando deja de funcionar se tiene que reemplazar por otro de iguales o parecidas características

En lugar de analizar una inversión de forma aislada (adquirir el equipo A o B, se debe evaluar una sucesión de inversiones en el tiempo



Coste anual equivalente

Elección entre dos equipos productivos distintos A y B con la misma capacidad de producción, ejecutando el mismo trabajo. Se diferencian en el precio, el coste de funcionamiento y la vida útil.

Como las dos máquinas producen el mismo producto, la única forma de elegir una de ellas es fijándonos en los costes.

Equipo	Costes (um)				Valor Actual Costes (k=10%)
	t ₀	t ₁	t ₂	t ₃	
A	18	6	6	6	32'92
B	14	9	9		29'62

A la vista de la Tabla se puede pensar que se debe elegir el equipo con un Valor Actual de los Costes menor, es decir, el equipo B.

Pero no es tan sencillo, ya que el equipo B debería reemplazarse un año antes que el A.

Supone que si se elige el equipo B, en t₃ se tendrá que hacer un nuevo desembolso (comprar otro equipo B), mientras que el equipo A todavía estaría en funcionamiento en ese año.

Como los equipos tienen distinta duración, a fin de homogeneizar los costes y hacerlos comparables se deben convertir los costes totales de cada equipo a un coste anual a fin permiti la comparación.

El procedimiento es calcular el **coste anual equivalente**.

Anualidad equivalente de A (E_A) $\Rightarrow$	$VAC_A = E_A \cdot a_{3 0'1}$
Anualidad equivalente de B (E_B) $\Rightarrow$	$VAC_B = E_B \cdot a_{2 0'1}$

Cálculo de las anualidades equivalentes:

- Equipo A $\Rightarrow 32'92 = E_A \frac{1 - (1 + 0'1)^{-3}}{0'1}$; $E_A = 13'24$ um

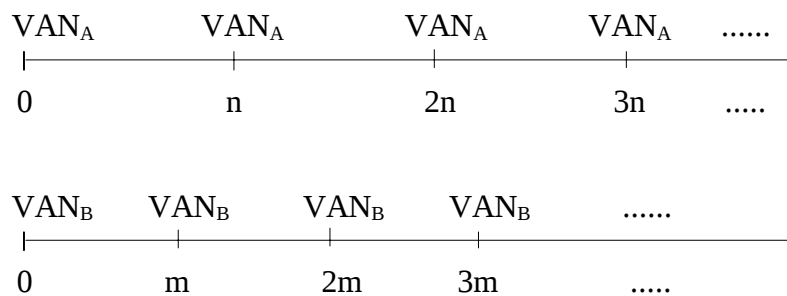
- Equipo B $\Rightarrow 29'62 = E_B \frac{1 - (1 + 0'1)^{-2}}{0'1}$; $E_B = 17'07$ um

Conclusión: el mejor equipo es el A, ya que tiene un coste anual equivalente menor.



Equipos con distinta vida útil:

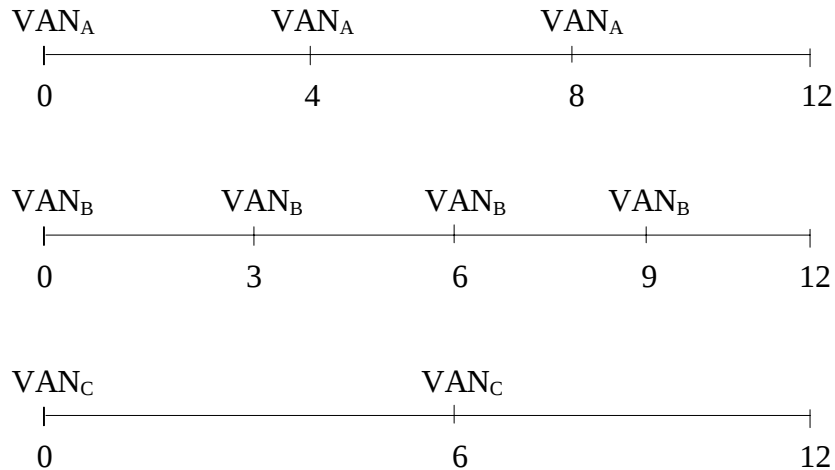
El equipo A tiene una vida de n años y el B de m años ($n > m$), obtendríamos:



Ambas inversiones no son comparables, porque involucran periodos de tiempo distintos. Pero sí se puede determinar el número de veces que hay que renovar cada equipo a fin de que ambas cadenas de renovación tengan la misma duración.

Para ello se calcula el mínimo común múltiplo de las distintas duraciones de los diferentes equipos alternativos.

Supongamos que la vida útil del equipo A es de 4 años ($n = 4$) y la del equipo B de 3 años ($m = 3$). Además, existe una tercera alternativa C, cuya vida útil es de 6 años. La base temporal homogénea mínima para estos 3 equipos viene dada por su mínimo común múltiplo: 12.



