

Carlos Ivorra Castillo

---

INTRODUCCIÓN A LA  
TEORÍA ANALÍTICA DE  
NÚMEROS

---



*Descontando los casos más sencillos, no hay una sola serie infinita en toda la matemática cuya suma haya sido determinada rigurosamente. En otras palabras, las partes más importantes de las matemáticas permanecen sin fundamentación.*

NIELS ABEL



# Índice General

<b>Preámbulo</b>	<b>vii</b>
<b>Resultados probados en este libro</b>	<b>xi</b>
<b>Introducción</b>	<b>xxvii</b>
<b>Capítulo I: Límites de sucesiones</b>	<b>1</b>
1.1 Los números reales y complejos . . . . .	1
1.2 Límites de sucesiones . . . . .	11
1.3 La completitud de $\mathbb{R}$ . . . . .	21
<b>Capítulo II: Series infinitas</b>	<b>29</b>
2.1 Convergencia de series infinitas . . . . .	29
2.2 Criterios de convergencia . . . . .	34
2.3 Convergencia absoluta . . . . .	40
2.4 Series de potencias . . . . .	50
<b>Capítulo III: Continuidad de funciones</b>	<b>55</b>
3.1 Funciones continuas . . . . .	56
3.2 Límites de funciones . . . . .	65
3.3 Propiedades de las funciones continuas . . . . .	74
3.4 Una aplicación . . . . .	80
<b>Capítulo IV: La función exponencial</b>	<b>87</b>
4.1 La función exponencial y el logaritmo . . . . .	88
4.2 Exponenciales de base positiva . . . . .	94
4.3 La constante de Euler-Mascheroni . . . . .	101
4.4 La serie de potencias del logaritmo . . . . .	107
<b>Capítulo V: Las funciones trigonométricas</b>	<b>113</b>
5.1 El seno y el coseno . . . . .	113
5.2 La tangente . . . . .	128
5.3 Funciones trigonométricas inversas . . . . .	134
5.4 Las funciones hiperbólicas . . . . .	137

<b>Capítulo VI: Las funciones elementales</b>	<b>139</b>
6.1 Logaritmos complejos . . . . .	139
6.2 La fórmula de Stirling . . . . .	144
6.3 La tangente y la cotangente . . . . .	148
6.4 Desarrollos en fracciones simples . . . . .	151
6.5 Los números de Bernoulli y de Euler . . . . .	158
<b>Capítulo VII: Aplicaciones a la distribución de los primos</b>	<b>165</b>
7.1 El postulado de Bertrand . . . . .	165
7.2 Orden de crecimiento . . . . .	168
7.3 Los teoremas de Mertens . . . . .	170
7.4 Convolución de funciones aritméticas . . . . .	176
7.5 Caracteres de Dirichlet . . . . .	181
7.6 El teorema de Dirichlet . . . . .	187
<b>Capítulo VIII: Productos infinitos y series de Dirichlet</b>	<b>199</b>
8.1 Productos infinitos . . . . .	199
8.2 La factorización del seno . . . . .	208
8.3 La función factorial . . . . .	212
8.4 Series de Dirichlet . . . . .	217
8.5 Productos de Euler . . . . .	226
8.6 Convergencia condicional . . . . .	230
8.7 Las funciones L de Dirichlet . . . . .	235
<b>Capítulo IX: Fracciones continuas</b>	<b>249</b>
9.1 Fracciones continuas y convergentes . . . . .	249
9.2 La fórmula de Euler . . . . .	253
9.3 Otros desarrollos de $\pi$ . . . . .	258
9.4 La irracionalidad de $\pi$ . . . . .	263
<b>Capítulo X: Números trascendentes</b>	<b>275</b>
10.1 Aproximaciones diofánticas . . . . .	275
10.2 La trascendencia de e . . . . .	277
10.3 La trascendencia de $\pi$ . . . . .	281
<b>Capítulo XI: La función <math>\zeta</math> de Dedekind</b>	<b>285</b>
11.1 La convergencia de la función $\zeta$ . . . . .	288
11.2 El producto de Euler . . . . .	302
11.3 El número de clases de un cuerpo cuadrático . . . . .	303
<b>Apéndice A: El área de una figura plana</b>	<b>309</b>
A.1 El problema de la medida . . . . .	309
A.2 Figuras elementales . . . . .	311
A.3 La medida de Jordan . . . . .	320
A.4 Criterios de medibilidad . . . . .	323
<b>Índice de Materias</b>	<b>333</b>

# Preámbulo

Este libro comparte el objetivo de mi *Introducción a la teoría algebraica de números* (en adelante [ITa]) de tratar de facilitar el acceso a la teoría de números a personas interesadas en ella que no tengan necesariamente una sólida base matemática. Quienes se interesan por la teoría de números debido a que la simplicidad de sus resultados puede ser entendida sin necesidad de apenas conocimientos previos suelen tratar exclusivamente con teoría algebraica de números, pues ésta se presta más tanto a la experimentación empírica, es decir, a realizar cálculos concretos que permiten conjeturar resultados generales más o menos fácilmente, como a los razonamientos elementales basados en manipulaciones algebraicas. En cambio, los resultados de la teoría analítica de números se prestan menos a la experimentación directa (no porque no sea menos “empírica”, sino porque para experimentar a menudo hacen falta cálculos más laboriosos que resultan tediosos sin la ayuda de un ordenador con *software* adecuado) y además requieren cierta madurez matemática para “insertar” en ellos los límites, las derivadas, las integrales, etc.

Por ello, dado que adentrarse en la teoría analítica de números requiere algunos principios matemáticos básicos con los que un lector potencial de este libro puede no estar familiarizado, aquí hemos seguido una política opuesta a la seguida en [ITa]. Allí hemos procurado aprovechar el bagaje elemental que suponemos en el lector para ir ilustrando conceptos y resultados cada vez más abstractos, sin perder de vista nunca sus aplicaciones concretas. Aquí en cambio, hemos procurado reducir al mínimo en todo momento la teoría necesaria, hasta el punto de que hubiera sido más apropiado titular a este libro *“Introducción a la teoría topológica de números”*, ya que en él no usamos para nada el cálculo diferencial, sino únicamente los conceptos de límite y continuidad.

Los únicos requisitos matemáticos que supondremos en el lector son una cierta familiaridad con las manipulaciones algebraicas con números reales y polinomios (para lo cual remitimos al capítulo I de [ITa]) y en algunas ocasiones con la aritmética elemental de los números enteros (las propiedades de los números primos y congruencias), que se cubren sobradamente con los capítulos II y III de [ITa]. En alguna ocasión haremos referencia a mi *Introducción a la geometría euclídea* [IGE] para añadir más información sobre un tema o indicar un punto de vista alternativo, pero ningún resultado de dicho libro será necesario aquí.

Habitualmente, la mayor parte de los resultados que demostraremos en este libro se prueban usando el cálculo diferencial (derivadas e integrales), y en ocasiones incluso el cálculo diferencial de funciones de variable compleja, que es una teoría mucho más potente que el cálculo diferencial de funciones de variable real. Sin embargo, la teoría que emplearemos aquí se reduce a:

1. Resultados básicos sobre números reales y complejos (secciones 1.1 y 1.3).
2. Los resultados básicos sobre la convergencia de sucesiones (sección 1.2).
3. Resultados sobre series y productos infinitos (capítulo II y sección 8.1).
4. Algunos resultados básicos sobre funciones continuas (capítulo III).

Una lista detallada de los resultados teóricos que usaremos se encuentra justo a continuación de este preámbulo. Además de los cuatro bloques que hemos mencionado, el lector encontrará también resultados sobre series de Dirichlet y fracciones continuas, pero es más razonable contarlos entre las aplicaciones teóricas que entre la teoría requerida. Además hemos incluido un apéndice más técnico sobre la medida de Jordan porque ocasionalmente aludiremos al concepto geométrico de área, y no hemos querido usar el concepto sin determinarlo con precisión, pero el lector dispuesto a aceptar las propiedades intuitivamente evidentes de la noción de área no necesitará consultar el apéndice.

Para algunas aplicaciones específicas necesitaremos resultados de [ITAl]. Reproducimos aquí la tabla que muestra un posible orden de lectura simultánea de ambos libros:

[ITAl]	[ITAn]
<b>I</b> Álgebra básica	<b>I</b> Sucesiones
<b>II</b> Aritmética básica	<b>II</b> Series infinitas
<b>III</b> Congruencias	<b>III</b> Continuidad
<b>IV</b> Enteros de Gauss	<b>IV</b> La función exponencial
<b>V</b> Símbolo de Legendre	<b>V</b> Funciones trigonométricas
<b>VI</b> Enteros de Eisenstein	<b>VI</b> Funciones elementales
<b>VII</b> Reciprocidad cuadrática	<b>VII</b> La distribución de los primos
<b>VIII</b> Enteros algebraicos	<b>VIII</b> Series de Dirichlet
<b>IX</b> Cuerpos cuadráticos	<b>IX</b> Fracciones continuas
<b>X</b> Fracciones continuas	<b>X</b> Números trascendentes
<b>XI</b> Formas cuadráticas	<b>XI</b> La función $\zeta$ de Dedekind
<b>XII</b> Módulos	<b>A</b> La medida de Jordan
<b>XIII</b> Aritmética ideal	
<b>XIV</b> Géneros	
<b>XV</b> Reciprocidad cúbica	
<b>XVI</b> Reciprocidad bicuadrática	
<b>XVII</b> Enteros ciclotómicos	

Junto a la lista de los (pocos) resultados teóricos que vamos a probar, el lector encontrará también la lista de todas las aplicaciones que vamos a obtener

a partir de ellos y que pueden enunciarse sin recurrir a conceptos analíticos más sofisticados que el de límite o a conceptos algebraicos que no vayan más allá del concepto de congruencia o de polinomio (con esto incluimos, por ejemplo, el concepto de “número trascendente”, pues demostraremos la trascendencia de  $e$  y de  $\pi$ ).

El último capítulo es mucho más profundo y sofisticado que los anteriores, pues en él combinaremos las técnicas analíticas que vamos a exponer con las técnicas algebraicas expuestas principalmente en los capítulos XI–XIII de [ITA].



# Resultados demostrados en este libro

Enumeramos aquí, en primer lugar, los resultados teóricos demostrados en este libro y, a continuación, las aplicaciones obtenidas a partir de ellos.

## Resultados teóricos

### 1. Sucesiones:

- (a) **Teorema 1.3** *Toda sucesión convergente está acotada.*
- (b) **Teorema 1.4** *Propiedades algebraicas de los límites de sucesiones.*
- (c) **Teorema 1.6** *El producto de una sucesión que tiende a 0 por una acotada tiende a 0.*
- (d) **Teorema 1.11** *Los límites conservan desigualdades no estrictas.*
- (e) **Teorema 1.12** *Criterio del emparejado.*
- (f) **Teorema 1.13** *Una sucesión de números complejos converge si y sólo si lo hacen las sucesiones de partes reales e imaginarias.*
- (g) **Teorema 1.16** *Convergencia de sucesiones monótonas.*
- (h) **Teorema 1.20** *Una sucesión de números complejos es convergente si y sólo si es de Cauchy.*
- (i) **Teorema 1.21** *Si una sucesión de Cauchy contiene una subsucesión convergente, entonces la sucesión completa converge al mismo límite.*
- (j) **Teorema 1.22** *Toda sucesión de Cauchy está acotada.*
- (k) **Teorema 1.23** *Toda sucesión en un conjunto totalmente ordenado contiene una subsucesión monótona.*
- (l) **Teorema 1.24** *Teorema de Bolzano-Weierstrass.*

### 2. Series infinitas:

- (a) **Teorema 2.2** *Propiedades algebraicas de las series infinitas.*
- (b) **Teorema 2.7** *Si una serie converge, su término general tiende a 0.*

- (c) **Teorema 2.15** Condición de Cauchy para series.
  - (d) **Teorema 2.9** Criterio de Leibniz de convergencia de series.
  - (e) **Teorema 2.10** Criterio de comparación sobre convergencia de series.
  - (f) **Teorema 2.12** Criterio de D'Alembert sobre convergencia de series.
  - (g) **Teorema 2.14** Criterio de condensación de Cauchy sobre convergencia de series.
  - (h) **Teorema 2.17** Toda serie absolutamente convergente es convergente.
  - (i) **Teorema 2.19** Convergencia del producto de series de Cauchy.
  - (j) **Teorema 2.25** Reordenación de series absolutamente convergentes.
  - (k) **Teorema 2.27** Intercambio del orden de dos sumatorios.
  - (l) **Teorema 2.29** Asociatividad infinita de las series absolutamente convergentes.
  - (m) **Teorema 2.30** Convergencia de series de potencias.
3. Continuidad:
- (a) **Teorema 3.2** Caracterización sucesional de la continuidad.
  - (b) **Teorema 3.3** Propiedades algebraicas de las funciones continuas.
  - (c) **Teorema 3.5** Carácter local de la continuidad.
  - (d) **Teorema 3.7** Criterio de mayoración de Weierstrass.
  - (e) **Teorema 3.8** Continuidad de las funciones definidas por series de potencias.
  - (f) **Teorema 3.21** Teorema de Abel sobre convergencia de series de potencias en la frontera de su disco de convergencia.
  - (g) **Teorema 3.23** Teorema de Bolzano.
  - (h) **Teorema 3.24** Teorema de los valores intermedios.
  - (i) **Teorema 3.28** Continuidad de la inversa de una función creciente.
  - (j) **Teorema 3.31** Teorema de Weierstrass
4. Límites de funciones:
- (a) **Teorema 3.13** Caracterización sucesional de los límites de funciones.
  - (b) **Teorema 3.14** Caracterización de la continuidad por límites de funciones.
  - (c) **Teorema 3.16** Propiedades algebraicas de los límites de funciones.
  - (d) **Teorema 3.19** Carácter local del límite de una función.
  - (e) **Teorema 3.20** Caracterización del límite de una función por límites laterales.

## 5. Productos infinitos:

- (a) **Teorema 8.2** Si un producto infinito converge, su término general tiende a 1.
- (b) **Teorema 8.3** Un producto  $\prod_{n=0}^{\infty} x_n$  con factores no nulos es convergente si y sólo si lo es la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \log x_n$ , y en tal caso ésta converge a un logaritmo del producto.
- (c) **Teorema 8.5** Un producto  $\prod_{n=0}^{\infty} (1+x_n)$  es absolutamente convergente si y sólo si lo es la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ .
- (d) **Teorema 8.6** Dadas sucesiones  $\{z_n(m)\}_{m=0}^{\infty}$  de números complejos tales que  $\lim_m z_n(m) = z_n$  y existen números reales  $M_n$  de modo que  $|z_n(m)| \leq M_n$  para todo  $m$  y  $\sum_{n=0}^{\infty} M_n < +\infty$ . Entonces

$$\lim_m \prod_{n=0}^m (1+z_n(m)) = \prod_{n=0}^{\infty} (1+z_n).$$

- (e) **Teorema 8.7** Si una serie  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  es convergente y la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n^2$  es absolutamente convergente, entonces el producto  $\prod_{n=0}^{\infty} (1+z_n)$  es convergente.
- (f) **Teorema 8.9** Dadas funciones continuas  $f_n : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  y una sucesión  $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$  de números reales tal que  $|f_n(z)| \leq M_n$  para todo  $z \in D$  y de modo que la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$  es convergente, entonces el producto  $\prod_{n=0}^{\infty} (1+f_n(z))$  es absolutamente convergente y la función  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(z) = \prod_{n=0}^{\infty} (1+f_n(z))$  es continua.

## 6. Series de Dirichlet

- (a) **Teorema 8.19** Convergencia absoluta de series de Dirichlet
- (b) **Teorema 8.21** Si  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$  es una función definida por una serie de Dirichlet, entonces  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a_1$ .
- (c) **Teorema 8.22** La suma de una serie de Dirichlet determina sus coeficientes.
- (d) **Teorema 8.23** El producto de las series de Dirichlet definidas por dos funciones aritméticas es la serie definida por el producto de convolución de éstas.
- (e) **Teorema 8.25** Desarrollo en producto de Euler
- (f) **Teorema 8.27** Logaritmo de una serie de Dirichlet

- (g) **Teorema 8.29** Convergencia condicional de series de Dirichlet  
 (h) **Teorema 8.40** Sea  $f(n)$  una función aritmética completamente multiplicativa tal que  $|f(n)| \leq 1$  para todo  $n$  y supongamos que las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n}, \quad \sum_p \frac{f(p)}{p}$$

son convergentes. Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^x} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{f(p)}{p^x}} \quad \text{para } x \geq 1.$$

7. Fracciones continuas:

- (a) **Teorema 9.3** Relaciones recurrentes entre los convergentes  
 (b) **Teorema 9.6** Transformación de fracciones continuas  
 (c) **Teorema 9.7** Fórmula de Euler  
 (d) **Teorema 9.12** Fórmula para series alternadas  
 (e) **Teorema 9.14** Fórmula para productos infinitos

8. Otros:

- (a) **Teorema 1.15** Existencia de supremo e ínfimo  
 (b) **Teorema 2.32** Fórmula de suma por partes

A estos resultados hay que añadir la construcción de la medida de Jordan en el apéndice A.

### Aplicaciones teóricas

1. **Teorema 2.23** El número  $e$  es irracional.
2. **Teorema 3.25** Todo polinomio de grado impar con coeficientes reales tiene al menos una raíz en  $\mathbb{R}$ .
3. **Teorema 3.26** Existencia de raíces  $n$ -simas en  $\mathbb{R}$ .
4. **Teorema 3.33** Teorema fundamental del álgebra
5. **Teorema 5.9** Si  $r$  es un número racional tal que  $0 < r\pi < \pi/2$  y  $\cos r\pi$  es un número racional, entonces  $r = 1/3$  y

$$\cos r\pi = \cos(\pi/3) = 1/2.$$

6. **Teorema 4.10** Desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica
7. **Teorema 7.1** Postulado de Bertrand

8. **Teorema 7.24** Teorema de Dirichlet sobre primos en progresiones aritméticas
9. **Teorema 9.17**  $\pi$  es irracional.
10. **Teorema 9.18** Si  $x \neq 0$  es un número racional, entonces  $\tan x$  es irracional.
11. **Teorema 9.19** Si  $x \neq 0$  es racional, entonces  $e^x$  es irracional.
12. **Teorema 9.20** Si  $x > 0$ ,  $x \neq 1$  es racional, entonces  $\log x$  es irracional.
13. **Teorema 10.3** La constante de Liouville

$$L = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} = 0.11000100000000000000001000 \dots$$

es trascendente.

14. **Teorema 10.7** El número  $e$  es trascendente.
15. **Teorema 10.9** El número  $\pi$  es trascendente.

A estos resultados hay que añadir los teoremas del capítulo XI sobre la convergencia de la función  $\zeta$  de Dedekind de un cuerpo cuadrático y su desarrollo en producto de Euler, junto con las fórmulas para el número de clases de los cuerpos cuadráticos deducidas a partir de ellos.

### Aplicaciones diversas

1. Sumas de potencias:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + k &= \frac{k(k+1)}{2}, \\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}, \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 &= \frac{k^2(k+1)^2}{4}, \\ 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + k^4 &= \frac{k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1)}{30}. \end{aligned}$$

162

2.  $(10^{100})!$  tiene exactamente

995 657 055 180 967 481 723 488 710 810 833 949 177 056 029 941 963 334

338 855 462 168 341 353 507 911 292 252 707 750 506 615 682 568

cifras decimales, las primeras de las cuales son

147

1 629 404 332 459 337 373 ...

3. La probabilidad de que dos números naturales elegidos al azar sean primos entre sí es  $6/\pi^2$ . 224
4. Los números  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$  no son enteros, para  $n > 1$ . 168
5. Sea  $p \equiv -1$  (mód 4) un número primo y sean  $R$  y  $N$ , respectivamente, el número de restos cuadráticos y no cuadráticos módulo  $p$  comprendidos entre 1 y  $p/2$ . Entonces  $R > N$ . 307

### Longitudes y áreas

6. La longitud de una circunferencia de radio  $r$  es  $2\pi r$ . 122
7. El área de un círculo de radio  $r$  es  $\pi r^2$ . 132
8. El área de una elipse de semiejes  $a$  y  $b$  es  $\pi ab$ . 133
9. El área del sector hiperbólico limitado por la hipérbola  $xy = r$  y comprendido entre los puntos  $(x, r/x)$  e  $(y, r/y)$  es  $r|\log(y/x)|$ . 98

### Límites de sucesiones

10.  $e = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  24
11.  $e^x = \lim_n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$  93
12. Si  $k > 0$  es un número real, la sucesión dada por
 
$$a_0 = k, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{k}{a_n}\right)$$
 cumple  $\lim_n a_n = \sqrt{k}$ . 25
13.  $\lim_n (1/n)^{1/n} = 1$  95
14.  $\lim_n n^{1/n} = 1$  95
15.  $\lim_n (1/n)^{1/\log n} = 1/e$  95
16.  $\lim_n n^{1/\log n} = e$  95
17.  $\lim_n n(\sqrt[n]{x} - 1) = \log x$  97
18.  $\gamma = \lim_n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right)$  101

19. Si  $p_1 = 3$ ,  $P_1 = 2\sqrt{3}$  y

$$P_{k+1} = \frac{2p_k P_k}{p_k + P_k}, \quad p_{k+1} = \sqrt{P_{k+1} p_k},$$

entonces  $p_k < \pi < P_k$  y  $\lim_k p_k = \lim_k P_k = \pi$ .

20.  $\lim_n \frac{2^{4n+1}(n!)^4}{((2n)!)^2(2n+1)} = \pi$  210

21.  $\sqrt{2\pi n}(n/e)^n < n! < \sqrt{2\pi n}(n/e)^n e^{1/12n}$ . En particular, 147

$$\lim_n \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n} = 1.$$

### Sumas de series

22.  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots = 1$  33

23.  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = +\infty$  35

24.  $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$  38

25.  $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots = \frac{1}{e}$  43

26.  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2$  104, 111

27.  $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} \dots = \frac{3}{2} \log 2$  45

28.  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots = \log 2$  104

29.  $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots = 1 - \log 2 = \log \frac{e}{2}$  104

30.  $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$  135, 160

31.  $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90}$  160

32.  $\frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \dots = \frac{\pi^6}{945}$  160

33.  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$  142, 163

34.  $\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots = \frac{\pi^3}{32}$  163

$$35. \frac{1}{1^5} - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \dots = \frac{5\pi^5}{1536} \quad 163$$

$$36. \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12} \quad 220$$

$$37. \frac{1}{1^4} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \dots = \frac{7\pi^4}{720} \quad 220$$

$$38. \pi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left( \frac{1}{2^{2n+1}} + \frac{1}{3^{2n+1}} \right) \quad 150$$

$$39. \pi = 16 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)5^{2n+1}} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)239^{2n+1}} \quad 150$$

$$40. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \dots = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \quad 153$$

$$41. 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \dots = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \quad 154$$

$$42. \frac{1}{1} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \dots = \frac{\log(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}. \quad 240$$

$$43. \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{5k+1} - \frac{1}{5k+4} \right) = \frac{(\sqrt{5-\sqrt{5}} + 3\sqrt{5+\sqrt{5}})\pi}{25\sqrt{2}}. \quad 241$$

$$44. \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{5k+2} - \frac{1}{5k+3} \right) = \frac{(3\sqrt{10-2\sqrt{5}} - \sqrt{10+2\sqrt{5}})\pi}{50} \quad 241$$

$$45. \frac{1}{1^{2k}} + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \dots = (-1)^{k+1} \frac{2^{2k-1} \pi^{2k} B_{2k}}{(2k)!} \quad 155$$

$$46. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\log(2 \operatorname{sen}(x/2)), \quad 0 < x < 2\pi \quad 143$$

$$47. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < 2\pi \quad 143$$

### Series de potencias

$$48. z^k + z^{k+1} + z^{k+2} + \dots = \frac{z^k}{1-z} \quad (|z| < 1) \quad 32$$

$$49. z + 2z^2 + 3z^3 + \dots = \frac{z}{(1-z)^2} \quad (|z| < 1) \quad 32$$

$$50. z + 4z^2 + 9z^3 + 16z^4 + \dots = \frac{z(z+1)}{(1-z)^3} \quad (|z| < 1) \quad 43$$

51.  $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$  88
52.  $\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$  ( $|x| \leq 1, x \neq -1$ ) 111
53.  $\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$  ( $|x| < 1$ ) 143
54.  $\text{sen } x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$  114
55.  $\text{cos } x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$  114
56.  $\arctan x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$  ( $|x| < 1$ ) 149
57.  $\text{senh } x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots$  138
58.  $\text{cosh } x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots$  138
59.  $\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$  ( $|x| < 2\pi$ ) 155
60.  $\frac{1}{\cosh x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} x^n$  ( $|x| < \pi/2$ ) 157
61.  $\frac{1}{\text{sen } x} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (2^{2k} - 2) B_{2k}}{(2k)!} x^{2k}$  ( $|x| < \pi/4$ ) 158
62.  $\frac{1}{\text{cos } x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k E_{2k}}{(2k)!} x^{2k}$  ( $|x| < \pi/2$ ) 158
63.  $\tan x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2^{2k} (2^{2k} - 1) B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1}$  ( $|x| < \pi/2$ ) 158
64.  $\cot x = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} x^{2k}$ , ( $|x| < \pi$ ) 158

### Límites de funciones

65.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$  89
66.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$  92

$$67. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x} = 0 \quad 92$$

$$68. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \quad 118$$

$$69. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = 1 \quad 96$$

$$70. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} = 0 \quad 118$$

### Sumas de fracciones simples

$$71. \pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z+2} + \dots \quad 151$$

$$72. \frac{\pi}{2} \tan \frac{\pi z}{2} = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} + \frac{1}{3-z} + \frac{1}{3+z} + \dots \quad 152$$

$$73. \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+2} - \dots \quad 152$$

$$74. \frac{\pi}{\cos \pi z} = -\frac{1}{1/2-z} + \frac{1}{1/2+z} + \frac{1}{3/2-z} - \frac{1}{3/2+z} - \dots \quad 153$$

### Orden de crecimiento

$$75. \sum_{k \leq x} \frac{1}{k} = \log x + \gamma + O(1/x) \quad 103$$

$$76. \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{n \log n} = \log \log x + c + O(1/x) \quad 105$$

$$77. \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{x} + O(1/x^2) \quad 169$$

$$78. \sum_p \frac{\log p}{p} = \log x + O(1) \quad 170$$

$$79. \log E[x]! = x \log x - x + O(\log x) \quad 172$$

$$80. \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log \log x + M + O\left(\frac{1}{\log x}\right) \quad 174$$

$$81. \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{6}{\pi^2} + O(1/x) \quad 225$$

$$82. \sum_{n \leq x} \phi(n) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + O(x \log x) \quad 225$$

**Productos infinitos**

83.  $\frac{e}{\sqrt{e}} \cdot \frac{\sqrt[3]{e}}{\sqrt[4]{e}} \cdot \frac{\sqrt[5]{e}}{\sqrt[6]{e}} \cdot \frac{\sqrt[7]{e}}{\sqrt[8]{e}} \cdots = 2$  104
84.  $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$  201
85.  $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}$  210
86.  $e = \frac{2}{1} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{65}{64} \cdot \frac{326}{325} \cdot \frac{1957}{1956} \cdots$   
 (los denominadores son  $e_1 = 1$ ,  $e_{n+1} = (n+1)(e_n + 1)$ ). 202
87.  $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = 1$  202
88.  $\operatorname{sen} x = x \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \cdots$  208
89.  $\cos x = \left(1 - \frac{x}{\pi/2}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi/2}\right) \left(1 - \frac{x}{3\pi/2}\right) \left(1 + \frac{x}{3\pi/2}\right) \cdots$  211
90.  $\operatorname{senh} x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$  212
91.  $\operatorname{cosh} x = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right)$  212
92.  $\Pi(z) = \lim_n \frac{n! n^z}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} = e^{-\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} e^{z/k}$  215
93.  $\Pi(z)\Pi(-z) = \frac{\pi z}{\operatorname{sen} \pi z}$  216
94.  $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots$  210
95.  $\sqrt{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{11} \cdots$  212
96.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^x}} \quad (x > 1)$  227
97.  $\frac{2^2}{2^2-1} \cdot \frac{3^2}{3^2-1} \cdot \frac{5^2}{5^2-1} \cdot \frac{7^2}{7^2-1} \cdot \frac{11^2}{11^2-1} \cdots = \frac{\pi^2}{6}$  228
98.  $\frac{2^4}{2^4-1} \cdot \frac{3^4}{3^4-1} \cdot \frac{5^4}{5^4-1} \cdot \frac{7^4}{7^4-1} \cdot \frac{11^4}{11^4-1} \cdots = \frac{\pi^4}{90}$  228

$$99. \frac{2^2}{2^2+1} \cdot \frac{3^2}{3^2+1} \cdot \frac{5^2}{5^2+1} \cdot \frac{7^2}{7^2+1} \cdot \frac{11^2}{11^2+1} \cdots = \frac{\pi^2}{15} \quad 228$$

$$100. \frac{2^2+1}{2^2-1} \cdot \frac{3^2+1}{3^2-1} \cdot \frac{5^2+1}{5^2-1} \cdot \frac{7^2+1}{7^2-1} \cdot \frac{11^2+1}{11^2-1} \cdots = \frac{5}{2} \quad 228$$

$$101. \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdots = \frac{\pi}{4}$$

(Los numeradores son los números primos impares y cada denominador es el múltiplo de 4 anterior o posterior al numerador.) 242

$$102. \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdots = \frac{\pi}{2}$$

(Los numeradores son los números primos impares y cada denominador es el anterior o posterior al numerador que no es múltiplo de 4.) 243

$$103. \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdots = 2$$

(Cada factor se obtiene de un primo impar  $p$  considerando  $(p \pm 1)/2$ , tomando el número par como numerador y el impar como denominador.)

243

### Series de Dirichlet

$$104. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} \cdots = \frac{6}{\pi^2} \quad 223$$

$$105. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{4^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{4}{6^2} + \frac{2}{7^2} + \frac{4}{8^2} + \cdots = \frac{\pi^4}{36} \quad 223$$

$$106. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{15} \quad 224$$

$$107. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} + \cdots = \frac{15}{\pi^2} \quad 224$$

### Fracciones continuas

$$108. e = 2 + \frac{2}{2 + \frac{3}{3 + \frac{4}{4 + \frac{5}{5 + \cdots}}}} \quad 256$$

$$109. e = 1 + \frac{1}{0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \ddots}}}}}} \quad 273$$

$$110. \log 2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \ddots}}}} \quad 257$$

$$111. \pi = \frac{4}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ddots}}}} \quad 257$$

$$112. \frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ddots}}}} \quad 257$$

$$113. \pi = 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{6 + \frac{1}{6 + \frac{1}{6 + \ddots}}}} \quad 260$$

$$114. \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \ddots}}}}} \quad 263$$

$$115. e^z = \frac{1}{1 - \frac{z}{1 + z - \frac{z}{2 + z - \frac{2z}{3 + z - \frac{3z}{4 + z - \ddots}}}}} \quad 255$$

$$116. \log(1 + z) = \frac{z}{1 + \frac{z^2}{2 - z + \frac{z^2}{3 - 2z + \frac{z^2}{4 - 3z + \ddots}}}} \quad 256$$

$$117. \arctan z = \frac{z}{1 + \frac{z^2}{3 - z^2 + \frac{z^2}{5 - 3z^2 + \frac{z^2}{7 - 5z^2 + \ddots}}}} \quad 257$$

$$118. \operatorname{sen} z = \frac{z}{1 + \frac{z^2}{2 \cdot 3 - z^2 + \frac{z^2}{4 \cdot 5 - z^2 + \frac{z^2}{6 \cdot 7 - z^2 + \ddots}}}} \quad 258$$

$$119. \frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi z} = 1 - \frac{z}{1 + \frac{z}{z + \frac{1(1+z)}{1 - z + \frac{2(2-z)}{z + \frac{2(2+z)}{1 - z + \frac{3(3-z)}{z + \frac{3(3+z)}{1 - z + \ddots}}}}}} \quad 263$$

$$120. \cos z = \frac{1}{1 + \frac{z^2}{1 \cdot 2 - z^2 + \frac{z^2}{3 \cdot 4 - z^2 + \frac{z^2}{5 \cdot 6 - z^2 + \ddots}}}} \quad 257$$

$$121. \tan z = \frac{z}{1 - \frac{z^2}{3 - \frac{z^2}{5 - \frac{z^2}{7 - \ddots}}}} \quad 270$$

$$122. \tanh z = \frac{z}{1 + \frac{z^2}{3 + \frac{z^2}{5 + \frac{z^2}{7 + \ddots}}}} \quad 271$$



# Introducción

En el siglo V a.C., Zenón de Elea planteó sus famosas paradojas, entre las que figura la de Aquiles y la tortuga:

*El corredor Aquiles nunca podrá alcanzar a una tortuga que corra delante de él, pues para ello tendría que llegar al punto en el que se encontraba la tortuga en el momento en que Aquiles empezó a correr, pero cuando llegue hasta allí, la tortuga habrá avanzado una distancia que a su vez Aquiles tendría que recorrer, pero cuando lo haga, la tortuga ya no estará allí, sino que habrá avanzado una distancia que a su vez Aquiles tendría que recorrer, y así ad infinitum.*

Vamos a analizar matemáticamente el argumento. Puesto que la paradoja no depende de las velocidades a las que corran Aquiles y la tortuga, ni de la distancia inicial que los separa (con tal de que sea no nula), por simplificar los cálculos vamos a suponer que Aquiles corre al doble de velocidad que la tortuga, y que necesita una unidad de tiempo para recorrer la distancia inicial que los separa.

Más precisamente, estamos suponiendo que Aquiles y la tortuga están separados por una distancia  $e_0 = 1$ , que Aquiles se mueve a velocidad 1 y la tortuga a velocidad  $1/2$ .

Es claro entonces que, al cabo de un instante  $t$ , Aquiles habrá recorrido una distancia  $e(t) = t$ , mientras que la tortuga se encontrará a una distancia  $e^*(t) = 1 + t/2$  de la posición inicial de Aquiles y éste la alcanzará cuando  $t = 1 + t/2$ , lo cual equivale a que  $t = 2$ , es decir, que la carrera terminará al cabo de 2 unidades de tiempo, cuando Aquiles habrá recorrido una distancia de 2 unidades y la tortuga 1 unidad.

Pero no se trata de determinar cuándo Aquiles alcanzará a la tortuga, sino de explicar por qué el razonamiento de Zenón es incorrecto, de modo que no hay realmente ninguna paradoja, sino únicamente un razonamiento correcto frente a otro incorrecto.

Para ello, siguiendo el planteamiento de Zenón, observamos que Aquiles recorrerá el espacio  $e_0 = 1$  en un tiempo  $t_0 = 1$ , y para entonces la tortuga habrá recorrido una distancia  $e_1 = 1/2$ . Aquiles necesita un tiempo  $t_1 = 1/2$  para recorrer la distancia  $e_1$ , y cuando lo haya hecho, la tortuga habrá avanzado una distancia  $e_2 = 1/4$ .

En general, para alcanzar a la tortuga, Aquiles deberá recorrer infinitos tramos de longitud

$$e_0 = 1, \quad e_1 = \frac{1}{2}, \quad e_2 = \frac{1}{4}, \quad e_3 = \frac{1}{8}, \quad \dots$$

para lo cual requerirá, respectivamente

$$t_0 = 1, \quad t_1 = \frac{1}{2}, \quad t_2 = \frac{1}{4}, \quad t_3 = \frac{1}{8}, \quad \dots$$

unidades de tiempo. Por lo tanto, para recorrer la distancia

$$E_n = e_0 + e_1 + \dots + e_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

necesitará un tiempo

$$T_n = t_0 + t_1 + \dots + t_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

Ahora recordamos la fórmula:

$$x^{n+1} - 1 = (x - 1)(1 + x + \dots + x^n),$$

que es fácil de comprobar. Despejando obtenemos que, si  $x \neq 1$ , se cumple que

$$1 + x + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Aplicando esto a  $x = 1/2$  obtenemos que

$$E_n = T_n = \frac{1 - 1/2^{n+1}}{1 - 1/2} = 2 - \frac{1}{2^n} < 2.$$

Vemos así que el tiempo necesario para recorrer las  $n$  distancias sucesivas

$$e_0 + e_1 + e_2 + \dots + e_n$$

es siempre inferior a 2 unidades. Más aún, podemos afirmar que Aquiles no alcanzará a la tortuga antes de 2 unidades de tiempo, pues si  $0 < T < 2$  es cualquier instante anterior a 2, siempre podemos encontrar un número natural  $n$  tal que

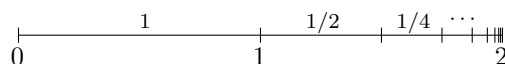
$$\frac{1}{2 - T} < n \leq 2^n,$$

lo que equivale a que

$$T < 2 - \frac{1}{2^n},$$

es decir, a que  $T < T_n < 2$ . En otras palabras, al cabo de un instante  $T < 2$ , seguro que Aquiles todavía no ha recorrido el  $n$ -simo tramo que tiene que recorrer para alcanzar a la tortuga, luego aún no la ha alcanzado.

Geoméricamente la situación es la que ilustra esta figura:



Si en una recta graduada coloreamos todos los puntos positivos anteriores a 1, y los anteriores a  $1 + 1/2$  y a  $1 + 1/2 + 1/4$ , etc., habremos coloreado todos los puntos entre 0 y 2, pero no el 2.

Los matemáticos expresan esto así:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 2.$$

Al ir sumando los infinitos términos de la suma, vamos rebasando todos los números anteriores a 2, pero no el 2. Zenón puede descomponer si quiere el tiempo que necesita Aquiles para alcanzar a la tortuga en infinitos lapsos de tiempo, pero es falso que para que transcurran esos infinitos lapsos de tiempo sea necesario que pase un tiempo infinito. Al contrario, —de acuerdo con nuestros cálculos— el tiempo que tiene que pasar para que transcurran sucesivamente esos infinitos lapsos de tiempo es exactamente de un total de 2 unidades de tiempo, que es precisamente el tiempo que necesita Aquiles para alcanzar a la tortuga. Igualmente, la distancia que tendrá que recorrer para ello es la suma de las infinitas distancias 1, 1/2, 1/4, etc., pero esa suma no es infinita, sino que corresponde a una distancia total de 2 unidades de longitud.

Dos siglos más tarde, los matemáticos griegos ya eran capaces de razonar con series infinitas como la anterior. Por ejemplo, en el siglo III a.C., Arquímedes determinó el área comprendida entre un segmento y un arco de parábola sumando una serie similar:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots = \frac{4}{3}.$$

En la actualidad, cada representación de un número real mediante sus cifras decimales es una serie infinita. Por ejemplo, afirmar que

$$\sqrt{2} = 1.4142135\dots$$

es una forma de expresar que

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \frac{3}{10^6} + \frac{5}{10^7} + \dots$$

Los matemáticos del siglo XVI mostraron gran interés por las series infinitas. Así, por ejemplo, Leibniz estaba muy orgulloso de su hallazgo (sobre 1676) de la suma de la serie que hoy se conoce precisamente como *serie de Leibniz*:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

Hay quienes al ver que la sucesión de cifras decimales de  $\pi$  no sigue ningún patrón conocido:

$$\pi = 3.1415926535897932385\dots$$

deducen que  $\pi$  es un número “caótico”, “misterioso” y, hasta cierto punto, “inaccesible”, pero no tienen en cuenta que la representación decimal es sólo una forma entre muchas de obtener aproximaciones racionales de un número irracional, pero el hecho de que sea la más habitual no significa que objetivamente sea más relevante o esencial que otras. Por el contrario, la serie de Leibniz muestra que  $\pi$  puede aproximarse mediante números racionales que siguen un patrón simplicísimo.

Newton alabó el descubrimiento de Leibniz, y en una carta datada en 1676 le presentó una variante propia:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \cdots = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Por otro lado, en esa misma carta, Newton señalaba un hecho que conviene tener presente sobre estas series tan elegantes:

[...] *Para calcular la longitud del cuadrante  $[\pi/4]$  con veinte cifras decimales harían falta unos 5 millones de términos de la serie, cuyo cálculo requeriría unos 1 000 años.*

En efecto, si sumamos los 100 primeros términos de la serie de Leibniz (y multiplicamos por 4 el resultado), obtenemos 3.15149... que sólo muestra una cifra decimal correcta. Con 100 000 términos obtenemos 3.141602..., que sólo presenta tres cifras decimales correctas.

