RENTABILIDAD Y RIESGO DE CARTERAS Y ACTIVOS

TEMA 3- I

FUNTAMENTOS DE DIRECCIÓN FINANCIERA

RIESGO y RENTABILIDAD
(decisiones de inversión productivas)

EXISTENCIA DE RIESGO
(los FNC no se conocen con certeza)

Descontar FNC con riesgo

El coste de oportunidad del capital (tasa de actualización del proyecto) dependerá del nivel de riesgo del proyecto

La tasa de actualización ha de ser lo que el accionista (inversor) espera ganar si invirtiese en proyectos de similar riesgo en los mercados financieros

- Medidas de rendimiento y riesgo para un activo individual y para una cartera
- Toma de decisiones de inversión a titulo individual
- Bajo qué hipótesis, y cuando los mercados están en equilibrio, se establece una compensación entre rentabilidad esperada y riesgo

Medida del rendimiento y del riesgo de activos individuales y de carteras

RENDIMIENTO

Variación expresada en términos relativos de La riqueza de un inversor como consecuencia de la adquisición de un determinado activo financiero

Rendimiento de un activo financiero en un periodo determinado

Ganancias recibidas como dividendo o intereses y por las denominadas ganancias de capital

$$\tilde{R} = \frac{\tilde{P}_t + \tilde{D}_t - P_0}{P_0}$$

- Rendimiento variable aleatoria, ex-post
- Rentabilidad si se conoce con certeza, ex-ante es una variable aleatoria de carácter subjetivo

PARÁMETROS DE LA FUNCIÓN

- (R) = variable aleatoria
- El valor esperado $E(R) = \sum_{i=1}^{H} h_i \cdot R_i \,;\, E(R) = \int R \cdot f(R)\, dR$

  – H = número de estados.

  - h_i = la probabilidad de obtener R_i

  - f(R) = la función de densidad

-

La varianza o desviación típica

Permite conocer la naturaleza de la función de distribución (informa idea de la dispersión de los rendimientos con respecto a la media), es una medida del Riesgo)

$$\sigma^2(R) = \sum_{i=1}^{H} h_i \left[R_i - E(R)\right]^2$$

$$\sigma^2(R) = \int \left[R - E(R)\right]^2 f(R)\, dR$$

Observación: Si se desconoce la distribución de probabilidad del activo considerado, no conocemos los parámetros de los que estamos hablando. Habrá, por tanto, que estimarlos a partir de datos muestrales (las series históricas de rendimientos).

Un **estimador insesgado** de la esperanza poblacional es la media muestral, y un **estimador insesgado** de la varianza poblacional es la cuasivarianza.

$$\overline{R} = \frac{\sum_{t=1}^{N} R_t}{N}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=1}^{N} (R_t - \overline{R})^2}{N - 1}$$

- N = número de observaciones
- R_t = rendimiento observado en el momento t

Covarianza

Estadístico que va resultar relevante, mide en qué medida los rendimientos de dos activos están interrelacionados

Si no se conoce el parámetro poblacional se deberá estimar, como estimador de la covarianza poblacional se usará la **covarianza muestral**

Sean A y B dos activos cuyas respectivas rentabilidades (R_A y R_B) son variables aleatorias.

$$\sigma_{A,B} = \mathrm{Cov}(R_A, R_B) = E\left[(R_A - E(R_A))(R_B - E(R_B))\right]$$

Como estimador:

$$\hat{\sigma}_{A,B} = \frac{\sum_{t=1}^{N}(R_{A,t} - \overline{R}_A)(R_{B,t} - \overline{R}_B)}{N-1}$$

Covarianza

Es un número que solo da una idea del sentido de la relación entre los rendimientos de los dos activos (si es positiva es que operan en la misma dirección, si es negativa en direcciones distintas), pero no de la intensidad de la misma

Coeficiente de correlación

Se mueve entre -1 y 1, resuelve el problema anterior ya que proporciona una idea del grado de interrelación

$$\rho_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{\sigma_A \sigma_B}$$

ρ_{AB} = +1, correlación perfecta positiva.

ρ_{AB} = -1, correlación perfecta negativa.

ρ_{AB} = 0, variables independientes.