¿Cuál es el mejor equipo? Aquél cuya cadena de base temporal homogénea tenga un mayor valor:

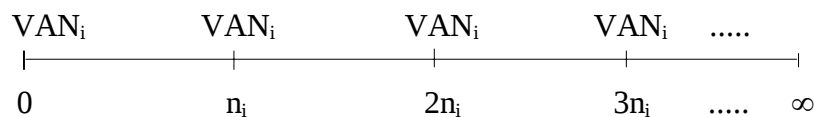
$$\text{Valor Cadena Renovación Equipo A: } VAN_A + \frac{VAN_A}{(1+k)^4} + \frac{VAN_A}{(1+k)^8}$$

$$\text{Valor Cadena Renovación Equipo B: } VAN_B + \frac{VAN_B}{(1+k)^3} + \frac{VAN_B}{(1+k)^6} + \frac{VAN_B}{(1+k)^9}$$

$$\text{Valor Cadena Renovación Equipo C: } VAN_C + \frac{VAN_C}{(1+k)^6}$$

• La idea de comparar el valor de las cadenas de renovación de equipos con distinta vida útil también puede emplearse cuando tomamos como horizonte económico toda la vida de la empresa, que supondremos indefinida. En este caso, hablaremos de **cadenas de renovación infinitas**.

El valor actual de la cadena de equipos del tipo i (S_i), cuya vida es n_i será:



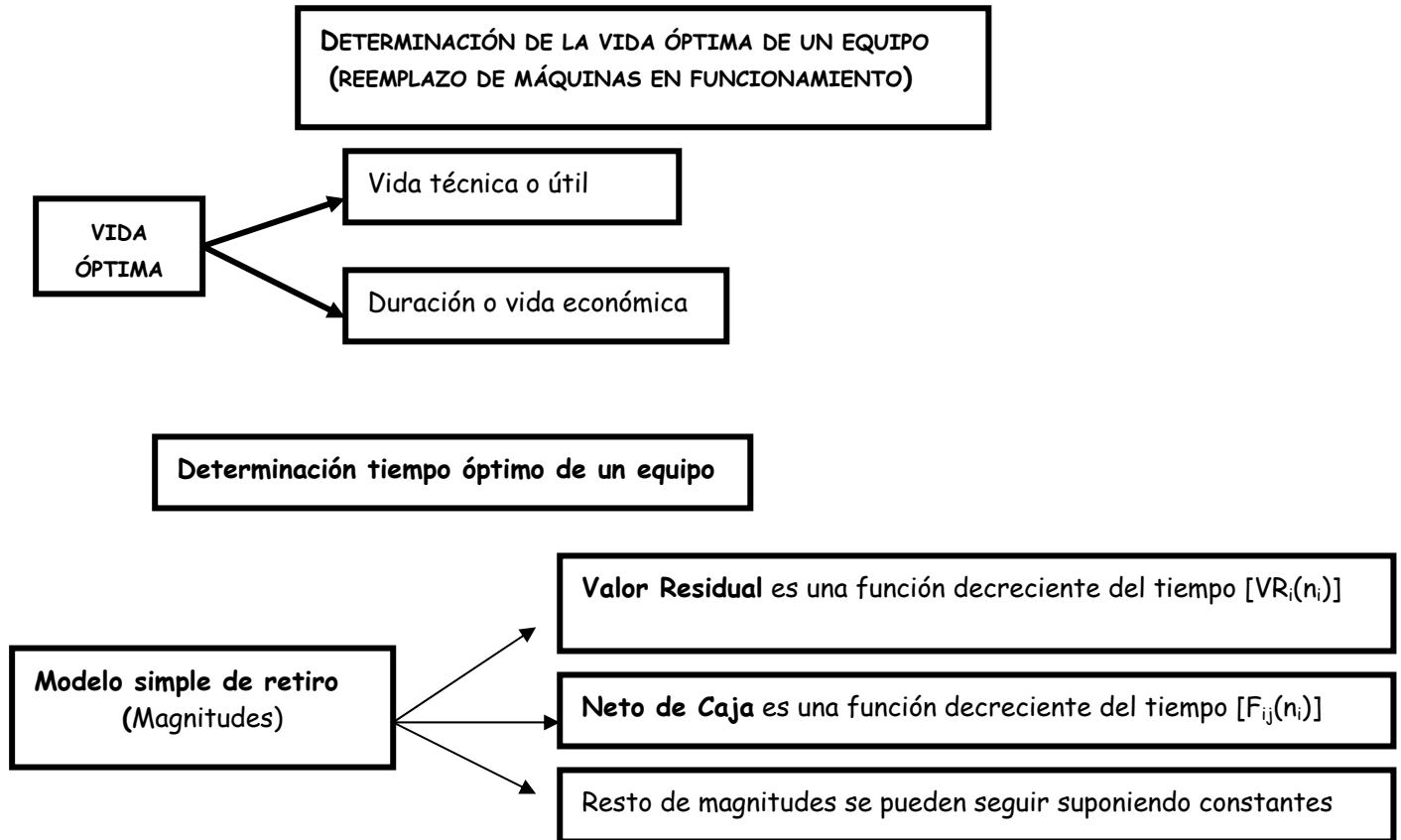
$$S_i = VAN_i + \frac{VAN_i}{(1+k)^{n_i}} + \frac{VAN_i}{(1+k)^{2n_i}} + \frac{VAN_i}{(1+k)^{3n_i}} + \dots =$$

$$= VAN_i \left[1 + \frac{1}{(1+k)^{n_i}} + \frac{1}{(1+k)^{2n_i}} + \frac{1}{(1+k)^{3n_i}} + \dots \right] =$$