Sin embargo, el problema de determinar el valor de la suma de series sencillas no era fácil en general, así que los matemáticos tomaron tales problemas como desafíos interesantes, aunque pudieran tener poco valor práctico. Así, años antes, Johann Bernoulli y Pietro Mengoli habían demostrado que la serie

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$$

es divergente, es decir, que sumando suficientes términos podemos obtener números tan grandes como queramos. Por el contrario, no es difícil probar que serie

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \cdots$$

es convergente, pero otra cosa era calcular su suma. Este problema fue planteado por Mengoli en 1650, pero había resistido los ataques de los matemáticos más famosos de la época, entre ellos el propio Johann Bernoulli y su hermano Jacob. Los Bernoulli vivían en Basilea y publicitaron el problema, así que acabó siendo conocido como el *problema de Basilea*.

En 1726 murió de apendicitis a los 31 años Nicolaus Bernoulli, uno de los hijos de Johann, que ocupaba un puesto docente en el departamento de matemáticas y física de la Academia de Ciencias de San Petersburgo. Su hermano Daniel ocupó la plaza que había quedado vacante, y a su vez con ello dejó libre una de fisiología, para la cual recomendó a un amigo suyo de 19 años que había terminado sus estudios de filosofía en la Universidad de Basilea, pero al que Johann Bernoulli había estado dando clases particulares de matemáticas y había logrado convencer a su padre de que se olvidara de sus planes de convertirlo en pastor protestante, pues tenía un gran talento para las matemáticas. En 1733 Daniel renunció a su plaza y regresó a Basilea, y su amigo ocupó a su vez su plaza en el departamento de matemáticas y física. Un año después, con 27 años,

el joven, que se llamaba Leonhard Euler, saltó a la fama en el mundillo de las matemáticas al resolver el problema de Basilea. Euler probó que

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Euler obtuvo a lo largo de su vida muchos más resultados de este tipo. Por ejemplo, en su *Introductio ad analysin infinitorum* publicó su famosa factorización de la función seno:

$$\operatorname{sen} x = x \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \dots$$

Sustituyendo  $x = \pi/2$  y con algunas manipulaciones elementales, a partir de ella se obtiene fácilmente la fórmula

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots$$

que ya había sido descubierta por John Wallis en 1655.

Otra curiosa (y profunda) fórmula es

$$\frac{2^2}{2^2 - 1} \cdot \frac{3^2}{3^2 - 1} \cdot \frac{5^2}{5^2 - 1} \cdot \frac{7^2}{7^2 - 1} \cdot \frac{11^2}{11^2 - 1} \dots = \frac{\pi^2}{6},$$

donde las bases de las potencias forman la sucesión de los números primos. Pero una de las fórmulas más sutiles que obtuvo Euler es ésta:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Aquí los numeradores son los números primos, y cada denominador es el número anterior o posterior al numerador que es múltiplo de 4.

La manipulación de las series y productos infinitos que hicieron los matemáticos de los siglos XVII y XVIII no estuvo exenta de polémica. Junto con el uso de cantidades infinitesimales, fue uno de los aspectos más criticados de los razonamientos matemáticos de la época. De hecho, muchas de las demostraciones de Euler tienen lagunas si consideramos las exigencias modernas de rigor en las demostraciones. A principios del siglo XIX, Niels Abel afirmaba:

*Descontando los casos más sencillos, no hay una sola serie infinita en toda la matemática cuya suma haya sido determinada rigurosamente. En otras palabras, las partes más importantes de las matemáticas permanecen sin fundamentación.*

Por ejemplo, la suma de números reales es conmutativa: en cualquier suma (finita) podemos cambiar el orden de los sumandos sin alterar el valor de la suma. ¿Es lícito suponer que lo mismo vale para series infinitas? La respuesta en general es negativa, por ejemplo, veremos que

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = \log 2.$$

Sin embargo, si reordenamos la serie poniendo dos de sus términos positivos seguidos de uno de sus términos negativos, el resultado es:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} \cdots = \log(2\sqrt{2}).$$

Otro punto delicado se da cuando pretendemos intercambiar dos sumatorios, es decir, cuando planteamos una igualdad del tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}.$$

Esto puede hacerse ciertamente cuando las sumas son finitas, pero supongamos que los números  $a_{mn}$  vienen dados por la tabla siguiente:

$a_{mn}$								$\sum_{m=0}^{\infty} a_{mn}$
	0	1	0	0	0	0	...	1
	-1	0	1	0	0	0	...	0
	0	-1	0	1	0	0	...	0
	0	0	-1	0	1	0	...	0
	0	0	0	-1	0	1	...	0
	0	0	0	0	-1	0	...	0
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
$\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}$	-1	0	0	0	0	0	...	-1 \setminus 1

Vemos que

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} 0 = 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn} = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 = -1.$$

Por otra parte, es cierto que, bajo hipótesis adecuadas —muy frecuentes— sí que es legítimo reordenar series o intercambiar sumatorios. Pero los matemáticos hacían cosas más arriesgadas aún que este tipo de manipulaciones. Citamos de nuevo a Abel:

*Las series divergentes son una invención del diablo, y es una vergüenza apoyarse en ellas para cualquier demostración. Usándolas uno puede llegar a la conclusión que le apetezca, y por eso estas series han producido tantas falacias y tantas paradojas.*

En efecto, no era infrecuente que muchos matemáticos, Euler entre ellos, usaran series divergentes en sus razonamientos. Consideremos un caso extremo:

En 1703, el monje, sacerdote, filósofo, teólogo, matemático e ingeniero italiano Dino Grandi publicó su tratado *Quadratura circuli et hyperbolae per infinitas hyperbolas geometricae exhibita*, en el cual consideró la suma infinita:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

y observó que, por una parte,

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots 0 + 0 + 0 + \cdots = 0,$$

pero por otra

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1.$$

De aquí dedujo interesantes consecuencias filosóficas, como que la idea de la creación a partir de la nada es perfectamente plausible. Sin embargo, un análisis más detallado de esta suma le llevó a la conclusión de que, en realidad, su valor correcto es

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}.$$

Por ejemplo, uno de sus argumentos era que esta igualdad se obtiene haciendo  $x = 1$  en la fórmula

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots = \frac{1}{1+x},$$

que en principio es válida cuando  $|x| < 1$ .

Grandi hizo llegar a Leibniz un ejemplar de su tratado, y Leibniz aceptó su “demostración” de esta igualdad, y desde entonces muchos grandes matemáticos se pronunciaron a favor o en contra de ella. Euler se mostró indeciso, pero el hecho de que la considerara “sostenible” influyó en muchos matemáticos posteriores. Laplace, en cambio, la consideró un desvarío de Grandi y Leibniz atribuible a sus convicciones filosófico-religiosas. En cualquier caso, las disputas surgidas alrededor de ésta y otras sumas infinitas fueron parte de los argumentos que convencieron a los matemáticos de la necesidad de encontrar unos fundamentos más rigurosos para el cálculo infinitesimal.

Conviene aclarar que la polémica sobre la serie de Grandi no consistió en si era convergente o divergente, pues nadie cuestionaba que era divergente, sino en si, a pesar de serlo, había algún argumento que justificara asignarle un valor que pudiera ser empleado fiablemente en los cálculos. Por ejemplo, Euler publicó en 1760 un largo ensayo titulado *De seriebus divergentibus* en el que da argumentos en favor y en contra del uso de series divergentes en el cálculo infinitesimal, y sobre la posibilidad de asignarles un valor concreto. Existen varios criterios que asignan valores a series infinitas de modo que, si son convergentes, el valor asignado es su límite, pero que pueden asignar también un valor a series divergentes, incluso a series descaradamente divergentes. Por ejemplo, los diarios de Ramanujan contienen dos “demostraciones” de que

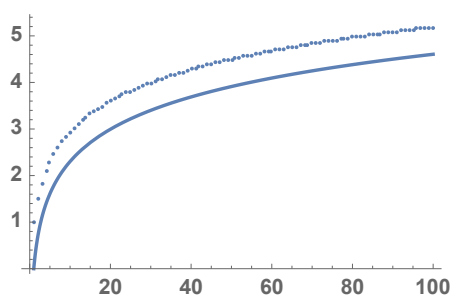
$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\frac{1}{12}.$$

En este libro demostraremos todos los hechos que hemos mencionado y muchos más. Tras esta introducción, el lector puede consultar una lista de las fórmulas más notables que vamos a demostrar. La mayoría expresan límites de

sucesiones, sumas y productos infinitos, pero en algunas estudian también el comportamiento de sucesiones divergentes. Por ejemplo, ya hemos señalado (y lo demostraremos en su momento) que la serie

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

es divergente, pero la gráfica siguiente muestra las sumas de sus  $n$  primeros términos junto con la función  $\log n$ :



Vemos que son casi iguales, salvo que una es un poco más alta que la otra. Eso no es casual. En efecto, demostraremos que existe un número

$$\gamma = 0.5772156649\dots$$

(que se conoce como *constante de Euler-Mascheroni*) de modo que la sucesión

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma - \log n$$

tiende a 0, es decir, que cuando mayor es  $n$  más difícil es distinguir la suma de los inversos de los  $n$  primeros números naturales del valor  $\gamma + \log n$ . Si en vez de haber representado la gráfica de  $\log x$  hubiéramos mostrado la de  $\gamma + \log x$ , las dos curvas se verían perfectamente superpuestas. En realidad esto es consecuencia de que se cumple algo más fuerte, y es que el error relativo

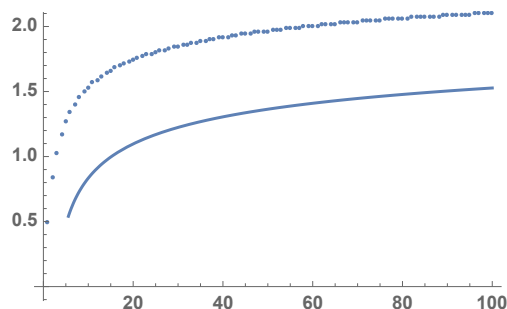
$$\frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma - \log n}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}}$$

tiende a 0, es decir, que la diferencia entre las dos gráficas se hace pequeña incluso en proporción al valor que toman las sumas.

Más sutil es que lo mismo sucede si consideramos la sucesión de los inversos de los números primos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \dots$$

esta serie también es divergente, pero si representamos la suma de sus  $n$  primeros términos obtenemos lo siguiente:



donde ahora, la gráfica inferior no es  $\log x$ , sino  $\log \log x$ , y de nuevo es posible demostrar que existe una constante

$$M = 0.26149721284\dots$$

(la *constante de Mertens*) que hace que la gráfica de  $M + \log \log n$  sea indistinguible de la gráfica de las sumas de los inversos de los  $n$  primeros primos.

Euler “demostró” este hecho en 1737, pero en su “demostración” hacía referencia a cosas como  $\log \infty$  y  $\log \log \infty$  sin rigor alguno. En 1874, el matemático polaco Franz Mertens publicó un artículo en el que hacía referencia a “dos curiosas fórmulas de Legendre”, que eran variantes de este resultado y que aparecían en su *Teoría de números* sin más justificación que un argumento heurístico. Mertens, diplomáticamente, afirmó que presentaba unas pruebas “más precisas y rigurosas” de los que hoy se conocen como *segundo y tercer teoremas de Mertens*. El segundo afirma esencialmente que existe el límite

$$M = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} - \log \log x,$$

donde  $p$  recorre los números primos, y en el tercero relaciona las constantes  $M$  y  $\gamma$ . El *primer teorema de Mertens* es un paso previo que describe el crecimiento de las sumas

$$\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p}.$$

El segundo teorema de Mertens había sido demostrado rigurosamente por Chebishev en 1851, pero suponiendo lo que más adelante se conocería como el *Teorema de los números primos*, que ya había sido conjeturado por Legendre en 1798, pero que no sería demostrado hasta 1896 por Hadamard y de la Vallée Poussin desarrollando ideas de Riemann.

Las técnicas con las que probaremos estos resultados nos permitirán demostrar un profundo teorema, conjeturado por Legendre en 1785 y demostrado por Dirichlet en 1837, cuyo enunciado es puramente algebraico, es decir, no sugiere que tenga que ver con nada de lo que hemos tratado aquí, y del que, sin embargo, no se conoce ninguna demostración que no emplee esencialmente argumentos “analíticos” como los que vamos a emplear o incluso más sofisticados:

**Teorema de Dirichlet sobre primos en progresiones aritméticas** *En toda progresión aritmética  $an + b$ , donde  $a$  y  $b$  son enteros primos entre sí, hay infinitos números primos.*

No es el único resultado algebraico (al menos en cuanto a su enunciado, no en cuanto a su prueba) que demostraremos. Entre los más destacados, además del teorema de Dirichlet, podemos citar el postulado de Bertrand, el teorema fundamental del álgebra o la trascendencia de  $e$  y  $\pi$ . También calcularemos el área de un círculo, de una elipse y de un sector hiperbólico, en el último caso rozando el uso del cálculo integral. Las áreas del círculo y del sector hiperbólico las usaremos en el último capítulo para demostrar la convergencia de la llamada función  $\zeta$  de Dedekind, que es una serie similar a la función  $\zeta$  de Riemann asociada a cada cuerpo cuadrático y que contiene información relevante sobre su aritmética. Con ésta a su vez resolveremos un problema planteado por Dirichlet en 1828, quien demostró que, si  $p$  es un primo  $p \equiv -1$  (mód 4), entonces

$$\frac{p-1}{2}! \equiv \pm 1 \pmod{p},$$

pero no pudo dar ningún criterio natural que determinara el signo correcto. Veremos que dicho signo depende de lo que se conoce como el número de clases del cuerpo  $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ , que a su vez está relacionado con la aritmética de su anillo de enteros algebraicos. Todos estos conceptos se introducen en [ITA], de modo que en el último capítulo tendremos ocasión de combinar las técnicas algebraicas y analíticas mucho más íntimamente que en la prueba del teorema de Dirichlet.

# Capítulo I

## Límites de sucesiones

El objetivo de este primer capítulo es doble: presentar las propiedades fundamentales de los números reales y complejos que vamos a necesitar como base teórica e introducir uno de los conceptos centrales de este libro: el concepto de límite de sucesiones.

En la primera sección revisaremos brevemente los resultados básicos sobre números reales con los que suponemos familiarizado al lector a la vez que presentamos los números complejos. Una vez introducidas las propiedades elementales de los números complejos, veremos que trabajar con ellos no requiere ningún esfuerzo adicional respecto a lo que supondría trabajar únicamente con números reales, sino únicamente ligeros añadidos o adaptaciones mínimas y obvias en los argumentos, mientras que la potencia de los resultados obtenidos aumenta espectacularmente por el mero hecho de poder aplicarlos a números complejos. En la segunda sección discutimos el concepto de límite de sucesiones y en la tercera lo usamos para completar el estudio de los números reales.

### 1.1 Los números reales y complejos

Suponemos al lector familiarizado con el concepto de “número real”. Intuitivamente, los números reales se pueden identificar con los puntos de una recta graduada, es decir, una recta en la que hemos seleccionado arbitrariamente un punto 0 como origen, y otro punto 1 que determina una unidad de medida. Entonces cada número real  $\alpha$  se identifica con el punto de la recta que está a una distancia  $|\alpha|$  del punto 0, a la derecha o a la izquierda según si  $\alpha$  es positivo o negativo.

Más precisamente, cada número real está determinado por una sucesión de cifras decimales, como

$$\alpha = 4.7025673330032\dots$$

Esto se interpreta como que  $\alpha$  se corresponde con el punto de la recta al que llegamos si nos desplazamos 4 unidades hacia la derecha desde 0, luego otras 7

décimas partes de la unidad, y luego 2 milésimas partes de la unidad, y luego 5 diezmilésimas partes de la unidad, etc.



En general, para determinar exactamente un número real son necesarias infinitas cifras decimales, aunque en la práctica es habitual no trabajar con números reales exactos, sino con aproximaciones con un número finito de decimales. En cualquier representación gráfica o uso práctico de los números reales existe un umbral a partir del cual dos números reales con un número suficientemente grande de cifras decimales en común resultan indistinguibles a todos los efectos. Por ejemplo, en la representación de  $\alpha$  que acabamos de dar es imposible distinguir si el punto que hemos identificado como  $\alpha$  corresponde realmente a  $\alpha$  o bien a  $\alpha' = 4.7$ , pues la diferencia entre ambos es de menos de 3 milésimas, y es inapreciable en la práctica.

Para más detalles sobre el concepto de número real y los desarrollos decimales de los números reales remitimos a la sección 1.5 de [ITAl]. El Resumen 1.1 contiene las propiedades que suponemos conocidas de los números reales. Las 15 propiedades que definen los cuerpos ordenados bastan para justificar todas las manipulaciones algebraicas con números reales con las que el lector debería estar familiarizado.

La última propiedad, la completitud, caracteriza completamente a los números reales, en el sentido de que cuerpos ordenados hay muchos y muy diferentes entre sí, pero dos cuerpos ordenados completos son esencialmente el mismo cuerpo y tienen exactamente las mismas propiedades. En este capítulo estudiaremos con detalle esta propiedad y sus consecuencias.

Hay una propiedad básica de los números reales que no se deduce de las propiedades de cuerpo ordenado, pero sí de la completitud, y es el hecho de que todo número real  $x$  puede descomponerse como  $x = E[x] + F[x]$ , donde  $E[x]$  es un número entero (la *parte entera* de  $x$ ) y  $0 \leq F[x] < 1$  es la *parte fraccionaria* de  $x$ . Por ejemplo:

$$E[7.34] = 7, \quad F[7.34] = 0.34, \quad E[-4.333\dots] = -5, \quad F[-4.333\dots] = 0.666\dots$$

En particular, esto implica (y, de hecho, es equivalente a) que los números reales cumplen la *propiedad arquimadiana*:

*Si  $\epsilon, M > 0$  son dos números reales, existe un número natural  $n$  tal que  $M < n\epsilon$ .*

(Basta tomar  $n = E[M/\epsilon] + 1$ .)

Esta propiedad expresa que, avanzando a pasos de longitud  $\epsilon$ , por pequeña que sea esta longitud, dando un número suficiente de pasos  $n$  podemos superar cualquier meta  $M$  que nos proponamos rebasar.

## Resumen 1.1: Los números reales

Un *cuerpo* es un conjunto en el que hay definidas una suma y un producto que cumplan las propiedades siguientes:

<b>Asociativa</b>	$(a + b) + c = a + (b + c)$
<b>Elemento neutro</b>	Existe un elemento $0$ tal que $a + 0 = a$ .
<b>Elemento opuesto</b>	Para cada $a$ existe un $-a$ tal que $a + (-a) = 0$ .
<b>Conmutativa</b>	$a + b = b + a$

<b>Asociativa</b>	$(ab)c = a(bc)$
<b>Distributiva</b>	$a(b + c) = ab + ac$
<b>Elemento neutro</b>	Existe un elemento $1 \neq 0$ tal que $a \cdot 1 = a$ .
<b>Elemento inverso</b>	Si $a \neq 0$ existe un $a^{-1}$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$ .
<b>Conmutativa</b>	$ab = ba$

Un *cuerpo ordenado* es un cuerpo con una relación  $\leq$  que cumple las propiedades siguientes:

## Propiedades de orden:

<b>Reflexiva:</b>	$m \leq m$
<b>Antisimétrica:</b>	Si $m \leq n$ y $n \leq m$ , entonces $m = n$
<b>Transitiva:</b>	Si $m \leq n$ y $n \leq r$ , entonces $m \leq r$
<b>Dicotomía:</b>	O bien $m \leq n$ o bien $n \leq m$ .

## Propiedades de compatibilidad:

<b>Con la suma</b>	Si $b \leq c$ entonces $a + b \leq a + c$ .
<b>Con el producto</b>	Si $a \geq 0$ y $b \geq 0$ , entonces $ab \geq 0$ .

Los números reales  $\mathbb{R}$  son un cuerpo ordenado completo, es decir, que cumple la propiedad siguiente:

**Completitud** Si dividimos  $\mathbb{R}$  en dos conjuntos no vacíos  $A$  y  $B$  de modo que cada elemento de  $A$  es menor que cada elemento de  $B$ , entonces existe un número real que, o bien es el máximo de los elementos de  $A$ , o bien es el mínimo de los elementos de  $B$  (según si está en  $A$  o en  $B$ ).

En general, tal y como se explica en [ITAI], la completitud de  $\mathbb{R}$  expresa que la recta real no tiene “agujeros microscópicos”, como los tendría si elimináramos cualquiera de sus puntos. En este capítulo exploraremos con detalle las implicaciones que tiene esta propiedad de completitud. En [ITAI] la ilustramos demostrando a partir de ella que todo número real positivo tiene una raíz  $n$ -ésima positiva. Vamos a recordar aquí el argumento para el caso concreto de la raíz cuadrada, que es el único que necesitaremos de momento, y más adelante estaremos en condiciones de dar una prueba conceptualmente más simple para  $n$  arbitrario:

Si  $a \geq 0$  es un número real, existe un único  $b \geq 0$  tal que  $b^2 = a$ .

DEMOSTRACIÓN: El resultado es obviamente cierto para  $a = 0$ , así que podemos suponer  $a > 0$ . Llamamos  $A$  al conjunto de todos los números reales  $x \leq 0$  y los que cumplen  $x > 0$  y  $x^2 < a$ . Por otra parte, sea  $B$  el conjunto de los números reales  $x > 0$  que cumplen  $x^2 \geq a$ .

Es claro entonces que todo número real está en  $A$  o en  $B$ , así como que cada elemento de  $A$  es menor que cada elemento de  $B$  (pues si  $x$  está en  $A$  e  $y$  está en  $B$ , o bien  $x \leq 0 < y$ , o bien  $x > 0$  y  $x^2 < a \leq y^2$ , de donde  $x < y$ , pues si fuera  $0 < y \leq x$ , tendríamos que  $y^2 \leq x^2$ ).

Ciertamente  $0 \in A$ , mientras que si  $m$  es cualquier número natural tal que cumpla  $a < m < m^2$  (existe por la propiedad arquimediana aplicada a  $\epsilon = 1$ ), entonces  $m \in B$ , luego  $A$  y  $B$  no son vacíos. La completitud de  $\mathbb{R}$  implica que existe un  $b$  que, o bien es el máximo elemento de  $A$ , o bien es el mínimo elemento de  $B$ . Vamos a probar que  $b^2 = a$ .

En primer lugar observamos que no puede suceder que  $b$  sea el máximo de  $A$ , pues entonces  $b^2 < a$ , pero, para cada número real  $0 < \epsilon < 1$ , tenemos que

$$(b + \epsilon)^2 - b^2 = \epsilon(2b + \epsilon) \leq \epsilon(2b + 1),$$

Tomando  $0 < \epsilon < (a - b^2)/(2b + 1)$ , tenemos que  $(b + \epsilon)^2 - b^2 < a - b^2$ , luego  $(b + \epsilon)^2 < a$ , luego  $b + \epsilon$  está en  $A$  y  $b < b + \epsilon$ , en contra de que  $b$  sea el máximo de  $A$ .

Por lo tanto,  $b$  tiene que ser el mínimo de  $B$  y, en particular,  $a \leq b^2$ . Supongamos que  $a < b^2$  y llegaremos a una contradicción. Tomamos de nuevo  $0 < \epsilon < 1$ , de modo que

$$b^2 - (b - \epsilon)^2 = \epsilon(2b - \epsilon) \leq 2b\epsilon.$$

Ahora tomamos  $0 < \epsilon < (b^2 - a)/2b$ , de modo que

$$b^2 - (b - \epsilon)^2 \leq b^2 - a,$$

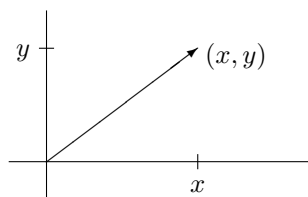
y así  $a < (b - \epsilon)^2$ , luego  $b - \epsilon$  está en  $B$  y eso contradice que  $b$  sea el mínimo de  $B$ . ■

El número  $b$  se llama *raíz cuadrada* (positiva) de  $a$ , y se representa por  $\sqrt{a}$ . Así, por definición se cumple que  $(\sqrt{a})^2 = a$ , pero observemos que, si  $a$  es un número real arbitrario,  $\sqrt{a^2} = |a|$ .

**Ejercicio:** Probar que, si  $a, b \geq 0$ , entonces  $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ .

**Ejercicio:** Probar que si  $0 < a < b$ , entonces  $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ .

**El plano  $\mathbb{R}^2$**  Al igual que los elementos de  $\mathbb{R}$  se pueden identificar con los puntos de una recta, los pares ordenados de números reales, es decir, los elementos de  $\mathbb{R}^2$ , se identifican con los puntos de un plano en el que hemos fijado unos ejes de coordenadas:



En  $\mathbb{R}^2$  podemos definir de forma natural una suma y un producto

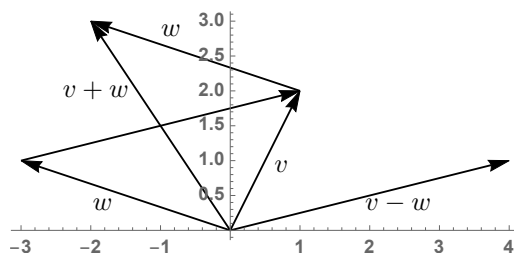
$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'), \quad a(x, y) = (ax, ay),$$

donde todas las letras denotan números reales. Es inmediato comprobar que la suma que acabamos de definir es asociativa, conmutativa, tiene a  $(0, 0)$  como elemento neutro y cada  $(x, y)$  tiene un elemento opuesto  $-(x, y) = (-x, -y)$ .

**Nota** A la hora de interpretar geoméricamente estas operaciones conviene pensar en los elementos de  $\mathbb{R}$  o de  $\mathbb{R}^2$ , no como puntos de la recta o el plano, sino mejor como *vectores*, es decir, como objetos que contienen la información necesaria para movernos desde un punto de la recta o el plano hasta otro. Por ejemplo,  $-7.5$  significa “muévete 7.5 unidades hacia la izquierda, mientras que  $(-3, 1)$  significa “muévete 3 unidades hacia la izquierda y luego 1 unidad hacia arriba”.

La diferencia sutil es que un punto es un punto, mientras que un vector son unas instrucciones para movernos de un punto a otro. Cuando identificamos los vectores de  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{R}^2$  con los puntos de la recta o del plano, los estamos identificando con los puntos a los que se llega al aplicarlos al origen de coordenadas.

Así, por ejemplo, la suma  $v + w$  de dos vectores de  $\mathbb{R}^2$  se interpreta como el vector que indica que hay que realizar el movimiento correspondiente a  $v$  y, desde el punto al que llegamos, el movimiento correspondiente a  $w$ .



Entonces,  $v - w$  es el vector que indica cómo tenemos que movernos desde el punto al que llegamos al “seguir las instrucciones” de  $w$  para llegar al punto al que llegamos al “seguir las instrucciones” de  $v$ . ■

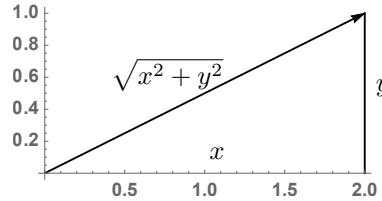
En  $\mathbb{R}$  tenemos definido el valor absoluto

$$|v| = \begin{cases} v & \text{si } v \geq 0, \\ -v & \text{si } v < 0, \end{cases}$$

que se interpreta como la “longitud” del vector  $v$ , es decir, de la distancia que recorreremos cuando “seguimos sus instrucciones”, con independencia de si nos movemos hacia la izquierda o hacia la derecha. El análogo en  $\mathbb{R}^2$  es el *módulo*

$$|(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

pues, por el teorema de Pitágoras, la interpretación geométrica de  $|v|$  es también la longitud que avanzamos cuando “seguimos las instrucciones” de  $v$ :

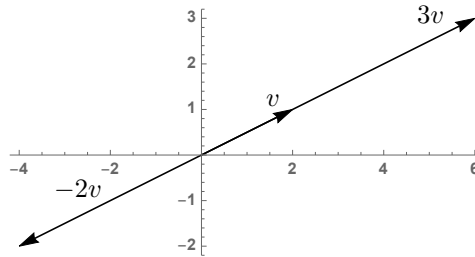


Observemos que el módulo en  $\mathbb{R}^2$  cumple propiedades análogas a las del valor absoluto en  $\mathbb{R}$ :

1.  $|v| \geq 0$  y  $|v| = 0$  si y sólo si  $v = (0, 0)$ .
2.  $|av| = |a||v|$ , donde  $a \in \mathbb{R}$  y  $v \in \mathbb{R}^2$ .
3.  $|v + w| \leq |v| + |w|$ .
4.  $||v| - |w|| \leq |v - w|$ .

La primera propiedad es inmediata. La segunda se prueba sin dificultad: si  $v = (x, y)$ , entonces  $|av| = \sqrt{a^2(x^2 + y^2)}$ , mientras que  $|a||v| = |a|\sqrt{x^2 + y^2}$ . Es inmediato que  $|av|^2 = (|a||v|)^2$ , y la unicidad de la raíz cuadrada nos permite eliminar los cuadrados.

Geoméricamente se interpreta como que  $av$  multiplica por  $|a|$  la longitud del vector  $v$ . Más precisamente, es fácil convencerse de que si  $a > 0$ , entonces  $av$  es un vector “igual” que  $v$  salvo que su longitud queda multiplicada por  $|a|$ , mientras que si  $a < 0$  además el sentido de  $av$  es el opuesto al de  $v$ :



La tercera propiedad también es geoméricamente obvia:  $|v + w|$  es la longitud de un lado de un triángulo cuyos otros dos lados miden  $|v|$  y  $|w|$  (véase la figura de la nota de la página 5). Lo que expresa la desigualdad es que si nos movemos de un punto a otro en línea recta recorreremos menos espacio (o el mismo) que si nos obligamos a pasar por un tercer punto. Por ello se conoce como “desigualdad triangular”.

Una prueba analítica directa es un tanto farragosa. En su lugar, conviene dar un rodeo definiendo el producto escalar:

$$(x, y)(x', y') = xx' + yy'$$

y demostrando la *desigualdad de Schwarz*:

$$|vw| \leq |v||w|. \quad (1.1)$$

En efecto, si  $v = (x, y)$ ,  $w = (x', y')$ , observamos que

$$0 \leq (xy' - x'y)^2 = x^2y'^2 + x'^2y^2 - 2xyx'y',$$

luego

$$2xyx'y' \leq x^2y'^2 + x'^2y^2,$$

luego

$$x^2x'^2 + y^2y'^2 + 2xyx'y' \leq x^2x'^2 + y^2y'^2 + x^2y'^2 + y^2x'^2,$$

pero esto equivale a  $(xx' + yy')^2 \leq (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2)$ , es decir, a

$$(vw)^2 \leq |v|^2|w|^2,$$

y tomando raíces cuadradas obtenemos la desigualdad requerida. Finalmente, teniendo en cuenta que  $|v|^2 = v \cdot v$ , tenemos que

$$\begin{aligned} |v + w|^2 &= (v + w)(v + w) = vv + ww + 2vw \leq |v|^2 + |w|^2 + 2|vw| \\ &\leq |v|^2 + |w|^2 + 2|v||w| = (|v| + |w|)^2 \end{aligned}$$

y al tomar raíces cuadradas obtenemos la desigualdad triangular.

La cuarta propiedad es consecuencia de la tercera:

$$|v| \leq |v - w + w| \leq |v - w| + |w|,$$

luego  $|v| - |w| \leq |v - w|$ . Igualmente  $|w| - |v| \leq |v - w|$ , luego

$$-|v - w| \leq |v| - |w| \leq |v - w|,$$

y esto implica que  $||v| - |w|| \leq |v - w|$ . ■

**Números complejos** Hemos demostrado que todo número real positivo  $x$  tiene una raíz cuadrada  $\sqrt{x}$  (de hecho, tiene dos,  $\pm\sqrt{x}$ ), pero esto ya no es cierto para los números negativos. Sin embargo, los algebristas medievales se dieron cuenta de que podían hablar coherentemente de raíces de números negativos, como  $\sqrt{-5}$  o simplemente  $\sqrt{-1}$ . Descartes calificó a estos números de “imaginarios”, y los matemáticos los usaron con desconfianza hasta que Euler y Gauss los trataron sistemáticamente y mostraron que no había nada de misterioso en ellos. Fue Euler quien introdujo la notación  $i = \sqrt{-1}$  para referirse a la “unidad imaginaria”.

Vamos a ver que, del mismo modo que al extender  $\mathbb{Q}$  hasta  $\mathbb{R}$  pasamos de un cuerpo en el que no hay raíces cuadradas como  $\sqrt{2}$  a otro donde sí que las hay, podemos extender  $\mathbb{R}$  hasta un cuerpo mayor, el cuerpo  $\mathbb{C}$  de los números complejos, en el que sí que exista un “número imaginario”  $i$  con la propiedad de que  $i^2 = -1$ .

Para ello basta definir  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ , de modo que un *número complejo*  $z = (x, y)$  no es ni más ni menos que un par de números reales (y esto basta para zanjar la cuestión de si los números complejos son o no algo “oscuro y misterioso”).

Ahora observamos que cada  $z = (x, y) \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  puede expresarse en la forma  $z = x(1, 0) + y(0, 1)$ . Si convenimos en llamar  $1 = (1, 0)$  e  $i = (0, 1)$ , entonces todo número complejo se expresa (claramente de forma única) como

$$z = x + yi,$$

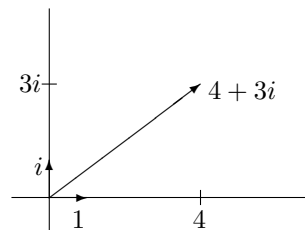
donde adoptamos el convenio adicional de escribir  $x$  en lugar de  $x \cdot 1$ . En estos términos diremos que  $x$  es la *parte real* del número complejo  $z$  y que  $y$  es su *parte imaginaria*.

En general, llamaremos  $\operatorname{Re} z$  e  $\operatorname{Im} z$  a las partes real e imaginaria de un número complejo  $z$ .

En este punto tenemos definida en  $\mathbb{C}$  una suma de números complejos y el producto de un número real por un número complejo (que son las operaciones de  $\mathbb{R}^2$  que estamos usando precisamente para expresar los números complejos en la forma  $x + yi$ ).

Observemos que hasta aquí sólo hemos introducido una notación peculiar para los puntos de  $\mathbb{R}^2$ . El número complejo  $4 + 3i$  no es ni más ni menos que el par de números reales  $(4, 3)$ . En particular, la unidad imaginaria no es ni más ni menos que el punto  $i = (0, 1)$ .

La notación nos invita también a identificar los números reales con los números complejos con parte imaginaria nula. Así, cuando pensamos en los puntos de  $\mathbb{R}^2$  como números complejos, al referirnos a la representación geométrica de  $\mathbb{R}^2$  hablamos del *plano complejo*, en el que hemos fijado dos ejes de coordenadas: el *eje real* y el *eje imaginario*. Los números complejos de la forma  $yi$  (es decir, los números que tienen parte real nula) se llaman *imaginarios puros*.



Ahora sólo nos falta definir un producto en  $\mathbb{C}$  que extienda al producto que ya tenemos definido de números reales por números complejos y respecto al cual  $\mathbb{C}$  sea un cuerpo en el que  $i^2 = -1$ .

Un producto que cumpla lo requerido debe cumplir:

$$(x + yi)(x' + y'i) = xx' + xy'i + x'y'i + yy'i^2 = xx' - yy' + (xy' + x'y)i.$$

Por lo tanto, podemos tomar esto como definición:

$$(x + yi)(x' + y'i) = xx' - yy' + (xy' + x'y)i.$$

Si existe un producto en  $\mathbb{C}$  que lo convierta en un cuerpo, que extienda al producto de números reales por complejos que ya tenemos definido y respecto al que  $i^2 = -1$ , tiene que ser el definido así.

Observemos en primer lugar que este producto ciertamente extiende al que ya teníamos definido, pues si  $y = 0$  se reduce a

$$x(x' + y'i) = xx' + xy'i.$$

Además, ciertamente se cumple que  $i^2 = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + (0 \cdot 1 + 0 \cdot 1)i = -1$ .

Ahora es pura rutina comprobar<sup>1</sup> que  $\mathbb{C}$  con el producto definido así es realmente un cuerpo, es decir, que cumple el segundo bloque de cinco propiedades recogidas en el resumen 1.1. La única propiedad que no es inmediata es la existencia de elemento inverso, pero únicamente si uno no sabe en qué elemento pensar. No obstante, se comprueba sin dificultad que, si  $x + yi \neq 0$ ,

$$(x + yi)^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i.$$

A la hora de interpretar esta fórmula conviene “descomponerla” en varios pasos. Para ello definimos el *conjugado* de un número complejo  $z = x + yi$  como  $\bar{z} = x - yi$ .

Geoméricamente el conjugado de un número complejo es su simétrico respecto del eje real, pero el interés de la conjugación está en que se comporta bien con la suma y el producto de números complejos:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2.$$

Además, si  $z = x + yi$ , tenemos que

$$z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 = |z|^2,$$

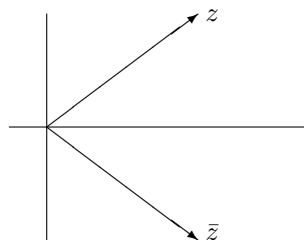
donde  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  es el módulo de  $z$ , que ya teníamos definido en  $\mathbb{R}^2$ . El lector debería comprobar como ejercicio todas las propiedades que acabamos de enunciar, pues todas se deducen fácilmente de las definiciones. En particular, ahora podemos expresar el inverso de un número complejo no nulo como

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

**Ejercicio:** Probar que todo número complejo  $z$  cumple

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

<sup>1</sup>En la sección 8.1 de [ITAL] se muestra una forma alternativa más conceptual de definir los números complejos que elimina la necesidad de toda comprobación rutinaria.



## Resumen 1.2: Los números complejos

Los números complejos forman un cuerpo cuyos elementos se expresan de forma única como  $z = x + yi$ , donde  $x$  e  $y$  son números reales y  $i$  es la unidad imaginaria, que cumple  $i^2 = -1$ .

Se dice que  $x = \operatorname{Re} z$  es la *parte real* de  $z$  y que  $y = \operatorname{Im} z$  es la *parte imaginaria* de  $z$ .

El inverso de un número complejo no nulo viene dado por

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2},$$

donde  $\bar{z} = x - yi$  es el *conjugado* de  $z$  y  $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$  es su *módulo*. Se cumple:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2,$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

Si  $z = x + yi$ , entonces  $|x|, |y| \leq |z|$ .

Observemos que si  $z = x + yi$ , entonces  $|x|, |y| \leq |z|$  (basta tomar raíces cuadradas en las desigualdades  $x^2, y^2 \leq x^2 + y^2$ ).

El Resumen 1.2 recoge las propiedades básicas de los números complejos que hemos indicado y junto con las propiedades del módulo que teníamos demostradas para  $\mathbb{R}^2$ .

El hecho de que  $\mathbb{C}$  sea un cuerpo se traduce en que todas las operaciones algebraicas con números reales con las que suponemos al lector familiarizado son aplicables a los números complejos, siempre y cuando no involucren la relación de orden, pues en  $\mathbb{C}$  no tenemos definida ninguna.

La interpretación geométrica del valor absoluto complejo hace que podamos pensar en  $|z - z'|$  como la *distancia* que separa  $z$  de  $z'$ , es decir, la longitud del segmento que une los puntos del plano con que podemos identificar a dos números complejos dados (o en particular de la recta, si son reales). Esta observación será fundamental para interpretar todos los conceptos que introduciremos en las secciones siguientes.

## 1.2 Límites de sucesiones

Una *sucesión*  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  en un conjunto  $X$  es cualquier forma de asociar a cada número natural<sup>2</sup>  $n$  un elemento  $x_n$  de  $X$ , llamado *término  $n$ -simo* de la sucesión:

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5, \quad x_6, \quad \dots$$

Esencialmente, lo que nos va a interesar de una sucesión dada es su tendencia “a largo plazo”. Por ejemplo, consideremos la sucesión dada por

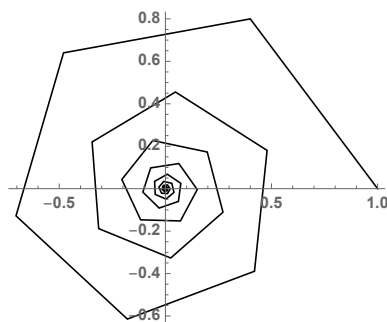
$$x_0 = 2, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n},$$

es decir, la sucesión que se genera si ponemos un 2 en una calculadora y vamos apretando repetidamente la tecla “raíz cuadrada”. Sus primeros términos son:

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 1.4142\dots & 1.1892\dots & 1.0905\dots & 1.0442\dots & 1.0218 \\ 1.0108\dots & 1.0054\dots & 1.0027\dots & 1.0013\dots & 1.0006\dots & 1.0003\dots \\ 1.0001\dots & 1.00008\dots & 1.00004\dots & 1.00002\dots & 1.00001\dots & 1.000005\dots \end{array}$$

Es fácil convencerse de que esta sucesión no toma nunca el valor 1, pero vemos que sus términos son cada vez más parecidos a 1. Avanzando suficientemente en la sucesión llegaremos a términos que sean prácticamente indistinguibles de 1, en el sentido de que la diferencia exceda cualquier umbral que podamos apreciar.