Ejemplo:

Estado Naturaleza	Probabilidad	R_1	R_2	R_3
1	0,1	0,25	0,25	0,10
2	0,4	0,20	0,15	0,15
3	0,4	0,15	0,20	0,20
4	0,1	0,10	0,10	0,25

$E(R_1)$=0,1.0,25+0,4.0,20+0,4.0,15+0,1.0,10=0,175

$E(R_2)$=0,175

$E(R_3)$=0,175

$\sigma^2_1=(0,25-0,175)^2.0,1+(0,20-0,175)^2.0,4+(0,15-0,175)^2.0,4+(0,1-0,175)^2.0,1=0,001625$

σ^2_2 = 0,001625

σ^2_3 = 0,001625

Cov(R_1,R_2)=$\sigma_{1,2}$=0,25-0,175)(0,25-0,175).0,1+(0,2-0,175)(0,15-0,175).0,4+(0,15-0,175)(0,2-0,175).0,4+(0,1-0,175)(0,1-0,175).0,1=6,25.10^{-4}.

Cov(R_1,R_3)=$\sigma_{1,3}$=-16,25.10^{-4}

Cov(R_2,R_3)=$\sigma_{2,3}$=-6,25.10^{-4}

$$\rho_{1,2} = \frac{6{,}25 \cdot 10^{-4}}{(0{,}04031)(=,04031)} = \frac{6{,}25.10^{-4}}{0{,}001625} 0{,}3846153$$

$\rho_{1,3}$=-1

$\rho_{2,3}$=-0,3846153

Con datos muestrales se tendría:

Momentos del tiempo	R_1	R_2	R_3
t=1	0,25	0,25	0,10
t=2	0,20	0,15	0,15
t=3	0,15	0,20	0,20
t=4	0,10	0,10	0,25

$$\overline{R}_1 = \frac{0{,}25 + 0{,}2 + 0{,}15 + 0{,}1}{4} = 0{,}175$$

$$\overline{R}_2 = 0{,}175$$

$$\overline{R}_3 = 0{,}175$$

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{(0{,}25-0{,}175)^2 + (0{,}2-0{,}175)^2 + (0{,}15-0{,}175)^2 + (0{,}1-0{,}175)^2}{4-1} =$$

$$= 0{,}002291667$$

$$\hat{\sigma}_2^2 = 0{,}002291667$$

$$\hat{\sigma}_3^2 = 0{,}002291667$$

$$\hat{\sigma}_{1,2} = \frac{(0{,}25-0{,}175)(0{,}25-0{,}175) + (0{,}2-0{,}175)(0{,}15-0{,}175) + (0{,}15-0{,}175)(0{,}2-0{,}175) + (0{,}1-0{,}175)(0{,}1-0{,}175)}{4-1} =$$

$$= 0{,}001458333$$

$$\hat{\sigma}_{1,3} = -0{,}00229167$$

$$\hat{\sigma}_{2,3} = -0{,}001458333$$

RENDIMIENTO Y RIESGO DE UNA CARTERA (Combinación de activos financieros)

¿Cómo se puede determinar el rendimiento de una cartera?

El rendimiento de una cartera, **p**, para un periodo, que está compuesta por dos activos **A y B.**

Si el inversor invierte la mitad de su riqueza en cada uno de los activos:

Suponemos que la riqueza es de 1.000.000 u.m., si al final del periodo el rendimiento del activo A ha sido R_A, y el del activo B ha sido R_B, el rendimiento de la cartera sería:

$$R_p = \frac{500.000 \cdot R_A + 500.000 \cdot R_B}{1000000}$$

$$R_p = 0{,}5 \cdot R_A + 0{,}5 \cdot R_B$$

0,5 es la proporción invertida en cada uno de los activos, luego generalizando y si se llama x_i a la proporción de la riqueza invertida en el activo i:

$$R_P = x_A \cdot R_A + x_B \cdot R_B$$

Si la cartera estuviese compuesta por n activos: $R_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot R_i$ donde $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

Rendimiento de una cartera para un periodo

Suma ponderada de los rendimientos de los activos que la componen (la ponderación es la proporción de la riqueza invertida en cada activo expresada en tanto por uno)