= {suma de una progresión geométrica de infinitos términos de razón inferior a la unidad} =

$$VAN_i \frac{1}{1 - \frac{1}{(1+k)^{n_i}}} = VAN_i \frac{(1+k)^{n_i}}{(1+k)^{n_i} - 1}$$

⇒ La empresa debe seleccionar aquel equipo que tenga un mayor valor de S_i



El VAN del equipo i [$VAN_i(n_i)$] es una función del tiempo:

$$VAN_i(n_i) = -D_i + \sum_{j=1}^{n_i} \frac{F_{ij}(n_i)}{(1+k)^j} + \frac{VR_i(n_i)}{(1+k)^{n_i}}$$

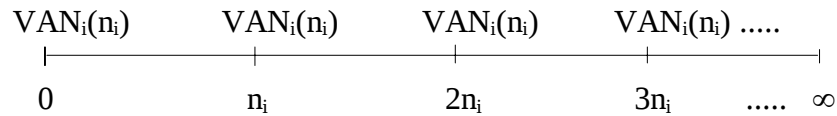
La **duración óptima** de este equipo será **aquel valor de n_i que haga máximo su Valor Actual Neto**, es decir:

$$\frac{\delta VAN_i(n_i)}{\delta n_i} = VAN'_i(n_i) = 0$$

Caso es bastante irreal, porque la empresa no se suele liquidar cuando el equipo se retira, sino que compra otro equipo nuevo para reemplazar al equipo viejo, y así sucesivamente

Modelo de retiro con idénticos reemplazamientos

Sea la siguiente sucesión de valores $VAN_i(n_i)$:

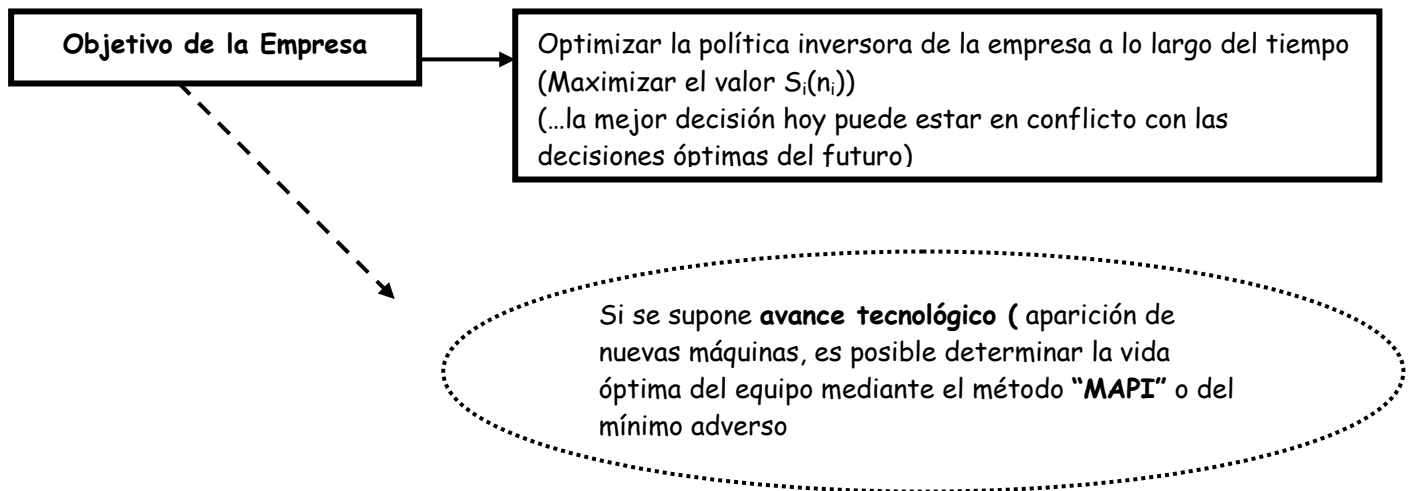


El valor actualizado de la sucesión de valores $VAN_i(n_i)$ o VAN de la cadena de renovaciones será similar al que se obtiene en el caso de cadenas de renovación infinitas:

$$S_i(n_i) = VAN_i(n_i) \frac{(1+k)^{n_i}}{(1+k)^{n_i} - 1}$$

La duración óptima del equipo viene dada por aquel valor de n_i que haga máximo del valor $S_i(n_i)$, es decir:

$$\frac{\delta S_i(n_i)}{\delta n_i} = S'_i(n_i) = 0$$



Elección de proyectos de inversión con recursos limitados

Supuestas restricciones, que pueden ser financieras o de otro tipo, que impiden llevar a cabo todos los proyectos rentables