Otro ejemplo: la figura siguiente muestra los primeros términos (unidos por una poligonal) de la sucesión de números complejos  $\{(0.4 + 0.8i)^n\}_{n=0}^{\infty}$ . Vemos que sus términos están cada vez más cerca de 0:



Estos comportamientos se plasman en la definición siguiente:

**Definición 1.1** Una sucesión  $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$  de números complejos *converge* a un número complejo  $L$  si para todo número real  $\epsilon > 0$  existe un número natural  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$  entonces  $|z_n - L| < \epsilon$ .

<sup>2</sup>En la práctica no es necesario que los términos de una sucesión se numeren precisamente a partir de  $n = 0$ , sino que, según convenga, podemos empezar a enumerar a partir de cualquier número natural. Por ejemplo, la sucesión  $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$  no está definida para  $n = 0$ . Todos los conceptos que vamos a considerar serán independientes de cuál sea el primer índice usado para enumerar una sucesión.

Esto significa que, para cualquier nivel de precisión  $\epsilon$  que queramos fijar, a partir de un cierto término  $n_0$ , todos los términos  $z_n$  de la sucesión resultan indistinguibles de  $L$  en el sentido de que la distancia  $|z_n - L|$  es inferior al nivel de precisión fijado. En general, cuanto menor sea  $\epsilon$ , mayor tendrá que ser  $n_0$ , es decir, más tendremos que avanzar en la sucesión para lograr el nivel de precisión deseado.

Notemos que una misma sucesión no puede converger a dos números distintos  $L$  y  $L'$ , pues en tal caso podríamos tomar  $\epsilon = |L - L'|/2 > 0$  y, tomando un  $n_0$  suficientemente grande como para que  $|z_{n_0} - L| < \epsilon$  y  $|z_{n_0} - L'| < \epsilon$ , tendríamos que

$$|L - L'| = |L - z_{n_0} + z_{n_0} - L'| \leq |L - z_{n_0}| + |z_{n_0} - L'| < |L - L'|,$$

y tenemos una contradicción.

Si una sucesión  $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$  de números complejos es convergente, el único número complejo  $L$  al cual converge recibe el nombre de *límite* de la sucesión, y se representa por

$$\lim_n z_n.$$

En estos términos hemos probado que, si una sucesión tiene límite, éste es único. En particular, no es correcto decir que una sucesión como:

$$1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots$$

“tiene tres límites”, sino que no tiene ninguno.

He aquí uno de los ejemplos más simples de sucesión convergente:

**Ejemplo 1.2**  $\lim_n 1/n = 0$ .

En efecto, dado  $\epsilon > 0$ , la propiedad arquimediana nos asegura que existe un número natural  $n_0$  tal que  $1/\epsilon < n_0$ , luego, si  $n \geq n_0$ , también se cumple que  $1/\epsilon < n$ , luego  $|1/n - 0| = 1/n < \epsilon$ , tal y como exige la definición de convergencia. ■

A menudo necesitaremos el hecho siguiente:

**Teorema 1.3** *Toda sucesión convergente  $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$  está acotada, es decir, existe un número real  $M > 0$  tal que, para todo índice  $n$ , se cumple  $|z_n| \leq M$ .*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que la sucesión converge a  $L$  y tomemos  $\epsilon = 1$ . Existe un  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$  se cumple que  $|z_n - L| < 1$ , luego  $|z_n| = |z_n - L + L| \leq |L| + 1$ . Claramente

$$M = \max\{|z_0|, \dots, |z_{n_0-1}|, |L| + 1\}$$

cumple lo requerido. ■

**Teorema 1.4** Si  $\lim_n x_n = L$  y  $\lim_n y_n = L'$ , entonces:

1.  $\lim_n (x_n + y_n) = L + L'$ ,
2.  $\lim_n (x_n y_n) = LL'$ ,
3. Si  $L' \neq 0$ , entonces  $\lim_n \frac{x_n}{y_n} = \frac{L}{L'}$ .
4.  $\lim_n |x_n| = |L|$ .

DEMOSTRACIÓN: 1) Dado  $\epsilon > 0$ , podemos tomar un  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$ , entonces  $|x_n - L| < \epsilon/2$  y  $|y_n - L'| < \epsilon/2$ , con lo que

$$|x_n + y_n - (L + L')| \leq |x_n - L| + |y_n - L'| < \epsilon. \quad (1.2)$$

2) Por el teorema anterior, podemos tomar una cota  $M$  para la sucesión  $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ . Dado  $\epsilon > 0$ , existe un  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$  entonces  $|x_n - L| < \epsilon/2M$  y  $|y_n - L'| < \epsilon/2(|L| + 1)$ . Así

$$|x_n y_n - LL'| = |x_n y_n - L y_n + L y_n - LL'| \leq |x_n - L| |y_n| + |L| |y_n - L'| < \epsilon.$$

3) Observemos que si  $L' \neq 0$ , podemos tomar un  $n_1$  tal que si  $n \geq n_1$  entonces  $|y_n - L'| < |L'|/2$ , lo que implica que

$$|L'| = |L' - y_n + y_n| \leq |L' - y_n| + |y_n| \leq \frac{|L'|}{2} + |y_n|,$$

luego  $|y_n| \geq |L'|/2$  y en particular  $y_n \neq 0$ . Esto implica que el cociente  $x_n/y_n$ , aunque podría no estar definido para algunos valores de  $n$ , sí que lo está para todo  $n$  suficientemente grande, por lo que tiene sentido estudiar la convergencia de la sucesión  $x_n/y_n$ .

Dado  $\epsilon > 0$ , podemos tomar  $n_0$  de modo que si  $n \geq n_0$ , además de cumplirse que  $|y_n| \geq |L'|/2$ , se cumpla que

$$|x_n - L| < \frac{|L'| \epsilon}{4}, \quad |y_n - L'| < \frac{|L'|^2 \epsilon}{4(|L'| + 1)}, \quad (1.3)$$

con lo que

$$\begin{aligned} \left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{L}{L'} \right| &= \left| \frac{x_n L' - y_n L}{y_n L'} \right| = \frac{|x_n L' - LL' + LL' - y_n L|}{|y_n| |L'|} \\ &\leq \frac{2}{|L'|^2} (|x_n - L| |L'| + |L| |y_n - L'|) < \epsilon. \end{aligned}$$

4) Dado  $\epsilon > 0$ , existe un  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$  entonces  $|x_n - L| < \epsilon$ , luego

$$||x_n| - |L|| \leq |x_n - L| < \epsilon$$

lo que prueba que  $\{|x_n|\}_{n=0}^{\infty}$  converge a  $|L|$ . ■

**Nota** El lector que no esté familiarizado con este tipo de argumentos puede tener la tentación de decir: “vale, el límite de una suma es la suma de los límites”, lógico, y despreocuparse de la demostración. Sin embargo, no es buena idea. Alguien dijo que la diferencia entre un truco y una técnica es que la técnica se usa más de una vez, y las demostraciones anteriores contienen varias “técnicas” que conviene asimilar. Si el lector invierte parte de su tiempo, no sólo en asegurarse de que entiende los argumentos anteriores, sino en ser asimilarlos hasta el punto de ser capaz de repetirlos en cualquier momento sin mirar el texto, habrá invertido bien su tiempo.

Para apreciar la naturalidad de los argumentos conviene distinguir entre el orden lógico en el que es razonable presentar el argumento y el orden “psicológico” en el que es natural pensarlo. Así, lo primero en que uno debe pensar al tratar de probar 1) es en la línea (1.2). El primer término y el último expresan lo que queremos demostrar para que la suma de sucesiones cumpla la definición de límite. El término medio es la descomposición natural del primero para separar los elementos de las dos sucesiones dadas (agrupando el término general y el límite de cada una de ellas). Una vez escrita esa línea, pensamos que la forma más simple de conseguir que la suma sea menor que  $\epsilon$  es pedir que cada sumando sea menor que  $\epsilon/2$ , y entonces empezamos la demostración pidiendo que así sea en virtud de las hipótesis de convergencia de las dos sucesiones dadas. El lector también debería reflexionar sobre por qué es legítimo tomar el mismo  $n_0$  para ambas sucesiones.

En la prueba de 2), el “inicio psicológico” de la demostración es también la fórmula final, y en ella empleamos un “truco” (o mejor, la “técnica”) consistente en separar los sumandos de una resta de productos insertando un término mixto restando y sumando, para luego poder sacar factor común. Sólo tras haber escrito esa línea podemos saber exactamente qué condiciones debemos pedir al principio de la prueba para llegar finalmente al  $\epsilon$  requerido.

En la prueba de 3) usamos la misma “técnica” de separar factores empleada en 2), si bien las cuentas son algo más sofisticadas por la presencia del denominador. Aquí es más evidente la necesidad de escribir primero la parte final de la prueba para deducir cómo debe ser el principio. El lector no debería memorizar las desigualdades (1.3), sino deducir de la línea siguiente que son justo lo necesario para llegar al  $\epsilon$  requerido. ■

Notemos que una sucesión constante  $\{c\}_{n=0}^{\infty}$  converge trivialmente a  $c$ , por lo que la propiedad 2) del teorema anterior implica en particular que

$$\lim_n cx_n = c \lim_n x_n,$$

supuesto que exista el límite de la derecha.

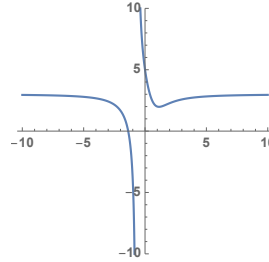
### Ejemplo 1.5

$$\lim_n \frac{3n^3 - 2n + 5}{n^3 + n + 1} = \lim_n \frac{3 - 2/n^2 + 5/n^3}{1 + 1/n^2 + 1/n^3} = 3.$$

En el último paso hemos aplicado repetidamente el teorema anterior. Sabemos que  $1/n$  tiende a 0, luego lo mismo vale para  $2/n^2$ ,  $5/n^3$ , etc. (usando la propiedad del límite de un producto), luego el numerador converge a 3 y el denominador a 1 (por la propiedad del límite de una suma) y el cociente tiende a 3 (por la propiedad del límite de un cociente).

La figura muestra la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{3x^3 - 2x + 5}{x^3 + x + 1}$$



En ella podemos observar cómo la sucesión  $f(n)$  converge a 3. ■

La propiedad 2) del teorema anterior cuando una de las sucesiones converge a 0 se puede generalizar:

**Teorema 1.6** *El producto de una sucesión que tiende a 0 por otra acotada tiende a 0.*

DEMOSTRACIÓN: Si  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  tiende a 0 y  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  está acotada por  $M$ , entonces, para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$ , entonces  $|a_n| < \epsilon/M$ , lo que a su vez implica que  $|a_n b_n| = |a_n| |b_n| < M\epsilon/M = \epsilon$ , y esto significa que  $\lim_n a_n b_n = 0$ . ■

**Límites infinitos** Las sucesiones que no son convergentes se llaman *divergentes*, pero dentro de las sucesiones divergentes hay algunas que muestran un comportamiento muy simple:

**Definición 1.7** Si  $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$  es una sucesión de números complejos, diremos que *diverge a  $\infty$* , y lo representaremos por  $\lim_n z_n = \infty$ , si para todo número real  $M > 0$  existe un número natural  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$  entonces  $|z_n| > M$ .

Esto significa que los términos de la sucesión se hacen cada vez más grandes. En el caso de sucesiones de números reales es posible introducir una precisión:

Diremos que  $\lim_n x_n = +\infty$  (resp.  $-\infty$ ) si para todo número real  $M > 0$  existe un número natural  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$  entonces  $x_n > M$  (resp.  $x_n < -M$ ).

Así, por ejemplo, se cumple que

$$\lim_n (-1)^n n = \infty,$$

pero no es cierto que esta sucesión diverja ni a  $+\infty$  ni a  $-\infty$ . En general, una sucesión diverge a  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) si diverge a  $\infty$  y sus términos son todos positivos (resp. negativos) a partir de un término dado.

**Teorema 1.8** Si  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ,  $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$  son sucesiones de números complejos (que supondremos de números reales en los apartados en los que supongamos que divergen a  $\pm\infty$ ), entonces:

1. Si ambas divergen a  $+\infty$  o ambas divergen a  $-\infty$ , entonces lo mismo le sucede a  $\{x_n + y_n\}_{n=0}^{\infty}$ .
2. Si una de ellas está acotada (en particular, si converge) y la otra diverge a  $\infty$  (o a  $\pm\infty$ ), lo mismo le sucede a la suma.
3. Si ambas convergen a números no nulos o divergen a  $\infty$  o a  $\pm\infty$ , entonces

$$\lim_n x_n y_n = (\lim_n x_n)(\lim_n y_n),$$

entendiendo que  $\infty\infty = \infty$  y que  $(\pm\infty)(\pm\infty) = \pm\infty$  (con la misma regla de los signos válida para los números enteros), así como que  $c\infty = \infty$  y que  $c(\pm\infty) = \pm\infty$ , donde el signo se mantiene si  $c > 0$  o se invierte si  $c < 0$ .

4. Si  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  está acotada y  $\lim_n y_n = \infty$ , entonces

$$\lim_n \frac{x_n}{y_n} = 0.$$

5. Si  $\lim_n x_n = L \neq 0$ ,  $\lim_n y_n = 0$ , entonces

$$\lim_n \frac{x_n}{y_n} = \infty.$$

DEMOSTRACIÓN: Veamos únicamente algunos casos, y dejamos el resto como ejercicio para el lector:

- 3) Supongamos, por ejemplo, que  $\lim_n x_n = L < 0$  y que  $\lim_n y_n = -\infty$ .

Dado  $M > 0$ , existe un  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$ , entonces

$$|x_n - L| < |L|/2, \quad y_n < \frac{2M}{L} < 0$$

Entonces,  $x_n - L < -L/2$ , luego  $x_n < L/2 < 0$  y

$$x_n y_n > \frac{L}{2} \frac{2M}{L} = M,$$

lo que prueba que  $\lim_n x_n y_n = +\infty$ .

- 5) Dado  $M > 0$ , existe un  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$ , entonces

$$|x_n - L| < \frac{|L|}{2}, \quad |y_n| < \frac{|L|}{2M}.$$

Entonces  $||x_n| - |L|| \leq |x_n - L| < |L|/2$ , luego  $|x_n| > |L| - |L|/2 = |L|/2$ , luego

$$\left| \frac{x_n}{y_n} \right| > \frac{|L|/2}{|L|/(2M)} = M,$$

lo que prueba que el límite del cociente es  $\infty$ . ■

**Nota** La prueba de 3) “empieza realmente” en la condición  $|x_n - L| < |L|/2$ . Ésta nos asegura que  $x_n$  se mantendrá alejado de 0, concretamente, se mantendrá siempre por debajo de  $L/2 < 0$ . Sabiendo esto, basta hacer que  $y_n$  se haga menor que  $M/(L/2)$  para que el producto sea mayor que  $M$ .

En 5) sucede algo similar. La condición  $|x_n - L| < |L|/2$  garantiza que  $|x_n|$  se mantendrá alejado de 0, siempre por encima de  $|L|/2$ . Así, al dividirlo entre un número menor que  $(M/(|L|/2))^{-1}$  nos aseguramos de que módulo del cociente sea mayor que  $M$ . ■

**Indeterminaciones** Los teoremas que hemos demostrado nos permiten calcular el límite de una suma, producto o cociente de dos sucesiones convergentes a partir de los límites de éstas salvo en algunos casos. Por ejemplo, el primer apartado del teorema anterior nos dice que si las dos sucesiones convergen a  $+\infty$ , la suma convergerá a  $+\infty$ , pero no nos dice qué sucede si una converge a  $+\infty$  y otra a  $-\infty$ . Y no nos lo dice porque no nos lo puede decir, ya que el resultado dependerá de las sucesiones concretas que consideremos. Por ejemplo, aquí tenemos tres casos de suma de dos sucesiones que convergen a  $+\infty$  y a  $-\infty$  con resultados distintos:

$$\begin{aligned}\lim_n(n^2 - n) &= \lim_n n^2(1 - 1/n) = +\infty, \\ \lim_n(n - n^2) &= -\infty, \\ \lim_n((3 + n) - n) &= \lim_n 3 = 3,\end{aligned}$$

Incluso si consideramos  $x_n = (-1)^n + n$  e  $y_n = -n$ , la suma es  $x_n + y_n = (-1)^n$ , que no tiene límite.

Esto se expresa diciendo que  $\infty - \infty$  es una *indeterminación*, es decir, que al restar dos sucesiones que tiendan a  $+\infty$ , el resultado puede ser cualquiera (incluso que no exista el límite) según cuáles sean las sucesiones consideradas. En general, las operaciones algebraicas de suma (o resta), producto y cociente de sucesiones dan lugar a las indeterminaciones siguientes:

$$\infty - \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty.$$

Cualquier otro caso puede resolverse *a priori*, es decir, sin necesidad de analizar las sucesiones consideradas. Por ejemplo, si una sucesión tiende a 3 y otra tiende a  $\infty$ , el cociente tenderá a 0, sean cuales sean las sucesiones (por el apartado 4 del teorema anterior). Pero si tenemos un cociente de sucesiones divergentes a  $\infty$ , el resultado puede ser cualquiera. Por ejemplo, aquí tenemos tres casos de indeterminaciones de tipo  $\infty/\infty$  que se resuelven de forma distinta:

$$\begin{aligned}\lim_n \frac{n^2}{n} &= \lim_n n = +\infty, \\ \lim_n \frac{n}{n^2} &= \lim_n \frac{1}{n} = 0, \\ \lim_n \frac{3n^2}{n^2} &= \lim_n 3 = 3,\end{aligned}$$

y si tomamos  $x_n = (-1)^n n$ ,  $y_n = n$ , resulta que el cociente no tiene límite. Para el caso  $0/0$  y  $0 \cdot \infty$  basta modificar los mismos ejemplos teniendo en cuenta que

$$\frac{a}{b} = \frac{1/b}{1/a} = \frac{1}{b} \cdot a,$$

con lo que una indeterminación de tipo  $\infty/\infty$  puede expresarse igualmente en la forma  $0/0$  o  $0 \cdot \infty$  con el mismo resultado.

Hemos puesto ejemplos obvios, pero muchos otros casos no tienen por qué serlo. Por ejemplo, ya hemos visto cómo resolver la indeterminación  $\infty/\infty$  en el ejemplo

$$\lim_n \frac{3n^3 - 2n + 5}{n^3 + n + 1} = 3.$$

Un caso no inmediato de tipo  $\infty - \infty$  es

$$\begin{aligned} \lim_n \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \lim_n \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \lim_n \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0. \end{aligned}$$

**Ejercicio:** Probar que, ciertamente  $\lim_n \sqrt{n} = +\infty$ . ■

**Potencias** El resultado siguiente justifica que  $\lim_n (0.4 + 0.8i)^n = 0$ , tal y como habíamos constatado gráficamente:

**Ejemplo 1.9** Si un número complejo  $z$  cumple  $|z| \neq 1$ , entonces

$$\lim_n z^n = \begin{cases} 0 & \text{si } |z| < 1, \\ \infty & \text{si } |z| > 1. \end{cases} \quad (1.4)$$

En efecto, si  $|z| > 1$ , podemos expresarlo como  $|z| = 1 + \delta$ , donde  $\delta > 0$ . Entonces

$$|z^n| = |z|^n = (1 + \delta)^n = 1 + n\delta + \dots > n\delta,$$

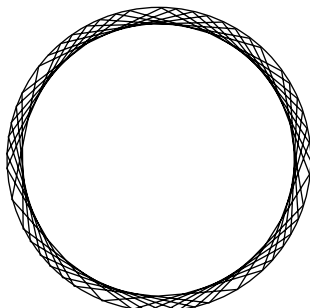
donde los puntos suspensivos representan los términos restantes del desarrollo del binomio de Newton, que son todos positivos. Por lo tanto, dado  $M > 0$ , basta tomar un número natural  $n_0 > M/\delta$  para asegurar que si  $n \geq n_0$  se cumple que  $|z^n| > n\delta > M$ , luego la sucesión diverge a  $\infty$ .

Si  $|z| < 1$  basta tener en cuenta que  $z^n = 1/(1/z)^n$  y que  $|1/z| > 1$ , por lo que el denominador tiende a  $\infty$  y el cociente tiende a 0. ■

**Nota** El resultado anterior no dice nada en el caso en que  $|z| = 1$ . Si  $z$  es real sólo hay dos casos posibles:  $\lim_n 1^n = 1$ , mientras que la sucesión  $(-1)^n$  no tiene límite. Si  $z$  es imaginario podemos encontrarnos también con sucesiones oscilantes, como  $i^n$ , que es

$$1, \quad i, \quad -1, \quad -i, \quad 1, \quad i, \quad -1, \quad -i, \quad 1, \quad \dots$$

pero también con casos más sofisticados, como el de  $z = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ , cuyas primeras 50 potencias están representadas en la figura siguiente (unidas por una poligonal):



Vemos que las potencias de  $z$  van recorriendo la circunferencia unitaria sin tender a ningún punto en concreto. Puede probarse que la sucesión no es oscilante (no pasa dos veces por el mismo punto), pero no tiene límite. ■

Refinando el argumento del ejemplo anterior podemos resolver una indeterminación de tipo  $0 \cdot \infty$ :

**Ejemplo 1.10** Si  $z$  es un número complejo tal que  $|z| < 1$ , entonces

$$\lim_n nz^n = 0.$$

Si  $z = 0$  es trivial y, en caso contrario, cambiando  $z$  por  $1/z$  basta probar que si  $|z| > 1$  entonces

$$\lim_n \frac{n}{z^n} = 0.$$

Sea  $|z| = 1 + \delta$ , con  $\delta > 0$ . Entonces, para  $n \geq 2$ , tenemos que

$$|z^n| = (1 + \delta)^n \geq \binom{n}{2} \delta^2 = \frac{n(n-1)}{2} \delta^2,$$

luego

$$\left| \frac{n}{z^n} \right| \leq \frac{2}{\delta^2} \frac{1}{n-1}.$$

Por lo tanto, dado  $\epsilon > 0$ , todo

$$n \geq 1 + \frac{2}{\delta^2 \epsilon}$$

cumple que  $|n/z^n| < \epsilon$ , luego la sucesión converge a 0. ■

Terminamos esta sección con algunas propiedades básicas de interés sobre convergencia de sucesiones.

**Subsucesiones y colas** Una *subsucesión* de una sucesión  $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$  es una sucesión de la forma  $\{z_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ , donde  $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$  es una sucesión de números naturales estrictamente creciente, es decir, tal que

$$n_0 < n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

Notemos que esto implica que  $k \leq n_k$ , pues si existiera un  $k$  tal que  $n_k < k$ , podríamos tomar el menor posible, y entonces  $n_{n_k} < n_k < k$ , luego  $n_k$  contradiría la minimalidad de  $k$ .

De las definiciones se sigue inmediatamente que si una sucesión  $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$  converge a un límite  $L$  o diverge a  $\infty$  o  $\pm\infty$ , lo mismo les sucede a todas sus subsucesiones.

Un concepto similar es el de “cola” de una sucesión  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ , que es una sucesión de la forma  $\{z_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ , es decir, con la sucesión formada por todos los términos de la sucesión dada a partir de uno dado.

También es inmediato que una sucesión converge a un límite  $L$  o diverge a  $\infty$  o  $\pm\infty$  si y sólo si una cualquiera de sus colas cumple lo mismo, si y sólo si todas lo cumplen. ■

**Límites y desigualdades** Otra propiedad de los límites que conviene tener presente es ésta:

**Teorema 1.11** Si  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ,  $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$  son dos sucesiones de números reales tales que

$$\lim_n x_n = L, \quad \lim_n y_n = L', \quad x_n \leq y_n \text{ para todo } n,$$

entonces  $L \leq L'$ .

DEMOSTRACIÓN: Si fuera  $L' < L$ , dado  $\epsilon = (L - L')/2$ , existiría un  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$ , entonces  $|x_n - L| < \epsilon$ ,  $|y_n - L'| < \epsilon$ , pero entonces

$$L - \epsilon \leq x_n \leq y_n < L' + \epsilon,$$

luego  $L - L' < 2\epsilon = L - L'$ , contradicción. ■

En particular, si una sucesión convergente cumple  $a \leq x_n \leq b$ , entonces

$$a \leq \lim_n x_n \leq b.$$

Basta aplicar el teorema anterior tomando como una de las sucesiones la sucesión constantemente igual a  $a$  o a  $b$ .

**Teorema 1.12 (Criterio del emparedado)** Dadas tres sucesiones de números reales que cumplan  $x_n \leq y_n \leq z_n$  para todo  $n$ , si existen  $\lim_n x_n = \lim_n z_n = L$ , entonces la sucesión intermedia también es convergente y  $\lim_n y_n = L$ .

DEMOSTRACIÓN: Dado  $\epsilon > 0$ , existe un natural  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$ , entonces  $|x_n - L| < \epsilon$  y  $|z_n - L| < \epsilon$ . Por lo tanto,

$$L - \epsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < L + \epsilon,$$

luego  $|y_n - L| < \epsilon$ . ■

**Convergencia de sucesiones de números complejos** Si  $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$  es una sucesión de números complejos, podemos considerar las sucesiones  $\{\operatorname{Re} z_n\}_{n=0}^{\infty}$ ,  $\{\operatorname{Im} z_n\}_{n=0}^{\infty}$  formadas por las partes reales y las partes imaginarias de sus términos. Entre ellas tenemos la relación siguiente:

**Teorema 1.13** *Una sucesión  $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$  de números complejos converge a un límite  $L$  si y sólo si la sucesión de las partes reales de sus términos converge a  $\operatorname{Re} L$  y la de las partes imaginarias converge a  $\operatorname{Im} L$ .*

DEMOSTRACIÓN: Si  $\{\operatorname{Re} z_n\}_{n=0}^{\infty}$  converge a  $\operatorname{Re} L$  y la sucesión  $\{\operatorname{Im} z_n\}_{n=0}^{\infty}$  converge a  $\operatorname{Im} L$ , entonces, como  $z_n = \operatorname{Re} z_n + i \operatorname{Im} z_n$ , tenemos que  $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$  converge a  $L = \operatorname{Re} L + i \operatorname{Im} L$  por los resultados sobre el límite de una suma o producto de sucesiones.

Para probar la implicación opuesta basta observar que si  $\lim_n z_n = L_1 + iL_2$ , donde  $z_n = x_n + y_n i$ , dado  $\epsilon > 0$  podemos tomar un  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$ , entonces  $|x_n + y_n i - L_1 - iL_2| < \epsilon$ , pero

$$|x_n - L_1|, |y_n - L_2| \leq |(x_n - L_1) + i(y_n - L_2)| < \epsilon,$$

luego las sucesiones  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ,  $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$  convergen a  $L_1$  y  $L_2$ , respectivamente. ■

**Ejercicio:** Probar que si una sucesión de números complejos  $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$  converge a un límite  $L$ , entonces la sucesión  $\{\bar{z}_n\}_{n=0}^{\infty}$  de sus conjugados converge a  $\bar{L}$ .

## 1.3 La completitud de $\mathbb{R}$

Todos los ejemplos de límites que hemos calculado hasta ahora resultan de aplicar directa o indirectamente la definición de límite, y sucede para aplicarla, es decir, para justificar que una sucesión converge a un límite  $L$ , es necesario conocer  $L$  de antemano, y esto es una limitación muy restrictiva. Ahora vamos a ver cómo la completitud de  $\mathbb{R}$  nos permite justificar que muchas sucesiones convergen sin necesidad de conocer *a priori* su límite.

**Supremos e ínfimos** En primer lugar conviene reformular la condición de completitud en términos más prácticos. Para ello introducimos unas definiciones:

**Definición 1.14** Si  $X$  es un conjunto ordenado y  $A \subset X$ , una *cota superior* (resp. *inferior*) de  $A$  en  $X$  es un elemento  $c \in X$  tal que  $a \leq c$  (resp.  $c \leq a$ ) para todo  $a \in A$ .

El *supremo* (resp. *ínfimo*) de  $A$  es la menor de sus cotas superiores (resp. la mayor de sus cotas inferiores).

En general un subconjunto de un conjunto ordenado no tiene por qué tener supremo o ínfimo, pero es inmediato a partir de la definición que si un conjunto tiene supremo (resp. ínfimo), éste es único.

Si un conjunto tiene un máximo (resp. mínimo) elemento, entonces éste es también su supremo (resp. ínfimo). No obstante, un conjunto puede tener supremo o ínfimo sin tener máximo o mínimo.

**Ejemplo** El conjunto  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$  no tiene máximo elemento, pero es claro que 3 es su supremo en  $\mathbb{R}$ .

Similarmente, el conjunto  $B = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$  no tiene mínimo elemento, pero 0 es su ínfimo en  $\mathbb{R}$ . ■

**Teorema 1.15** *Todo subconjunto de  $\mathbb{R}$  no vacío y acotado superiormente (resp. inferiormente) tiene supremo (resp. ínfimo).*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $S \subset \mathbb{R}$  un conjunto no vacío y acotado superiormente. Sea  $A$  el conjunto de todos los números reales que no son cotas superiores de  $S$  y  $B$  el conjunto de todas las cotas superiores de  $S$ . Entonces  $B$  es no vacío por hipótesis, y  $A$  también lo es, pues si  $x \in S$ , entonces  $x - 1 \in A$ .

Por otra parte, si  $x \in A$  e  $y \in B$ , necesariamente  $x < y$ , pues por definición de  $A$  existe un  $u \in S$  tal que  $x < u$ , y por definición de  $B$  es  $x < u \leq y$ .

Por la completitud de  $\mathbb{R}$  existe un número real  $s$  que es, o bien el máximo de  $A$ , o bien el mínimo de  $B$ . Ahora bien,  $s$  no puede ser el máximo de  $A$ , pues si  $s \in A$  existe un  $x \in S$  tal que  $s < x$ , y podemos tomar  $s < u < x$ , de modo que  $u$  no es una cota superior de  $S$ , luego está en  $A$ , pero es mayor que  $s$ , contradicción.

Por consiguiente,  $s$  es el mínimo de  $B$ , es decir, es la menor cota superior de  $S$ , luego es el supremo de  $S$ . La prueba para ínfimos es análoga. ■

**Sucesiones monótonas** Una sucesión de números reales  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  es *monótona creciente* si cumple

$$x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots$$

La sucesión es *monótona decreciente* si cumple

$$x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots$$

Si las desigualdades son estrictas se dice que la sucesión es estrictamente creciente o decreciente.

**Teorema 1.16** Si  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  es una sucesión de números reales monótona creciente (resp. decreciente), entonces es convergente si y sólo si está acotada superiormente (resp. inferiormente) y en tal caso su límite es su supremo (resp. su ínfimo).

DEMOSTRACIÓN: Hemos probado que toda sucesión convergente está acotada (superior e inferiormente). Supongamos ahora que la sucesión dada es monótona creciente y que está acotada superiormente (el caso opuesto es análogo). La acotación hay que entenderla como que el conjunto  $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  está acotado superiormente, y obviamente es no vacío, luego el teorema 1.15 nos da que existe su supremo  $L$ . Vamos a probar que es el límite de la sucesión. Para ello tomamos  $\epsilon > 0$  y usamos que  $L - \epsilon$  no es una cota superior de la sucesión, luego existe un  $n_0$  tal que  $L - \epsilon < x_{n_0} \leq L$ . Por la monotonía, si  $n \geq n_0$  se cumple que  $L - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq L$ , pero esto equivale a que  $|x_n - L| = L - x_n < \epsilon$ . ■

El interés de este teorema reside en que podemos demostrar que una sucesión es monótona y está acotada —con lo que estamos probando que es convergente— sin necesidad de conocer su límite. Veamos una aplicación, para lo cual necesitamos probar una desigualdad sencilla:

**Desigualdad de Bernoulli** Si  $a > -1$  es un número real no nulo y  $n \geq 2$  es un número natural, entonces

$$(1 + a)^n > 1 + na.$$

En efecto, razonamos por inducción sobre  $n$ . Para  $n = 2$  es

$$(1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2 > 1 + 2a.$$

Si vale para  $n$ , entonces

$$(1 + a)^{n+1} = (1 + a)^n(1 + a) > (1 + na)(1 + a) = 1 + (n+1)a + na^2 > 1 + (n+1)a. \quad \blacksquare$$

Ahora demostraremos que si

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1},$$

la sucesión  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  es monótona creciente y la sucesión  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  es monótona decreciente.

En efecto,

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \frac{n}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \frac{n}{n+1}.$$

En este punto aplicamos la desigualdad de Bernoulli, que nos da:

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} > \left(1 + \frac{n}{n^2-1}\right) \frac{n}{n+1} > \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) \frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n} \frac{n}{n+1} = 1,$$

luego  $b_n < b_{n-1}$ . Similarmente:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1},$$

y nuevamente aplicamos la desigualdad de Bernoulli:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} > \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{n}{n-1} = \frac{n-1}{n} \frac{n}{n-1} = 1,$$

luego  $a_{n-1} < a_n$ .

Además,  $a_n < b_n \leq b_1 = 4$ , luego  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  está acotada superiormente, e igualmente  $b_n > a_n \geq a_1 = 2$ , luego  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  está acotada inferiormente. Esto implica que ambas sucesiones convergen, pero la relación

$$b_n = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

implica que ambas convergen al mismo límite (ya que el último factor converge a 1). Dicho límite común es el supremo del conjunto formado por los  $a_n$  y el ínfimo de los  $b_n$ .

Tal vez el lector considere que el teorema 1.16 es “pobre” en el sentido de que nos asegura que una sucesión tiene límite, pero no nos dice cuál es. Pero sucede que esto no es un inconveniente, sino todo lo contrario, una ventaja, porque nos permite obtener números “nuevos” como límites de sucesiones de números “conocidos” (normalmente de números racionales).

Es el caso de las sucesiones que acabamos de discutir. No tiene sentido preguntarse “cual” es su límite, porque su límite resulta no ser 2, ni 3, ni  $87/32$ , ni  $\sqrt{2}$  ni ningún otro número que conozcamos de antemano. Lo máximo que podemos hacer es darle nombre y usar las propias sucesiones para obtener aproximaciones racionales. Euler le dio el nombre de número  $e$ :

**Definición 1.17** El número de Euler es

$$e = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

No sólo hemos probado que ambas sucesiones convergen, sino también que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

que nos permiten calcular aproximaciones decimales de  $e$  tan precisas como queramos. Por ejemplo, con  $n = 1$  obtenemos que  $2 < e < 4$ , lo cual no dice mucho. La tabla siguiente recoge algunos términos de las sucesiones. Ambas convergen a  $e$ , sin duda, pero vemos lo hacen muy lentamente. Con 5 términos sólo obtenemos que la parte entera de  $e$  es exactamente 2. Con 10 términos no obtenemos ni siquiera el valor de la primera cifra decimal de  $e$ . Necesitamos llegar a  $n = 74$  para asegurar que vale 7 y hasta  $n = 791$  no podemos confirmar la segunda cifra decimal.

$n$	$a_n$	$b_n$
1	2	4
5	2.48	2.99
10	2.59	2.86
74	2.70	2.74
791	2.7165	2.71999991
1 000	2.7169	2.7197
1 000 000	2.718280	2.718284
10 000 000	2.71828169	2.71828197
100 000 000	2.71828181	2.71828185

Así pues, de momento, sólo con la ayuda de un ordenador podemos concluir que

$$e = 2.7182818\dots$$

Veamos otro ejemplo de aplicación del criterio de convergencia de sucesiones monótonas:

**Ejemplo 1.18 (El método de Herón)** Supongamos que queremos calcular la raíz cuadrada de un número real  $k > 0$ . Si, por ejemplo,  $a > \sqrt{k}$ , entonces  $h = k/a < \sqrt{k}$  (y viceversa), luego la media aritmética  $a_1 = (h + a)/2$  será una aproximación mejor de  $\sqrt{k}$  (ya que  $a_1$  y  $\sqrt{k}$  están ambos entre  $h$  y  $a$ ), a partir de la cual podemos calcular una nueva aproximación  $a_2$ , etc. Más precisamente, es razonable conjeturar que la sucesión dada por

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{k}{a_n} \right)$$

convergerá a  $\sqrt{k}$ .

Este método fue descrito por Herón de Alejandría en el siglo I a.C. He aquí un ejemplo para  $k = 2$ , partiendo de  $a_0 = 2$ :

$n$	$h_n$	$a_n$
0	1.000000000000000000000000000000	2.000000000000000000000000000000
1	1.333333333333333333333333333333	1.500000000000000000000000000000
2	1.411764705882352941176471	1.416666666666666666666666666667
3	1.414211438474870017331023	1.414215686274509803921569
4	1.414213562371500186977084	1.414213562374689910626296
5	1.414213562373095048801688	1.414213562373095048801690

Vemos que, en efecto, las dos sucesiones  $\{h_n\}_{n=0}^\infty, \{a_n\}_{n=0}^\infty$  convergen a  $\sqrt{2}$  y que lo hacen muy rápidamente, pues bastan 5 iteraciones para obtener 22 decimales exactos. Vamos a probar que esto no es casual. Conviene expresar el resultado en términos ligeramente más generales:

Dados números reales  $0 < h_0 < a_0$ , formamos las sucesiones:

$$h_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{h_n} + \frac{1}{a_n}} = \frac{2h_n a_n}{h_n + a_n}, \quad a_{n+1} = \frac{h_n + a_n}{2}.$$

Entonces

$$h_0 < h_1 < h_2 < \cdots < \sqrt{h_0 a_0} < \cdots < a_2 < a_1 < a_0$$

y  $\lim_n h_n = \lim_n a_n = \sqrt{h_0 a_0}$ .

En otras palabras: si partimos de dos números cualesquiera  $0 < h_0 < a_0$  y vamos calculando sucesivamente la media armónica y la media aritmética del par de números precedente, obtenemos una sucesión de pares que forman dos sucesiones convergentes a la media geométrica de los números dados, una monótona creciente y otra monótona decreciente.

En realidad se trata de la misma sucesión que habíamos descrito antes para  $k = h_0 a_0$ , porque

$$h_{n+1} a_{n+1} = \frac{2h_n a_n}{h_n + a_n} \frac{h_n + a_n}{2} = h_n a_n,$$

luego la sucesión  $\{h_n a_n\}_{n=0}^{\infty}$  es constante igual a  $k$  o, dicho de otro modo,  $h_n = k/a_n$ .

Según probamos al final de la sección 1.5 de [ITA], si  $h_n < a_n$ , también se cumple que  $h_{n+1} < a_{n+1}$  (la media armónica de dos números distintos es siempre inferior a la media aritmética). Más aún,

$$a_{n+1} = \frac{h_n + a_n}{2} < \frac{a_n + a_n}{2} = a_n,$$

luego la sucesión  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  es monótona decreciente. Como  $h_n = k/a_n$ , es claro que la sucesión  $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$  es monótona creciente. Puesto que  $h_0$  es una cota inferior de la primera y  $a_0$  es una cota superior de la segunda, por 1.16 ambas son convergentes. Digamos que

$$\lim_n h_n = h, \quad \lim_n a_n = a.$$

Tomando límites en

$$a_{n+1} = \frac{h_n + a_n}{2}$$

resulta que  $a = (h + a)/2$ , de donde  $h = a$ . Tomando límites en  $h_n a_n = a_0 b_0$  resulta que  $a^2 = h_0 a_0$ , luego ambas sucesiones convergen a  $\sqrt{a_0 b_0}$ . ■

La rapidez de la convergencia se debe a que, llamando  $d_n = a_n - h_n$ , tenemos que

$$d_{n+1} = \frac{h_n + a_n}{2} - \frac{2h_n a_n}{h_n + a_n} = \frac{(h_n + a_n)^2 - 4h_n a_n}{2(h_n + a_n)} = \frac{(a_n - h_n)^2}{2(h_n + a_n)},$$

luego

$$d_{n+1} = \frac{d_n^2}{4a_{n+1}} < \frac{d_n^2}{4\sqrt{h_0 a_0}}.$$

Así, por ejemplo, si  $4\sqrt{h_0 a_0} \geq 1$ , tenemos que si en una iteración hemos obtenido  $m$  decimales exactos, es decir,  $d_n < 10^{-m}$ , en la iteración siguiente se cumplirá que  $d_{n+1} < 10^{-2m}$ , con lo que tenemos al menos el doble de decimales exactos, como podemos comprobar en el ejemplo de la convergencia a  $\sqrt{2}$ .