En el caso de dos activos:

$$\tilde{R}_p = x_A \cdot \tilde{R}_A + x_B \cdot \tilde{R}_B$$

Aplicando el operador esperanza:

$$E(\tilde{R}_p) = x_A \cdot E(\tilde{R}_A) + x_B \cdot E(\tilde{R}_B)$$

Aplicando el operador Varianza:

$$\sigma_p^2 = x_A^2 \cdot \sigma_A^2 + x_B^2 \cdot \sigma_B^2 + 2x_A x_B \sigma_{A,B}$$

Para n activos:

$$\tilde{R}_p = x_1 \cdot \tilde{R}_1 + x_2 \cdot \tilde{R}_2 + \cdots + x_n \cdot \tilde{R}_n$$

$$E(\tilde{R}_p) = x_1 \cdot E(\tilde{R}_1) + x_2 \cdot E(\tilde{R}_2) + \cdots + x_n \cdot E(\tilde{R}_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \tilde{R}_i$$

Como el rendimiento del activo financiero es una variable aleatoria, el rendimiento de la cartera también lo será, pues es una combinación lineal de variables aleatorias

Conclusión: Rendimiento de una cartera para un periodo

Es la suma ponderada de los rendimientos esperados de los activos que la componen, siendo la ponderación la proporción invertida de la riqueza inicial en cada activo

El riesgo total medido por la varianza (o su raíz cuadrada, la desviación típica):

$$\sigma_p^2 = x_1^2 \cdot \sigma_1^2 + x_2^2 \cdot \sigma_2^2 + \cdots + x_n^2 \cdot \sigma_n^2 + 2x_1x_2\sigma_{1,2} + 2x_1x_3\sigma_{1,3} + \cdots + 2x_{n-1}x_n\sigma_{n-1,n} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq 1}^{n} x_i \cdot x_j \sigma_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \cdot x_j \sigma_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \cdot x_j \rho_{i,j} \cdot \sigma_i \sigma_j$$

Observaciones

Si se invierte en n activos (i=1….n) el total de la inversión ha de ser el 100% de la riqueza luego: $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$

Si no se indica nada más de las variables x_i pueden ser positivos o negativos-

- Si son positivos significa que se están tomando posiciones largas en el activo (se está comprando)
- Si las son negativas se están tomando posiciones cortas en el activo , es decir se está vendiendo al descubierto

Conclusión

El riesgo de la cartera va a depender de la covarianza entre los activos que la componen

Dado que el riesgo de la cartera depende de la varianza de los activos que la componen que siempre son positivas y de la covarianza entre ellos, la gestión del riesgo de la cartera da importancia a las covarianzas entre los activos, ya que estas pueden ser también negativas

Una covarianza positiva entre los activos añade riesgo a la cartera

Dada una determinada varianza de los títulos

Una covarianza negativa reduce la varianza de toda la cartera

Si la cartera está formada por dos activos, cuando uno tiende a subir el otro tiende a bajar, los dos activos se están compensando entre sí.
Si ambos activos suben o bajan juntos no se están compensando y el riesgo de la cartera será más alto

<u>Conclusión</u>: **el efecto en el riesgo de una cartera de un activo individual no solo viene dado por su riesgo total (la varianza) sino también por la interrelación de este activo con el resto**

Ejemplo.

Sean tres activos financieros cuya esperanza y varianza son:

$$E(\tilde{R}_1) = 0{,}175 \quad \sigma_1^2 = 0{,}0403^2 \quad \sigma_{1,2} = 6{,}25 \cdot 10^{-4}$$

$$E(\tilde{R}_2) = 0{,}175 \quad \sigma_2^2 = 0{,}0403^2 \quad \sigma_{1,3} = -16{,}26 \cdot 10^{-4}$$

$$E(\tilde{R}_3) = 0{,}175 \quad \sigma_{31}^2 = 0{,}0403^2 \quad \sigma_{2,3} = -6{,}25 \cdot 10^{-4}$$