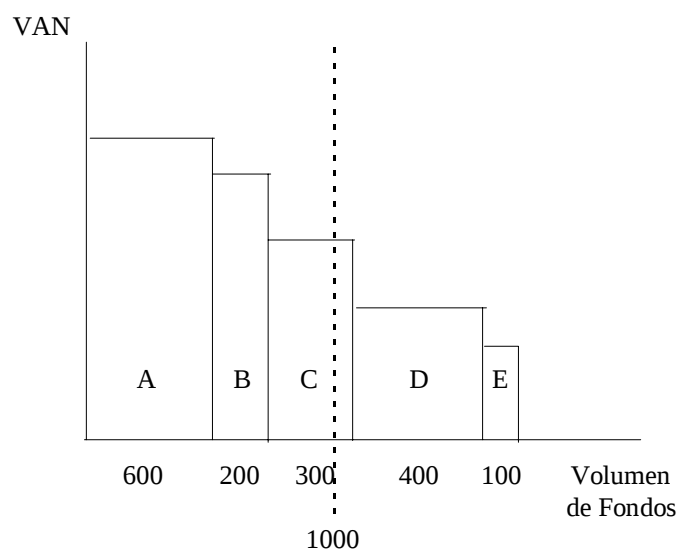
El VAN proporciona una ordenación jerárquica de los proyectos de inversión

Si los proyectos son independientes y perfectamente divisibles se asigna los recursos disponibles según la ordenación jerárquica proporcionada por el VAN

Si los proyectos son excluyentes se realiza el que proporcione mayor rentabilidad

Ejemplo:

Supongamos que los fondos disponibles para inversiones (R) son de 1.000 um y que la empresa, después de valorar una serie de proyectos de inversión reales, ha seleccionado 5 de ellos por ser rentables y los ha ordenado según su rentabilidad.

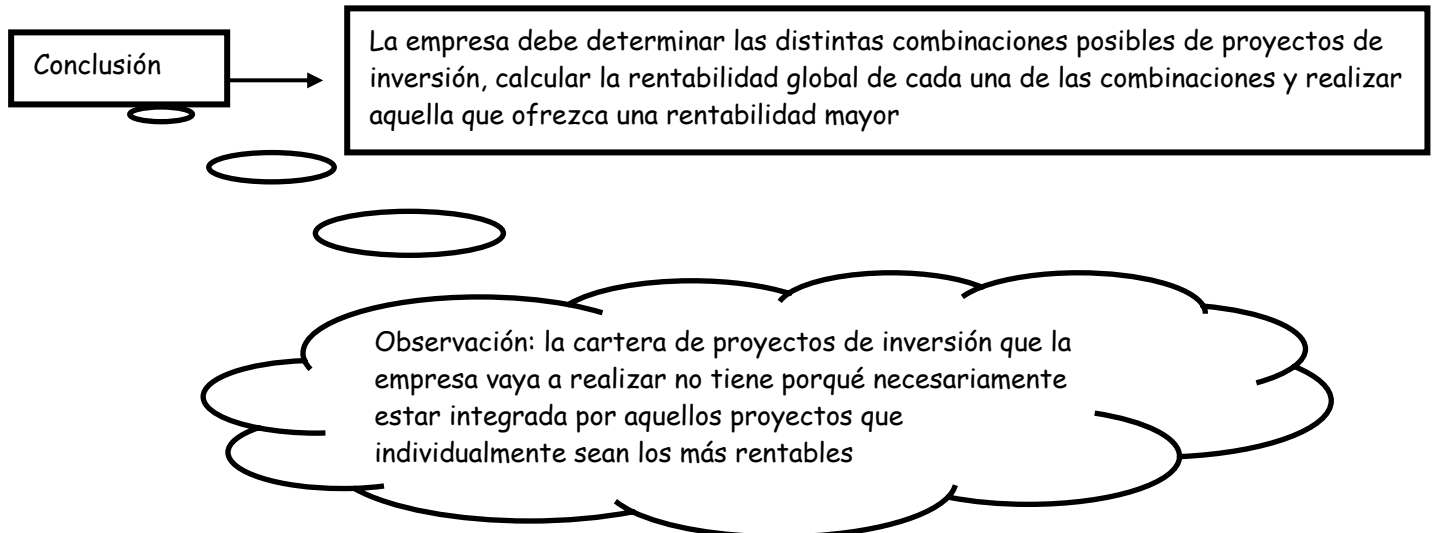


En este caso, al ser proyectos independientes y perfectamente divisibles, la empresa realizaría los proyectos A, B y parte del C, hasta agotar las disponibilidades financieras.