**Sucesiones de Cauchy** Ahora vamos a dar un criterio similar al teorema 1.16 pero que no requiere que la sucesión considerada sea monótona, sino que resulta ser una condición necesaria y suficiente para que una sucesión converja que no hace referencia explícita a su límite.

**Definición 1.19** Una sucesión  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  de números complejos es *de Cauchy* si para todo  $\epsilon > 0$  existe un número natural  $n_0$  tal que si  $n_0 \leq m \leq n$ , entonces  $|x_n - x_m| < \epsilon$ .

Así, en lugar de exigir que los términos de la sucesión se aproximen a un límite dado, aquí pedimos meramente que se aproximen entre sí. Sin embargo, el resultado es el mismo:

**Teorema 1.20** Una sucesión de números complejos es convergente si y sólo si es de Cauchy.

Para probar este resultado demostraremos algunos hechos previos. En primer lugar observamos que una implicación es trivial:

Si una sucesión  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  converge a un límite  $L$ , entonces es de Cauchy, pues, dado  $\epsilon > 0$ , existe un  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$ , entonces  $|x_n - L| < \epsilon/2$ , luego si  $n_0 \leq m \leq n$  tenemos que

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - L| + |L - x_m| < \epsilon,$$

luego la sucesión es de Cauchy.

Así pues, sólo queda demostrar que toda sucesión de Cauchy es convergente. Empezamos demostrando lo siguiente:

**Teorema 1.21** Si una sucesión de Cauchy contiene una subsucesión convergente, entonces la sucesión completa converge al mismo límite.

DEMOSTRACIÓN: Sea  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  una sucesión de Cauchy y sea  $\{x_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$  una subsucesión que converja a un límite  $L$ . Dado  $\epsilon > 0$ , existe un  $k_0$  tal que, para todo  $k \geq k_0$ , se cumple que  $|x_{n_k} - L| < \epsilon/2$  y si  $k_0 \leq m \leq n$  entonces  $|x_n - x_m| < \epsilon/2$ . Por lo tanto, si  $n \geq k_0$ , tenemos que

$$|x_n - L| \leq |x_n - x_{n_{k_0}}| + |x_{n_{k_0}} - L| < \epsilon.$$

Esto prueba que  $\lim_n x_n = L$ . ■

**Teorema 1.22** Toda sucesión de Cauchy está acotada.

DEMOSTRACIÓN: dado  $\epsilon = 1$ , existe un  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$  se cumple que  $|x_n - x_{n_0}| < 1$ , luego  $|x_n| = |x_n - x_{n_0} + x_{n_0}| \leq |x_{n_0}| + 1$ , y basta tomar como cota

$$M = \max\{|x_0|, \dots, |x_{n_0-1}|, |x_{n_0}| + 1\}. \quad \blacksquare$$

El último ingrediente para la prueba del teorema 1.20 es un resultado general sobre sucesiones en conjuntos ordenados:

**Teorema 1.23** Toda sucesión en un conjunto totalmente ordenado contiene una subsucesión monótona.

DEMOSTRACIÓN: Sea  $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  el conjunto de las imágenes de la sucesión. Si  $A$  es finito es obvio que la sucesión tiene una subsucesión constante, luego monótona. Supongamos que  $A$  es infinito.

Si todo subconjunto no vacío de  $A$  tiene mínimo podemos tomar  $x_{n_0}$  igual al mínimo de  $A$ , luego  $x_{n_1}$  igual al mínimo de  $A \setminus \{x_{n_0}\}$ , luego  $x_{n_2}$  igual al mínimo de  $A \setminus \{x_{n_0}, x_{n_1}\}$ , y así obtenemos números  $x_{n_0} < x_{n_1} < x_{n_2} < \dots$ , es decir, obtenemos un subconjunto de  $A$  sin máximo.

Así pues, o bien existe un subconjunto de  $A$  sin mínimo o bien existe un subconjunto de  $A$  sin máximo. Los dos casos se tratan igual. Supongamos que hay un subconjunto de  $A$  sin mínimo. Llamémoslo  $B$ .

Sea  $x_{n_0}$  un elemento cualquiera de  $B$ . Como  $B$  no tiene mínimo contiene infinitos términos de la sucesión bajo  $x_{n_0}$ , pero sólo un número finito de ellos tienen índice anterior a  $n_0$ , luego existe un cierto  $x_{n_1}$  en  $B$  de manera que  $x_{n_1} < x_{n_0}$  y  $n_0 < n_1$ . Podemos repetir recurrentemente este proceso y obtener una subsucesión

$$x_{n_0} > x_{n_1} > x_{n_2} > x_{n_3} > x_{n_4} > x_{n_5} > \dots$$

monótona decreciente. ■

Como consecuencia:

**Teorema 1.24 (Teorema de Bolzano-Weierstrass)** *Toda sucesión acotada de números complejos contiene una subsucesión convergente.*

DEMOSTRACIÓN: Para sucesiones de números reales es inmediato: toda sucesión acotada contiene una subsucesión monótona, que también estará acotada, luego será convergente por el teorema 1.16. Si  $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$  es una sucesión acotada de números complejos, donde  $z_n = x_n + y_n i$ , como  $|x_n|, |y_n| \leq |z_n|$ , tenemos que las sucesiones  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  e  $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$  de partes reales e imaginarias también están acotadas. La primera tiene una subsucesión convergente  $\{x_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ , y entonces la subsucesión  $\{y_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ , que también está acotada, tiene a su vez una subsucesión convergente, digamos  $\{y_{n_{k_l}}\}_{l=0}^{\infty}$ . Entonces las subsucesiones  $\{x_{n_{k_l}}\}_{l=0}^{\infty}$  e  $\{y_{n_{k_l}}\}_{l=0}^{\infty}$  son ambas convergentes, luego por 1.13 la subsucesión  $\{z_{n_{k_l}}\}_{l=0}^{\infty}$  también es convergente. ■

Finalmente probamos la caracterización de las sucesiones convergentes:

DEMOSTRACIÓN (de 1.20): Hemos probado que toda sucesión de Cauchy está acotada, luego tiene una subsucesión convergente, luego converge por el teorema 1.21. ■

En el capítulo siguiente apreciaremos la potencia de este resultado. El hecho de que el teorema 1.20 sea válido para sucesiones de números complejos se expresa diciendo que  $\mathbb{C}$  es también un cuerpo completo.<sup>3</sup>

<sup>3</sup>Más precisamente,  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{C}$  son cuerpos métricos completos. Un *cuerpo métrico* es un cuerpo  $K$  en el que está definido un valor absoluto que cumple las propiedades enunciadas en la página 6 (en realidad la cuarta es consecuencia de las tres primeras). Con dicho valor absoluto podemos definir las sucesiones convergentes y las sucesiones de Cauchy en  $K$ , y la completitud significa, por definición, que ambas nociones son equivalentes. Cabe señalar que  $\mathbb{R}$  es el único cuerpo ordenado completo, pero existen muchos cuerpos métricos completos aparte de  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{C}$ .

## Capítulo II

# Series infinitas

Estudiamos ahora la clase de sucesiones más importante de las que vamos a tratar, la de las series (sumas) infinitas. En la introducción hemos considerado muchos ejemplos de tales series. Este capítulo se divide en cuatro secciones: en la primera introduciremos los conceptos básicos, en la segunda presentaremos algunos criterios de convergencia, es decir, criterios que permiten decidir si una serie dada converge o diverge. En la tercera introduciremos la noción de convergencia absoluta, que, cuando se da, justifica numerosas manipulaciones con series que no son necesariamente ciertas en general, como reordenar los sumandos, invertir el orden de dos sumatorios, etc. Finalmente presentaremos la clase más importante de series infinitas: las series de potencias.

### 2.1 Convergencia de series infinitas

**Definición 2.1** Si  $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$  es una sucesión de números complejos, la *serie infinita* que determina es la sucesión  $\{S_k\}_{k=0}^{\infty}$  dada por

$$S_k = \sum_{n=0}^k z_n = z_0 + \cdots + z_k.$$

Se representa por

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + \cdots$$

Es decir,  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  es la forma habitual de representar la sucesión  $\{S_k\}_{k=0}^{\infty}$ . Los términos  $S_k$  se llaman *sumas parciales* de la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ .

En estos términos, la serie de Grandi, de la que hemos hablado en la introducción,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

es un objeto matemático perfectamente definido, a saber, la sucesión de sumas parciales

$$S_0 = 1, \quad S_1 = 0, \quad S_2 = 1, \quad S_3 = 0, \quad S_4 = 1, \quad \dots$$

que es una sucesión divergente.

En general, se dice que una serie  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  es *convergente* o *divergente* cuando lo es la sucesión de sus sumas parciales, y en tal caso el límite se representa igualmente por

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \lim_k \sum_{n=0}^k z_n = z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + \dots$$

Así pues, según el contexto, una expresión de la forma  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  puede hacer referencia a una sucesión de sumas parciales no necesariamente convergente, o bien a su límite, cuando sí que es convergente. Por ejemplo, si  $z$  es un número complejo, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots$$

no es sino la sucesión  $\{S_k\}_{k=0}^{\infty}$ , donde

$$S_k = \sum_{n=0}^k z^n = 1 + z + z^2 + \dots + z^k.$$

Por ejemplo, si  $z = 1$  es  $S_k = k + 1$  y la serie es divergente. Sin embargo, si  $z \neq 1$  podemos usar la factorización

$$z^{k+1} - 1 = (z - 1)(1 + z + \dots + z^k)$$

para expresar

$$S_k = \frac{1 - z^{k+1}}{1 - z},$$

y así, si  $|z| < 1$ , como  $\lim_k z^{k+1} = 0$ , vemos que  $\lim_k S_k = 1/(1 - z)$ , y esto se expresa normalmente así:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots = \frac{1}{1 - z},$$

de modo que aquí el miembro izquierdo ya no representa la sucesión  $\{S_k\}_{k=0}^{\infty}$ , sino su límite  $\lim_k S_k$ . Así, por ejemplo,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2, \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{2}{3}.$$

En la introducción hemos discutido la paradoja de Zenón sobre Aquiles y la tortuga y la hemos resuelto sumando una serie geométrica.

**Ejercicio:** Dos ciclistas se encuentran separados por una distancia de 10 km. Ambos corren el uno hacia el otro a 20 km/h hasta encontrarse. En el momento de iniciar el viaje, junto a uno de ellos hay una libélula<sup>1</sup> que empieza a volar a 40 km/h hasta que llega junto al otro ciclista, entonces cambia de sentido y vuelve a volar hasta que encuentra al primero, y luego vuela de nuevo hasta el segundo, y así sucesivamente. ¿Qué distancia habrá recorrido la libélula cuando los ciclistas se encuentren? La respuesta es muy simple: los ciclistas se encontrarán al cabo de un cuarto de hora, luego el espacio recorrido por la libélula habrá sido de 10 km. Se cuenta que este problema le fue planteado a John von Neumann, quien dio la respuesta en pocos segundos. Cuando le preguntaron cómo había llegado al resultado dijo: sólo era cuestión de sumar una serie. Calcular la serie que sumó von Neumann y comprobar que el resultado es el previsible.

Las propiedades más básicas de las series infinitas son las traducciones de las propiedades análogas de los límites de sucesiones arbitrarias:

**Teorema 2.2** Sean  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  dos series convergentes de números complejos. Entonces

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n,$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} ax_n = a \sum_{n=0}^{\infty} x_n,$$

$$3. \sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^m x_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} x_n.$$

DEMOSTRACIÓN: Basta comprobar que se cumplen las relaciones análogas entre las sumas parciales. Por ejemplo, en el caso de 1) tenemos que

$$\sum_{n=0}^k (x_n + y_n) = \sum_{n=0}^k x_n + \sum_{n=0}^k y_n,$$

y basta aplicar que el límite de una suma es la suma de los límites.

Para 2) tenemos

$$\sum_{n=0}^k ax_n = a \sum_{n=0}^k x_n$$

y basta usar que el límite de un número por una sucesión es el producto del número por el límite.

Para 3), si  $k > m$  se cumple que

$$\sum_{n=0}^k x_n = \sum_{n=0}^m x_n + \sum_{n=m+1}^k x_n,$$

y basta aplicar que el límite de un número más una sucesión es el número más el límite de la sucesión. ■

<sup>1</sup>El problema original hablaba de una mosca, pero las moscas no vuelan tan rápido.

**Nota** Obviamente es falso que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - 1) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1),$$

pues la serie de la izquierda converge a 0, mientras que las de la derecha son divergentes, lo que muestra que en la propiedad 1) del teorema anterior es fundamental la hipótesis de que las dos series de la derecha convergen. ■

Veamos algunos ejemplos sencillos de suma de series. Ya hemos visto cómo sumar series geométricas. Un poco más en general:

**Ejemplo 2.3 (Series geométricas)**

$$\sum_{n=k}^{\infty} z^n = z^k (1 + z + z^2 + \dots) = \frac{z^k}{1 - z}, \quad \text{si } |z| < 1. \quad (2.1)$$

Así:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 1.$$

**Ejemplo 2.4 (Series aritmético-geométricas)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots = \frac{z}{(1 - z)^2}, \quad \text{si } |z| < 1. \quad (2.2)$$

Así:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots = 2.$$

En efecto, las sumas parciales son

$$S_k = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots + k z^k,$$

con lo que

$$z S_k = z^2 + 2z^3 + 3z^4 + \dots + k z^{k+1},$$

luego, si  $z \neq 1$ , se cumple que

$$(1 - z) S_k = z + z^2 + z^3 + \dots + z^k - k z^{k+1} = \sum_{n=1}^k z^n - k z^{k+1}.$$

Por lo tanto:

$$S_k = \frac{1}{1 - z} \sum_{n=1}^k z^n - \frac{z}{1 - z} k z^k.$$

El ejemplo 1.10 muestra que el último término tiende a 0, por lo que al tomar límites obtenemos la expresión del enunciado. ■

**Ejercicio:** Sumar la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} (an + b)z^n$ , para  $|z| < 1$ .

**Ejemplo 2.5**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots = 1.$$

En efecto, basta tener en cuenta que

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

por lo que las sumas parciales son

$$S_k = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{k+1}.$$

■

**Sumas de Cesàro** Hemos señalado en la introducción que uno de los argumentos de Grandi en favor de su igualdad

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}$$

era que éste es el resultado que se obtiene al hacer  $x = 1$  en la fórmula para la suma de la serie geométrica

$$1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + \cdots = \frac{1}{1+z}.$$

Otro de sus argumentos fue sistematizado por Ernesto Cesàro en 1890. La base es el teorema siguiente:

**Teorema 2.6** Si una sucesión de números complejos cumple  $\lim_n z_n = L$ , entonces

$$\lim_n \frac{z_1 + \cdots + z_n}{n} = L.$$

DEMOSTRACIÓN: Dado  $\epsilon > 0$ , podemos tomar  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$ , entonces  $|z_n - L| < \epsilon/2$ . Sea  $n_1 \geq n_0$  tal que si  $n \geq n_1$ , entonces

$$\frac{|z_1 - L + z_2 - L + \cdots + z_{n_0} - L|}{n} < \epsilon/2.$$

Así, para todo  $n \geq n_1$  se cumple que

$$\begin{aligned} \left| \frac{z_1 + \cdots + z_n}{n} - L \right| &= \left| \frac{z_1 - L + z_2 - L + \cdots + z_n - L}{n} \right| \leq \\ &\frac{|z_1 - L + z_2 - L + \cdots + z_{n_0} - L|}{n} + \frac{|z_{n_0+1} - L| + \cdots + |z_n - L|}{n} < \epsilon. \end{aligned}$$

■

Así, Cesàro definió lo que hoy se conoce como *suma de Cesàro* de una serie infinita  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  como

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_k \frac{S_1 + \cdots + S_k}{k},$$

donde  $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$  es la sucesión de las sumas parciales de la serie. De este modo, en virtud del teorema anterior, si una serie es convergente, su suma de Cesàro es su suma usual, pero si es divergente, su suma de Cesàro puede ser finita. Éste es justo el caso de la serie de Grandi, para la cual la sucesión  $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$  es

$$1, \quad 0, \quad 1, \quad 0, \quad 1, \quad 0, \quad \dots,$$

por lo que la sucesión de medias  $s_k = (S_1 + \cdots + S_k)/k$  es

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{4}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{3}{6}, \quad \frac{4}{7}, \quad \frac{4}{8}, \quad \dots$$

cuyos términos pares valen  $s_{2k} = 1/2$  y cuyos términos impares valen

$$s_{2k+1} = \frac{k+1}{2k+1}.$$

Como  $\lim_k s_{2k} = \lim_k s_{2k+1} = 1/2$ , podemos afirmar que, como suma de Cesàro,

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

## 2.2 Criterios de convergencia

Existen muchos criterios para determinar si una serie dada es convergente o divergente. Aquí expondremos únicamente los que vamos a necesitar.

En primer lugar, hay una condición necesaria elemental para que una serie pueda converger:

**Teorema 2.7** *Si una serie  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  es convergente, entonces  $\lim_n z_n = 0$ .*

DEMOSTRACIÓN: Si llamamos  $S_k = \sum_{n=0}^k z_n$  a las sumas parciales de la serie, tenemos que

$$z_n = S_n - S_{n-1},$$

luego tomando límites queda que

$$\lim_n z_n = \lim_n S_n - \lim_n S_{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z_n - \sum_{n=0}^{\infty} z_n = 0. \quad \blacksquare$$

Sin embargo, es importante tener presente que la condición no es suficiente:

**Ejemplo 2.8**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = +\infty. \quad (2.3)$$

En efecto, basta observar que

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) \geq \\ &1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + S_n. \end{aligned}$$

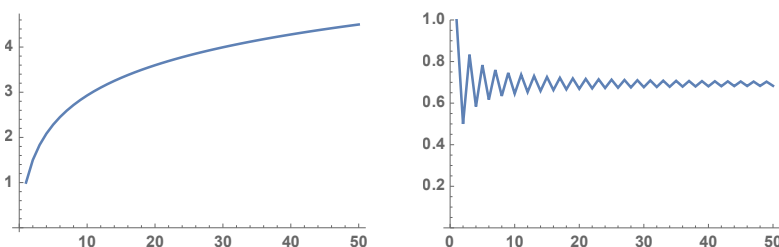
Si la serie convergiera a un límite  $L$ , lo mismo le sucedería a la subsucesión  $S_{2n}$ , luego concluiríamos que  $L \geq 1/2 + L$ , lo cual es absurdo.

Más explícitamente, la desigualdad que hemos probado muestra que

$$S_{2n} \geq n(1/2) + S_1 = n/2 + 1,$$

luego hay una subsucesión de sumas parciales que tiende a  $+\infty$ . Como las sumas parciales forman una sucesión creciente, es claro que, de hecho,  $\lim_n S_n = +\infty$ . ■

La gráfica de la izquierda muestra las 50 primeras sumas parciales de la serie anterior.



En cambio, la gráfica de la derecha muestra las 50 primeras sumas parciales de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \quad (2.4)$$

Vemos que converge, y para probarlo basta aplicar el teorema siguiente:

**Teorema 2.9 (Criterio de Leibniz)** Si  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  es una sucesión decreciente de números reales positivos y convergente a 0, entonces la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_n$  es convergente.

DEMOSTRACIÓN: Consideremos primero las sumas parciales pares. Por ejemplo:

$$S_6 = (x_0 - x_1) + (x_2 - x_3) + (x_4 - x_5) + x_6.$$

Teniendo en cuenta que la sucesión es decreciente, los sumandos así agrupados son todos mayores o iguales que 0, luego en general  $S_{2k} \geq 0$ .

Por otra parte,  $S_{2k+2} = S_{2k} + (-x_{2k+1} + x_{2k+2}) \leq S_{2k}$ , luego la sucesión  $\{S_{2k}\}_{k=0}^{\infty}$  es monótona decreciente y acotada inferiormente por 0. Por lo tanto converge a un número  $L$ .

Ahora,  $S_{2k+1} = S_{2k} - x_{2k+1}$ , luego existe  $\lim_k S_{2k+1} = L - 0$ .

Más aún, se cumple que  $S_{2k+1} = S_{2k-1} + (x_{2k} - x_{2k+1}) \geq S_{2k-1}$ , y en general la sucesión  $\{S_{2k+1}\}_{k=0}^{\infty}$  es monótona creciente. Por lo tanto, la situación es la siguiente:

$$S_1 \leq S_3 \leq S_5 \leq \cdots L \cdots \leq S_4 \leq S_2 \leq S_0.$$

Es claro entonces que la sucesión completa  $\{S_k\}_{k=0}^{\infty}$  converge a  $L$  y además podemos afirmar que  $|S_k - L| \leq |S_{k+1} - S_k| = x_{k+1}$ , es decir, que el error que cometemos al truncar la serie es menor o igual que el primer término despreciado. ■

La última observación que hemos hecho en la demostración hace que en general estas series converjan muy lentamente. Por ejemplo, para el caso de la serie que hemos puesto de ejemplo antes del enunciado, necesitamos sumar 100 términos para garantizar una precisión de una centésima. Por ejemplo,

$$0.6926 < S_{1000} < L < S_{1001} < 0.6937$$

sólo nos asegura dos cifras decimales, mientras que

$$0.69314218058 < S_{100000} < L < S_{100001} < 0.69315218049,$$

nos asegura cuatro decimales.

El teorema siguiente permite a menudo probar la convergencia de una serie comparándola con otra cuya suma puede calcularse explícitamente:

**Teorema 2.10 (Criterio de comparación)** Si  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  son dos series infinitas de números reales tales que  $0 \leq x_n \leq y_n$  y la segunda es convergente, entonces la primera también lo es.

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que

$$\sum_{n=0}^k x_n \leq \sum_{n=0}^k y_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} y_n,$$

luego la primera sucesión es creciente (porque  $x_n \geq 0$ ) y está acotada superiormente por la suma de la segunda serie. Esto implica que es convergente. ■

Por ejemplo, si  $b \geq 2$  es un número natural y  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  es cualquier sucesión de números naturales  $0 \leq c_n < b$ , la serie

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{b^n} \leq (b-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^n} = 1$$

es convergente, de modo que una expresión decimal (en base  $b$ )  $0.c_1c_2c_3\dots$  no es sino la suma de la serie correspondiente.

### Ejemplo 2.11

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 2.$$

(La última suma la da el ejemplo 2.5.) Esto prueba la convergencia de la serie del problema de Basilea (véase la introducción):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = 1.6449340668\dots$$

■

**Teorema 2.12 (Criterio de D'Alembert)** *Sea  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  una sucesión de números reales positivos tal que exista  $\lim_n(x_{n+1}/x_n) = L$ . Entonces, si  $L < 1$  la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  es convergente, mientras que si  $L > 1$  es divergente.*

DEMOSTRACIÓN: Si  $L < 1$ , sea  $\epsilon > 0$  tal que  $L + \epsilon < 1$ . Entonces existe un  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$  entonces  $\frac{x_{n+1}}{x_n} < L + \epsilon$  o, lo que es lo mismo,  $x_{n+1} < x_n(L + \epsilon)$ . Así pues,

$$\begin{aligned} x_{n_0+1} &< x_{n_0}(L + \epsilon), \\ x_{n_0+2} &< x_{n_0+1}(L + \epsilon) < x_{n_0}(L + \epsilon)^2, \\ x_{n_0+3} &< x_{n_0+2}(L + \epsilon) < x_{n_0}(L + \epsilon)^3, \dots \end{aligned}$$

En general, si  $n \geq n_0$ , se cumple que

$$x_n \leq x_{n_0}(L + \epsilon)^{n-n_0} = \frac{x_{n_0}}{(L + \epsilon)^{n_0}}(L + \epsilon)^n.$$

De aquí que si  $k > n_0$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^k x_n &\leq \sum_{n=0}^{n_0} x_n + \frac{x_{n_0}}{(L + \epsilon)^{n_0}} \sum_{n=n_0+1}^k (L + \epsilon)^n \\ &< \sum_{n=0}^{n_0} x_n + \frac{x_{n_0}}{(L + \epsilon)^{n_0}} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} (L + \epsilon)^n < +\infty, \end{aligned}$$

donde la última serie converge porque es geométrica de razón  $L + \epsilon < 1$ . La sucesión de sumas parciales de la serie dada es monótona creciente (porque sus términos son positivos) y está acotada superiormente, luego converge.

Por el contrario, si  $L > 1$ , podemos tomar  $\epsilon > 0$  tal que  $L - \epsilon > 1$ . Existe un  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$ , entonces  $L - \epsilon < x_{n+1}/x_n$ , luego  $x_{n+1} > x_n(L - \epsilon)$ . Análogamente al caso anterior, ahora obtenemos que

$$x_n \geq x_{n_0}(L - \epsilon)^{n-n_0},$$

luego, para  $k > n_0$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^k x_n &\geq \sum_{n=0}^{n_0-1} x_n + x_{n_0} \sum_{n=n_0}^k (L - \epsilon)^{n-n_0} \geq x_{n_0} \sum_{n=0}^{k-n_0} (L - \epsilon)^n \\ &= x_{n_0} \frac{(L - \epsilon)^{k-n_0+1} - 1}{L - \epsilon - 1} \end{aligned}$$

y, como  $L - \epsilon > 1$ , la última expresión tiende a  $+\infty$  con  $k$ , luego la serie dada es divergente. ■

Como aplicación de este criterio podemos probar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

En efecto, tenemos que

$$L = \lim_n \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_n \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

La tabla siguiente muestra los primeros 20 términos de la sucesión de sumas parciales:

$n$	$S_n$	$n$	$S_n$
1	<b>2</b>	11	<b>2.7182818261984928651</b>
2	<b>2.5</b>	12	<b>2.7182818282861685639</b>
3	<b>2.66666666666666666666</b>	13	<b>2.7182818284467590023</b>
4	<b>2.70833333333333333333</b>	14	<b>2.7182818284582297479</b>
5	<b>2.71666666666666666666</b>	15	<b>2.7182818284589944642</b>
6	<b>2.71805555555555555556</b>	16	<b>2.7182818284590422590</b>
7	<b>2.7182539682539682539</b>	17	<b>2.7182818284590450705</b>
8	<b>2.7182787698412698412</b>	18	<b>2.7182818284590452267</b>
9	<b>2.7182815255731922398</b>	19	<b>2.7182818284590452349</b>
10	<b>2.7182818011463844797</b>	20	<b>2.7182818284590452353</b>

Vemos que la convergencia es bastante rápida. Puede probarse que las 19 cifras decimales que muestra la tabla para  $S_{20}$  son exactas. Ahora bien, viendo estas cifras, está claro que no se trata de un número “nuevo”:

**Ejemplo 2.13** *El número de Euler admite el desarrollo en serie infinita:*

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

En efecto, recordemos que hemos definido

$$e = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Desarrollamos, para  $n \geq 2$ :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \frac{1}{k!} \\ &= 2 + \sum_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si  $n \geq m$ , tenemos que

$$2 + \sum_{k=2}^m \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{k!} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

Tomando el límite en  $n$

$$\sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} = 2 + \sum_{k=2}^m \frac{1}{k!} \leq e \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!},$$

y si ahora tomamos el límite en  $m$  llegamos a la igualdad buscada. ■

Tenemos así una sucesión que converge a  $e$  mucho más rápidamente que la expresión con la que lo hemos definido, hasta el punto de que permite aproximarla sin necesidad de ordenadores en un tiempo razonable, por lo menos razonable en el siglo XVIII, pues Euler calculó  $e$  con 18 decimales exactos. Aunque no dijo cómo lo hizo, es probable que lo hiciera a partir de su expresión como serie infinita. Para ello necesitó calcular la suma parcial hasta  $k = 20$ . Con  $k = 10$  se obtienen 7 decimales exactos.

En la página 93 veremos que si, al intentar aplicar el criterio de D'Alembert, obtenemos  $L = 1$ , la serie puede ser tanto convergente como divergente, y para ello aplicaremos el criterio siguiente:

**Teorema 2.14 (Criterio de condensación de Cauchy)** Sea  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  una sucesión decreciente de números reales positivos. Si la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n} = x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_8 + \cdots$$

converge, también lo hace la serie dada.

DEMOSTRACIÓN: Llamemos

$$S_k = \sum_{n=0}^k x_n, \quad T_k = \sum_{n=0}^k 2^n x_{2^n}.$$

Como las sucesiones  $\{S_k\}_{k=0}^{\infty}$  y  $\{T_k\}_{k=0}^{\infty}$  son crecientes, cada serie converge si y sólo si la sucesión correspondiente de sumas parciales está acotada superiormente, luego basta probar que si  $\{T_k\}_{k=0}^{\infty}$  está acotada también lo está  $\{S_k\}_{k=0}^{\infty}$ .

En efecto:

$$S_k \leq S_{2^k-1} = x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) + \cdots + (x_{2^{k-1}} + \cdots + x_{2^k-1}),$$

donde cada paréntesis empieza en una potencia de 2, luego tiene  $2^r - 2^{r-1} = 2^{r-1}$  términos. Ahora sustituimos cada término por el primero de su grupo. Como la sucesión es decreciente, queda que

$$S_k \leq x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \cdots + 2^{k-1}x_{2^{k-1}} = T_{k-1}.$$

Por lo tanto, toda cota de  $\{T_k\}_{k=0}^{\infty}$  lo es también de  $\{S_k\}_{k=0}^{\infty}$ . ■

Notemos que todos los criterios que hemos demostrado están basados en la completitud de  $\mathbb{R}$ , por lo que garantizan la convergencia, pero no dan el valor del límite, lo que abre las puertas a definir muchos números “nuevos” mediante series infinitas. Por ejemplo, hemos probado la convergencia de la serie (2.4), pero no hemos identificado su límite:<sup>2</sup> 0.6931471805...

## 2.3 Convergencia absoluta

Observemos ahora cómo se expresa la definición de sucesión de Cauchy en el caso de las series:

**Teorema 2.15** Una serie  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  de números complejos es convergente si y sólo si para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $n_0$  tal que si  $n_0 \leq m \leq k$ , entonces

$$\left| \sum_{n=m}^k z_n \right| < \epsilon.$$

DEMOSTRACIÓN: La condición del enunciado expresa simplemente que la sucesión  $\{S_k\}_{k=0}^{\infty}$  de las sumas parciales de la serie es una sucesión de Cauchy. Basta tener en cuenta que

$$S_k - S_{m-1} = \sum_{n=m}^k z_n. \quad \blacksquare$$

De aquí se sigue un criterio de convergencia importantísimo:

**Definición 2.16** Se dice que una serie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  de números complejos es *absolutamente convergente* si la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$  es convergente.

En el teorema siguiente es fundamental la completitud de  $\mathbb{R}$ :

---

<sup>2</sup>Veremos en (4.11) que este límite es  $\log 2$ .

**Teorema 2.17** *Toda serie absolutamente convergente es convergente.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  es una serie de números complejos absolutamente convergente. Por el teorema anterior, dado  $\epsilon > 0$ , existe un  $n_0$  tal que si  $n_0 \leq m \leq k$ , entonces  $\left| \sum_{n=m}^k |z_n| \right| < \epsilon$ , pero

$$\left| \sum_{n=m}^k z_n \right| \leq \sum_{n=m}^k |z_n| < \epsilon,$$

luego la serie dada también cumple la condición del teorema anterior, luego es convergente. ■

Observemos además que, tomando límites en

$$-\sum_{n=0}^k |z_n| \leq \sum_{n=0}^k z_n \leq \sum_{n=0}^k |z_n|,$$

obtenemos que

$$-\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} z_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |z_n|,$$

que se traduce en la versión infinita de la desigualdad triangular:

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} z_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |z_n|.$$

Sin embargo, el recíproco del teorema anterior no es cierto. Las series convergentes que no son absolutamente convergentes se llaman *condicionalmente convergentes*. Un ejemplo es la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

La convergencia absoluta es una hipótesis necesaria en muchos resultados sobre series infinitas. Veamos un primer ejemplo:

**Definición 2.18** Sean  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  y  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  series de números complejos. Llamaremos *producto de Cauchy* de estas series a la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n x_k \cdot y_{n-k} \right)$ .

La intención es que la serie que acabamos de definir converja al producto de las dos series de partida, pero esto no ocurre necesariamente si al menos una de ellas no converge absolutamente.

**Teorema 2.19** *Si  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  y  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  son dos series convergentes de números complejos al menos una de las cuales converge absolutamente, entonces*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k} \right) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que la serie que converge absolutamente es  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  y definamos

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n, \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k}, \quad C_n = \sum_{k=0}^n c_k,$$

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^n b_k, \quad \beta_n = B_n - B.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} C_n &= c_0 + \cdots + c_n = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots + (a_0 b_n + \cdots + a_n b_0) \\ &= a_0 B_n + \cdots + a_n B_0 = a_0(B + \beta_n) + \cdots + a_n(B + \beta_0) \\ &= A_n B + (a_0 \beta_n + \cdots + a_n \beta_0) \end{aligned}$$

El teorema quedará probado si vemos que  $a_0 \beta_n + \cdots + a_n \beta_0$  tiende a 0.

Sea  $\epsilon > 0$ . Tomemos  $K > \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ . Sea  $M = \sup\{|\beta_n| \mid n \geq 0\}$  (la sucesión  $\beta_n$  tiende a 0, luego está acotada). Existe un número natural  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$ , entonces  $|\beta_n| < \epsilon/2K$  y  $\sum_{k=n_0+1}^n |a_k| < \epsilon/2M$ .

En consecuencia, si  $n \geq 2n_0$ ,

$$\begin{aligned} |a_0 \beta_n + \cdots + a_n \beta_0| &\leq \sum_{k=0}^n |a_k \beta_{n-k}| = \sum_{k=0}^{n_0} |a_k \beta_{n-k}| + \sum_{k=n_0+1}^n |a_k \beta_{n-k}| \\ &< \frac{\epsilon}{2K} \sum_{k=0}^{n_0} |a_k| + M \sum_{k=n_0+1}^n |a_k| \leq \frac{\epsilon}{2K} K + \frac{\epsilon}{2M} M = \epsilon. \end{aligned}$$

■

Por ejemplo, si aplicamos este teorema a la serie geométrica obtenemos que

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n z^k z^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n,$$

y manipulando ligeramente la serie obtenemos de nuevo la suma de la serie del ejemplo 2.4. Ahora bien multiplicando de nuevo obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z)^3} &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (k+1) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} z^n. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\frac{z}{(1-z)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} z^n, \quad \frac{z^2}{(1-z)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)n}{2} z^n,$$

luego

$$\frac{z + z^2}{(1 - z)^3} = z + \sum_{n=2}^{\infty} n^2 z^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n.$$

Así pues:

**Ejemplo 2.20** Si  $|z| < 1$ , se cumple que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = z + 4z^2 + 9z^3 + 16z^4 + \dots = \frac{z(z+1)}{(1-z)^3}.$$

Ahora bien, como advertíamos, si ninguna de las series converge absolutamente el teorema anterior no tiene por qué cumplirse:

**Ejemplo 2.21** Consideremos la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

La serie converge por el criterio de Leibniz. El producto de Cauchy de esta serie por sí misma tiene término general

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}.$$

Cuando  $n \geq k$  tenemos

$$(n-k+1)(k+1) = \left(\frac{n}{2} + 1\right)^2 - \left(\frac{n}{2} - k\right)^2 \leq \left(\frac{n}{2} + 1\right)^2,$$

luego

$$\frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}} \geq \frac{1}{\frac{n}{2} + 1} = \frac{2}{n+2}.$$

Por consiguiente

$$|c_n| \geq \sum_{k=0}^n \frac{2}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2}.$$

Esta expresión converge a 2, luego  $c_n$  no converge a 0 y el producto de Cauchy no converge. El teorema anterior prueba, pues, que la serie dada es condicionalmente convergente. ■

**Ejemplo 2.22**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots = \frac{1}{e}.$$

En efecto, por el teorema anterior

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1+1)^n = 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1. \quad \blacksquare$$

De aquí se deduce una consecuencia interesante:

**Teorema 2.23** *El número  $e$  es irracional.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que  $e = m/n$ , con lo que

$$\frac{n}{m} = e^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Multiplicando por  $m!$  queda:

$$n(m-1)! = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k m!}{k!} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^k m!}{k!},$$

pero, para  $k \leq m$ , tenemos que  $m!/k!$  es un número natural, luego

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^k m!}{k!} = (-1)^{m+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k m!}{(m+k+1)!} \in \mathbb{Z}.$$

Así pues,

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k m!}{(m+k+1)!} \in \mathbb{Z}$$

Pero en la demostración del teorema 2.9 hemos visto que

$$0 < a_0 - a_1 < S < a_0 = \frac{1}{m+1} < \frac{1}{2},$$

lo cual es absurdo. \blacksquare

**Reordenación de series** Otro punto en el que la convergencia absoluta resulta crucial es en el de la reordenación de los términos de una serie.

**Ejemplo 2.24** Consideremos la serie condicionalmente convergente

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} = \frac{S}{2}.$$

Ahora consideremos la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  cuyos términos impares son ceros y sus términos pares son los de la serie anterior, es decir, la serie

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \dots$$

Obviamente su suma es también  $S/2$ . La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{n+1}}{n} + a_n \right)$$

converge a  $3S/2$ . Sus primeros términos son:

$$1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + 0 + \dots$$

Eliminando los ceros obtenemos la serie

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} \dots$$

Vemos que se trata de una reordenación de la serie original, pero converge<sup>3</sup> a  $3S/2$ . ■

Vamos a ver que esto no sucede con las series absolutamente convergentes:

**Teorema 2.25** Si  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  es una serie de números complejos absolutamente convergente y  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  es una aplicación biyectiva, entonces la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} z_{\sigma(n)}$  es absolutamente convergente y tiene la misma suma.

DEMOSTRACIÓN: Una serie es absolutamente convergente si y sólo si las sumas parciales de sus módulos forman un conjunto acotado. Toda suma parcial de los módulos de la reordenación está mayorada por una suma parcial de los módulos de la serie original (tomando los sumandos necesarios para incluir todos los que aparecen en la suma dada). Por tanto las sumas parciales de los módulos de la reordenación están acotadas y la serie converge absolutamente.

<sup>3</sup>En (4.11) veremos que  $S = \log 2$ , luego  $3S/2 = \log(2\sqrt{2})$ .

Sea  $\epsilon > 0$ . Existe un número natural  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$

$$\left| \sum_{k=0}^n z_k - \sum_{k=0}^{\infty} z_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} z_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |z_k| = \sum_{k=0}^{\infty} |z_k| - \sum_{k=0}^n |z_k| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea  $m_0 \geq n_0$  tal que  $\{0, 1, \dots, n_0\} \subset \{\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(m_0)\}$ . Entonces si  $n \geq m_0$ ,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n z_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{\infty} z_k \right| &\leq \left| \sum_{k=0}^n z_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{n_0} z_k \right| + \left| \sum_{k=0}^{n_0} z_k - \sum_{k=0}^{\infty} z_k \right| \\ &< \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |z_k| + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\sum_{k=0}^{\infty} z_{\sigma(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} z_k$ . ■

**Intercambio del orden de suma** Un punto delicado en la manipulación (correcta) de series se produce cuando es necesario intercambiar el orden de dos sumatorios:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn}.$$

Tales intercambios son correctos en el caso de sumas finitas, pues en ambos casos estamos sumando todos los valores  $a_{mn}$  y el resultado tiene que ser el mismo, pero con sumas infinitas ya no es necesariamente cierto. En la introducción hemos visto un contraejemplo. Sin embargo, nuevamente la convergencia absoluta garantiza que el intercambio es correcto:

**Definición 2.26** Dada una *sucesión doble* de números complejos  $\{a_{mn}\}_{m,n=0}^{\infty}$ , definimos la *serie doble*  $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} = \{S_N\}_{N=0}^{\infty}$ , donde  $S_N = \sum_{m,n \leq N} a_{mn}$ .

Cuando la serie doble sea convergente, representaremos con la misma notación a su límite, es decir,

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} = \lim_N \sum_{m,n \leq N} a_{mn}.$$

Diremos que la serie doble es *absolutamente convergente* si la serie  $\sum_{m,n=0}^{\infty} |a_{mn}|$  es convergente.

La serie doble de la página xxxii es convergente, pues  $S_N = 0$  para todo  $N$ , luego

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} = 0.$$

Sin embargo, no es absolutamente convergente, pues para la serie de los valores absolutos se cumple que  $S_N = 2N$ , luego la serie doble diverge.

En la práctica, para comprobar que una serie doble es absolutamente convergente basta ver que las sumas parciales

$$S_N = \sum_{m,n=0}^N |a_{mn}|$$

están acotadas, puesto que la sucesión  $\{S_N\}_{N=0}^{\infty}$  es monótona creciente.