Como los rendimientos esperados de los tres activos son idénticos, el rendimiento esperado de cualquier cartera formada por cualquier proporción de los activos 1y 2, 1 y 3, 2 y 3 o 1, 2 y 3 es el mismo 0,175, por ejemplo:

$$E(\tilde{R}_{1,2}) = 0{,}5 \cdot 0{,}175 + 0{,}5 \cdot 0{,}175 = 0{,}175$$

Por contra si calculamos la varianza de la cartera, el riesgo dependerá de los dos activos que elija, ya que aunque el riesgo individual es el mismo también se ve afectado por la covarianza entre los activos:

$$\sigma_{1,2}^2 = 0{,}5^2 \cdot 0{,}0403^2 + 0{,}5^2 \cdot 0{,}0403^2 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 6{,}25 \cdot 10^{-4}$$
$$\sigma_{1,3}^2 = 0{,}5^2 \cdot 0{,}0403^2 + 0{,}5^2 \cdot 0{,}0403^2 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 16{,}26 \cdot 10^{-4}$$
$$\sigma_{2,3}^2 = 0{,}5^2 \cdot 0{,}0403^2 + 0{,}5^2 \cdot 0{,}0403^2 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot (-6{,}25 \cdot 10^{-4})$$

La combinación de activos que menor riesgo proporciona es la formada por los activos 2 y 3 que tienen covarianza negativa.

¿Qué aporta un activo individual al rendimiento y riesgo de una cartera?

Si observamos la expresión del rendimiento esperado:

$$E(\tilde{R}_p) = x_1 \cdot E(\tilde{R}_1) + x_2 \cdot E(\tilde{R}_2) + \cdots + x_j \cdot E(\tilde{R}_j) + \cdots + x_n \cdot E(\tilde{R}_n)$$

El activo j aportará a la rentabilidad de la cartera $x_j \cdot E(\tilde{R}_j)$.

Pero al riesgo de la cartera, si hacemos referencia al mismo como desviación típica, no aporta $x_j \cdot \sigma_j$, ya que el efecto en el riesgo de la cartera también depende de la relación entre el rendimiento del activo y el rendimiento del resto de activos que componen la cartera:

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \cdot x_j \cdot \sigma_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \left[\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \sigma_{i,j}\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i \left[x_1 \cdot \sigma_{i,1} + x_2 \cdot \sigma_{i,2} + \cdots + x_n \cdot \sigma_{i,n}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \left[\mathrm{Cov}(\tilde{R}_i, x_1\tilde{R}_1 + x_2\tilde{R}_2 + \cdots + x_n\tilde{R}_n)\right], \text{como } x_1\tilde{R}_1 + x_2\tilde{R}_2 + \cdots + x_n\tilde{R}_n = \tilde{R}_P$$

como $x_1\tilde{R}_1 + x_2\tilde{R}_2 + \cdots + x_n\tilde{R}_n = \tilde{R}_P$, entonces:

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \mathrm{Cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_P) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sigma_{iP}$$

<u>Conclusión</u>: La varianza de la cartera se puede expresar como suma ponderada de las covarianzas de los rendimientos de los activos con el rendimiento de la cartera, y la contribución al riesgo de la cartera de un activo i será:

$$x_i \cdot \sigma_{i,P}$$

(depende no del riesgo individual, sino de la relación del activo con el resto de activos que componen la cartera)

La desviación estándar de la cartera no viene dada como la media ponderada de las desviaciones típicas de los rendimientos de los activos individuales que la componen

Concepto de diversificación

Resulta interesante comparar esta suma ponderada con la desviación típica de la cartera, con el fin de analizar que ocurre al combinar activos financieros en carteras, si es que ocurre algo

Sean los activos A y B:

La media ponderada de las desviaciones típicas y su cuadrado viene dada por la expresión:

$$x_A \cdot \sigma_A + x_B \cdot \sigma_B \rightarrow x_A^2 \cdot \sigma_A^2 + x_B^2 \cdot \sigma_B^2 + 2x_A x_B \cdot \sigma_A \sigma_B$$

La desviación típica de la cartera y su cuadrado (la varianza) serán:

$$\sigma_P = \sqrt{x_A^2\sigma_A^2 + x_B^2\sigma_B^2 + 2x_A x_B \sigma_{A,B}} \rightarrow \sigma_P^2 = x_A^2\sigma_A^2 + x_B^2\sigma_B^2 + 2x_A$$

$$\sigma_P^2 = x_A^2\sigma_A^2 + x_B^2\sigma_B^2 + 2x_A x_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}$$

Si el coeficiente de correlación es igual a uno las expresiones son idénticas, en el caso contrario, la última expresión siempre es más pequeña.