Si los proyectos son independientes pero no divisibles

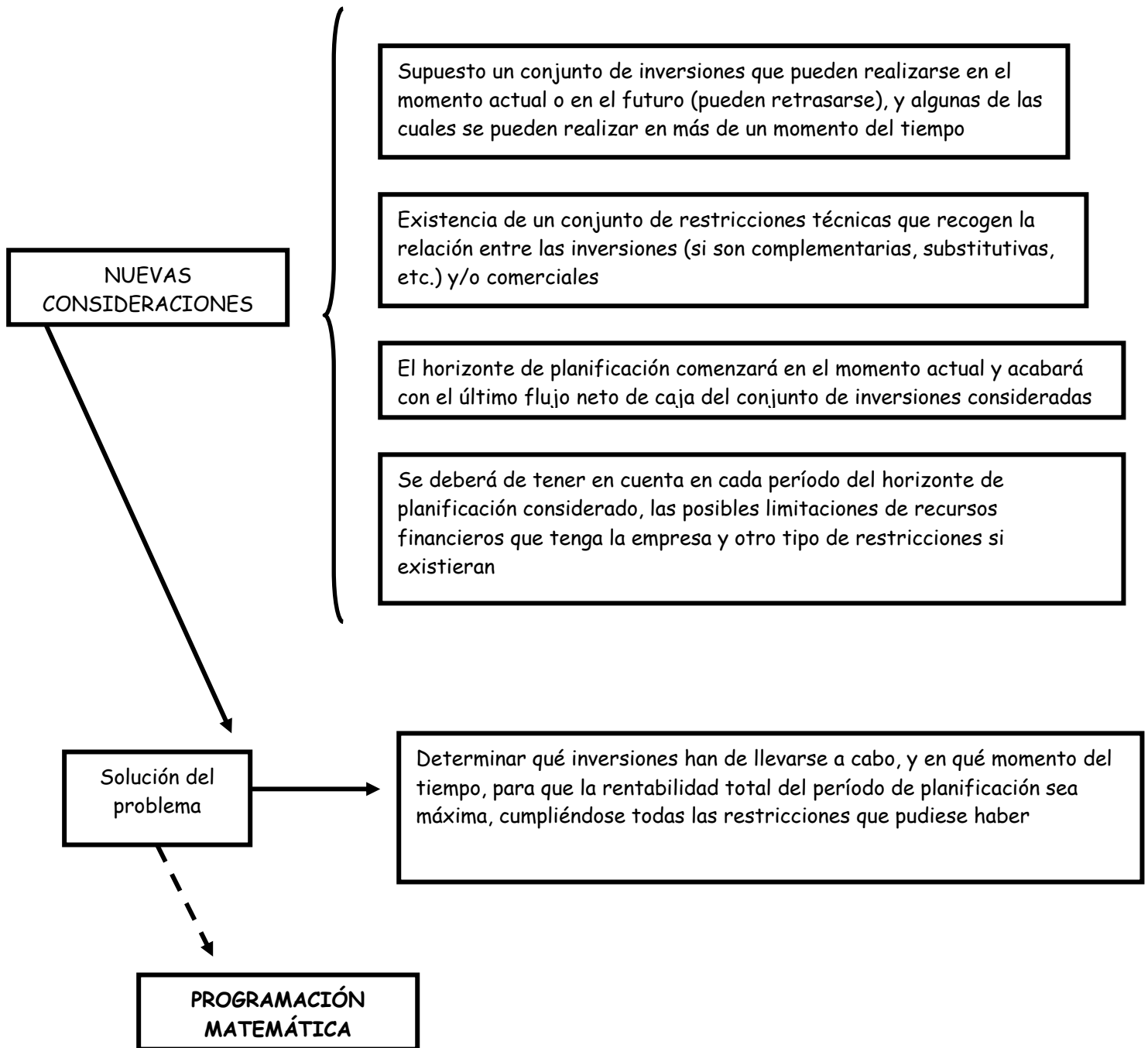
Siguiendo con el ejemplo anterior. La empresa podría plantearse el realizar los proyectos A y B dado que son los que ofrecen una mayor rentabilidad. Sin embargo, esto supone que le van a sobrar 200 um del presupuesto. En este caso, lo lógico es que la empresa acuda al mercado de capitales e invierta las 200 um en Letras del Tesoro, por ejemplo, aunque obtendrá una rentabilidad menor de la que obtendría si realizase el proyecto E.

Dada esta situación, la alternativa que tiene es la de agotar su presupuesto de inversiones realizando, por ejemplo, los proyectos A-C-D, o también puede realizar el conjunto de proyectos B-C-D-E, o el conjunto A-D, etc. En todos estos casos el presupuesto se agota, es decir, se gastan las 1.000 um disponibles.



Estas normas de decisión son insuficientes debido a las siguientes razones:

- a) Sólo tienen en cuenta las restricciones financieras en el momento inicial y no las restricciones en momentos futuros.
- b) Sólo considera las posibilidades de inversión en el momento presente y en los momentos futuros.
- c) No se considera la posibilidad de que los FNC sirvan para financiar otros proyectos.