El resultado fundamental es el siguiente:

**Teorema 2.27** Si  $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}$  es una serie doble de números complejos absolutamente convergente, entonces también lo son las series:

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{mn}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}, \quad \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn}$$

y se cumple que

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn}.$$

DEMOSTRACIÓN: Observamos que, para  $N \geq n$ ,

$$\sum_{m=0}^N |a_{mn}| \leq \sum_{m,n \leq N} |a_{mn}| \leq \sum_{m,n=0}^{\infty} |a_{mn}|,$$

luego la serie  $\sum_{m=0}^{\infty} |a_{mn}|$  es convergente, ya que sus sumas parciales están acotadas.

Igualmente se prueba la convergencia absoluta de la segunda serie del enunciado. Ahora:

$$\sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^K |a_{mn}| \leq \sum_{m,n=0}^{\infty} |a_{mn}|,$$

luego tomando el límite en  $K$  queda que

$$\sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^{\infty} |a_{mn}| \leq \sum_{m,n=0}^{\infty} |a_{mn}|.$$

Esto implica la convergencia de la serie  $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{mn}|$ , y además

$$\sum_{m=0}^N \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \right| \leq \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^{\infty} |a_{mn}| \leq \sum_{m,n=0}^{\infty} |a_{mn}|,$$

luego la serie  $\sum_{m=0}^{\infty} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \right|$  también es convergente, e igualmente se prueba la convergencia absoluta de la cuarta serie del enunciado.

A continuación observamos que, fijados números naturales  $M \leq N$ ,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} - \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} \right| \leq \\ & \left| \sum_{m=M+1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \right| + \left| \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} - \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N a_{mn} \right| + \left| \sum_{m,n \leq N} a_{mn} - \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} \right| \\ & \leq \sum_{m=M+1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{mn}| + \sum_{m=0}^M \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} - \sum_{n=0}^N a_{mn} \right| + \sum_{m=M+1}^N \sum_{n=0}^N |a_{mn}| \\ & \quad + \left| \sum_{m,n \leq N} a_{mn} - \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} \right| \leq \\ & \leq 2 \sum_{m=M+1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{mn}| + \sum_{m=0}^M \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} - \sum_{n=0}^N a_{mn} \right| + \left| \sum_{m,n \leq N} a_{mn} - \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} \right|. \end{aligned}$$

Así, dado  $\epsilon > 0$ , podemos tomar un  $M$  tal que

$$\sum_{m=M+1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{mn}| < \frac{\epsilon}{6}$$

y a su vez, podemos tomar un  $N \geq M$  que cumpla:

$$\left| \sum_{m,n \leq N} a_{mn} - \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} \right| < \frac{\epsilon}{3},$$

así como que

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} - \sum_{n=0}^N a_{mn} \right| < \frac{\epsilon}{3(M+1)}, \quad m = 0, \dots, M.$$

Esto hace que

$$\left| \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} - \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} \right| < \epsilon,$$

luego se da la igualdad. Igualmente se prueba que la serie doble coincide con la suma que resulta de disponer los sumatorios en orden inverso. ■

**Asociatividad infinita** Veamos ahora que las series absolutamente convergentes cumplen una versión infinita de la propiedad asociativa. Para enunciarla conviene introducir la notación siguiente:

**Definición 2.28** Si  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  es una sucesión de números complejos,  $A \subset \mathbb{N}$  y  $N$  es un número natural, definimos  $A_N = \{n \in A \mid n \leq N\}$  y

$$\sum_{n \in A} a_n = \lim_N \sum_{n \in A_N} a_n.$$

Notemos que si  $A = \{n_1, \dots, n_r\}$  es un conjunto finito, entonces

$$\sum_{n \in A} a_n = a_{n_1} + \dots + a_{n_r},$$

mientras que si  $A$  es infinito, podemos enumerar sus elementos en orden creciente:

$$n_0 < n_1 < n_2 < \dots$$

y entonces

$$\sum_{n \in A} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n_k}$$

es una serie ordinaria.

Diremos que una serie  $\sum_{n \in A} a_n$  es *absolutamente convergente* si la serie  $\sum_{n \in A} |a_n|$  es convergente, lo cual sucede siempre que  $A$  es finito y cuando  $A$  es infinito y la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n_k}$  es absolutamente convergente. Por lo tanto, toda serie absolutamente convergente en este sentido es también convergente.

Claramente, la serie  $\sum_{n \in A} a_n$  es absolutamente convergente si y sólo si el conjunto de las sumas finitas  $\left\{ \sum_{n \in A_N} |a_n| \mid N \in \mathbb{N} \right\}$  está acotado superiormente, y en tal caso  $\sum_{n \in A_n} |a_n|$  es su supremo.

**Teorema 2.29** *Sea  $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$  una sucesión de subconjuntos de números naturales disjuntos dos a dos y sea  $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$  el conjunto formado por los números que están en alguno de los conjuntos  $A_k$ . Entonces, una serie  $\sum_{n \in A} a_n$  es absolutamente convergente si y sólo si lo son las series  $\sum_{n \in A_k} a_n$  y  $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n \in A_k} |a_n|$ , y en tal caso*

$$\sum_{n \in A} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n \in A_k} a_n.$$

DEMOSTRACIÓN: Si la serie  $\sum_{n \in A} a_n$  es absolutamente convergente, entonces, para cada  $N$ , se cumple que  $\sum_{n \in (A_k)_N} |a_n| \leq \sum_{n \in A} |a_n|$ , luego cada serie  $\sum_{n \in A_k} a_n$  es absolutamente convergente. Más aún,

$$\sum_{k=0}^K \sum_{n \in (A_k)_N} |a_n| \leq \sum_{n \in A} |a_n|,$$

luego tomando el límite en  $N$  queda que

$$\sum_{k=0}^K \sum_{n \in A_k} |a_n| \leq \sum_{n \in A} |a_n|,$$

lo que prueba que la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n \in A_k} |a_n|$  también es convergente (que en este caso es lo mismo que absolutamente convergente, pues sus términos son positivos).

Recíprocamente, si estas series son absolutamente convergentes, para cada número natural  $N$ , todos los elementos de  $A_N$  (que son un número finito) estarán en algún  $A_k$ , con todos los índices  $k$  por debajo de un cierto natural  $K$ , de modo que

$$\sum_{n \in A_N} |a_n| \leq \sum_{k=0}^K \sum_{n \in (A_k)_N} |a_n| \leq \sum_{k=0}^K \sum_{n \in A_k} |a_n| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n \in A_k} |a_n|,$$

lo que prueba que la serie  $\sum_{n \in A} a_n$  es absolutamente convergente.

Suponemos ahora que todas las series son convergentes. Enumeremos los conjuntos  $A_k$  en orden creciente:

$$a_{k0} < a_{k1} < a_{k2} < \dots$$

entendiendo que a  $a_{kn} = 0$  para  $n$  grande si  $A_k$  es finito. Así, por 2.27,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n \in A_k} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn} = \sum_{k,n=0}^{\infty} a_{kn} = \lim_N \sum_{k,n=0}^N a_{kn} = \sum_{n \in A} a_n.$$

En el último paso usamos 2.25, pues la penúltima serie es una subsucesión de una reordenación de la última, en la que los  $a_n$  están dispuestos en la forma

$$a_{0,0} \mid a_{1,0}, \quad a_{0,1}, \quad a_{1,1} \mid a_{2,0}, \quad a_{0,2}, \quad a_{2,1}, \quad a_{1,2}, \quad a_{2,2} \mid \dots$$

■

## 2.4 Series de potencias

Una clase de series con un comportamiento especialmente satisfactorio es el de las series de potencias:

**Teorema 2.30** Sea  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  una sucesión de números complejos y sea  $z_0$  un número complejo no nulo tal que la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$  sea convergente. Sea  $r = |z_0|$ . Entonces la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  converge absolutamente para todo  $z \in \mathbb{C}$  que cumpla  $|z| < r$ .

DEMOSTRACIÓN: Como la serie dada es convergente, la sucesión  $\{a_n z_0^n\}_{n=0}^{\infty}$  tiende a 0, luego está acotada por un cierto  $M > 0$ . Si  $|z| < r$ , entonces

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| (|z|/r)^n \leq M (|z|/r)^n$$

y como  $|z|/r < 1$ , la serie geométrica  $\sum_{n=0}^{\infty} M (|z|/r)^n$  es convergente, luego la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$  también lo es, por comparación, y esto significa que la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  es absolutamente convergente. ■

De este modo, dada una serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , pueden darse tres casos:

1. O bien la serie converge para todo número real positivo, en cuyo caso converge para todo número complejo, por el teorema anterior.
2. O bien la serie no converge para ningún número real positivo, en cuyo caso sólo converge en 0 (pues si convergiera en algún número complejo no nulo, de módulo  $r$ , también lo haría en los números reales menores que  $r$ ).
3. O bien la serie converge en algunos números reales positivos, pero no en todos.

En este caso, si  $t > 0$  es un número real en el que la serie diverge, por el teorema anterior la serie diverge en todo número real  $x > t$ , luego podemos definir el supremo  $R$  del conjunto de todos los números reales  $r > 0$  en los que la serie converge.

Entonces, si  $|z| < R$ , existe un  $|z| < s < R$  en el que la serie converge y, por el teorema anterior, también converge en  $z$ , mientras que si  $|z| > R$ , tomamos  $R < s < |z|$  y tenemos que la serie diverge en  $s$  (porque es mayor que el supremo de los valores para los que converge), y el teorema anterior nos da que la serie también diverge en  $z$ , pues de lo contrario convergería en  $s$ .

Esto nos lleva a la definición siguiente:

**Definición 2.31** Llamaremos *radio de convergencia* de una serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  al supremo  $R$  del conjunto de los números reales positivos en los cuales converge, entendiendo que  $R = 0$  si la serie sólo converge en 0 y que  $R = +\infty$  si converge en todos los números reales. El conjunto  $D_R$  formado por todos los números complejos que cumplen  $|z| < R$  se llama *disco de convergencia* de la serie.

Hemos probado que una serie de potencias de radio de convergencia  $R$  converge absolutamente en todo número complejo que cumpla  $|z| < R$  (es decir, en su disco de convergencia) y diverge en todo número complejo que cumpla  $|z| > R$ . Sobre los puntos de la circunferencia  $|z| = R$  (la frontera del disco de convergencia) la serie puede converger o diverger según los casos.

**Ejemplos** La serie geométrica  $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$  tiene radio de convergencia  $R = 1$ , pues ya sabemos que, para  $|z| < 1$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z},$$

mientras que si  $|z| = 1$  diverge necesariamente, ya que la sucesión  $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$  no converge a 0 (su módulo es siempre 1, y debería converger a  $|0| = 0$ ). Así pues, esta serie diverge en todos los puntos de la circunferencia de su disco de convergencia.

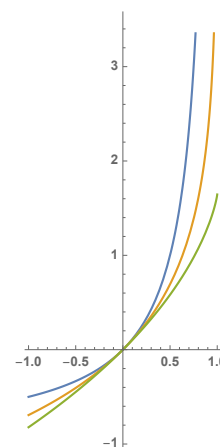
Por otra parte, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$$

también tiene radio de convergencia  $R = 1$ , ya que converge en  $z = -1$  por el criterio de Leibniz (luego  $R \geq 1$ ), pero diverge en  $z = 1$  (por lo que  $R \leq 1$ ). Así, en este caso la serie converge en algunos puntos de la circunferencia de su disco de convergencia, pero diverge en otros.

Finalmente, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$$



converge absolutamente en todos los números que cumplen  $|z| \leq 1$ , ya que está mayorada por  $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$ , que es convergente. Sin embargo, diverge en todo número real  $r > 1$ , por el criterio de D'Alembert, pues

$$\lim_n \frac{r^{n+1}/(n+1)^2}{r^n/n^2} = \lim_n \frac{rn^2}{(n+1)^2} = \lim_n \frac{r}{(1+1/n)^2} = r > 1.$$

Por lo tanto, el radio de convergencia es también  $R = 1$ , pero ahora la serie converge absolutamente en todos los puntos de la circunferencia de su radio de convergencia.

La figura muestra las gráficas de las funciones definidas por estas tres series de potencias. La mayor es la primera, la intermedia la segunda y la menor la tercera. ■

En el segundo de los ejemplos anteriores no hemos concretado qué ocurre con los números de módulo 1. Sólo hemos visto que hay uno en el que la serie converge y otro ( $z = 1$ ) en el que diverge. Vamos a probar que en realidad  $z = 1$  es la única excepción. Para ello necesitamos un resultado general:

**Teorema 2.32 (Fórmula de suma por partes)** Sean  $\{a_n\}_{n=0}^l$  y  $\{b_n\}_{n=0}^l$  sucesiones finitas de números complejos. Sea  $A_n = \sum_{i=0}^n a_i$  (con el convenio de que  $A_{-1} = 0$ ). Entonces,<sup>4</sup> si  $0 \leq k \leq l$ :

$$\sum_{n=k}^l a_n b_n = A_l b_l - A_{k-1} b_k - \sum_{n=k}^{l-1} A_n (b_{n+1} - b_n).$$

<sup>4</sup>Si el lector está familiarizado con el cálculo integral, notará una analogía con la fórmula de integración por partes:

$$\int_k^l f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_k^l - \int_k^l f(x)g'(x) dx.$$

la analogía es  $f(x) \leftrightarrow A_n$ ,  $f'(x) \leftrightarrow A_n - A_{n-1} = a_n$ ,  $g(x) \leftrightarrow b_n$ ,  $g'(x) \leftrightarrow b_{n+1} - b_n$ .

DEMOSTRACIÓN:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=k}^l a_n b_n &= \sum_{n=k}^l (A_n - A_{n-1}) b_n = \sum_{n=k}^l A_n b_n - \sum_{n=k}^l A_{n-1} b_n \\
 &= \sum_{n=k}^{l-1} A_n b_n + A_l b_l - \sum_{n=k+1}^l A_{n-1} b_n - A_{k-1} b_k \\
 &= A_l b_l - A_{k-1} b_k + \sum_{n=k}^{l-1} A_n b_n - \sum_{n=k}^{l-1} A_n b_{n+1} \\
 &= A_l b_l - A_{k-1} b_k - \sum_{n=k}^{l-1} A_n (b_{n+1} - b_n). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.33** *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots$$

converge en todos los números complejos que cumplen  $|z| \leq 1$  excepto en  $z = 1$ .

DEMOSTRACIÓN: Aplicamos el teorema anterior con  $a_n = z^n$ ,  $b_n = 1/n$ :

$$A_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Notemos que si  $|z| \leq 1$ , entonces  $|1 - z^n| \leq 1 + |z|^n \leq 2$ . Entonces, si  $0 \leq k \leq l$ ,

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{n=k}^l \frac{1}{n} z^n \right| &= \left| \frac{1 - z^{l+1}}{1 - z} \frac{1}{l} - \frac{1 - z^k}{1 - z} \frac{1}{k} - \sum_{n=k}^{l-1} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) \right| \\
 &\leq \frac{2}{|1 - z|} \left( \frac{1}{l} + \frac{1}{k} + \sum_{n=k}^{l-1} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right) = \frac{2}{|1 - z|} \frac{2}{k} = \frac{4}{|1 - z|} \frac{1}{k}.
 \end{aligned}$$

De aquí se sigue que la sucesión de sumas parciales es una sucesión de Cauchy, luego la serie converge.  $\blacksquare$

Las series de potencias pueden verse como polinomios de grado infinito. Ciertamente, se suman como polinomios:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n,$$

y por el teorema 2.19 también se multiplican como polinomios:

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n.$$

En ambos casos se cumple que las series para la suma y el producto convergen al menos donde convergen las de los sumandos y los factores, respectivamente.



## Capítulo III

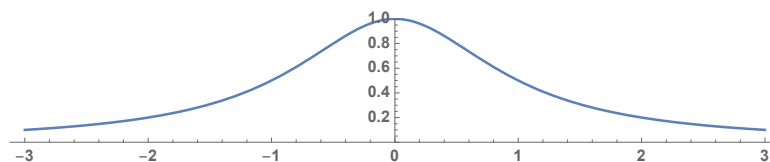
# Continuidad de funciones

En los capítulos anteriores hemos presentado los resultados fundamentales sobre convergencia de sucesiones y series infinitas, y ahora vamos a completar nuestra base teórica con algunos resultados sobre funciones  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , es decir, con formas de hacer corresponder a cada punto  $x$  de un dominio  $D \subset \mathbb{C}$  un cierto número complejo  $f(x)$ , lo que incluye la posibilidad de que  $D \subset \mathbb{R}$  y que  $f$  tome valores en  $\mathbb{R}$ . Consideremos por ejemplo las funciones

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad f_2(x) = \frac{1}{x^2 - 1}, \quad f_3(x) = \frac{F[x]}{x^2 + 1}.$$

(Recordemos que la función  $F[x]$  representa la parte fraccionaria de  $x$ .)

Las funciones  $f_1$  y  $f_3$  las consideramos definidas en  $D = \mathbb{R}$  mientras que como dominio de  $f_2$  consideramos<sup>1</sup>  $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ . He aquí la gráfica de la primera:

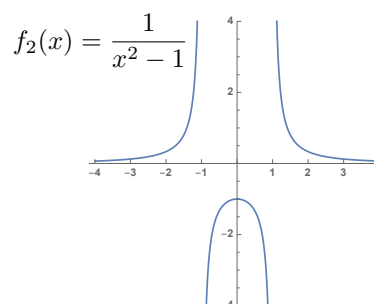


Vemos que puede dibujarse “de un solo trazo”, “sin levantar el lápiz del papel” (prescindiendo de que empieza en  $-\infty$  y termina en  $+\infty$ , por lo que sólo podemos dibujar un fragmento, pero podríamos prolongarlo cuanto quisiéramos en ambos sentidos sin levantar el lápiz del papel).

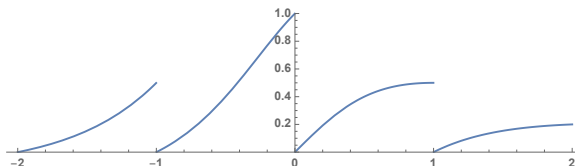
---

<sup>1</sup>Notemos que una misma expresión, como  $1/(x^2 - 1)$  permite definir funciones distintas sobre dominios distintos. Podríamos considerar la función definida por esa misma expresión con dominio  $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ , o también  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$ , etc. Obviamente, esta expresión no define una imagen para los valores  $\pm 1$ , luego dichos puntos no pueden estar en ningún dominio que consideremos para una función definida por ella. Cuando no se especifica el dominio, lo usual es entender que es el máximo posible, que en este caso es  $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ , o  $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$  si por el contexto se entiende que tratamos con funciones de variable real.

No ocurre lo mismo con la segunda función. El hecho de que —necesariamente— no esté definida en  $\pm 1$  se ve reflejado en la gráfica en que ahora necesitamos “tres trazos” para dibujarla. Para pasar del fragmento situado a la izquierda del  $-1$  al que está situado a la derecha tenemos que levantar el lápiz, y cuando llegamos a la izquierda del  $1$  hay que dar un salto de nuevo para seguir a la derecha:



La gráfica del tercer ejemplo tiene un aspecto diferente. Ahora tenemos infinitos trazos, y para pasar de uno al siguiente hay que dar un salto con el lápiz, pero esta vez los saltos son finitos:



En este capítulo vamos a exponer la teoría necesaria para analizar el comportamiento de funciones como éstas. En primer lugar introduciremos el concepto de “función continua”, que nos permitirá distinguir las funciones como la del primer ejemplo que hemos puesto, las que tienen gráfica “de un solo trazo” y obtener resultados sobre ellas que no son aplicables al caso de funciones discontinuas, como las de los otros dos ejemplos. Después discutiremos el concepto de límite de funciones, que nos servirá para describir tanto el comportamiento de las funciones continuas como el de las discontinuas. Por ejemplo, según veremos, algunas de las propiedades que vemos en las gráficas anteriores se pueden expresar así:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f_2(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f_3(x) = 1.$$

Finalmente probaremos algunos resultados fundamentales sobre funciones continuas y daremos varias aplicaciones interesantes.

### 3.1 Funciones continuas

La definición siguiente pretende capturar la diferencia que se da entre una función como la primera de los tres ejemplos que acabamos de considerar y las otras dos:

**Definición 3.1** Una función  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es *continua* en un punto  $a \in D$  si para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que si  $x \in D$  cumple  $|x - a| < \delta$ , entonces  $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ . Diremos que  $f$  es *continua* si lo es en todos los puntos de su dominio  $D$ .

Para interpretar este concepto conviene probar la caracterización siguiente:

**Teorema 3.2** Una función  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es continua en un punto  $a \in D$  si y sólo si para toda sucesión  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  contenida en  $D$  tal que  $\lim_n x_n = a$ , se cumple que  $\lim_n f(x_n) = f(a)$ .

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que  $f$  es continua en  $a$  y sea  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  una sucesión en las condiciones del enunciado. Dado  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que si  $x \in D$  cumple  $|x - a| < \delta$ , entonces  $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ . A su vez, existe un  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$ , entonces  $|x_n - a| < \delta$ , luego  $|f(x_n) - f(a)| < \epsilon$ , y esto prueba que  $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$  converge a  $f(a)$ .

Recíprocamente, si  $f$  no es continua en  $a$ , existe un  $\epsilon > 0$  para el que falla la definición, es decir, que para cualquier  $\delta > 0$ , por ejemplo,  $\delta = 1/n$ , existe un  $x_n \in D$  tal que  $|x_n - a| < 1/n$ , pero  $|f(x_n) - f(a)| \geq \epsilon$ . Entonces la sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge a  $a$ , pero la sucesión  $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$  no converge a  $f(a)$ . ■

Notemos que la condición del teorema anterior puede expresarse así:

$$f(\lim_n x_n) = \lim_n f(x_n)$$

(supuesto que el límite de  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  esté en el dominio de  $f$ ).

Por ejemplo, la función  $f_2$  que hemos considerado más arriba no es continua en  $a = 1$ , simplemente porque no está definida en dicho punto (una condición necesaria para que una función sea continua en un punto es que esté definida en él). Pero, aunque la modificáramos así:

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq \pm 1, \\ 0 & \text{si } x = \pm 1, \end{cases}$$

es decir, aunque consideremos que  $f_2(1) = f_2(-1) = 0$ , sigue habiendo una discontinuidad en 1, pues si una sucesión  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  converge a 1 sin tomar el valor 1, se cumplirá que

$$\lim_n f_2(x_n) = \lim_n \frac{1}{x_n^2 - 1} = \infty \neq f(1).$$

En cambio, pronto será obvio que  $f_2$  es continua en todo punto distinto de  $\pm 1$ .

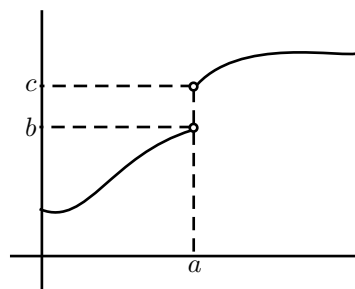
Por otra parte, la función  $f_3$  resulta ser discontinua en todos los números enteros. Para justificarlo tomamos un número entero  $a$  y observamos que entonces  $F[a] = 0$ , de donde  $f(a) = 0$ . Por otro lado, si  $x_n = a - 1/n$ , se cumple que  $E[x_n] = a - 1$ , por lo que  $F[x_n] = x_n - E[x_n] = 1 - 1/n$ , luego

$$\lim_n F[x_n] = 1, \quad \text{luego} \quad \lim_n f_3(x_n) = \frac{1}{a^2 + 1} \neq 0 = f_3(a)$$

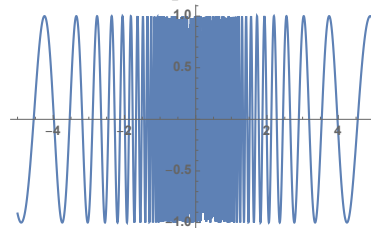
En otras palabras, a medida que  $n$  se hace mayor, tenemos que  $x_n$  se acerca a  $a$  por la izquierda, con lo que  $f(x_n)$  se acerca al extremo superior del salto que  $f_3$  da en  $a$ , mientras que  $f_3(a) = 0$  es el extremo inferior del salto, y esa discrepancia es precisamente la discontinuidad de  $f_3$  en  $a$ .

El lector debería reflexionar hasta convencerse de que estos hechos no dependen de la definición concreta de las funciones consideradas, sino meramente de la presencia de los saltos que ponen de manifiesto las gráficas: allí donde una función presenta un salto (sea infinito, como los de  $f_2$  o finito, como los de  $f_3$ ) tenemos una discontinuidad.

En general, si la gráfica de una función “da un salto” en un punto  $a$ , como muestra la figura, lo que no puede suceder es que  $f(a)$  tome dos valores distintos. La gráfica no permite discernir si  $f(a) = b$  o  $f(a) = c$ , pero no pueden darse las dos opciones a la vez. Si, por ejemplo,  $f(a) \neq b$ , podríamos considerar una sucesión  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  que converja a  $a$  por la izquierda, y entonces se cumplirá que  $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$  convergerá a  $b \neq f(a)$ , lo que implica que  $f$  no es continua en  $a$ . Si, por el contrario,  $f(a) \neq c$ , podemos razonar igualmente con una sucesión que converja a  $a$  por la derecha, con lo que la sucesión de sus imágenes convergerá a  $c$  y  $f$  no será continua en cualquier caso.



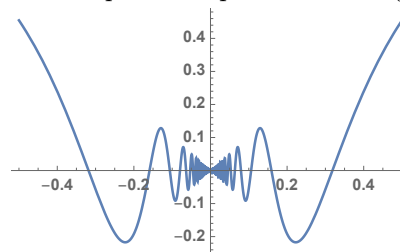
En realidad una función puede ser discontinua por otras características más patológicas que un simple salto. Por ejemplo, esta gráfica muestra una función<sup>2</sup> discontinua en 0 que no da un salto, sino que oscila infinitas veces al acercarse a 0, y las oscilaciones se hacen cada vez más frecuentes,



de modo que al final no se distinguen ya en la gráfica. Técnicamente  $f$  no es continua (cualquiera que sea el valor que le demos a  $f(0)$ ) porque podemos considerar una sucesión  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  que converja a 0 sin tomar el valor 0 de modo que  $f(x_n) = 1$  para todo  $n$ , e igualmente otra sucesión  $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$  que también converja a 0, pero con  $f(y_n) = -1$ , así que, para que  $f$  fuera continua, tendría que cumplirse  $f(0) = \lim_n f(x_n) = 1$ , y también  $f(0) = \lim_n f(y_n) = -1$ , pero  $f(0)$  no puede tomar dos valores, así que  $f$  no puede ser continua.

En suma, las funciones continuas son las funciones cuyas gráficas carecen de saltos y de estas patologías aún peores. Es habitual decir que una función es continua si su gráfica “puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel” y, ciertamente, ninguno de los ejemplos que hemos puesto de funciones discontinuas tiene esta propiedad. Sin embargo, hay que tener presente que también hay funciones continuas patológicas.

Por poner un caso de los menos patológicos, podemos considerar la función que muestra esta gráfica,<sup>3</sup> que también oscila infinitas veces al acercarse a 0, pero las oscilaciones son de amplitud cada vez menor,



<sup>2</sup>Se trata de  $f(x) = \text{sen}(100/x)$ .

<sup>3</sup>Se trata de  $f(x) = x \text{sen}(1/x)$ , completada con  $f(0) = 0$ .

por lo que si  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  es una sucesión convergente a 0, a la sucesión  $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$  no le queda más alternativa que converger también a 0. Se trata de una función continua que no puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel, simplemente porque no puede dibujarse en absoluto a mano: para cruzar el 0 tendríamos que subir y bajar infinitas veces, y aquí sí que tendríamos que darle la razón a Zenón en que eso es imposible en la práctica.

Este ejemplo muestra que en realidad nuestra intuición no es capaz de abarcar en toda su generalidad la noción general de “función continua”. Es cierto que la idea de “función cuya gráfica puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel” es útil a la hora de formarse una idea de qué podemos esperar que cumpla una función continua, pero debemos tener presente que cualquier razonamiento riguroso sobre funciones continuas tendrá que basarse en la definición formal que hemos dado y nunca en consideraciones intuitivas de cuyo alcance real no podemos estar seguros.

Las propiedades de los límites de sucesiones nos dan inmediatamente propiedades análogas sobre funciones continuas:

**Teorema 3.3** *Si  $f, g : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  son funciones continuas en  $D$ , también lo son  $f + g$ ,  $fg$ ,  $\alpha f$  (para cualquier  $\alpha \in \mathbb{C}$ ),  $|f|$  y, si  $g$  no se anula, también  $f/g$ .*

DEMOSTRACIÓN: Aquí hay que entender que  $f + g$  es la función dada por  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ , e igualmente con  $fg$ ,  $\alpha f$  o  $f/g$ . Basta tomar una sucesión  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  contenida en  $D$  que converja a un punto  $a \in D$ . Entonces

$$\begin{aligned} \lim_n (f + g)(x_n) &= \lim_n (f(x_n) + g(x_n)) = \lim_n f(x_n) + \lim_n g(x_n) \\ &= f(a) + g(a) = (f + g)(a). \end{aligned}$$

Esto prueba que  $f + g$  es continua en  $a$ , e igualmente se razona en los demás casos. ■

**Ejercicio:** Probar que la conjugación, es decir, la aplicación  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $z \mapsto \bar{z}$ , es continua.

Es inmediato que las funciones constantes son continuas en  $\mathbb{C}$ , al igual que lo es la función  $f(x) = x$ . Con esto y el teorema anterior se concluye inmediatamente que todas las funciones polinómicas, es decir, las funciones de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

con  $a_i \in \mathbb{C}$ , son continuas en  $\mathbb{C}$ , pues se obtienen a partir de la función  $x$  y de las funciones constantes mediante sumas y productos, luego podemos aplicar el teorema anterior.

**Ejemplo 3.4** Ahora es inmediato que la función

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

es continua en todos los puntos de  $\mathbb{R}$ , pues es un cociente de funciones continuas cuyo denominador no se anula.

Similarmente, si consideramos a  $1$  y  $x^2 - 1$  como funciones definidas en  $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ , podemos concluir que

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

es continua en  $D$ , por el mismo motivo, porque es un cociente de funciones continuas en  $D$  cuyo denominador no se anula en  $D$ . En cambio, en  $\pm 1$  no es continua, porque no está definida. ■

**Intervalos y discos** El dominio de una función  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  puede ser un conjunto muy complicado, pero en la práctica a menudo podremos reducir cualquier análisis al caso de funciones definidas sobre discos

$$D_R = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| < R\}, \quad \bar{D}_R = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| \leq R\},$$

o bien sobre intervalos en  $\mathbb{R}$  de los tipos siguientes:

$$\begin{aligned} ]a, b[ &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, & [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \\ [a, b[ &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, & ]a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \\ ]a, +\infty[ &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, & [a, +\infty[ &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}, \\ ]-\infty, b[ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}, & ]-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}. \end{aligned}$$

**La continuidad y el dominio de definición** Conviene que el lector reflexione sobre una sutileza relativa al concepto de continuidad. Si tenemos una función  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  y  $E \subset D$  es un conjunto menor, podemos considerar la restricción de  $f$  a  $E$ , es decir, la función  $f|_E : E \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  que actúa igual que  $f$ , pero considerada sólo como función definida en  $E$ . Podría pensarse que esto no afecta en nada, pero no es así. La definición de continuidad depende del dominio considerado, pues tiene que cumplirse para todo punto  $x$  del dominio, y si lo aumentamos o lo disminuimos, cambiamos el nivel de exigencia de la definición. En la caracterización dada por el teorema 3.2 esto se refleja en que hay que considerar sucesiones contenidas en el dominio considerado.

Si restringimos el dominio estamos debilitando la definición, luego podemos afirmar que si una función  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es continua en un punto  $a \in D$  y se cumple que  $a \in E \subset D$ , entonces la restricción  $f|_E$  también es continua en  $a$ , pero el recíproco no es cierto.

Consideremos la función  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

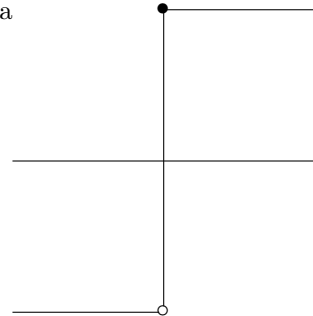
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Claramente es discontinua en 0, pues

$$\lim_n \frac{-1}{n} = 0,$$

pero

$$\lim_n f(-1/n) = -1 \neq 1 = f(0).$$



Sin embargo,  $f|_{[0,1]} : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en 0, ya que se trata de la función constante igual a 1. Al eliminar los números negativos del dominio de  $f$  hemos eliminado los puntos donde podemos tomar sucesiones convergentes a 0 cuyas imágenes no converjan a  $f(0) = 1$ , por lo que la función ha dejado de ser discontinua.

Así pues, que una función sea continua en un punto de un conjunto no implica que siga siendo continua en ese punto si la extendemos a un dominio mayor. Es necesario entender la situación más allá de este ejemplo en particular, porque, con las consideraciones adecuadas, a la hora de estudiar la continuidad de una función en un punto es muy útil limitarse a estudiar una restricción adecuada.

Consideremos, pues, la situación general de una función  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  y  $a \in E \subset D$ . Diremos que  $E$  es un *entorno* de  $a$  en  $D$  si existe un  $\delta > 0$  tal que todo  $z \in D$  que cumpla  $|z - a| < \delta$  esté de hecho en  $E$ .

**Teorema 3.5** *Sea  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función y sea  $a \in E \subset D$ . Si  $E$  es un entorno de  $a$  en  $D$ , entonces  $f$  es continua en  $a$  si y sólo si lo es  $f|_E$ .*

DEMOSTRACIÓN: Si una sucesión  $\{z_n\}_{n=0}^\infty$  contenida en  $D$  converge a  $a$ , entonces existe un  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$  entonces  $|z_n - a| < \delta$ , luego la cola  $\{z_n\}_{n=n_0}^\infty$  está contenida en  $E$  y converge a  $a$ , luego por la continuidad de  $f|_E$  tenemos que  $\{f(z_n)\}_{n=n_0}^\infty$  converge a  $f(a)$ , luego  $\{f(z_n)\}_{n=0}^\infty$  también lo hace, y así  $f$  es continua en  $a$ . El recíproco se cumple siempre. ■

**Ejemplo 3.6** *Un disco  $D_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$  es un entorno en  $\mathbb{C}$  (luego en cualquier subconjunto de  $\mathbb{C}$  que lo contenga) de todos sus puntos.*

En efecto, si  $a \in D_R$ , tomamos  $\delta = R - |a| > 0$  y observamos que si  $z \in \mathbb{C}$  cumple  $|z - a| < \delta$ , entonces  $|z| = |z - a + a| \leq |z - a| + |a| < R - |a| + |a| = R$ , luego  $z \in D_R$ . ■

**Ejercicio:** Probar que  $S_x = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > x\}$  es un entorno en  $\mathbb{C}$  de todos sus puntos.

**Ejercicio:** Probar que un intervalo  $]a, b[$  o  $]a, +\infty[$  o  $]-\infty, b[$  es un entorno en  $\mathbb{R}$  de todos sus puntos.

Hemos visto que los polinomios son funciones continuas. Ahora vamos a probar que también lo son las funciones definidas por series de potencias. Nos apoyaremos en un teorema general que tiene interés en sí mismo:

**Teorema 3.7 (Criterio de mayoración de Weierstrass)** *Dada una sucesión de funciones continuas  $f_n : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  y una sucesión  $\{M_n\}_{n=0}^\infty$  de números reales tal que  $|f_n(z)| \leq M_n$  para todo  $z \in D$  y de modo que la serie  $\sum_{n=0}^\infty M_n$  es convergente, entonces la serie  $\sum_{n=0}^\infty f_n(z)$  es absolutamente convergente y la función  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(z) = \sum_{n=0}^\infty f_n(z)$  es continua.*

DEMOSTRACIÓN: La serie es absolutamente convergente por el criterio de comparación 2.10. Por lo tanto está definida la función  $f$ , y tenemos que probar que es continua en un punto arbitrario  $a \in D$ . Para todo número natural  $k$ , tenemos que

$$\begin{aligned} |f(z) - f(a)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) - \sum_{n=0}^{\infty} f_n(a) \right| \leq \\ & \left| \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) - \sum_{n=0}^k f_n(z) \right| + \left| \sum_{n=0}^k f_n(z) - \sum_{n=0}^k f_n(a) \right| + \left| \sum_{n=0}^k f_n(a) - \sum_{n=0}^{\infty} f_n(a) \right| = \\ & \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(z) \right| + \left| \sum_{n=0}^k (f_n(z) - f_n(a)) \right| + \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(a) \right| \leq \\ & \sum_{n=k+1}^{\infty} |f_n(z)| + \sum_{n=0}^k |f_n(z) - f_n(a)| + \sum_{n=k+1}^{\infty} |f_n(a)| \leq \\ & 2 \sum_{n=k+1}^{\infty} M_n + \sum_{n=0}^k |f_n(z) - f_n(a)|. \end{aligned}$$

Dado  $\epsilon > 0$ , podemos tomar un  $k$  tal que  $\sum_{n=k+1}^{\infty} M_n < \epsilon/4$ .

Como las funciones  $f_n$  son continuas, para  $n = 0, \dots, k$ , existe un  $\delta > 0$  tal que si  $|z - a| < \delta$ , entonces  $|f_n(z) - f_n(a)| < \epsilon/2(k+1)$ . Notemos que podemos tomar el mismo  $\delta$  para las  $k+1$  funciones, pues en principio tomamos uno para cada una y nos quedamos con el menor. Así llegamos a que

$$|f(z) - f(a)| < 2 \frac{\epsilon}{4} + (k+1) \frac{\epsilon}{2(k+1)} = \epsilon,$$

luego  $f$  es continua en  $a$ . ■

De aquí deducimos:

**Teorema 3.8** La función  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  definida por una serie de potencias de radio de convergencia  $R > 0$  es continua en su disco de convergencia  $D_R$  (entendiendo que si  $R = \infty$  entonces  $f$  es continua en  $\mathbb{C}$ ).

DEMOSTRACIÓN: Sólo necesitamos refinar ligeramente el argumento con el que en el capítulo anterior demostramos la convergencia en discos de las series de potencias. Si  $|z| < R$ , tomamos números  $|z| < s < r < R$ . Así, como la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$  es convergente, la sucesión  $\{a_n r^n\}_{n=0}^{\infty}$  tiende a 0, luego está acotada por un  $M > 0$ . Llamemos  $M_n = M(s/r)^n$ . Así, si  $|z| < s$ , tenemos que

$$|a_n z^n| = |a_n r^n| \frac{|z|^n}{|r|^n} \leq M(s/r)^n = M_n.$$

Como  $s/r < 1$ , la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n = M \sum_{n=0}^{\infty} (s/r)^n$$

es convergente, y además las funciones  $a_n z^n$  son continuas, luego el criterio de mayoración de Weierstrass nos da que la función  $f$  es continua sobre el disco  $D_s$  para todo  $s < R$ . Ahora bien, como  $D_s$  es un entorno en  $\mathbb{C}$  de todos sus puntos, el teorema 3.5 nos asegura que  $f$  también es continua en  $z$ , como función definida en  $D_R$ . ■

De aquí obtenemos una propiedad notable de las series de potencias:

**Teorema 3.9** Si  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  y  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$  son dos funciones definidas por series de potencias con radio de convergencia no nulo y ambas coinciden sobre una sucesión  $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$  de números no nulos que converja a 0, entonces  $a_n = b_n$  para todo  $n$ .

En efecto, supongamos que algún  $a_r \neq b_r$ , y sea  $r$  el menor índice para el que esto sucede, de modo que  $a_k = b_k$  para todo  $k < r$ . Entonces

$$f(z) = \sum_{n=0}^{r-1} a_n z^n + a_r z^r + z^{r+1} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+r+1} z^n = \sum_{n=0}^{r-1} a_n z^n + a_r z^r + z^{r+1} f^*(z),$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{r-1} a_n z^n + b_r z^r + z^{r+1} \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+r+1} z^n = \sum_{n=0}^{r-1} b_n z^n + b_r z^r + z^{r+1} g^*(z),$$

donde  $f^*$  y  $g^*$  son funciones definidas por series de potencias con los mismos radios de convergencia. En particular son funciones continuas en 0. Además, la igualdad  $f(\xi_n) = g(\xi_n)$  implica que

$$a_r \xi_n^r + \xi_n^{r+1} f^*(\xi_n) = b_r \xi_n^r + \xi_n^{r+1} g^*(\xi_n),$$

luego

$$a_r + \xi_n f^*(\xi_n) = b_r + \xi_n g^*(\xi_n)$$

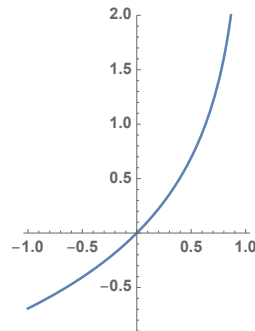
y, tomando límites en  $n$ , llegamos a que  $a_r = b_r$ , en contra de lo supuesto. ■

En particular, si dos series de potencias definen la misma función en un mismo intervalo  $]0, \epsilon[$ , por pequeño que sea, entonces tienen los mismos coeficientes y, por lo tanto, tienen el mismo radio de convergencia y coinciden en todo su disco de convergencia.