Es decir la **desviación típica de una cartera de dos títulos siempre es más pequeña** (o como mucho igual), **que la media de las desviaciones típicas de los activos individuales.** Esto es debido al efecto de la diversificación (Disminución del riesgo combinando activos en carteras, es decir gestión del riesgo combinando de forma adecuada activos en carteras).

La teoría de carteras de Markowitz

<u>Cuestión a resolver</u>: **Dado un conjunto de activos financieros, ¿cuáles son las combinaciones óptimas de estos activos y cuál de ellas escoger a la hora de tomar la decisión de invertir?**

(el modelo de Markowitz[1] nos proporciona, a partir de determinadas hipótesis sobre el comportamiento del inversor y sobre los rendimientos de los activos, una solución al problema planteado)

Aportación de Markowitz

Calcularr de forma explícita el comportamiento racional del inversor, consistente en buscar la composición de cartera que maximice su rendimiento para un determinado nivel de riesgo, o que haga mínimo el riesgo de aquélla para un rendimiento dado

Problema planteado

Maximizar la función de utilidad de un individuo racional y adverso al riesgo, que desee invertir la totalidad de su presupuesto en los **n** activos arriesgados que se cotizan en bolsa

Hipótesis Fundamentales

<u>En relación al comportamiento del inversor</u>:

1.-El inversor toma sus decisiones en base a dos parámetros de **la función de distribución de la variable aleatoria rentabilidad, el valor medio y la varianza o desviación típica** (razón por la que denomina también modelo de dos dimensiones y modelo de decisión media-varianza.

2.-El **comportamiento** del inversor, se admite que es **racional** (prefiere más a menos), y adverso al riesgo. Por ello, su **función de utilidad**, que **se define**, única y exclusivamente, **en función de la esperanza y desviación típica de la rentabilidad** (debe recoger que prefiere las carteras de mayor rentabilidad y menor variabilidad o riesgo), es decir:

$$\frac{\partial U}{\partial \sigma^2} \leq 0; \frac{\partial U}{\partial E(\tilde{R})} \geq 0$$

3.-En cuanto a las **curvas de isoutilidad han de ser crecientes y cóncavas**:

$$\frac{dE(\tilde{R})}{d\sigma^2} \geq 0; \frac{dE(\tilde{R})^2}{d^2\sigma^2} \geq 0$$

4. Todos los inversores tiene un horizonte temporal que incluye un único periodo.

<u>En cuanto a los mercados y activos</u>:

1.- Los rendimientos de un activo financiero o cartera para un periodo de tiempo dado es una variable aleatoria, y su función de probabilidad para el período de referencia es conocida por el inversor.

Además se asume la hipótesis de que se distribuye según una normal (función de distribución simétrica y estable, aceptando así que la variable aleatoria rentabilidad del título o cartera, está perfectamente definida por los dos primeros momentos, es decir, la media y la varianza o desviación típica)

La esperanza matemática o media de dicha variable aleatoria se acepta como medida del rendimiento o rentabilidad de la inversión. La varianza o desviación típica se considera como medida del riesgo.

De este modo queda justificado el que los criterios de decisión se establezcan en base al valor medio y a la varianza de los rendimientos.

2.- En el mercado existen N activos arriesgados.

3.- Los mercados de capitales son perfectos

4.-Que todas las inversiones son perfectamente divisibles[1]

Objetivo del Modelo

Determinar la composición de la cartera que maximice la utilidad esperada del inversor (cartera óptima)

Etapas del Proceso

I Determinación del conjunto de posibilidades de inversión

II Determinación de la Frontera Eficiente (o conjunto eficiente)

III Especificación de las preferencias del inversor, esto equivale a determinar el mapa de curvas de isoutilidad

IV Determinación de la cartera óptima del inversor a partir de sus preferencias y del conjunto eficiente