MODELO DE LORIE-SAVAGE-WEINGARTNER



Propone y resuelve en términos de programación lineal el problema de la elección de inversiones en la empresa, ante la limitación de recursos financieros

Las **variables** que intervienen son:

VAN_i	:	Valor Actual Neto del proyecto i ($i=1,...,n$)
F_{ij}	:	Flujo Neto de Caja generado por la inversión i en el año j , ($j=0,1,...,T$)
S_{ij}	:	Salida de Caja originada por la inversión i en el año j
R_j	:	Disponibilidades financieras para el año j
k	:	Coste de oportunidad del capital
x_i	:	Número de veces que debe realizarse el proyecto de inversión i

El modelo que propone Weingartner es el siguiente:

$$\text{Max } Z = VAN_1 x_1 + VAN_2 x_2 + \dots + VAN_n x_n$$

$$\text{s.a.} \quad S_{10} x_1 + S_{20} x_2 + \dots + S_{n0} x_n \leq R_0$$

$$S_{11} x_1 + S_{21} x_2 + \dots + S_{n1} x_n \leq R_1$$

...

$$S_{1T} x_1 + S_{2T} x_2 + \dots + S_{nT} x_n \leq R_T$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

El problema consiste en buscar la combinación de valores x_i para la cual la función objetivo toma un valor máximo, cumpliendo, a su vez, los dos bloques de restricciones.

Tal y como está planteado el problema ($x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$), se supone que:

- los proyectos pueden fraccionarse; y
- los proyectos son repetitivos.

Si los proyectos fueran fraccionables pero no repetitivos (como máximo se pudieran realizar al 100%), el último bloque de restricciones (restricciones de no negatividad) debería ser reemplazado por:

$$0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

O, lo que es lo mismo:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & & \leq 1 \\ x_2 & & \leq 1 \\ \dots & & \\ & x_n & \leq 1 \\ x_1, x_2, \dots, x_n & \geq & 0 \end{array}$$

En el caso de que los proyectos de inversión no sean fraccionables ni repetitivos, el segundo bloque de restricciones debería ser:

$$x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Esto implica que el problema planteado debe resolverse mediante Programación Lineal Entera (PLE).

Formulación inicial del modelo de Weingartner, en el que los proyectos se suponen fraccionables y repetitivos.

La resolución de este Programa Lineal (PL) se realiza mediante el algoritmo del *simplex*. Para ello es necesario convertir las inecuaciones que representan las restricciones financieras en ecuaciones mediante la inclusión en el programa de las **variables de holgura** (x_j^h). Las variables de holgura aparecen en las restricciones con el coeficiente uno y en la función objetivo con coeficiente cero. Al introducir las variables de holgura, el PL queda de la siguiente forma:

$$\text{Max } Z = \text{VAN}_1 x_1 + \text{VAN}_2 x_2 + \dots + \text{VAN}_n x_n + 0 x_0^h + 0 x_1^h + \dots + 0 x_T^h$$

$$\text{s.a.} \quad S_{10} x_1 + S_{20} x_2 + \dots + S_{n0} x_n + x_0^h = R_0$$

$$S_{11} x_1 + S_{21} x_2 + \dots + S_{n1} x_n + x_1^h = R_1$$

...

$$S_{1T} x_1 + S_{2T} x_2 + \dots + S_{nT} x_n + x_T^h = R_T$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n, x_0^h, x_1^h, \dots, x_T^h \geq 0$$

SIGNIFICADO ECONÓMICO DE LAS VARIABLES EN EL ÓPTIMO.

Una vez resuelto el PL planteado, obtenemos:

$x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$	=	Número de veces que en el óptimo conviene realizar los proyectos de inversión.
------------------------------	---	--

Los valores que obtenemos de las variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ en la solución $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ son óptimos porque proporcionan el máximo valor de la FO cumpliendo al mismo tiempo todas las restricciones.

$x_1^{h*}, x_2^{h*}, \dots, x_T^{h*}$	=	valor de las variables de holgura en el óptimo
$x_j^{h*} = 0$	$\Rightarrow$	significa que en el periodo j se han agotado todos los recursos financieros disponibles
$x_j^{h*} > 0$	$\Rightarrow$	significa que en el periodo j no se han agotado todos los recursos financieros disponibles y que, por tanto, ha habido recursos sobrantes en una cantidad igual a x_j^{h*}

| EL PROGRAMA DUAL.

A todo programa lineal, llamado primal, le corresponde otro que se denomina dual. Las **relaciones** entre ambos programas son las siguientes:

1. El programa dual es un problema de minimización cuando el primal correspondiente lo es de maximización, y viceversa.
2. El programa dual tiene tantas variables principales como restricciones tiene el programa primal.
3. Los coeficientes de la función objetivo del programa dual son los términos independientes de las restricciones en el programa primal.
4. El programa dual tiene tantas restricciones como variables principales tiene el programa primal.
5. Los términos independientes de las restricciones en el programa dual son los coeficientes de las variables en la función objetivo del primal.
6. Las restricciones del programa dual tienen un sentido inverso al que tienen las restricciones del programa primal.