**Ejemplo 3.10** El ejemplo 2.33 afirma que la función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

está definida en el disco cerrado  $\bar{D}_1$  excepto en  $x = 1$ . El teorema 3.8 nos asegura que se trata de una función continua al menos en el disco abierto  $D_1$ , pero no nos dice si es continua en los puntos con  $|x| = 1$ . La función  $f$  toma valores reales cuando  $x$  es real, por lo que podemos considerar su restricción  $f : [-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$ , cuya gráfica es la que muestra la figura. Vemos que es, ciertamente, una función continua “típica”, nada “patológica”. ■



Hay muchas funciones de interés definibles mediante series de potencias, pero para estudiarlas adecuadamente necesitamos añadir a nuestra base teórica el concepto de límite de una función, y nos ocupamos de ello en la sección siguiente.

**La ecuación funcional de Cauchy** Terminamos con un resultado elemental que usaremos más adelante:

**Teorema 3.11** *Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua tal que, para todo par de números reales  $x, y$ , se cumple  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ , entonces, llamando  $a = f(1)$ , se cumple que  $f(x) = ax$ , para todo  $x$ .*

DEMOSTRACIÓN: Lo probamos en varios pasos:

1.  $f(0) = 0$

En efecto,  $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$ , luego  $f(0) = 0$ .

2.  $f(-x) = -f(x)$ .

En efecto,  $f(x) + f(-x) = f(x - x) = f(0) = 0$ , luego  $f(-x) = -f(x)$ .

3. Para todo número natural  $n$ , se cumple que  $f(n) = an$ .

Pues  $f(n) = f(1 + \dots + 1) = a + \dots + a = an$ .

4. Para todo número entero  $n$ , se cumple que  $f(n) = an$ .

Esto se sigue de los dos últimos apartados.

5. Para todo número racional  $r$ , se cumple que  $f(r) = ar$ .

Si  $r = m/n$ , donde  $n$  es un número natural, tenemos que

$$am = f(m) = f(nr) = f(r + \dots + r) = nf(r),$$

luego  $f(r) = a(m/n) = ar$ .

6. Para todo número real  $x$ , se cumple que  $f(x) = ax$ .

Podemos tomar una sucesión de números racionales  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  que converja a  $x$  (por ejemplo, la sucesión que resulta de truncar el desarrollo decimal de  $x$ ). La continuidad de  $f$  implica entonces que

$$f(x) = \lim_n f(x_n) = \lim_n ax_n = ax. \quad \blacksquare$$

Cauchy demostró este resultado en 1821 y se planteó si la hipótesis de continuidad es realmente necesaria, es decir, si es cierto que cualquier función que cumpla  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  (y esta relación se conoce ahora como *ecuación funcional de Cauchy*) es necesariamente de la forma  $f(x) = ax$  y, en particular, es continua. La respuesta es sutil: no puede probarse que sea así, pero tampoco es posible dar contraejemplos explícitos, ya que todos ellos requieren de forma esencial el axioma de elección.

**Ejercicio:** Probar que si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cumple la ecuación funcional de Cauchy y es continua en un punto, entonces es continua, luego es de la forma  $f(x) = ax$ .

## 3.2 Límites de funciones

Continuando con la función  $f$  el ejemplo 3.10 (restringida al intervalo real  $D = ]-1, 1[$ ), es inmediato a partir de la definición que  $f(0) = 0$ . La gráfica muestra que  $f$  no se anula en ningún otro punto de su dominio, y no es difícil justificarlo: Es obvio que si  $x > 0$  entonces  $f(x) \geq x > 0$ , mientras que las sumas parciales pares de la serie son

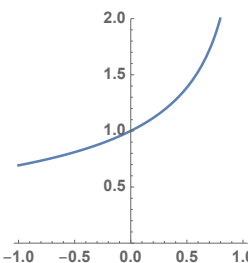
$$S_{2k}(-x) = \left(-\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2}\right) + \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right) + \cdots + \left(-\frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \frac{x^{2k}}{2k}\right)$$

y cada par de sumandos es negativo, por lo que  $S_{2k}(-x) \leq -x + x^2/2$ , luego tomando límites  $f(-x) \leq -x + x^2/2 < 0$ .

Por lo tanto, la función

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

está definida en el intervalo  $]-1, 1[$  salvo en  $x = 0$ , donde se anulan el numerador y el denominador. En este dominio,  $g$  es un cociente de funciones continuas con denominador no nulo, luego es una función continua. Sin embargo, al ver su gráfica, nada apunta a sospechar que  $g$  no está definida en  $x = 0$ . Por el contrario, lo que sugiere la gráfica es que  $g(0) = 1$ . Esta “sugerencia” se expresa matemáticamente así:



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

A continuación vamos a dar una definición precisa de lo que debemos entender por el límite de una función en un punto, de forma que en este caso expresará que la función  $f(x)/x$  toma valores tan parecidos a 1 como queramos siempre que tomemos valores de  $x$  tan parecidos a 0 como haga falta (pero sin tomar el valor 0, donde el cociente no está definido).

**Definición 3.12** Consideremos una función  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  y sea  $a \in \mathbb{C}$  un punto tal que exista al menos una sucesión<sup>4</sup> contenida en  $D$  que converja a  $a$  sin tomar el valor  $a$ .

1. Diremos que  $f(z)$  converge a un límite  $L$  cuando  $z$  tiende a  $a$  si para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que si  $z \in D$  y  $0 < |z - a| < \delta$ , entonces  $|f(z) - L| < \epsilon$ .
2. Diremos que  $f(z)$  diverge a  $\infty$  cuando  $z$  tiende a  $a$  si para todo  $M > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que si  $z \in D$  y  $0 < |z - a| < \delta$ , entonces  $|f(z)| > M$ .

<sup>4</sup>Esta condición se expresa diciendo que  $a$  es un *punto de acumulación* del conjunto  $D$ , y la daremos por supuesta siempre que hablemos de límites de funciones.

3. Si  $f$  toma valores en  $\mathbb{R}$ , diremos que  $f(z)$  *diverge* a  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) cuando  $z$  tiende a  $a$  si para todo  $M > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que si  $z \in D$  y  $0 < |z - a| < \delta$ , entonces  $f(z) > M$  (resp.  $f(z) < -M$ ).
4. Diremos que  $f(z)$  *converge* a un límite  $L$  cuando  $z$  tiende<sup>5</sup> a  $\infty$  si para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $M > 0$  tal que si  $z \in D$  y  $|z| > M$  entonces  $|f(z) - L| < \epsilon$ .
5. Si  $D \subset \mathbb{R}$ , diremos que  $f(z)$  *converge* a un límite  $L$  cuando  $z$  tiende a  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) si para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $M > 0$  tal que si  $z \in D$  y  $z > M$  (resp.  $z < -M$ ) entonces  $|f(z) - L| < \epsilon$ .
6. Diremos que  $f(z)$  *diverge* a  $\infty$  cuando  $z$  tiende a  $\infty$  si para todo  $M > 0$  existe un  $N > 0$  tal que si  $z \in D$  y  $|z| > N$  entonces  $|f(z)| > M$ .
7. Si  $f$  toma valores reales, diremos que  $f(z)$  *diverge* a  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) cuando  $z$  tiende a  $\infty$  si para todo  $M > 0$  existe un  $N > 0$  tal que si  $z \in D$  y  $|z| > N$  entonces  $f(z) > M$  (resp.  $f(z) < -M$ ).
8. Si  $D \subset \mathbb{R}$ , diremos que  $f(z)$  *diverge* a  $\infty$  (resp.  $\pm\infty$  si toma valores reales) cuando  $z$  tiende a  $\pm\infty$  si para todo  $M > 0$  existe un  $N > 0$  tal que si  $z \in D$  cumple  $|z| > N$  (resp.  $z > N$ ,  $z < -N$ ) entonces  $|f(z)| > M$  (resp.  $f(z) > M$ ,  $f(z) < -M$ ).

Es pura rutina comprobar que si una función converge a un límite  $L$  en un punto  $a$  (finito o infinito), éste es único,<sup>6</sup> por lo que podemos representar este hecho con la notación

$$L = \lim_{z \rightarrow a} f(z).$$

Usaremos también esta notación con  $L = \infty$  o  $L = \pm\infty$  para expresar la divergencia de  $f$  en  $a$ . El teorema siguiente caracteriza los límites de funciones en términos de límites de sucesiones:

**Teorema 3.13** *Si  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  y  $a$  es un punto de acumulación de  $D$  (finito o infinito), se cumple que  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = L$  (donde  $L$  es finito o infinito) si y sólo si para toda sucesión  $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$  contenida en  $D$  que no tome el valor  $a$  y  $\lim_n z_n = a$ , se cumple que  $\lim_n f(z_n) = L$ .*

DEMOSTRACIÓN: Como ilustración vamos a probar la caracterización del límite en términos de sucesiones en el primer caso de la definición anterior. Los demás casos son similares.

Si  $f(z)$  tiende a  $L$  cuando  $z$  tiende a  $a$  y  $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$  es una sucesión contenida en  $D$  que converge a  $a$  sin tomar el valor  $a$ , dado  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que si  $z \in D$  y  $0 < |z - a| < \delta$ , entonces  $|f(z) - L| < \epsilon$ . A su vez, existe un  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$  entonces  $0 < |z_n - a| < \delta$ , donde usamos que  $z_n \neq a$ . Por lo tanto  $|f(z_n) - L| < \epsilon$ , y esto prueba que  $\{f(z_n)\}_{n=0}^{\infty}$  converge a  $L$ .

<sup>5</sup>En estos casos tenemos que suponer que  $\infty$  es un punto de acumulación de  $D$ , es decir, que existe al menos una sucesión en  $D$  que tiende a  $\infty$ .

<sup>6</sup>Aquí es donde se usa que  $a$  sea un punto de acumulación. Si no lo es, la definición de convergencia se cumple trivialmente para todos los números  $L$  y también para  $\infty$ .

Recíprocamente, si no es cierto que  $f(z)$  tienda a  $L$  cuando  $z$  tiende a  $a$ , existe un  $\epsilon > 0$  tal que para todo  $\delta > 0$  existe un  $z \in D$  tal que  $0 < |z - a| < \delta$  y  $|f(z) - L| \geq \epsilon$ . Tomando concretamente  $\delta = 1/n$ , encontramos un  $z_n \in D$  tal que  $0 < |z_n - a| < 1/n$  y  $|f(z_n) - L| \geq \epsilon$ , de modo que la sucesión  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  está contenida en  $D$ , converge a  $a$  sin tomar el valor  $a$ , pero  $\{f(z_n)\}_{n=0}^{\infty}$  no converge a  $L$ . ■

**Nota** El teorema anterior puede enunciarse sin presuponer la unicidad del límite ( $f$  converge a  $L$  (o diverge a  $\infty$  o  $\pm\infty$ ) si y sólo si toda sucesión en las condiciones del enunciado converge o diverge al mismo límite). Una vez demostrado esto, podemos usarlo para deducir la unicidad del límite, pues si una función tuviera dos límites en un punto podríamos encontrar sucesiones con dos límites, y ya sabemos que eso es imposible.<sup>7</sup> ■

Existe una conexión muy simple entre los conceptos de continuidad y límites de funciones:

**Teorema 3.14** Una función  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es continua en un punto  $a \in D$  si y sólo si existe

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a).$$

DEMOSTRACIÓN: Es inmediato a partir de la definición de límite. La condición del enunciado significa que para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que si  $z \in D$  y  $0 < |z - a| < \delta$ , entonces  $|f(z) - f(a)| < \epsilon$ , pero la última condición se cumple trivialmente si  $z = a$ , luego podemos cambiar  $0 < |z - a| < \delta$  por  $|z - a| < \delta$ , y entonces obtenemos la definición de continuidad de  $f$  en  $a$ . ■

Así, el límite de una función continua en un punto de su dominio no es sino el valor que toma la función en dicho punto.

**Ejemplo 3.15** Consideremos de nuevo la función  $f(x)$  que hemos considerado al principio de esta sección. Ahora podemos probar fácilmente que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

Para ello basta tener en cuenta que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{n-1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n,$$

donde

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n$$

<sup>7</sup>Y así se aprecia más claramente la necesidad de que  $a$  sea un punto de acumulación, pues en caso contrario no hay sucesiones contenidas en  $D$  que tiendan a  $a$  sin tomar el valor  $a$ , por lo que la caracterización sucesional se cumple trivialmente.

es otra serie de potencias cuyo radio de convergencia es también  $R = 1$  (simplemente porque una serie converge si y sólo si converge al multiplicarla por un  $x$  no nulo, luego la serie de  $h$  converge exactamente en los mismos puntos que la serie de  $f$ ). Ahora bien,  $h$  es una función continua (todas las funciones definidas por series de potencias lo son) y  $h(0) = 1$ . Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = h(0) = 1. \quad \blacksquare$$

Usando la caracterización sucesional, todas las propiedades que conocemos sobre límites de sucesiones se traducen inmediatamente a propiedades sobre límites de funciones (aunque el lector puede demostrarlas también como ejercicio a partir de las definiciones):

**Teorema 3.16** Si  $f, g : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  son dos funciones que cumplen

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = L, \quad \lim_{z \rightarrow a} g(z) = L,$$

donde  $a$  es un número complejo o bien  $\infty$ ,  $\pm\infty$ , entonces:

1.  $\lim_{z \rightarrow a} (f(z) + g(z)) = L + L'$ ,
2.  $\lim_{z \rightarrow a} f(z)g(z) = LL'$ ,
3. Si  $L' \neq 0$ , entonces  $\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{L}{L'}$ .
4.  $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = |L|$ .

El caso de 2) se cumple también el análogo al hecho de que el producto de una sucesión que tiende a 0 por una acotada tiende a 0. En realidad basta que la función esté acotada alrededor de  $a$ , en el sentido siguiente:

**Definición 3.17** Si  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , se dice que  $M$  es una *cota* de  $f$  alrededor del punto  $a$  si existe un  $\delta > 0$  tal que todo  $x \in D$  que cumpla  $|x - a| < \delta$  cumple  $|f(x)| < M$ . Si  $a = \infty$  (resp.  $\pm\infty$ ) hay que cambiar la condición  $|x - a| < \delta$  por  $|x| > N$  (resp.  $x > N$ ,  $x < -N$ ).

**Ejercicio:** Probar que si  $f, g : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  cumplen que  $f$  está acotada alrededor de  $a$  (finito o infinito) y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$ .

Similarmente se cumple el análogo del teorema 1.8. Así, si dos funciones tienden ambas a  $+\infty$ , ambas a  $-\infty$  o una converge y otra tiende a  $\infty$ ,  $\pm\infty$ , lo mismo le sucede a su suma (pero  $\infty - \infty$  es una indeterminación).

Para productos se cumplen también las relaciones análogas a las que tenemos para las sucesiones: el producto de una función que tiende a  $\infty$  en un punto (finito o infinito) por otra que tiende a  $\infty$  o converge a un número no nulo tiende a  $\infty$  (pero  $0 \cdot \infty$  es una indeterminación).

Similarmente, se cumple que  $L/\infty = 0$  y, si  $L \neq 0$ , entonces  $L/0 = \infty$  (pero  $\infty/\infty$  y  $0/0$  son indeterminaciones).

**Ejemplo 3.18** Si  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es una función polinómica no constante, entonces

$$\lim_{z \rightarrow \infty} p(z) = \infty.$$

En efecto, pongamos que  $p(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0$ , con  $c_n \neq 0$ . Para  $z \neq 0$  tenemos que

$$p(z) = z^n \left( c_n + \frac{c_{n-1}}{z} + \dots + \frac{c_1}{z^{n-1}} + \frac{c_0}{z^n} \right).$$

Claramente  $\lim_{z \rightarrow \infty} z = \infty$ , por lo que todos los sumandos tienden a 0 menos el primero, que es constante, luego el segundo factor tiende a  $c_n \neq 0$  y el producto tiende a  $\infty$ . ■

**Nota** En el caso de un polinomio con coeficientes reales y, por simplificar, tal que  $c_n > 0$ , la expresión para  $p(x)$  que hemos dado en el ejemplo anterior muestra de hecho que, si el grado  $n$  es par, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty,$$

mientras que si  $n$  es impar, entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty. \quad \blacksquare$$

**Límites laterales** La existencia o no de límite de una función en un punto depende del dominio de una función de forma similar a como sucede con la continuidad.

Consideremos de nuevo la función

$$f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

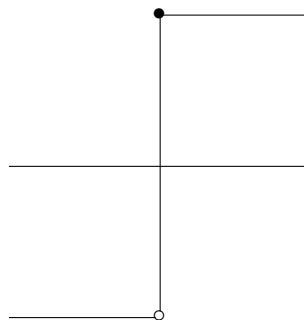
es claro que no existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , pues

$$\lim_n f(1/n) = 1, \quad \lim_n f(-1/n) = -1,$$

luego si existiera el límite de  $f(x)$  tendría que valer a la vez 1 y  $-1$ . En cambio, si restringimos  $f$  a los intervalos  $[-1, 0]$  y  $[0, 1]$ , resulta que en ambos casos existe el límite en 0, y vale  $-1$  en un caso y 1 en el otro. Observemos que  $f|_{[-1, 0]}$  no es continua en 0, porque

$$\lim_{x \rightarrow 0} f|_{[-1, 0]}(x) = -1 \neq 1 = f|_{[-1, 0]}(0),$$

pero el límite existe igualmente.



Es fácil ver que si una función  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tiene límite (finito o infinito) en un punto  $a$  (finito o infinito) y  $E \subset D$  es un conjunto que contiene sucesiones que convergen a  $a$  sin tomar el valor  $a$ , entonces  $f|_E$  tiene límite en  $a$  y vale lo mismo que el límite de  $f$  sin restringir, pero acabamos de ver que el recíproco no es necesariamente cierto. Se cumple, no obstante, el resultado análogo al teorema 3.5:

Si  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  y  $E \subset D$ , se dice que  $E$  es un *entorno reducido* de un punto  $a$  en  $D$  si existe un  $\delta > 0$  tal que todo  $z \in D$  que cumpla  $0 < |z - a| < \delta$  está en  $E$ .

Diremos que  $E$  es un entorno reducido de  $\infty$  (resp.  $\pm\infty$  suponiendo en tal caso que  $D \subset \mathbb{R}$ ) en  $D$  si existe un  $M > 0$  tal que todo  $z \in D$  que cumpla  $|z| > M$  (resp.  $z > M$  o  $z < -M$ ) está en  $E$ .

**Teorema 3.19** *Sea  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función y sea  $E \subset D$ . Si existe  $\lim_{x \rightarrow a} f|_E(x) = L$  (finito o infinito) y  $E$  es un entorno reducido de  $a$  en  $D$ , entonces existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ .*

En otras palabras: si  $E$  contiene todos los puntos de  $D$  suficientemente próximos a  $a$  distintos del propio  $a$  (éste es irrelevante), entonces el límite de  $f|_E$  en  $a$  coincide con el límite de  $f$  en  $a$  (entendiendo que uno existe si y sólo si existe el otro). Dejamos la prueba al lector, que es completamente análoga a la de 3.5.

Si  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , es frecuente el caso en que  $f$  está definida en todos los puntos de un intervalo  $]a - \delta, a + \delta[$  salvo quizá el propio  $a$ . En tal caso se definen los *límites laterales* (el *límite por la izquierda* y el *límite por la derecha*) como:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f|_{]a - \delta, a[}(x), \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f|_{]a, a + \delta[}(x)$$

El teorema anterior implica que el resultado no depende de la elección de  $\delta$ . Así, en el ejemplo precedente tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1.$$

En general:

**Teorema 3.20** *Si  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  está definida en todos los puntos de un intervalo  $]a - \delta, a + \delta[$  salvo quizá el propio  $a$ , para cierto  $\delta > 0$ , entonces existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  (finito o infinito) si y sólo si existen los límites laterales*

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L.$$

**DEMOSTRACIÓN:** Si existe el límite de  $f$  en  $a$  entonces existen el límite de la restricción de  $f$  a cualquier conjunto, luego existen los límites laterales y coinciden con el límite de  $L$ . Recíprocamente, si existen los límites laterales y

toman un mismo valor  $L$  (suponemos que es finito, pero en el caso infinito se razona análogamente), dado  $\epsilon > 0$ , aplicando la definición de límite a los dos límites laterales obtenemos que existe un  $\delta_0 > 0$  (en principio tenemos un  $\delta_0$  para cada límite lateral, pero podemos tomar el mínimo de los dos, que sirve en ambos casos) tal que si  $x \in ]a - \delta, a[$  o bien  $x \in ]a, a + \delta[$  y  $0 < |x - a| < \delta_0$  entonces  $|f(x) - L| < \epsilon$ , pero la hipótesis equivale a que  $x \in ]a - \delta, a + \delta[$  y  $0 < |x - a| < \delta_0$ , y esto significa que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ . ■

**Ejemplos** Consideremos de nuevo la función

$$f_2(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

(cuya gráfica está representada al principio de este capítulo). Ahora podemos afirmar que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty,$$

pues en ambos casos tenemos un límite de la forma  $1/0$ , luego es  $\infty$ , pero en el primero (para  $x < 1$ ) la función es negativa, por lo que el límite es concretamente  $-\infty$ , y en el segundo es positiva, por lo que es  $+\infty$ .

Ahora consideremos la función  $E[x]$  que a cada número real le asigna su parte entera. En cada intervalo  $]n, n + 1[$ , donde  $n$  es entero, cumple que  $E[x] = n$ , luego  $E$  es continua en todos estos intervalos, es decir, es continua en todos los números reales que no son enteros. En cambio,

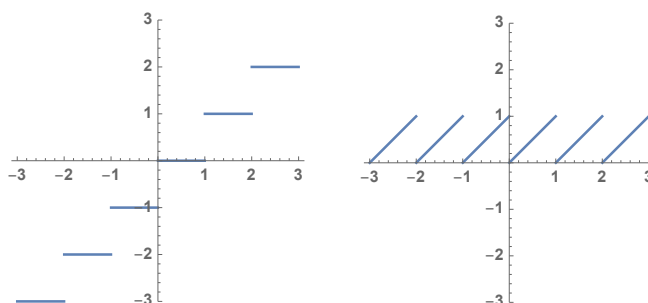
$$\lim_{x \rightarrow n^-} E[x] = \lim_{x \rightarrow n^-} n - 1 = n - 1, \quad \lim_{x \rightarrow n^+} E[x] = \lim_{x \rightarrow n^+} n = n,$$

luego  $E$  es discontinua en todos los números enteros.

Esto implica que la función  $F[x] = x - E[x]$  que asigna a cada número real su parte fraccionaria es continua en los números que no son enteros, mientras que

$$\lim_{x \rightarrow n^-} F[x] = n - (n - 1) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow n^+} F[x] = n - n = 0.$$

La figura siguiente muestra la gráfica de las dos funciones  $E$  y  $F$ , en las que se ven reflejados los límites que acabamos de calcular:



Finalmente, si consideramos la función

$$f_3(x) = \frac{F[x]}{x^2 + 1}$$

que también hemos considerado al principio de este capítulo, vemos que

$$\lim_{x \rightarrow n^-} \frac{F[x]}{x^2 + 1} = \frac{1}{n^2 + 1}, \quad \lim_{x \rightarrow n^+} \frac{F[x]}{x^2 + 1} = 0. \quad \blacksquare$$

Terminamos esta sección con un resultado no trivial que nos proporciona una técnica para sumar series:

**Teorema 3.21 (Abel)** *Si una serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  es convergente, entonces la función  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  es continua en  $[0, 1]$ .*

DEMOSTRACIÓN: La continuidad de  $f$  no se ve alterada si cambiamos el valor de  $a_0$ , y si cambiamos  $a_0$  por  $a_0 - \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ , se cumple que  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$ , así que podemos suponer que se cumple esto sin pérdida de generalidad. Así  $f(1) = 0$ .

Llamemos  $A_n = \sum_{i=0}^n a_i$  y aplicamos la fórmula de suma por partes dada por el teorema 2.32:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^l a_n x^n &= A_l x^l - \sum_{n=0}^{l-1} A_n (x^{n+1} - x^n) = A_l x^l - \sum_{n=0}^{l-1} A_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{l-1} A_n x^n \\ &= A_l x^l - x \sum_{n=0}^{l-1} A_n x^n + \sum_{n=0}^{l-1} A_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{l-1} A_n x^n + A_l x^l. \end{aligned}$$

La primera serie converge para  $0 \leq x \leq 1$  y  $\lim_l A_l = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$ , luego al tomar límites en  $l$  en la igualdad anterior queda

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n.$$

Dado  $\epsilon > 0$ , podemos tomar  $n_0$  de modo que si  $n \geq n_0$  entonces  $|A_n| < \epsilon/2$ . Así:

$$\left| (1-x) \sum_{n=n_0}^{\infty} A_n x^n \right| \leq \frac{\epsilon}{2} (1-x) \sum_{n=n_0}^{\infty} x^n \leq \frac{\epsilon}{2} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{\epsilon}{2}.$$

Por otra parte,

$$\left| (1-x) \sum_{n=0}^{n_0-1} A_n x^n \right| \leq (1-x) \sum_{n=0}^{n_0-1} |A_n| = M(1-x),$$

donde  $M$  no depende de  $x$ . Por lo tanto, si  $1-x < \epsilon/(2M)$ , tenemos que

$$|f(x) - f(1)| = \left| (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \right| \leq \left| (1-x) \sum_{n=n_0}^{\infty} A_n x^n \right| + \left| (1-x) \sum_{n=0}^{n_0-1} A_n x^n \right|,$$

luego  $|f(x) - f(1)| < \epsilon$ , lo que prueba que  $f$  es continua en 1. En el resto de puntos lo es porque son puntos de su disco de convergencia.  $\blacksquare$

Así, si sabemos —como es frecuente que suceda— que una serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  es convergente, pero no conocemos su suma, una posibilidad para averiguarla es estudiar la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Veremos más adelante que con series de potencias tenemos muchas opciones. Aun suponiendo que el radio de convergencia de la serie sea 1, finalmente podremos calcular la suma de la serie que nos interesaba mediante el límite

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

**Nota** Es importante que el límite anterior hay que entenderlo como el límite de una función definida en  $[0, 1]$  (o, si queremos, en  $] -1, 1]$ , que es lo mismo), pero no el límite en todo el disco de convergencia de la serie de potencias, pues en tal caso el límite no tiene por qué existir. Por el contrario, en el ejemplo 5.11 veremos que puede haber sucesiones en el disco de convergencia que converjan a 1 sin que la sucesión de las imágenes converja a  $f(1)$ . Lo que prueba el teorema es que no pueden ser sucesiones de números reales. ■

**Suma de Abel** Lo curioso es que el límite dado por el teorema anterior puede existir aunque la serie sea divergente en  $x = 1$ .

En general, si  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  es una serie tal que la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  tiene radio de convergencia  $R \geq 1$ , podemos definir la *suma de Abel* de la serie dada como

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

El teorema anterior prueba que si la serie es convergente entonces existe su suma de Abel y coincide con la suma usual. Sin embargo, una serie divergente puede tener suma de Abel convergente, como es el caso de la serie de Grandi,  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ , para la cual, si  $|x| < 1$ , tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x},$$

pues se trata de una serie geométrica, luego, entendiendo la suma como una suma de Abel, se cumple que

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2},$$

tal y como Grandi afirmaba. En el fondo, las dudas de Euler sobre la “suma” de Grandi consistían en que no tenía la certeza de que el teorema 3.21 fuera válido.

Otro ejemplo: la serie aritmético-geométrica 2.4 evaluada en  $-z$  es

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n z^n = z - 2z^2 + 3z^3 - 4z^4 + \dots = \frac{z}{(1+z)^2},$$

y haciendo  $z = 1$  tenemos que, como suma de Abel:

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots = \frac{1}{4}.$$

**Ejercicio:** Probar que la suma de Cesàro de esta serie es divergente.

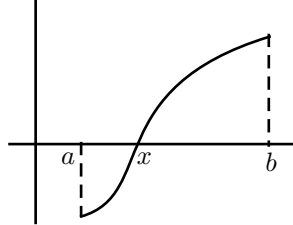
### 3.3 Propiedades de las funciones continuas

Estamos interesados en la noción de continuidad porque el hecho de que una función sea continua nos asegura que cumple ciertas propiedades que no son válidas para funciones arbitrarias. Aquí vamos a demostrar dos de ellas: el teorema de los valores intermedios (que incluye como caso particular al teorema de Bolzano) y el teorema de Weierstrass. En primer lugar demostramos una consecuencia obvia de la definición de continuidad:

**Teorema 3.22** *Si  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua en un punto  $a \in D$  y  $f(a) > 0$  (resp.  $f(a) < 0$ ), entonces existe un  $\delta > 0$  tal que si  $x \in D$  y  $|x - a| < \delta$ , se cumple que  $f(x) > 0$  (resp.  $f(x) < 0$ ).*

**DEMOSTRACIÓN:** Aplicamos la definición de continuidad con  $\epsilon = f(a) > 0$ . Nos da que existe un  $\delta > 0$  tal que si  $|x - a| < \delta$ , entonces  $|f(x) - f(a)| < f(a)$ , lo que implica que  $f(a) - f(x) < f(a)$ , luego  $f(x) > 0$ . Si  $f(a) < 0$  tomamos  $\epsilon = -f(a) > 0$ . ■

**Teorema 3.23 (de Bolzano)** *Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua tal que  $f(a)$  y  $f(b)$  tienen signos opuestos, entonces existe un  $x \in ]a, b[$  tal que  $f(x) = 0$ .*



**DEMOSTRACIÓN:** Supongamos que  $f(a) < 0$  y  $f(b) > 0$ . En el caso opuesto se razona análogamente, o se reduce a éste considerando la función  $-f$ . Consideremos el conjunto  $A = \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\}$ . Se trata de un conjunto no vacío, porque  $a \in A$  y está acotado superiormente por  $b$ , luego tiene supremo  $s \leq b$ . Vamos a probar que  $f(s) = 0$ . Si fuera  $f(s) < 0$ , entonces  $s < b$  y por el teorema 3.22 existiría un  $\delta > 0$  tal que si  $x \in [a, b]$  cumple  $|x - s| < \delta$ , entonces  $f(x) < 0$ . Podemos tomar  $s < x < b$  con  $|s - x| < \delta$ , y entonces  $f(x) < 0$ , luego  $x \in A$ , lo que contradice que  $s$  sea el supremo de  $A$ .

Si, por el contrario,  $f(s) > 0$ , entonces  $s > a$ . Por el teorema 3.22 existe un  $\delta > 0$  tal que si  $x \in [a, b]$  y  $|x - s| < \delta$ , entonces  $f(x) > 0$ . Necesariamente

$a \leq s - \delta$ , pues en caso contrario sería  $f(a) > 0$ . Si  $x \in A$ , se cumple que  $x \leq s$  y  $f(x) < 0$ , luego  $x \leq s - \delta$ , pues la alternativa es  $s - \delta < x \leq s$ , en cuyo caso  $f(x) > 0$ , y con esto hemos probado que  $s - \delta$  es una cota superior de  $A$ , lo que también contradice que  $s$  sea el supremo de  $A$ . ■

El teorema de Bolzano admite una generalización trivial:

**Teorema 3.24 (de los valores intermedios)** *Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua y  $c$  es un número real comprendido entre  $f(a)$  y  $f(b)$ , existe un  $x \in [a, b]$  tal que  $f(x) = c$ .*

DEMOSTRACIÓN: Si  $c = f(a)$  o  $c = f(b)$  basta tomar  $x = a$  o  $x = b$ . Supongamos que  $f(a) < c < f(b)$  (el caso  $f(b) < c < f(a)$  se trata análogamente). Consideramos la función  $g = f - c$ , que cumple  $g(a) = f(a) - c < 0$  y  $g(b) = f(b) - c > 0$ , luego por el teorema de Bolzano existe un  $x \in [a, b]$  tal que  $g(x) = f(x) - c = 0$ , luego  $f(x) = c$ . ■

Veamos un par de aplicaciones:

**Teorema 3.25** *Todo polinomio de grado impar con coeficientes reales tiene al menos una raíz en  $\mathbb{R}$ .*

DEMOSTRACIÓN: Si  $p(x)$  es un polinomio de grado impar con coeficientes reales, podemos suponer que su coeficiente director es positivo (de hecho, podemos suponer que es 1). Entonces sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty.$$

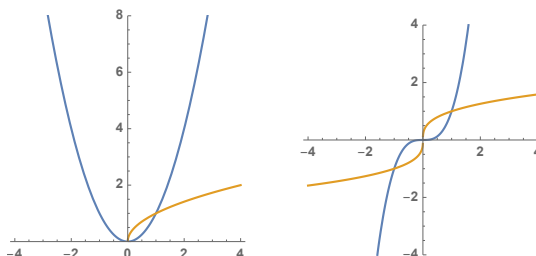
Por lo tanto,  $p(x)$  toma tanto valores positivos como negativos, y es una función continua, luego por el teorema de Bolzano también toma el valor 0, es decir, tiene una raíz real. ■

**Teorema 3.26** *Si  $n \geq 1$  es par, la aplicación  $f : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  dada por  $f(x) = x^n$  es continua, estrictamente creciente y suprayectiva. Si  $n$  es impar, lo mismo vale para la aplicación  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida con el mismo criterio.*

DEMOSTRACIÓN: Ya sabemos que  $f$  es continua, y es elemental comprobar que es estrictamente creciente, en  $[0, +\infty[$  si  $n$  es par y en todo  $\mathbb{R}$  si es impar. Lo único que no era inmediato hasta ahora es que es suprayectiva. Si  $n$  es impar es consecuencia del teorema anterior, pues, dado cualquier número real  $a$ , el polinomio  $x^n - a$  tiene que tener una raíz en  $\mathbb{R}$ , es decir, tiene que existir un  $r \in \mathbb{R}$  tal que  $r^n = a$ .

Si  $n$  es par, sabemos que  $f(0) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , luego, dado  $a \geq 0$ , existe un  $x > 0$  tal que  $f(x) > a$ , luego por el teorema de los valores intermedios existe un  $r > 0$  tal que  $f(r) = a$ . ■

**Ejemplo 3.27** La figura de la izquierda muestra la gráfica de  $f(x) = x^2$  que es decreciente en  $]-\infty, 0]$  y —como se indica en el teorema anterior— creciente en  $[0, +\infty[$ , así como la gráfica de  $\sqrt{x}$ , que es la inversa de  $f$ , es decir, la función determinada por que  $\sqrt{x}$  es el único  $y \geq 0$  que cumple  $f(y) = x$ .



La figura de la derecha muestra la gráfica de  $f(x) = x^3$ , y vemos que —tal y como indica el teorema— hace corresponder biunívocamente un número real a cada número real, lo que nos permite considerar su función inversa  $\sqrt[3]{x}$ , que a cada número real  $x$  le asigna el único número real  $y$  que cumple  $y^3 = x$ . ■

Ahora conviene probar un hecho general:

**Teorema 3.28** Si  $f : I_1 \rightarrow I_2$  es una aplicación, estrictamente creciente y suprayectiva entre dos intervalos de números reales (de cualquier tipo, incluyendo la posibilidad de que sean todo  $\mathbb{R}$ ), entonces es continua y la aplicación inversa  $f^{-1} : I_2 \rightarrow I_1$  que a cada  $x \in I_2$  le asigna el único  $y \in I_1$  que cumple  $f(y) = x$ , es continua, estrictamente creciente y suprayectiva.

DEMOSTRACIÓN: Obviamente,  $f^{-1}$  es suprayectiva, pues dado cualquier  $x \in I_1$ , basta tomar  $y = f(x) \in I_2$  y entonces, por definición de  $f^{-1}$ , se cumple que  $f^{-1}(y) = x$ .

También es fácil ver que es estrictamente creciente, pues si  $y_1 < y_2$  son dos puntos de  $I_2$ , entonces  $x_1 = f^{-1}(y_1)$  y  $x_2 = f^{-1}(y_2)$  deben cumplir que  $x_1 < x_2$ , pues en caso contrario sería  $x_2 \leq x_1$ , y como  $f$  es creciente se cumpliría  $f(x_2) \leq f(x_1)$ , que es lo mismo que  $y_2 \leq y_1$ .

Así pues, basta probar que  $f$  es continua, pues  $f^{-1}$  cumple las mismas hipótesis, así que también será continua. Fijemos un punto  $a \in I_1$ . Dado un  $\epsilon > 0$ , tomamos  $0 < \epsilon' < \epsilon$  de modo que si  $f(a) \in I_2$  no es el extremo superior de  $I_2$  entonces  $f(a) + \epsilon' \in I_2$  y, si  $f(a)$  no es el extremo inferior de  $I_2$  entonces  $f(a) - \epsilon' \in I_2$ .

Notemos que el hecho de que  $f$  sea estrictamente creciente implica que  $f(a)$  es el extremo superior o inferior de  $I_2$  si y sólo si  $a$  es el extremo correspondiente de  $I_1$ . Así tenemos que

$$f(a) - \epsilon' < f(a) < f(a) + \epsilon',$$

y, como  $f^{-1}$  es estrictamente creciente, esto implica que

$$f^{-1}(f(a) - \epsilon') < a < f^{-1}(f(a) + \epsilon')$$

(entendiendo que sólo se da una de las dos desigualdades si  $a$  es un extremo de  $I_1$ ).

Tomamos  $\delta > 0$  tal que

$$f^{-1}(f(a) - \epsilon') < a - \delta < a < a + \delta < f^{-1}(f(a) + \epsilon')$$

(de nuevo entendiendo que sólo se dan las desigualdades a la izquierda o a la derecha de  $a$  en el caso excepcional). De este modo, si  $x \in I_1$  y  $|x - a| < \delta$ , entonces

$$f^{-1}(f(a) - \epsilon') < a - \delta < x < a + \delta < f^{-1}(f(a) + \epsilon')$$

(pero si  $a$  es el extremo inferior de  $I_1$  será, de hecho,  $a \leq x < a + \delta$  y análogamente si  $a$  es el extremo superior), luego, aplicando  $f$ ,

$$f(a) - \epsilon' < f(x) < f(a) + \epsilon'$$

(si  $a$  es el extremo inferior de  $I_1$  será  $f(a) \leq f(x) < f(a) + \epsilon'$  y análogamente si es el extremo superior). Por consiguiente (incluyendo los casos excepcionales), tenemos que  $|f(x) - f(a)| < \epsilon' < \epsilon$ . Esto prueba la continuidad de  $f$  en  $a$ . ■

**Definición 3.29** Si  $n \geq 1$  es un número natural impar, definimos la raíz  $n$ -sima como la función  $\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  inversa de la función  $x^n$ . Si  $n$  es par, definimos igualmente la función raíz  $n$ -sima, pero en este caso  $\sqrt[n]{\cdot} : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$ .

Así pues, cuando está definida,  $\sqrt[n]{x}$  es el único número real  $r$  ( $\geq 0$  si  $n$  es par) que cumple  $r^n = x$ . Si  $n$  es par, entonces todo  $x > 0$  tiene dos raíces  $n$ -simas reales, es decir, hay dos números que elevados a  $n$  dan  $x$ , que son  $\pm \sqrt[n]{x}$ , mientras que si  $n$  es impar,  $\sqrt[n]{x}$  es el único número real con esta propiedad.

El teorema anterior prueba que las raíces  $n$ -simas son funciones estrictamente crecientes y continuas en sus dominios. Es fácil ver que (cuando están definidas)  $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$ .

Nos dirigimos ahora a enunciar y demostrar el teorema de Weierstrass, para lo cual necesitamos algunas definiciones:

**Definición 3.30** Un conjunto  $K \subset \mathbb{C}$  es *cerrado* si cuando  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  es una sucesión convergente contenida en  $K$ , se cumple que  $\lim_n x_n$  está también en  $K$ .

$K$  está *acotado* si existe un  $M > 0$  tal que todo  $x \in K$  cumple  $|x| \leq M$ .

$K$  es *compacto* si es cerrado y acotado.

El lector comprobará sin dificultad que los conjuntos siguientes son compactos:

1. Los intervalos cerrados y acotados  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ .
2. Los rectángulos  $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{C}$ , es decir, los conjuntos de la forma

$$[a, b] \times [c, d] = \{x + yi \in \mathbb{C} \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

3. Los discos cerrados  $\bar{D}_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\} \subset \mathbb{C}$ .

**Teorema 3.31 (de Weierstrass)** Si  $f : K \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua definida sobre un dominio compacto  $K$ , existen puntos  $x_0, x_1 \in K$  tales que, para todo  $x \in K$ , se cumple que  $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ , es decir, existen puntos en  $K$  donde  $f$  toma su valor mínimo y su valor máximo.

DEMOSTRACIÓN: Sea  $A = \{f(x) \mid x \in K\}$ , que claramente es un conjunto no vacío. Vamos a probar que está acotado superiormente. En caso contrario, para cada número natural  $n$  existiría un  $x_n \in K$  tal que  $f(x_n) > n$ . La sucesión  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  está acotada (porque está contenida en  $K$ ), luego por el teorema de Bolzano-Weierstrass 1.24 tiene una subsucesión convergente, digamos  $\{x_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ . Sea  $L = \lim_k x_{n_k}$ .

Como  $K$  es cerrado se cumple que  $L \in K$ , y por la continuidad de  $f$  se cumple que  $f(L) = \lim_k f(x_{n_k})$ , luego la sucesión  $\{f(x_{n_k})\}_{k=0}^{\infty}$  tiene que estar acotada, pero no lo está, pues  $k \leq n_k \leq f(x_{n_k})$ .

Con esto hemos probado que  $A$  tiene cota superior, luego tiene supremo  $M$ . Esto implica que si  $x \in K$ , entonces  $f(x) \leq M$ . Vamos a probar que  $f$  toma el valor  $M$ , lo que significará que  $M$  es el valor máximo que toma  $f$ .

Para cada  $n \geq 1$ , tenemos que  $M - 1/n$  no es una cota superior de  $A$ , luego existe un  $x_n \in K$  tal que  $M - 1/n < f(x_n) \leq M$ , luego  $|f(x_n) - M| < 1/n$ . Esto implica que  $\lim_n f(x_n) = M$ .

Nuevamente, podemos tomar una subsucesión convergente, de modo que  $\lim_k x_{n_k} = L \in K$ , y entonces  $f(L) = \lim_k f(x_{n_k}) = M$ .

Con esto hemos probado que  $f$  alcanza un valor máximo, y análogamente se prueba que alcanza un valor mínimo o, alternativamente, basta aplicar el caso ya probado a la función  $-f$ . ■

Observemos que el teorema de Weierstrass no se cumple necesariamente si el dominio de la función no es compacto. Por ejemplo, la función  $f(x) = x$  no tiene ni mínimo ni máximo en el dominio  $D = ]0, 1[$ .

Vamos una consecuencia muy simple, que podría probarse fácilmente de forma directa:

**Teorema 3.32** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua que toma en algún punto un valor  $c$ . Entonces existen un mínimo y un máximo  $x \in [a, b]$  tales que  $f(x) = c$ .

DEMOSTRACIÓN: Observemos que el conjunto  $K = \{x \in [a, b] \mid f(x) = c\}$  es compacto. Ciertamente está acotado y, si  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  es una sucesión contenida en  $K$  y que converge a un límite  $L$ , como  $a \leq x_n \leq b$ , también se cumple que  $a \leq L \leq b$  y además  $f(L) = \lim_n f(x_n) = \lim_n c = c$ , luego  $L \in K$ . Ahora basta aplicar el teorema de Weierstrass a la función  $g : K \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(x) = x$ . ■

Ahora veamos una aplicación de más envergadura, para la cual vamos a necesitar un hecho sobre los números complejos que todavía no hemos demostrado, a

saber, que todo número complejo tiene al menos una raíz  $n$ -sima (teorema 5.10). Admitiendo esto, podemos probar algo mucho más fuerte:

**Teorema 3.33 (Teorema fundamental del álgebra)** *Todo polinomio no constante con coeficientes en  $\mathbb{C}$  tiene al menos una raíz en  $\mathbb{C}$ .*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $p(x)$  un polinomio no constante con coeficientes en  $\mathbb{C}$ . Sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty,$$

lo cual implica en particular que existe un  $M > 0$  tal que si  $|x| \geq M$  entonces  $|p(x)| > |p(0)|$ .

Consideremos el disco cerrado  $\bar{D}_M$ . Se trata de un conjunto compacto, luego por el teorema de Weierstrass, aplicado a la función continua  $|p|$ , existe un  $c \in \bar{D}_M$  tal que, para todo  $x \in \bar{D}_M$ , se cumple que  $|p(c)| \leq |p(x)|$ . Pero entonces se cumple  $|p(c)| \leq |p(x)|$  para todo  $x \in \mathbb{C}$ , ya que si  $x$  no está en  $\bar{D}_M$  entonces  $|p(c)| \leq |p(0)| < |p(x)|$ .

En definitiva, hemos demostrado que la función  $|p(x)|$  alcanza su valor mínimo en el punto  $c$ . Ahora demostraremos que dicho valor mínimo tiene que ser 0, es decir, que  $|p(c)| = 0$ , lo que equivale a que  $p(c) = 0$ , es decir, a que  $c$  sea una raíz del polinomio  $p$ . Supongamos, por reducción al absurdo, que  $p(c) \neq 0$ .

Consideramos entonces el polinomio  $q(x) = p(x+c)/p(c)$ . Así, si  $x$  es cualquier número complejo, tenemos que  $|p(c)| \leq |p(x+c)|$ , luego se cumple  $|q(x)| \geq 1 = |q(0)|$ . Esto prueba que la función  $|q(x)|$  toma su valor mínimo en  $x = 0$ , y además  $q(0) = 1$ . Pongamos que

$$q(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_k x^k + 1,$$

donde  $k > 0$  es el menor índice tal que  $a_k \neq 0$ . El número complejo  $-1/a_k$  tiene una raíz  $k$ -ésima  $a$ , de modo que  $a^k = -1/a_k$  o, lo que es lo mismo  $a_k a^k = -1$ . Así,

$$\begin{aligned} q(ax) &= a_n a^n x^n + a_{n-1} a^{n-1} x^{n-1} + \dots - x^k + 1 \\ &= r(x) x^{k+1} - x^k + 1, \end{aligned}$$

donde  $r(x)$  es un polinomio de grado  $n - k - 1$ . Como

$$\lim_{x \rightarrow 0} x r(x) = 0,$$

podemos tomar un número real  $0 < x < 1$  tal que  $x|r(x)| < 1$ . Así

$$|q(ax)| = |1 - x^k + x^{k+1} r(x)| \leq |1 - x^k| + x^{k+1} |r(x)| < 1 - x^k + x^k = 1,$$

lo que contradice que 1 era el menor valor que tomaba  $|q|$ . ■

Notemos que si  $q(x)$  es un polinomio de grado  $n \geq 1$  con coeficientes complejos y  $a_1 \in \mathbb{C}$  es una raíz, podemos descomponerlo como  $q(x) = (x - a_1)q_1(x)$ , donde  $q_1(x)$  es un polinomio cuyo grado es una unidad menor que el de  $q$ .

Si no es constante, tendrá una raíz  $a_2 \in \mathbb{C}$ , con lo que podremos factorizar  $q(x) = (x - a_1)(x - a_2)q_2(x)$  y, tras  $n$  pasos, llegaremos a un factor constante  $q_n = a_0$ , de modo que el polinomio dado se descompone en la forma:

$$q(x) = a_0(x - a_1) \cdots (x - a_n).$$

Así pues, el teorema fundamental del álgebra implica que todo polinomio de grado  $n \geq 1$  con coeficientes complejos se descompone en producto de  $n$  polinomios de la forma  $x - a$ , más un factor constante.

En la sección siguiente veremos una aplicación más del teorema de Weierstrass.

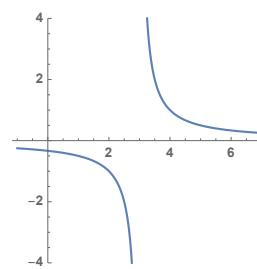
### 3.4 Una aplicación

Llegados a este punto, ya hemos presentado toda la teoría en la que nos vamos a apoyar en el resto de este libro, pero antes de pasar al capítulo siguiente vamos a ilustrar las técnicas que hemos presentado estudiando algunas funciones.

Consideremos en primer lugar las funciones de la forma

$$g_n(x) = \frac{1}{x - n},$$

donde  $n$  es un número entero. La figura muestra la gráfica de  $g_3(x)$ . Es fácil justificar las propiedades que se observan en ella. En general, la gráfica de  $g_n(x)$  consta de dos ramas, ambas decrecientes, una es su restricción a  $]-\infty, n[$  y otra su restricción a  $]n, +\infty[$ , pero la función completa no es decreciente, pues si  $x_1 < n < x_2$  entonces  $g_n(x_1) < 0 < g_n(x_2)$ . También es inmediato que

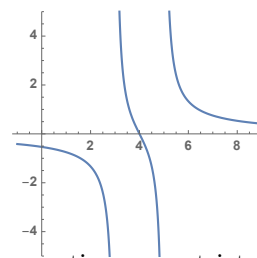


$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g_n(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow n^-} g_n(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow n^+} g_n(x) = +\infty.$$

Veamos ahora qué sucede si sumamos dos de estas funciones. La gráfica muestra el caso de  $g_3(x) + g_5(x)$ . En general, si sumamos  $g(x) = g_m(x) + g_n(x)$  con  $m < n$ , obtenemos una función con tres ramas, correspondientes a sus restricciones a

$$]-\infty, m[, \quad ]m, n[, \quad ]n, +\infty[$$

En cada uno de estos intervalos,  $g(x)$  es continua y estrictamente decreciente, pues es suma de dos funciones continuas y estrictamente decrecientes. En el primer intervalo es negativa, pues es suma de dos funciones negativas, y en el tercero es positiva, pues es suma de dos funciones positivas. También es fácil concluir que  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ , pues los dos sumandos cumplen lo mismo, así como que

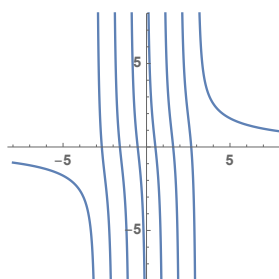


$$\lim_{x \rightarrow m^-} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow m^+} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow n^-} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow n^+} g(x) = +\infty.$$

En particular resulta que la rama intermedia desciende desde  $+\infty$  hasta  $-\infty$ .

A continuación consideramos el caso en que sumamos un número finito de estas funciones. Por simplificar consideramos el caso de

$$S_k(x) = \sum_{n=-k}^k \frac{1}{x-n}.$$



La figura muestra la gráfica de  $S_3(x)$ . Es fácil razonar que  $S_k(x)$  tiene  $2k + 2$  ramas continuas, todas ellas decrecientes, una negativa en  $]-\infty, -k[$ , otra positiva en  $]k, +\infty[$  y  $2k$  ramas intermedias que descienden desde  $+\infty$  hasta  $-\infty$ .

Notemos que también podemos expresar

$$S_k(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^k \left( \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right) = \frac{1}{x} - 2x \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2 - x^2}.$$

Finalmente consideramos la función

$$c(x) = \frac{1}{x} + \lim_k \sum_{n=-k}^k \frac{1}{x-n}.$$

Equivalentemente:

$$c(x) = \lim_k S_k(x) = \frac{1}{x} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right).$$

Vamos a probar que esta serie converge absolutamente a una función continua en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ . Llamamos

$$c_k(x) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - x^2}, \quad R_k(x) = -2xc_k(x) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \left( \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right),$$

de modo que, si  $m > k$ , tenemos que

$$S_m(x) = S_k(x) + \sum_{n=k+1}^m \left( \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right) = S_k(x) - 2x \sum_{n=k+1}^m \frac{1}{n^2 - x^2}.$$

Por lo tanto, si probamos que la serie  $c_k(x)$  es convergente, tomando límites en  $m$  tendremos que

$$c(x) = S_k(x) + R_k(x).$$

En primer lugar vamos a probar que la serie  $c_k(x)$  converge absolutamente a una función continua en el disco abierto  $D_k$ .

En efecto, si tomamos  $x \in D_k$  y  $n \geq k+1$ , tenemos que  $|x| < k < n$ , luego  $n-k < n-|x| = ||n| - |\pm x|| \leq |n \pm x|$ , luego  $|n^2 - x^2| = |n+x||n-x| \geq (n-k)^2$ , luego

$$\left| \frac{1}{n^2 - x^2} \right| \leq \frac{1}{(n-k)^2}.$$

Como la serie

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{(n-k)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

es convergente, el criterio de mayoración de Weierstrass 3.7 nos asegura que la serie  $c_k(x)$  converge absolutamente a una función continua en el disco  $D_k$ .

Ahora bien, esto implica que, de hecho,  $c_k(x)$  converge absolutamente a una función continua en todo el plano complejo salvo en los enteros que cumplen  $|n| \geq k+1$ .

En efecto, dado cualquier número complejo  $x$  que no sea un entero que cumpla  $|n| \geq k+1$ , podemos tomar un  $k_1 \geq k$  tal que  $|x| < k_1$ , y entonces

$$c_k(x) = \sum_{n=k+1}^{k_1} \frac{1}{n^2 - x^2} + c_{k_1}(x),$$

y así tenemos expresada la serie  $c_k(x)$  como suma de dos series absolutamente convergentes en  $x$  (una de ellas es finita, luego es trivialmente absolutamente convergente), por lo que  $c_k(x)$  es absolutamente convergente en  $x$ . Además, la función  $c_{k_1}(x)$  es continua en todo el disco  $D_{k_1}$ , mientras que la suma finita es continua en todo  $\mathbb{C}$  menos en los enteros que cumplen  $k+1 \leq |n| \leq k_1$ , luego  $c_k(x)$  es continua en todo el disco  $D_{k_1}$  menos en dichos enteros.

Así hemos probado que  $c_k(x)$  es continua en discos de radio arbitrariamente grande (menos en los puntos enteros de valor absoluto  $\geq k+1$ ), y esto implica que es continua en todo  $\mathbb{C}$  menos en dichos enteros. A su vez, lo mismo vale para  $R_k(x)$ , luego la serie  $c(x) = 1/x + R_0(x)$  converge absolutamente a una función continua en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ .

Ahora observamos que, para  $n \geq 2$ , todas las funciones

$$g_{-n}(x) + g_n(x) = \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n}$$

son decrecientes en el intervalo  $] -2, 2[$ , luego lo mismo vale para las sumas parciales

$$r_k(x) = \sum_{n=2}^k \left( \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right),$$

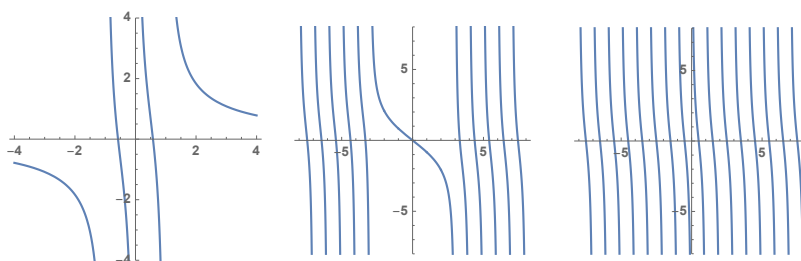
es decir, cumplen que si  $-2 < x_1 < x_2 < 2$ , entonces  $r_k(x_1) > r_k(x_2)$ , luego al tomar límites en  $k$  se cumple que

$$R_1(x_1) = \lim_k r_k(x_1) \geq \lim_k r_k(x_2) = R_1(x_2),$$

luego el resto  $R_1(x)$  es una función continua decreciente en  $] -2, 2[$ . Como

$$c(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + R_1(x) = S_1(x) + R_1(x)$$

y  $S_1(x)$  decrece estrictamente desde  $+\infty$  hasta  $-\infty$  en  $]0, 1[$ , concluimos que lo mismo vale para  $c(x)$ .



La figura muestra las gráficas de  $S_1(x)$ ,  $R_1(x)$  y  $c(x)$ . Hemos probado que su comportamiento en el intervalo  $]0, 1[$  es el que muestra la gráfica:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} c(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} c(x) = -\infty$$

y la función es estrictamente decreciente en dicho intervalo. Podríamos probar que lo mismo vale en cualquier intervalo  $]n, n+1[$ , pero no es necesario, porque vamos a probar algo más fuerte:

*La función  $c(x)$  es periódica de periodo 1, es decir, satisface la ecuación  $c(x+1) = c(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ .*

En efecto, se cumple que

$$\begin{aligned} S_k(x+1) &= \sum_{n=-k}^k \frac{1}{x+1+n} = \sum_{n=-k+1}^{k+1} \frac{1}{x+n} \\ &= S_{k-1}(x) + \frac{1}{x+k} + \frac{1}{x+k+1}, \end{aligned}$$

y al tomar límites en  $k$ , los dos últimos términos tienden a 0 y queda la relación  $c(x+1) = c(x)$ .

Por lo tanto ya tenemos justificado que la restricción de  $c(x)$  a  $\mathbb{R}$  tiene el aspecto que muestra la figura anterior: consta de infinitas ramas que decrecen de  $+\infty$  a  $-\infty$  en cada intervalo  $]n, n+1[$ .

Otra propiedad obvia es que  $c(-x) = -c(x)$ , pues las sumas parciales cumplen trivialmente esta relación:  $S_k(-x) = -S_k(x)$ .

Equivalentemente, por la periodicidad,  $c(1-x) = -c(x)$  y en particular  $c(1/2) = 0$ . Así, los puntos que vemos en la gráfica donde se anula  $c$  son precisamente los semienteros  $n + 1/2$ .

Observemos también que

$$\begin{aligned} c(1/4) &= 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4}{1+4n} + \frac{4}{1-4n} \right) = 4 \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n+1} \right) \right) \\ &= 4 \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots \right). \end{aligned}$$

La convergencia es muy lenta. Como se trata de una serie alternada, sabemos que la suma se encuentra por encima de cada suma parcial par y por debajo de cada suma parcial impar. La tabla siguiente muestra el número de términos que hay que sumar de la última serie para asegurar las primeras cifras decimales de la suma.

$k$	$S_k$	$S_{k+1}$
8	3.01	3.26
26	3.10	3.18
628	3.140	3.144
2 454	3.1411	3.14199999
136 120	3.14158	3.141599999995

Terminamos demostrando una caracterización de la función  $c$  que usaremos más adelante:

**Ejemplo 3.34** *La función*

$$c(x) = \frac{1}{x} + \lim_k \sum_{n=-k}^k \frac{1}{x-n}$$

es la única que cumple las propiedades siguientes:

1.  $c(x)$  es continua en  $D = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ .
2.  $c(x+1) = c(x)$ , para todo  $x \in D$ .
3.  $c(-x) = -c(x)$ , para todo  $x \in D$ .
4. Existe el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( c(x) - \frac{1}{x} \right) = 0.$$

5. Si  $x/2$  y  $(x+1)/2$  están en  $D$ , entonces

$$c\left(\frac{x}{2}\right) + c\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2c(x).$$

**DEMOSTRACIÓN:** Ya hemos probado que  $c$  cumple las cuatro primeras propiedades. Para la cuarta notemos que  $c(x) - 1/x = R_0(x)$ , que es una función continua en 0 y cumple  $R_0(0) = 0$ . Vamos a ver que también cumple la quinta. Para ello observamos que

$$\frac{1}{\frac{x}{2} + n} + \frac{1}{\frac{x+1}{2} + n} = 2 \left( \frac{1}{x+2n} + \frac{1}{x+2n+1} \right).$$

Al sumar queda:

$$S_k\left(\frac{x}{2}\right) + S_k\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2S_{2k}(x) + \frac{2}{x+2k+1},$$

y al tomar límites llegamos a la ecuación requerida.

Ahora supongamos que otra función  $f$  cumple estas mismas propiedades y veamos que  $f = c$ . Para ello observamos que la función  $h = f - c$  cumple trivialmente las propiedades 1), 2), 3) y 5), mientras que la cuarta nos da que

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) - \frac{1}{x} - R_0(x) = 0 + R_0(0) = 0.$$

Esto significa que si definimos  $h(0) = 0$ , entonces  $h$  es continua en 0. Más en general, como  $h$  es periódica, si definimos  $h(n) = 0$  para todo entero  $n$ , es claro que  $h$  es continua en  $\mathbb{C}$ .

Observemos que 2) y 3) implican que  $h(1/2) = -h(1/2)$ , luego  $h(1/2) = 0$  y así  $h$  se anula en los enteros y en los semienteros. Esto hace que en realidad  $h$  cumple las propiedades 2), 3) y 5) para todo  $x \in \mathbb{C}$ , sin necesidad de exceptuar los enteros.

Fijemos  $M > 0$  y consideremos el conjunto compacto  $K = [0, 1] \times [-M, M]$ . Como  $|h|$  es continua en  $K$ , el teorema de Weierstrass nos da que existe un  $x_0 \in K$  donde  $|h(x)|$  toma su valor máximo  $|h(x_0)| = m$ . Ahora bien, como  $h$  tiene periodo 1, sucede que  $m$  es el valor máximo que toma  $|h|$  en toda la banda  $\mathbb{R} \times [-M, M]$ , pues todo punto de dicha banda es de la forma  $x = a + k$ , donde  $k$  es entero y  $a \in K$ , luego  $|h(x)| = |h(a)| \leq m$ .

Tenemos que

$$h\left(\frac{x_0}{2}\right) + h\left(\frac{x_0+1}{2}\right) = 2h(x_0),$$

luego

$$2m = 2|h(x_0)| \leq \left|h\left(\frac{x_0}{2}\right)\right| + \left|h\left(\frac{x_0+1}{2}\right)\right| \leq 2m,$$

porque  $x_0/2$  y  $(x_0+1)/2$  siguen estando en  $\mathbb{R} \times [-M, M]$ . Pero para que puedan darse estas desigualdades es necesario que  $|h(x_0/2)| = m$ . Repetimos:

$$h\left(\frac{x_0}{4}\right) + h\left(\frac{x_0/2+1}{2}\right) = 2h\left(\frac{x_0}{2}\right),$$

luego

$$2m = 2\left|h\left(\frac{x_0}{2}\right)\right| \leq \left|h\left(\frac{x_0}{4}\right)\right| + \left|h\left(\frac{x_0/2+1}{2}\right)\right| \leq 2m,$$

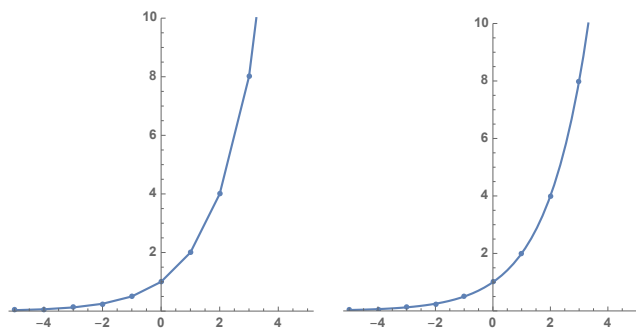
luego  $|h(x_0/4)| = m$ . En general, así llegamos a que  $|h(x_0/2^k)| = m$ . Tomando límites en  $k$ , usando que  $|h|$  es una función continua, concluimos que  $|h(0)| = m$ , luego  $h$  es idénticamente nula en  $\mathbb{R} \times [-M, M]$ . Como  $M$  es arbitrario, de hecho  $h = 0$ , y así  $f = c$ . ■



## Capítulo IV

# La función exponencial

Observemos que podemos calcular  $x^2$  para cualquier número real  $x$ , mientras que  $2^x$  sólo lo tenemos definido cuando  $x$  es un número entero. Obviamente, es posible definir funciones  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que cumplan  $f(x) = 2^x$  siempre que  $x$  sea un número entero. Incluso podemos tomarlas continuas, si queremos. Las gráficas siguientes muestran dos posibilidades:



En la primera hemos unido los valores “conocidos” mediante segmentos de recta, mientras que la segunda es una opción “más suave”. Pero no vamos a elegir una u otra opción por el aspecto de su gráfica. Lo ideal sería dar una definición de  $2^x$  (o, más en general, de  $a^x$ ) que diera lugar a una función continua que mantuviera además las propiedades familiares de las potencias, como

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad (ab)^x = a^x b^x, \quad a^1 = a, \quad \dots$$

Enseguida veremos que es posible definir funciones con estas propiedades. En realidad tenemos una restricción, y es que tiene que ser

$$a = a^1 = a^{2(1/2)} = (a^{1/2})^2 \geq 0,$$

luego para que se cumplan estas propiedades la base  $a$  no puede ser negativa.

## 4.1 La función exponencial y el logaritmo

Consideremos la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

Su radio de convergencia es infinito. Para probarlo basta ver que la serie converge para todo número real  $x > 0$ , y esto es consecuencia del criterio de D'Alembert, pues

$$L = \lim_n \frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!} = \lim_n \frac{x}{n+1} = 0 < 1.$$

Por lo tanto, esta serie define una función cuyo dominio es todo el plano complejo:

**Definición 4.1** La *función exponencial* es la función  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$\exp z = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

La notación  $e^z$  para la función exponencial está justificada porque esta función cumple las propiedades que cabe esperar que cumpla una exponencial “razonable”:

$$e^0 = 1, \quad e^1 = e, \tag{4.1}$$

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}, \tag{4.2}$$

$$e^{-z} = \frac{1}{e^z}, \tag{4.3}$$

En efecto, la primera igualdad de (4.1) se sigue de la definición, mientras que la segunda es consecuencia del teorema 2.13. La propiedad fundamental es (4.2), que es consecuencia del teorema 2.19:

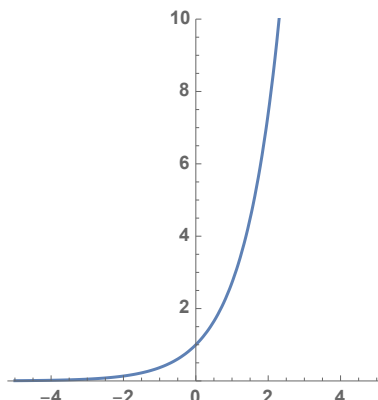
$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

Por último, (4.3) se debe a que  $e^{z_1} e^{-z_1} = e^0 = 1$ .

Notemos que (4.2) implica que, si  $n$  es un número natural, entonces  $e^n$  es la potencia  $n$ -sima de  $e$  en el sentido algebraico usual, y (4.3) implica que lo mismo vale si  $n$  es entero.

Claramente,  $e^x$  es un número real cuando el exponente es real. La figura muestra su gráfica. Podemos justificar fácilmente las propiedades que se reflejan en ella. Sabemos que  $e^x$  es una función continua (en  $\mathbb{C}$ , luego en particular en  $\mathbb{R}$ ). Además, de la propia definición se sigue que  $e^x > 0$  siempre que  $x \geq 0$ , y la relación (4.3) prueba que lo mismo vale para  $x < 0$ . Así pues:

$$e^x > 0$$



para todo  $x \in \mathbb{R}$ . También es inmediato que  $1 + x \leq e^x$  siempre que  $x \geq 0$ , lo que nos da el segundo de los límites siguientes:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

El primero se sigue del segundo y de (4.3). El hecho de que la gráfica parezca tocar el eje de abscisas se debe a que  $e^x$  es muy grande para  $x$  grande, por lo que  $e^{-x} = 1/e^x$  está muy próximo a 0 (pero ya hemos visto que no puede ser 0) cuando  $x$  es grande.

Las series de potencias nos permiten resolver indeterminaciones, como ésta:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \quad (4.4)$$

En efecto, basta observar que

$$e^x - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}.$$

La última serie de potencias define una función continua  $f(x)$  sobre todo el plano complejo, que cumple  $f(0) = 1$ , y si  $x \neq 0$  se cumple que

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x},$$

luego

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1. \quad \blacksquare$$

Observemos ahora que la función  $e^x$  es estrictamente creciente, como se ve en la gráfica, es decir, que si  $x < y$ , entonces  $e^x < e^y$ .

En efecto, supongamos en primer lugar que  $0 \leq x < y$ . Entonces

$$e^x = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} < 1 + y + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = e^y.$$

Hemos separado los dos primeros términos porque, el teorema 1.11 no es válido para desigualdades no estrictas, de modo que al tomar límites en la desigualdad estricta

$$\sum_{n=2}^k \frac{x^n}{n!} < \sum_{n=2}^k \frac{y^n}{n!}$$

sólo podemos obtener una desigualdad no estricta, y necesitamos usar aparte que  $x < y$  para mantener la desigualdad estricta.

En segundo lugar, si  $x < y \leq 0$ , entonces  $0 \leq -y < -x$ , luego, por la parte ya probada,  $e^{-y} < e^{-x}$ , lo que equivale a que  $1/e^y < 1/e^x$ , luego  $e^x < e^y$ . Finalmente, si  $x < 0 < y$ , entonces  $e^x < e^0 < e^y$ .

Recogemos estos hechos y alguno más en el teorema siguiente:

**Teorema 4.2** *La función exponencial se restringe a  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$  continua, suprayectiva y estrictamente creciente.*

DEMOSTRACIÓN: Sabemos que la exponencial es continua por 3.8, y ya hemos probado que es estrictamente creciente. Falta probar que es suprayectiva, es decir, que  $e^x$  toma todos los valores reales positivos. Para probarlo fijemos  $c > 0$ . De la propia definición se sigue que  $c < 1 + c < e^c$ , y análogamente  $1/c < 1 + 1/c < e^{1/c}$ , luego  $e^{-1/c} < c < e^c$ . Por el teorema de los valores intermedios, existe un  $x \in [-1/c, c]$  tal que  $e^x = c$ . ■

Así pues, para cada número real  $x > 0$ , existe un único número real  $y$  tal que  $e^y = x$ . Dicho número  $y$  se llama *logaritmo neperiano* de  $x$  y se representa por  $y = \log x$ . Dicho de otro modo:

**Definición 4.3** Definimos el *logaritmo neperiano*  $\log : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  como la función inversa de  $e^x$ , es decir, como la única función que cumple  $e^{\log x} = x$ , o  $\log e^x = x$ .

La figura muestra las gráficas de las funciones  $e^x$  y  $\log x$ . Que una sea la inversa de la otra se refleja en la simetría respecto a la recta  $y = x$ . Las propiedades básicas del logaritmo se deducen de las de la exponencial:

$$\log(xy) = \log x + \log y. \quad (4.5)$$

$$\log 1 = 0, \quad \log e = 1.$$

Por ejemplo, para probar (4.5) usamos que

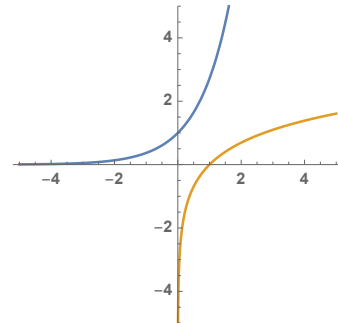
$$xy = e^{\log x} e^{\log y} = e^{\log x + \log y},$$

y esto significa por definición que  $\log(xy) = \log x + \log y$ .

A su vez de (4.5) se siguen las relaciones:

$$\log x^{-1} = -\log x, \quad \log(x/y) = \log x - \log y, \quad \log x^n = n \log x, \quad (4.6)$$

para todo entero  $n$ .



Observemos que se cumple  $M < \log x$  siempre que  $e^M < x$ , y esto prueba el segundo de los límites siguientes:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty.$$

El primero se sigue de la relación  $\log x = -\log(1/x)$ .

En virtud del teorema 3.28 podemos afirmar:

**Teorema 4.4** *La función  $\log : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  es biyectiva, continua y estrictamente creciente.*

En ocasiones serán útiles las desigualdades siguientes:

**Teorema 4.5** *Se cumple:*

1.  $1 + x \leq e^x$ .
2.  $\log(1 + x) \leq x$ .
3. Si  $x \geq 0$ , entonces  $x - \frac{x^2}{2} \leq \log(1 + x) \leq x$ .
4. Si  $x > 0$ , entonces  $\log x \leq \sqrt{x}$ .

DEMOSTRACIÓN: 1) La desigualdad  $1 + x \leq e^x$  es trivial para  $x \geq 0$  (por la definición de  $e^x$ ) y para  $x \leq -1$  (porque entonces  $1 + x \leq 0 < e^x$ ). Por lo tanto, podemos suponer que  $-1 < x < 0$ . Para todo número natural  $m$ , tenemos que  $-x < 2m + 1$ , luego

$$\frac{(-x)^{2m+1}}{(2m+1)!} = \frac{(-x)^{2m}}{(2m)!} \frac{-x}{2m+1} < \frac{x^{2m}}{(2m)!}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{x^{2m}}{(2m)!} + \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} > 0,$$

luego

$$\sum_{n=2}^{2k+1} \frac{x^n}{n!} = \left( \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \right) + \cdots + \left( \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) > 0,$$

luego

$$e^x = 1 + x + \sum_{n=2}^{2k+1} \frac{x^n}{n!} > 1 + x.$$

2) se sigue de 1) aplicando el logaritmo. 3) equivale a  $e^x e^{-x^2/2} \leq 1 + x$ , o también a

$$e^x \leq e^{x^2/2} + x e^{x^2/2}.$$

Observamos que  $n!2^n \leq n!(n+1) \cdots (n+n) = (2n)! \leq (2n+1)!$ , luego

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2^n n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2/2)^n}{n!} + x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2/2)^n}{n!} = e^{x^2/2} + x e^{x^2/2}. \end{aligned}$$

Para probar 4) probamos primero que  $x^2 \leq e^x$  (para  $x \geq 0$ ). En efecto, basta ver que

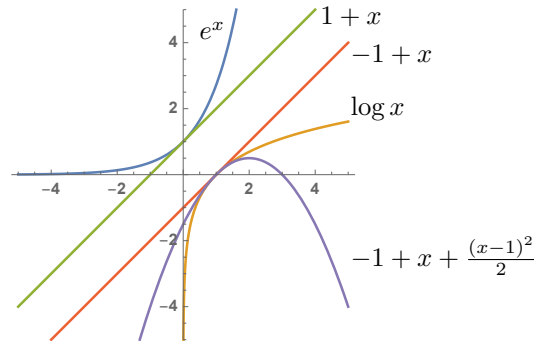
$$x^2 \leq x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \leq e^x.$$

La segunda desigualdad es inmediata, y la primera equivale a  $x \leq 1 + x/2 + x^2/6$ , que a su vez equivale a que  $x^2 - 3x + 6 \geq 0$ . Ahora bien, este polinomio es positivo en  $x = 0$ , luego, si tomara algún valor negativo, por el teorema de Bolzano tendría una raíz real, y es fácil ver que no las tiene (su discriminante es negativo). Por consiguiente  $x \leq e^{\sqrt{x}}$  y, tomando logaritmos,  $\log x \leq \sqrt{x}$ . ■

Observemos que las desigualdades 3) del teorema anterior equivalen a que, para  $x \geq 1$ , se cumple

$$-1 + x + \frac{(x-1)^2}{2} \leq \log x \leq -1 + x.$$

La figura siguiente muestra las gráficas de estas funciones:



Observemos que de 3) del teorema anterior se sigue que

$$1 - \frac{x}{2} \leq \frac{\log(1+x)}{x} \leq 1, \quad \text{luego} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

y de 4) se sigue que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x} = 0.$$

Veamos algunas aplicaciones del logaritmo:

**Teorema 4.6** Para todo número real  $x$  se cumple que

$$e^x = \lim_n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que

$$\lim_n \log\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = x,$$

pues entonces bastará aplicar la función exponencial. Ahora bien,

$$\lim_n \log\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_n n \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \lim_n x \frac{\log(1 + x/n)}{x/n} = x. \quad \blacksquare$$

Ahora podemos ver algunas aplicaciones interesantes del criterio de condensación de Cauchy 2.14:

**Ejemplo 4.7** Si tratamos de aplicar el criterio de D'Alembert a las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n},$$

nos encontramos con que

$$\lim_n \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1,$$

por lo que no podemos concluir nada. De hecho, la prueba de que no podemos concluir nada cuando el límite es 1 es que la primera serie converge y la segunda diverge. En efecto,

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{\frac{\log(n+1)}{(n+1)^2}}{\frac{\log n}{n^2}} &= \lim_n \frac{n^2 \log(n+1)}{(n+1)^2 \log n} = \lim_n \frac{n^3}{(n+1)^2(n-1)} \frac{\frac{\log(1+n)}{n}}{\frac{\log(1+(n-1))}{n-1}} = 1, \\ \lim_n \frac{\frac{1}{(n+1) \log(n+1)}}{\frac{1}{n \log n}} &= \frac{n \log n}{(n+1) \log(n+1)} = \frac{n-1}{n+1} \frac{\frac{\log(1+n-1)}{n-1}}{\frac{\log 1+n}{n}} = 1. \end{aligned}$$

En cambio, si aplicamos el criterio de condensación:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \log 2^n}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \log 2}{2^n}$$

y el criterio de D'Alembert<sup>1</sup> nos da que la serie converge:

$$\lim_n \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_n \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Pero

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \log 2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log 2}$$

es divergente. \blacksquare

<sup>1</sup>Alternativamente, se trata de una serie aritmético-geométrica, cuya suma, según el ejemplo 2.4, es  $2 \log 2$ . Según la prueba de 2.14, este valor es una cota para la suma de la serie dada.

## 4.2 Exponenciales de base positiva

Ahora podemos definir, para cada  $x > 0$ , la exponencial

$$x^y = e^{y \log x}. \quad (4.7)$$

De las propiedades de la exponencial y el logaritmo se deducen inmediatamente las propiedades siguientes (suponiendo siempre que las bases de las potencias son positivas, pero los exponentes arbitrarios):

1.  $x^0 = 0, 1^y = 1,$
2.  $x^y > 0,$
3.  $\log x^y = y \log x,$
4.  $x^{y+z} = x^y x^z,$
5.  $(xy)^z = z^z y^z,$
6.  $(x^y)^z = x^{yz},$
7.  $x^{-y} = 1/x^y,$
8. Si  $a \neq 1$ , la función  $a^x : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$  es continua, suprayectiva y monótona (creciente si  $a > 1$  y decreciente si  $a < 1$ ).

Observemos que de 4) y 7) se deduce que, cuando  $m$  es un número entero, la potencia  $x^m$  en este sentido coincide con la potencia en el sentido algebraico usual. Al principio de este capítulo tenemos la gráfica de la función  $2^x$ .

La continuidad de las funciones exponenciales es un caso particular del teorema siguiente, más general:

*Si  $\lim_n x_n = a$  y  $\lim_n y_n = b$  (donde  $a$  y todos los  $x_n$  son positivos), entonces  $\lim_n (x_n)^{y_n} = a^b$ .*

La prueba es trivial: por la continuidad del logaritmo,  $\lim_n \log x_n = \log a$ , luego  $\lim_n y_n \log x_n = b \log a$ , y por la continuidad de la exponencial

$$\lim_n (x_n)^{y_n} = \lim_n e^{y_n \log x_n} = e^{b \log a} = a^b.$$

Pero tiene sentido plantearse qué sucede con el límite si  $a = 0$ . La respuesta es que si  $\lim_n x_n = 0$  y  $\lim_n y_n = b$ , entonces

$$\lim_n (x_n)^{y_n} = \begin{cases} 0 & \text{si } b > 0, \\ +\infty & \text{si } b < 0, \end{cases}$$

pero  $0^0$  es una indeterminación.

En efecto, para probarlo observamos primero lo siguiente:

1. Si  $\lim_n x_n = +\infty$ , entonces  $\lim_n e^{x_n} = +\infty$ .

Basta tener en cuenta que  $1 + x \leq e^x$ .

2. Si  $\lim_n x_n = -\infty$ , entonces  $\lim_n e^{x_n} = 0$ .

En efecto,  $e^{x_n} = 1/e^{-x_n}$  y por el apartado precedente  $\lim_n e^{-x_n} = +\infty$ .

3. Si  $\lim_n x_n = +\infty$ , entonces  $\lim_n \log x_n = +\infty$ .

En efecto, dado  $M > 0$ , existe un  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$ , entonces  $x_n > e^M$ , luego  $\log x_n > M$ .

4. Si  $\lim_n x_n = 0$ , entonces  $\lim_n \log x_n = -\infty$ .

Dado  $M > 0$ , existe un  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$  entonces  $x_n < e^{-M}$ , luego  $\log x_n < -M$ .

Teniendo esto en cuenta, si se cumple que  $\lim_n x_n = 0$  y  $\lim_n y_n = b$ , entonces  $\lim_n \log x_n = -\infty$ , luego  $\lim_n y_n \log x_n = \mp\infty$ , donde el signo es negativo si  $b > 0$  y viceversa, luego  $\lim_n x_n^{y_n}$  es el indicado.