Si denominamos u_j , para $j=0,1,\dots,T$, a las **variables principales** del programa dual, y teniendo en cuenta las relaciones comentadas anteriormente, el programa dual correspondiente al programa primal del modelo de Weingartner será:

$$\text{Min } Z' = R_0 u_0 + R_1 u_1 + \dots + R_T u_T$$

$$S_{10} u_0 + S_{11} u_1 + \dots + S_{1T} u_T \geq \text{VAN}_1$$

$$S_{20} u_0 + S_{21} u_1 + \dots + S_{2T} u_T \geq \text{VAN}_2$$

....

$$S_{n0} u_0 + S_{n1} u_1 + \dots + S_{nT} u_T \geq \text{VAN}_n$$

$$u_0, u_1, \dots, u_T \geq 0$$

A la hora de resolver el anterior programa es necesario transformar el conjunto de inecuaciones que forman las restricciones en ecuaciones lineales. Para ello, al igual que hicimos en el programa primal, introducimos las **variables de holgura**, con lo que:

$$\text{Min } Z' = R_0 u_0 + R_1 u_1 + \dots + R_T u_T + 0 u_1^h + 0 u_2^h + \dots + 0 u_n^h$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & S_{10} u_0 + S_{11} u_1 + \dots + S_{1T} u_T - u_1^h = \text{VAN}_1 \\ & S_{20} u_0 + S_{21} u_1 + \dots + S_{2T} u_T - u_2^h = \text{VAN}_2 \\ & \dots \\ & S_{n0} u_0 + S_{n1} u_1 + \dots + S_{nT} u_T - u_n^h = \text{VAN}_n \\ & u_0, u_1, \dots, u_T, u_1^h, u_2^h, \dots, u_n^h \geq 0 \end{aligned}$$

Una vez que hemos introducido las variables de holgura, podemos resolver este programa de dos formas:

- Mediante el algoritmo del *simplex*.
- Obtener los valores en el óptimo de las variables a partir de la solución óptima del problema primal con sólo aplicar el *Teorema de Complementariedad* en programación lineal.

En virtud del **Teorema de Complementariedad**, los valores de las variables duales serán igual a:

$u_j^* = -w_j^{h*}$	$\Rightarrow$	el valor en el óptimo de las variables duales principales es igual a menos el rendimiento marginal de la variable de holgura correspondiente en el primal, obviamente, en el óptimo
$u_i^{h*} = -w_i^*$	$\Rightarrow$	el valor en el óptimo de las variables de holgura duales es igual a menos el rendimiento marginal de la variable principal primal correspondiente en el óptimo

SIGNIFICADO ECONÓMICO DE LAS VARIABLES DUALES EN EL ÓPTIMO

Las variables principales del dual (u_j) representan el coste de oportunidad que soporta la empresa por tener limitadas las disponibilidades financieras a R_j um en cada uno de los intervalos del periodo de planificación. O lo que es lo mismo, u_j mide la rentabilidad marginal de los recursos financieros del periodo j , esto es, mide el incremento que se producirá en el Valor Actual Neto Total del programa (Z) si se incrementa en una unidad monetaria dichas disponibilidades financieras.

Dado el significado de las variables u_j , el programa dual trata de minimizar el coste de oportunidad total que soporta la empresa por tener unos recursos financieros limitados con los que afrontar el programa de inversiones en el periodo de planificación. La minimización está

sujeta a la condición de no realizar ningún proyecto de inversión en el que el coste teórico de los recursos financieros aplicados en él sea mayor que la rentabilidad marginal que la empresa puede obtener de la realización del proyecto, es decir, el Valor Actual Neto del proyecto.

Según esto, si:

$u_j^* > 0$	$\Rightarrow$	significa que la empresa soporta un coste de oportunidad por tener limitado los recursos financieros del periodo j a R_j um. Cada um de incremento en las disponibilidades de dicho periodo producirá un incremento del VAN del programa igual a u_j
$u_j^* = 0$	$\Rightarrow$	significa que a la empresa, después de acometer los proyectos de inversión le sobran recursos financieros. Al no existir limitación financiera en ese periodo, la empresa no soporta ningún coste de oportunidad
$u_i^{h*} > 0$	$\Rightarrow$	indica que el valor teórico de los recursos financieros utilizados en el proyecto i es superior a su VAN en una cuantía igual al valor de la variable, por lo que ese proyecto de inversión no se aceptará
$u_i^{h*} = 0$	$\Rightarrow$	indica que el valor teórico de los recursos financieros utilizados en el proyecto i coincide con VAN. La restricción correspondiente del programa dual se cumple como igualdad, y el proyecto de inversión debe aceptarse

Comparando el significado de las variables en el programa primal y en el dual en la solución óptima, las relaciones que podemos establecer entre unas y otras son:

PRIMAL		DUAL
$x_i > 0$	$\Leftrightarrow$	$u_i^h = 0$
$x_i = 0$	$\Leftrightarrow$	$u_i^h > 0$
$x_j^h > 0$	$\Leftrightarrow$	$u_j = 0$
$x_j^h = 0$	$\Leftrightarrow$	$u_j > 0$

| LIMITACIONES DEL MODELO DE WEINGARTNER.

1. La separación que en el modelo de Weingartner se hace entre FNC (F_{ij}), utilizados para calcular el VAN de los proyectos en la función objetivo, y las Salidas de Caja (S_{ij}), que son los coeficientes de las restricciones, carece de sentido.

Weingartner establece en su modelo que el conjunto de salidas de un periodo no puede ser superior al disponible en dicho periodo, pero no tiene en cuenta las entradas de caja que genera el proyecto y, por tanto, no considera la posibilidad de que sean reinvertidos en el mismo periodo en que son generados.

2. No considera la posibilidad de que los FNC positivos que genera un proyecto de inversión sean reinvertidos en otros proyectos de inversión.

3. No considera la posibilidad de que los recursos financieros sobrantes en un momento del tiempo sean utilizados en periodos sucesivos.

MODELO DE DURBÁN

El programa primal quedará:

$$\text{Max } Z = \text{VAN}_1 x_1 + \text{VAN}_2 x_2 + \dots + \text{VAN}_n x_n$$

$$- F_{10} x_1 - F_{20} x_2 - \dots - F_{n0} x_n \leq R_0$$

$$- F_{11} x_1 - F_{21} x_2 - \dots - F_{n1} x_n \leq R_1$$

...

$$- F_{1T} x_1 - F_{2T} x_2 - \dots - F_{nT} x_n \leq R_T$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Como se observa, en las restricciones no figuran las Salidas de Caja sino los FNC. De esta forma, cuando el FNC es positivo ($F_{ij} > 0$), incrementa las disponibilidades financieras del periodo correspondiente, mientras que si es negativo ($F_{ij} < 0$), representa un consumo real de dinero a cargo de las disponibilidades del periodo.

Para resolver el anterior programa primal mediante la técnica del *simplex* es necesario, como ya sabemos, convertir las inecuaciones en que están expresadas las restricciones en ecuaciones. Para ello introducimos las correspondientes variables de holgura:

$$\text{Max } Z = \text{VAN}_1 x_1 + \text{VAN}_2 x_2 + \dots + \text{VAN}_n x_n$$

$$- F_{10} x_1 - F_{20} x_2 - \dots - F_{n0} x_n + x_0^h = R_0$$

$$- F_{11} x_1 - F_{21} x_2 - \dots - F_{n1} x_n + x_1^h = R_1$$

...

$$- F_{1T} x_1 - F_{2T} x_2 - \dots - F_{nT} x_n + x_T^h = R_T$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n, x_0^h, x_1^h, \dots, x_T^h \geq 0$$

El significado de las variables en la solución óptima tanto del programa primal como del programa dual es exactamente el mismo que el visto en el modelo de Weingartner.

OTRAS RESTRICCIONES Y POSIBILIDADES DE LA PROGRAMACIÓN DE INVERSIONES.

Además de las restricciones técnicas que vimos en el modelo de Weingartner (proyectos no fraccionables y/o no repetitivos) es posible considerar otros tipos de restricciones:

- Cuando dos proyectos, además de ser no fraccionables y no repetitivos, son mutuamente excluyentes, debemos añadir la siguiente restricción:

$$x_f + x_g \leq 1$$

De esta forma impedimos que $x_f = 1$ y $x_g = 1$ simultáneamente. Otra forma de introducir la restricción sería:

$$x_f \cdot x_g = 0$$

pero al ser una restricción no lineal tiene el inconveniente de que el problema no podría resolverse mediante el *simplex*.

- Si los proyectos de inversión son acoplados, de tal forma que la realización del proyecto g implica la realización del proyecto f (pero no tiene porqué ocurrir al revés), entonces habrá que introducir la siguiente restricción:

$$x_g \leq x_f$$

- Además de las restricciones técnicas pueden haber restricciones comerciales, como, por ejemplo, que el número máximo de unidades físicas que se fabriquen no supere el nivel máximo de ventas previsto, etc.

- En la programación de inversiones también es posible considerar la posibilidad de que un proyecto de inversión pueda comenzar a realizarse en distintos del tiempo. Así, por ejemplo, supongamos que el proyecto A puede comenzar a realizarse tanto en el momento t_0 como en el momento t_2 . Entonces, debemos tener tantas variables como posibles momentos del tiempo puede realizarse el proyecto:

x_A	=	nº de veces que se realiza el proyecto A en el momento t_0
x'_A	=	nº de veces que se realiza el proyecto A en el momento t_2

Lógicamente, si el proyecto A es no repetitivo, entonces habrá que añadir la correspondiente restricción:

$$x_A + x'_A = 1$$