De aquí se sigue a su vez que si  $\lim_n x_n = +\infty$  y  $\lim_n y_n = b$ , entonces

$$\lim_n (x_n)^{y_n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } b > 0, \\ 0 & \text{si } b < 0, \end{cases}$$

pero  $\infty^0$  es una indeterminación.

Basta tener en cuenta que

$$\lim_n x_n^{y_n} = \lim_n \frac{1}{(1/x_n)^{y_n}}$$

y aplicar el caso anterior. Estos resultados y otros similares pueden resumirse así:

$$0^b = \begin{cases} 0 & \text{si } b > 0, \\ +\infty & \text{si } b < 0, \end{cases}, \quad \infty^b = \begin{cases} +\infty & \text{si } b > 0, \\ 0 & \text{si } b < 0, \end{cases}$$

$$\infty^{+\infty} = +\infty, \quad \infty^{-\infty} = 0, \quad a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1, \\ 0 & \text{si } a < 1 \end{cases},$$

pero  $0^0$ ,  $\infty^0$  y  $1^\infty$  son indeterminaciones.

El teorema 4.6 muestra que una indeterminación de tipo  $1^\infty$  puede dar cualquier resultado positivo. Veamos a continuación un ejemplo de indeterminaciones  $0^0$  y  $\infty^0$ :

**Ejemplo** Veamos que

$$\lim_n (1/n)^{1/n} = 1, \quad \lim_n n^{1/n} = 1,$$

pero

$$\lim_n (1/n)^{1/\log n} = 1/e, \quad \lim_n n^{1/\log n} = e.$$

En efecto, para las primeras, si llamamos  $x_n = (1/n)^{1/n}$  o bien  $x_n = n^{1/n}$ , tenemos que

$$\log x_n = \pm \frac{\log n}{n},$$

luego

$$|\log x_n| = \frac{\log n}{n} \leq \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

de donde claramente  $\lim_n \log x_n = 0$ , luego  $\lim_n x_n = e^0 = 1$ .

Por otra parte, si llamamos  $x_n = (1/n)^{1/\log n}$  o  $x_n = n^{1/\log n}$ , vemos que

$$\log x_n = \pm \frac{\log n}{\log n} = \pm 1,$$

luego la sucesión es constante, pues  $x_n = e^{\pm 1}$ . ■

Observemos, por último, que del teorema 4.4 y de la definición de exponencial se sigue que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a. \quad (4.8)$$

En efecto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \log a} - 1}{x \log a} \log a = \log a,$$

donde el último límite es 1 por 4.4. Por ejemplo, basta observar que si una sucesión  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  tiende a 0, entonces  $\{x_n \log a\}_{n=0}^{\infty}$  también tiende a 0, y entonces  $(e^{x_n \log a} - a)/x_n \log a$  tiende a 1. ■

**Caracterización de las exponenciales** Los resultados que hemos obtenido muestran que la función  $a^x$  cumple todas las propiedades que cumplen las potencias de exponente entero, pero cabe plantearse si la definición que hemos dado no es arbitraria en el sentido de que hubiera otra función con las mismas propiedades y que, por consiguiente, fuera arbitrario llamar  $a^x$  a una en lugar de otra. El teorema siguiente prueba que no es así:

**Teorema 4.8** Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua con la propiedad de que  $f(x+y) = f(x)f(y)$  y  $a = f(1)$ , entonces  $f(x) = a^x$ .

DEMOSTRACIÓN: Si  $a = 0$ , entonces  $f(x) = f(1x) = f(1)f(x) = 0 = 0^x$ . Supongamos que, por el contrario,  $a \neq 0$ . Entonces  $f$  no se anula, pues si hubiera un  $x$  tal que  $f(x) = 0$ , tendríamos que  $f(1) = f(1-x+x) = f(1-x)f(x) = 0$ . Más aún, para todo  $x$  se cumple que  $f(x) = f(x/2 + x/2) = f(x/2)^2 > 0$ .

Esto nos permite considerar la función  $\log f(x)$ , que también es continua (basta aplicar el teorema 3.2) y cumple que

$$\log f(x+y) = \log(f(x)f(y)) = \log f(x) + \log f(y),$$

luego el teorema 3.11 nos da que  $\log f(x) = (\log a)x$ , luego aplicando la exponencial queda que  $f(x) = e^{x \log a} = a^x$ . ■

He aquí otra aplicación del criterio de condensación de Cauchy 2.14:

**Teorema 4.9** Dado  $s \in \mathbb{R}$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  es convergente si y sólo si  $s > 1$ .

DEMOSTRACIÓN: Por el criterio de condensación de Cauchy, la serie converge si y sólo si lo hace la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{s-1}} \right)^n,$$

pero ésta es una serie geométrica, que converge si y sólo si  $1/2^{s-1} < 1$ , es decir, si y sólo si  $2^{s-1} > 1$ , si y sólo si  $s > 1$ . ■

**Raíces  $n$ -simas** Ahora, para cada número real  $x > 0$  y cada número natural  $n \geq 1$  podemos definir  $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ , y claramente  $(\sqrt[n]{x})^n = x$ . De hecho, como la función  $x^n$  es estrictamente creciente para  $x > 0$ , es claro que  $\sqrt[n]{x}$  es el único número real positivo que cumple  $(\sqrt[n]{x})^n = x$ , es decir, es la raíz  $n$ -sima de  $x$  que ya teníamos definida. Las propiedades algebraicas de las raíces se deducen inmediatamente de las de la exponencial. Un poco más en general, es claro que si  $m/n$  es un número racional (con  $n \geq 1$ ) y  $x > 0$ , entonces

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m.$$

La expresión de las raíces como exponenciales nos permite extraer fácilmente algunas consecuencias. Por ejemplo, ahora es inmediato que, para todo  $x > 0$ ,

$$\lim_n \sqrt[n]{x} = 1,$$

pues se trata del límite de  $e^{(\log x)/n}$  y el exponente tiende a 0.

El siguiente caso particular de (4.8) se conoce como *fórmula de Halley*, la cual comparte descubridor con el cometa:

$$\lim_n n(\sqrt[n]{x} - 1) = \log x, \quad (\text{para todo } x > 0). \quad (4.9)$$

**Logaritmos de base arbitraria** Observemos ahora que la ecuación  $a^y = x$ , con  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , equivale a  $y = \log x / \log a$ . Por ello, definimos el *logaritmo de base  $a$*  como la función

$$\log_a : ]0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$$

mediante  $\log_a x = \log x / \log a$ , y resulta ser la función inversa de la exponencial  $x \mapsto a^x$ .

Puesto que no es más que la función  $\log x$  salvo un factor constante, las propiedades de  $\log_a x$  se deducen trivialmente de las propiedades de la función  $\log x$ . Por ejemplo,  $\log_a x$  es continua y es creciente si  $a > 1$  y es decreciente si  $a < 1$ , etc. ■

**La desigualdad entre la media aritmética y la geométrica** Veamos otra aplicación útil del logaritmo:

Dada una sucesión finita de números:  $a_1, \dots, a_n \geq 0$ , su *media aritmética* y su *media geométrica* se definen, respectivamente, como

$$M_a = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}, \quad M_g = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}.$$

**Teorema 4.10** *La media geométrica de una sucesión finita de unos números  $a_1, \dots, a_n \geq 0$  es siempre menor o igual que la media aritmética.*<sup>2</sup>

DEMOSTRACIÓN: Si uno de los  $a_i$  es nulo, la media geométrica es nula y la conclusión es obvia. Supongamos que son todos no nulos y sea  $a = a_1 \cdots a_n$ . Entonces, por el teorema 4.5,

$$\frac{a_i}{\sqrt[n]{a}} - 1 \geq \log\left(1 + \frac{a_i}{\sqrt[n]{a}} - 1\right),$$

luego sumando obtenemos que

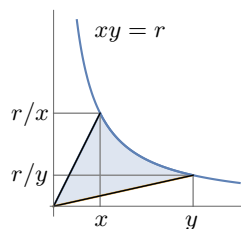
$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sqrt[n]{a}} - n \geq \log \frac{a_1 \cdots a_n}{a} = 0,$$

con lo que

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \geq \sqrt[n]{a}. \quad \blacksquare$$

**El área de un sector hiperbólico** Como otra aplicación del logaritmo vamos a calcular el área de un sector hiperbólico limitado por la hipérbola de ecuación  $xy = r$ . Al final de la sección 7.4 de [IGE] damos una prueba geométrica.

**Teorema 4.11** *El área del sector hiperbólico indicado en la figura es  $r \log(y/x)$ :*



DEMOSTRACIÓN: No hemos definido el concepto de área, pero no usaremos ninguna propiedad que no sea intuitivamente evidente. De todos modos, en el apéndice A exponemos la teoría necesaria para definir el área de una figura plana y justificar todas las propiedades que vamos a emplear.

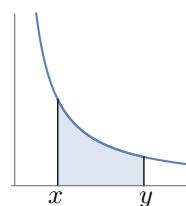
<sup>2</sup>Si los  $a_i$  no son nulos, podemos definir también su media harmónica como

$$M_h = \frac{n}{1/a_1 + \dots + 1/a_n},$$

y aplicando el teorema a los números  $1/a_i$  se obtiene que  $M_h \leq M_g$  (compárese con las desigualdades probadas al final de la sección 1.5 de [ITAL]).

Para calcular el área del sector hiperbólico calcularemos antes el área indicada en la figura, donde  $0 < x < y$ . Para ello fijamos un número natural  $n > 0$  y dividimos el intervalo  $[x, y]$  en  $n$  intervalos de longitud  $h = (y-x)/n$ , cuyos extremos serán:

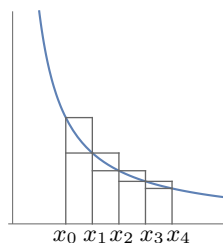
$$x = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = y.$$



Para cada intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ , consideramos los rectángulos de altura  $r/x_{i-1}$  y  $r/x_i$ .

Es claro que el área  $A$  de la figura tiene que ser mayor que la suma de las áreas de los rectángulos pequeños y menor que la suma de las áreas de los rectángulos grandes, es decir:

$$\sum_{i=1}^n \frac{rh}{x_i} \leq A \leq \sum_{i=1}^n \frac{rh}{x_{i-1}}.$$



Vamos a probar que realmente existe un número real  $A$  comprendido entre ambas sumas. Aceptando de momento que es así, observamos que

$$\sum_{i=1}^n \frac{rh}{x_{i-1}} - \sum_{i=1}^n \frac{rh}{x_i} = rh \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i} \right) = rh \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) = \frac{r(y-x)}{n} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)$$

y esta expresión tiende a 0 con  $n$ , de donde se sigue que

$$A = \lim_n \sum_{i=1}^n \frac{rh}{x_i} = \lim_n \sum_{i=1}^n \frac{rh}{x_{i-1}}.$$

Más aún, esto implica que  $A$  es el único número que está comprendido entre ambas sumas para todo  $n$ , por lo que necesariamente tiene que ser el área que buscamos.

Podemos tomar  $n$  es suficientemente grande como para que

$$h = (y-x)/n < x \leq x_i.$$

Así  $0 < t = h/x_{i-1} < 1$ . Veamos que

$$\frac{t}{1+t} < t - \frac{t^2}{2}.$$

Esto equivale a que

$$\frac{1}{1+t} < 1 - \frac{t}{2} = \frac{2-t}{2}$$

o también a que  $2 < 2-t+2t-t^2$ , o a que  $t^2 < t$ , lo cual se cumple, puesto que  $t < 1$ . Por lo tanto, el teorema 4.5 nos da que

$$\frac{t}{1+t} < t - \frac{t^2}{2} < \log(1+t) \leq t$$

o, equivalentemente,

$$\frac{h}{x_i} = \frac{h}{x_{i-1} + h} < \log\left(1 + \frac{h}{x_{i-1}}\right) = \log \frac{x_i}{x_{i-1}} < \frac{h}{x_{i-1}}.$$

Así pues,

$$\frac{rh}{x_i} < r \log x_i - r \log x_{i-1} < \frac{rh}{x_{i-1}},$$

luego

$$\sum_{i=1}^n \frac{rh}{x_i} \leq \sum_{i=1}^n (r \log x_i - r \log x_{i-1}) = r \log y - r \log x \leq \sum_{i=1}^n \frac{rh}{x_{i-1}},$$

y esto prueba que el área de la figura es  $r \log y - r \log x = r \log(y/x)$ .

El área del sector hiperbólico resulta ser también igual a  $r \log(y/x)$ . Para comprobarlo observamos la figura siguiente.

El área del “triángulo”  $S$  con un lado hiperbólico es

$$S = r \log \frac{y}{x} - \frac{r(y-x)}{y} = r \log \frac{y}{x} - r + \frac{rx}{y}.$$

El triángulo  $s$  situado bajo  $S$  tiene base  $y-x$  y altura  $r/y - rx/y^2$  (porque su hipotenusa tiene pendiente  $r/y^2$ , luego su vértice inferior es  $(x, rx/y^2)$ ). Por lo tanto su área es:

$$s = \frac{y-x}{2} \left( \frac{r}{y} - \frac{rx}{y^2} \right) = \frac{r}{2} - \frac{rx}{2y} - \frac{rx}{2y} + \frac{rx^2}{2y^2}$$

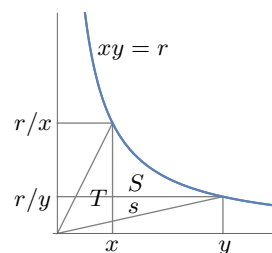
Por último, el triángulo  $T$  tiene base (en vertical)  $r/x - rx/y^2$ , y altura (en horizontal)  $x$ , luego su área es

$$T = \frac{x}{2} \left( \frac{r}{x} - \frac{rx}{y^2} \right) = \frac{r}{2} - \frac{rx^2}{2y^2}.$$

En total, el área del sector hiperbólico es:

$$\begin{aligned} A = S + s + T &= r \log \frac{y}{x} - r + \frac{rx}{y} + \frac{r}{2} - \frac{rx}{2y} - \frac{rx}{2y} + \frac{rx^2}{2y^2} + \frac{r}{2} - \frac{rx^2}{2y^2} \\ &= r \log \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

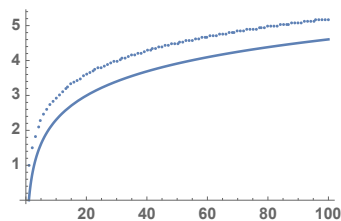
■



### 4.3 La constante de Euler-Mascheroni

Sabemos que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  diverge, pero la forma en que diverge sigue un patrón muy claro.

La gráfica siguiente muestra las sumas parciales  $S_k$  para  $k = 1, \dots, 100$  junto con la gráfica de  $\log x$ . Vemos que la distancia entre ambas parece ser un número fijo. No es exactamente así, pero casi. La diferencia entre ambas gráficas en cada punto  $n$  es



$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n.$$

Vamos a dar dos demostraciones de la convergencia de esta sucesión. La primera se basa en demostrar que es monótona decreciente. Partimos de que, tal y como señalamos tras la definición 1.17, se cumple que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

de donde se sigue que

$$e^{1/(n+1)} < \frac{n+1}{n} < e^{1/n}.$$

Tomando logaritmos:

$$\frac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log n < \frac{1}{n},$$

luego, usando la primera desigualdad, obtenemos:

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n = \gamma_{n+1} - \frac{1}{n+1} + \log(n+1) - \log n > \gamma_{n+1}.$$

Por otra parte, usando la segunda desigualdad:

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n$$

$$\begin{aligned} &> 1 + (\log 3 - \log 2) + (\log 4 - \log 3) + \dots + (\log(n+1) - \log n) - \log n \\ &= 1 - \log 2 + \log(n+1) - \log n > 1 - \log 2 > 0. \end{aligned}$$

luego la sucesión está acotada inferiormente.

**Definición 4.12** La *constante de Euler-Mascheroni* es el número

$$\gamma = \lim_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n = 0.5772156649 \dots$$

Hemos probado que  $0 < \gamma < 1$ . La sucesión converge muy lentamente. Hay que llegar a  $n = 20\,571$  para obtener diez cifras exactas. En realidad no podemos estar seguros de cuántas cifras exactas tiene una aproximación si no tenemos una estimación del error cometido. La segunda demostración de la convergencia de la sucesión  $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$  nos dará tal estimación. Concretamente, vamos a probar que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n - \gamma < \frac{3}{2n}. \quad (4.10)$$

Para ello observamos que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \log \frac{k+1}{k} \right) + \log(n+1),$$

pues en la segunda suma los términos  $-\log((k+1)/k) = \log k - \log(k+1)$  se cancelan sucesivamente salvo el último  $-\log(n+1)$ . Ahora observamos que, según 4.5,

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} \leq \log \left( 1 + \frac{1}{k} \right) = \log \frac{k+1}{k} \leq \frac{1}{k},$$

luego

$$0 \leq \frac{1}{k} - \log \frac{k+1}{k} \leq \frac{1}{2k^2},$$

lo que garantiza la convergencia de la serie

$$\gamma^* = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \log \frac{k+1}{k} \right).$$

Tenemos que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \gamma^* - \sum_{k=n+1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \log \frac{k+1}{k} \right) + \log(n+1),$$

luego

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n - \gamma = \log \frac{n+1}{n} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \log \frac{k+1}{k} \right),$$

donde hemos escrito  $\gamma$  en lugar de  $\gamma^*$  porque el miembro derecho tiende a 0, lo que prueba que  $\gamma^* = \gamma$ , es decir, hemos demostrado de nuevo la convergencia de la sucesión. La demostración anterior tenía el interés de probar que dicha sucesión es decreciente, pero ésta nos permite acotar el error:

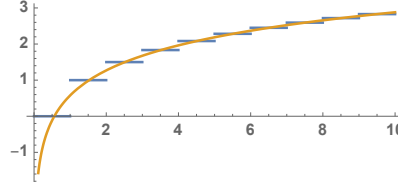
$$\left| \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - \sum_{k=n+1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \log \frac{k+1}{k} \right) \right| \leq \frac{1}{n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2k^2} \leq$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} = \frac{3}{2n},$$

donde hemos usado que las sumas parciales de la última serie son

$$\sum_{k=n+1}^N \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{N} \leq \frac{1}{n}.$$

A la hora de comparar sumas parciales de series con funciones continuas definidas para todo  $x > 0$ , como es el caso del logaritmo, es más práctico extender las sumas a funciones escalonadas, como muestra la figura, que, junto a  $\gamma + \log x$ , muestra la función



$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{E[x]} \frac{1}{n}.$$

En estos términos la cota del error es ligeramente distinta:

**Teorema 4.13** Para todo número real  $x \geq 5$ , se cumple que<sup>3</sup>

$$\sum_{k \leq x} \frac{1}{k} = \log x + \gamma + R(x),$$

donde el resto cumple  $|R(x)| \leq 3/x$ .

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que

$$\sum_{k \leq x} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{E[x]} \frac{1}{k} = \log E[x] + \gamma + R(E[x]) = \log x + \gamma + R(E[x]) + \log \frac{E[x]}{x},$$

luego

$$R(x) = R(E[x]) + \log \frac{E[x]}{x}.$$

Pero por (4.10), para enteros tenemos la estimación  $|R(E[x])| \leq 3/2E[x]$ , luego

$$|R(x)| \leq \frac{3}{2E[x]} + \log \left( 1 + \frac{x - E[x]}{E[x]} \right) \leq \frac{3}{2E[x]} + \frac{x - E[x]}{E[x]} \leq \frac{5}{2E[x]} \leq \frac{3}{x}$$

si  $x \geq 5$ , pues en tal caso  $5x \leq 5E[x] + 5 \leq 6E[x]$ , ya que  $5 \leq E[x]$ . ■

Observemos que, tomando la subsucesión de los términos pares, obtenemos

$$\gamma = \lim_n \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} - \log 2n \right)$$

y, trivialmente,

$$\gamma = \lim_n \left( 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) - \log n \right),$$

<sup>3</sup>En realidad se cumple que  $|R(x)| \leq 1/x$  para todo  $x \geq 1$ .

luego al restar ambas sucesiones queda que

$$\lim_n \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2n} - \log 2 \right) = 0,$$

con lo que finalmente hemos calculado:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2. \quad (4.11)$$

Si consideramos la subsucesión de las sumas pares queda

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots = \log 2.$$

En cambio, con las sumas impares queda

$$1 - \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{4 \cdot 5} - \frac{1}{6 \cdot 7} - \cdots = \log 2,$$

luego

$$\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \cdots = 1 - \log 2 = \log \frac{e}{2}.$$

Por otro lado, aplicando la función exponencial a (4.11) queda:

$$\frac{e}{\sqrt{e}} \cdot \frac{\sqrt[3]{e}}{\sqrt[4]{e}} \cdot \frac{\sqrt[5]{e}}{\sqrt[6]{e}} \cdot \frac{\sqrt[7]{e}}{\sqrt[8]{e}} \cdots = 2.$$

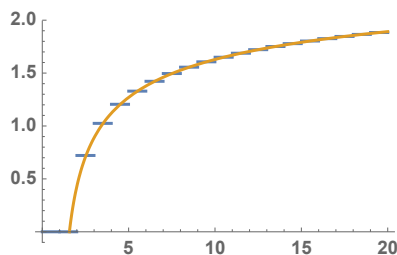
Terminamos esta sección demostrando un resultado que no tiene nada que ver con la constante de Euler-Mascheroni, pero que vamos a probar con la misma técnica que hemos usado para probar el teorema 4.13. Se trata de estudiar igualmente el crecimiento de las sumas parciales de la serie divergente

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}.$$

La figura muestra la función escalonada

$$\sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{n \log n}$$

superpuesta a otra función que no es  $\log x$ , sino  $\log \log x + 0.794678 \dots$ , y así vemos que las sumas parciales tienden a  $+\infty$  a la misma velocidad que<sup>4</sup>  $\log \log x$ .



<sup>4</sup>La función  $\log \log x$  tiende a infinito a una velocidad espectacularmente lenta. Por ejemplo:

$$\log \log 1\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 3.7244 \dots$$

**Teorema 4.14** *Existe una constante  $c$  tal que*

$$\sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{n \log n} = \log \log x + c + R(x),$$

donde  $|R(x)| \leq 6/\log x$ .

DEMOSTRACIÓN: Partimos de:

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{n \log n} = \sum_{n=2}^N \left( \frac{1}{n \log n} - \log \log(n+1) + \log \log n \right) - \log \log 2 + \log \log(N+1).$$

Notemos que

$$\log \log(n+1) - \log \log n = \log \frac{\log(n+1)}{\log n} = \log \left( 1 + \frac{\log \frac{n+1}{n}}{\log n} \right).$$

Por las desigualdades del teorema 4.5:

$$\frac{\log \frac{n+1}{n}}{\log n} - \frac{\log^2 \frac{n+1}{n}}{2 \log^2 n} \leq \log \left( 1 + \frac{\log \frac{n+1}{n}}{\log n} \right) \leq \frac{\log \frac{n+1}{n}}{\log n},$$

luego

$$\frac{1}{n \log n} - \log \left( 1 + \frac{\log \frac{n+1}{n}}{\log n} \right) \geq \frac{1}{n \log n} - \frac{\log \frac{n+1}{n}}{\log n} = \frac{1 - \log(1 + \frac{1}{n})^n}{n \log n} > 0,$$

donde usamos que  $(1 + 1/n)^n < e$  (véase la observación tras la definición 1.17).

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n \log n} - \log \left( 1 + \frac{\log \frac{n+1}{n}}{\log n} \right) &\leq \frac{1}{n \log n} + \frac{\log^2 \frac{n+1}{n}}{2 \log^2 n} - \frac{\log \frac{n+1}{n}}{\log n} \\ &= \frac{2 \log n + n \log^2(1 + 1/n) - 2n \log n \log(1 + 1/n)}{2n \log^2 n} \\ &= \frac{2 \log n - n \log(1 + 1/n)(2 \log n - \log(1 + 1/n))}{2n \log^2 n} \end{aligned}$$

Ahora usamos que, de nuevo por 4.5:

$$\log \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2},$$

luego

$$n \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \geq 1 - \frac{1}{2n}.$$

Así:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n \log n} - \log \left( 1 + \frac{\log \frac{n+1}{n}}{\log n} \right) &\leq \frac{2 \log n - (1 - 1/2n)(2 \log n - \log(1 + 1/n))}{2n \log^2 n} \\ &= \frac{\frac{\log n}{n} + (1 - 1/2n) \log(1 + 1/n)}{2n \log^2 n} \leq \frac{\frac{\log n}{n} + \frac{1}{n}}{2n \log^2 n} = \frac{1 + \log n}{2n^2 \log^2 n} \leq \frac{1 + \log n}{n^2}, \end{aligned}$$

y la última sucesión define una serie convergente (véase el ejemplo 4.7).

Por lo tanto, existe

$$c_0 = \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{n \log n} - \log \log(n+1) + \log \log n \right)$$

y

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^N \frac{1}{n \log n} &= \log \log N + c_0 - \log \log 2 + \log \frac{\log(N+1)}{\log N} \\ &\quad - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n \log n} - \log \left( 1 + \frac{\log \frac{n+1}{n}}{\log n} \right). \end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$\sum_{2 \leq n \leq N} \frac{1}{n \log n} = \log \log N + c + R(N),$$

donde

$$R(N) = \log \frac{\log(N+1)}{\log N} - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n \log n} - \log \left( 1 + \frac{\log \frac{n+1}{n}}{\log n} \right).$$

Por una parte,

$$\log \frac{\log(N+1)}{\log N} = \log \left( 1 + \frac{\log(1+1/N)}{\log N} \right) \leq \frac{\log(1+1/N)}{\log N} \leq \frac{\log 2}{\log N} < \frac{0.7}{\log N},$$

mientras que los cálculos anteriores muestran que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n \log n} - \log \left( 1 + \frac{\log \frac{n+1}{n}}{\log n} \right) \right| &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1 + \log n}{2n^2 \log^2 n} \leq \\ \frac{1}{\log N} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1 + \log n}{2n^2} &\leq \frac{1}{\log N} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + \log n}{2n^2} \leq \frac{1.2}{\log N}, \end{aligned}$$

donde hemos usado que

$$\frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^2} \leq \log 2 < 0.7,$$

según hemos visto en los ejemplos 2.11 (notemos que esta serie empieza en  $n = 2$ ) y 4.7 (véase la nota al pie). Así pues,

$$|R(N)| \leq \frac{2}{\log N}.$$

Ahora, si  $x > 3$  es arbitrario,

$$\sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{n \log n} = \log \log E[x] + c + R(E[x]),$$

donde  $R(E[x]) \leq 2/\log E[x]$ .

Pero

$$\sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{n \log n} = \log \log x + c + R(E[x]) + \log \frac{\log E[x]}{\log x},$$

donde

$$|R(E[x])| \leq \frac{2}{\log E[x]} = \frac{2}{\log x} \frac{\log x}{\log E[x]} \leq \frac{4}{\log x},$$

pues si  $x \geq 3$ , se cumple que  $x \leq (x-1)^2 \leq E[x]^2$ , luego  $\log x \leq 2 \log E[x]$ .

Por último:

$$\begin{aligned} \left| \log \frac{\log E[x]}{\log x} \right| &= \log \frac{\log x}{\log E[x]} = \log \left( 1 + \frac{\log(x/E[x])}{\log E[x]} \right) \leq \frac{\log(x/E[x])}{\log E[x]} \leq \\ &\frac{\log 2}{\log x} \frac{\log x}{\log E[x]} \leq \frac{2 \log 2}{\log x} < \frac{1.4}{\ln x}, \end{aligned}$$

luego en total  $|R(x)| \leq 6/\log x$ . ■

La constante resulta ser  $c = 0.794678\dots$

## 4.4 La serie de potencias del logaritmo

Consideremos la serie de potencias

$$L(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n,$$

que tiene radio de convergencia  $R = 1$ , luego todas sus potencias  $L(z)^n$  pueden expresarse como series de potencias. Por conveniencia para el cálculo que vamos a hacer, vamos a expresar

$$L(z)^n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{n,k}}{k!} z^k,$$

donde  $a_{1,k} = (k-1)!$ , y vamos a determinar inductivamente los coeficientes  $a_{n,k}$  para  $n \geq 2$ . Notemos que  $a_{n,0} = L(0)^n = 0$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} L(z)^{n+1} &= L(z)L(z)^n = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{k-1} \left( \frac{a_{1,r}}{r!} \frac{a_{n,k-r}}{(k-r)!} \right) z^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{r=1}^{k-1} \binom{k}{r} a_{1,r} a_{n,k-r} z^k, \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que  $a_{n,0} = 0$ , luego, por el teorema 3.9

$$a_{n+1,k} = \sum_{r=1}^{k-1} \binom{k}{r} a_{1,r} a_{n,k-r}. \quad (4.12)$$

Por ejemplo, un cálculo rutinario a partir de esta relación muestra que

$$a_{1,4} = 6, \quad a_{2,4} = 22, \quad a_{3,4} = 36, \quad a_{4,4} = 24.$$

Estos números tienen una interpretación combinatoria:

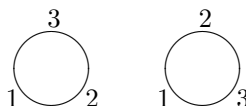
$a_{n,k}$  es el número de formas distintas en que  $k$  personas se pueden sentar alrededor de  $n$  mesas circulares numeradas sin que ninguna quede vacía.

En efecto, veamos que es así para  $n = 1$ . En este caso  $a_{1,k} = (k - 1)!$  y, en efecto, si  $k$  personas se tienen que sentar alrededor de una mesa, en principio pueden tomar sus asientos de  $k!$  formas distintas.

Por ejemplo, para  $k = 3$ , pueden sentarse en cualquiera de las 6 formas

$$123, \quad 312, \quad 231, \quad 132, \quad 213, \quad 321,$$

pero las tres primeras corresponden a una misma posición relativa en una mesa circular, al igual que las tres últimas, a saber:



Por lo tanto, 3 personas pueden sentarse de 2 formas en una mesa circular, si entendemos que sólo importa quién está a la izquierda y a la derecha de quién, y no los asientos concretos que ocupan.

En general, las  $k!$  asignaciones de asientos posibles se agrupan en  $(k - 1)!$  grupos de  $k$  asignaciones que corresponden a giros alrededor de la mesa. Por lo tanto,  $a_{1,k} = (k - 1)!$  es el valor correcto.

Supuesto cierto para  $n$ , si queremos disponer a  $k$  personas en  $n + 1$  mesas circulares, tendremos que elegir a las  $1 \leq r \leq k - 1$  que sentamos en la mesa 1, y hay  $\binom{k}{r}$  formas de elegirlos. Estas  $r$  personas se podrán sentar de  $a_{1,r}$  formas distintas en la mesa 1 y las  $k - r$  personas restantes tendrán que distribuirse entre las  $n - 1$  mesas restantes, lo cual puede hacerse de  $a_{n,k-r}$  formas distintas. Esto implica que el número total de formas de disponerlas viene dado justamente por la expresión (4.12).

Por ejemplo, el valor  $a_{2,4} = 22$  se interpreta como que 4 personas se pueden sentar en 2 mesas circulares en una de las tres formas:

$$(\bullet)(\bullet\bullet\bullet), \quad (\bullet\bullet\bullet)(\bullet), \quad (\bullet\bullet)(\bullet\bullet).$$

Del primer tipo hay 8 formas, pues tenemos cuatro posibilidades para elegir el ocupante de la primera mesa y, para cada una de ellas, las otras tres personas se pueden sentar de  $(3 - 1)! = 2$  formas distintas en la segunda mesa. Del segundo tipo hay otras 8, mientras que para el tercer esquema tenemos 6 formas de

elegir los ocupantes de la primera mesa (que pueden sentarse de una única forma) y eso determina también la ocupación de la segunda mesa. En total,  $a_{4,2} = 8 + 8 + 6 = 22$ .

En particular hemos demostrado que  $a_{n,k} = 0$  siempre que  $n > k$ , pues no es posible sentar  $k$  personas en  $n$  mesas sin dejar ninguna vacía. (También se ve fácilmente a partir de (4.12).)

Ahora consideramos:

$$\frac{1}{n!} L(z)^n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{a_{n,k}}{n!} z^k,$$

donde:

*$a_{n,k}/n!$  es el número de formas distintas en que  $k$  personas se pueden sentar alrededor de  $n$  mesas circulares indistinguibles sin que ninguna quede vacía.*

En efecto, ahora estamos identificando dos disposiciones si resultan de permutar las mesas, y podemos permutarlas de  $n!$  formas distintas.

Por ejemplo, en el caso de  $a_{2,4}$  que hemos discutido, cada disposición del primer tipo es ahora la misma que la del segundo tipo que resulta de intercambiar las dos mesas, por lo que en lugar de  $8 + 8$  tenemos sólo 8 disposiciones con tres personas en una mesa y otra sola. Y las 6 posibilidades con dos personas en cada mesa se reducen ahora a 3, por el mismo motivo, y sólo quedan en total 11 opciones:

$$\begin{aligned} &(123)(4), \quad (321)(4), \quad (124)(3), \quad (421)(3), \\ &(134)(2), \quad (431)(2), \quad (234)(1), \quad (243)(1), \\ &(12)(34), \quad (13)(24), \quad (14)(23). \end{aligned}$$

A continuación consideramos la suma

$$\sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} L(z)^n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^N \frac{a_{n,k}}{n!} z^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{N,k}}{k!} z^k,$$

donde

$$b_{N,k} = \sum_{n=0}^N \frac{a_{n,k}}{n!},$$

pero si  $N \geq k$  se cumple que  $b_{N,k} = b_{k,k}$ , ya que  $a_{n,k} = 0$  para  $n > k$ . La interpretación es clara:

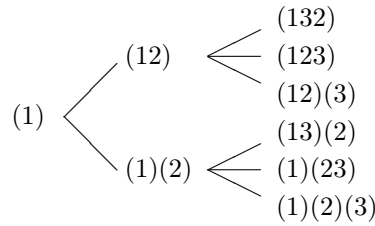
*$b_{k,k}$  es el número de formas distintas en que  $k$  personas se pueden sentar en mesas circulares no numeradas sin que ninguna quede vacía.*

Por ejemplo,

$$b_{4,4} = \frac{a_{1,k}}{1!} + \frac{a_{2,k}}{2!} + \frac{a_{3,k}}{3!} + \frac{a_{4,k}}{4!} = \frac{6}{1} + \frac{22}{2} + \frac{36}{6} + \frac{24}{24} = 24.$$

Más detalladamente: 4 personas se pueden sentar de  $3! = 6$  formas distintas en una única mesa circular, ya hemos visto las 11 formas en que pueden sentarse en dos mesas, en 3 mesas tienen que disponerse en la forma  $(\bullet\bullet)(\bullet)(\bullet)$ , lo cual nos da 6 posibilidades para la mesa doble y esto determina ya que las dos personas restantes van en mesas individuales, luego hay 6 posibilidades en total, y por último sólo hay una posibilidad con 4 mesas, y es que cada uno se siente en una.

Ahora bien, sucede que  $b_{k,k} = k!$ . En efecto,<sup>5</sup> si queremos disponer  $k$  personas en mesas circulares indistinguibles, para la primera persona sólo tenemos 1 posibilidad, que es sentarla en una mesa cualquiera; para la segunda tenemos 2 posibilidades: o bien la sentamos a la derecha de la primera, o bien la sentamos en una mesa nueva; para la tercera tenemos 3 posibilidades: o bien la sentamos a la derecha de una de las dos anteriores, o bien la sentamos en una mesa nueva, y así sucesivamente, luego para  $k$  personas tenemos  $k!$  posibilidades. El esquema siguiente ilustra la construcción de las distintas posibilidades:



Tenemos entonces que

$$\sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} L(z)^n = \sum_{k=1}^N z^k + z^{N+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{N,N+k+1}}{(N+k+1)!} z^k,$$

donde  $b_{N,N+k+1} \leq b_{N+k+1,N+k+1} = (N+k+1)!$ , luego

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{N,N+k+1}}{(N+k+1)!} z^k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |z|^k = \frac{1}{1-|z|}.$$

Por lo tanto, tomando límites en  $N$  resulta que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} L(z)^n = \frac{1}{1-z} + \lim_N \left( z^{N+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{N,N+k+1}}{(N+k+1)!} z^k \right) = \frac{1}{1-z},$$

pues el último límite vale 0, ya que  $\lim_N z^{N+1} = 0$  y la sucesión definida por la serie está acotada, pero la primera serie no es sino  $e^{L(z)}$ , luego hemos probado que

$$e^{L(z)} = \frac{1}{1-z}, \quad \text{para todo } z \text{ tal que } |z| < 1.$$

<sup>5</sup>Este sencillo argumento me lo dio Luis Fuentes, y sustituye a otro bastante más sofisticado que usé inicialmente.

Por lo tanto,  $e^{-L(z)} = 1 - z$  y  $e^{-L(-z)} = 1 + z$ . Esto nos lleva a las definiciones siguientes:

**Definición 4.15** Para todo número complejo tal que  $|z| < 1$ , definimos

$$\log \frac{1}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \dots \quad (4.13)$$

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots \quad (4.14)$$

Hemos demostrado que

$$e^{\log(1/(1-z))} = \frac{1}{1-z}, \quad e^{\log(1+z)} = 1+z,$$

luego, para valores reales  $-1 < x < 1$ , tenemos que  $\log(1/(1-x))$  y  $\log(1+x)$  no es sino el logaritmo que ya teníamos definido.

Ahora bien, del teorema 2.33 se sigue que la serie de potencias (4.14) converge en todos los números complejos  $z$  que cumplen  $|z| \leq 1$  excepto en  $z = -1$ . Fijemos uno de estos números  $z$  y sea  $0 \leq x < 1$ , de modo que

$$\log(1+xz) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n} x^n.$$

Como la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$$

es convergente, el teorema 3.21 nos da que

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n = \lim_{x \rightarrow 1} \log(1+xz),$$

luego, por la continuidad de la función exponencial,

$$e^{\log(1+z)} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\log(1+xz)} = \lim_{x \rightarrow 1} (1+xz) = 1+z.$$

Así pues, la relación

$$e^{\log(1+x)} = 1+x$$

es válida en realidad para todo número complejo  $x$  que cumpla  $|x| \leq 1$  excepto para  $x = -1$ . En particular  $\log(1+1)$  no es sino el logaritmo de 2 que ya teníamos definido, y así obtenemos otra demostración de la igualdad (4.11):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2.$$

La serie (4.14) permite en teoría evaluar cualquier logaritmo. Por ejemplo,

$$\log 10 = -\log(1/10) = -\log(1 - 9/10) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{9}{10}\right)^n,$$

aunque la convergencia no es muy rápida. La tabla siguiente muestra las aproximaciones que se obtienen sumando hasta varios valores  $N$ :

$N$	
10	2.1187475948314285714
50	2.3017962525010716565
70	2.3025137650431014378
100	2.3025829056390605320
200	2.3025850929637525711
$\infty$	2.3025850929940456840...

## Capítulo V

# Las funciones trigonométricas

### 5.1 El seno y el coseno

En el capítulo anterior hemos definido la función exponencial sobre cualquier número complejo, pero sólo la hemos estudiado con detalle sobre los números reales. Vamos a estudiar ahora los valores que toma sobre el eje imaginario, es decir, vamos a estudiar la función  $e^{ix}$ , donde  $x$  es real. Ahora  $e^{ix}$  es un número complejo. Vamos a calcular su parte real y su parte imaginaria.

Notemos que, en general, si  $z = x + yi$ , sus partes real e imaginaria son

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Usando que la conjugación es continua, es fácil probar que  $\overline{e^{ix}} = e^{-ix}$ , pero, en lugar de tener esto en cuenta, vamos a estudiar, más en general, las funciones

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

donde  $z$  es un número complejo arbitrario. Tenemos que:

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \frac{z^n}{n!}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n + (-i)^n}{2} \frac{z^n}{n!},$$

pero la sucesión  $(i^n + (-i)^n)/2$  es simplemente  $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots$ , por lo que

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n},$$

y esta expresión —que hemos probado para todo número complejo— muestra que la expresión inicial es real cuando  $x$  es real. Además, hemos probado la convergencia de la serie de potencias del miembro derecho, luego su radio de

convergencia es infinito. Similarmente:

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \frac{z^n}{n!}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n - (-i)^n}{2i} \frac{z^n}{n!},$$

y ahora la sucesión  $(i^n - (-i)^n)/2i$  es  $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$ , luego

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1},$$

que también es un número real cuando  $z$  es real, y hemos probado la convergencia de la serie, luego su radio de convergencia también es infinito.

**Definición 5.1** Para cada número complejo  $z$ , definimos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} - \dots \\ \operatorname{cos} z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \dots \end{aligned}$$

Hemos probado que ambas series de potencias tienen radio de convergencia infinito (luego convergen absolutamente en todo  $\mathbb{C}$ ), y además

$$\operatorname{cos} z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad (5.1)$$

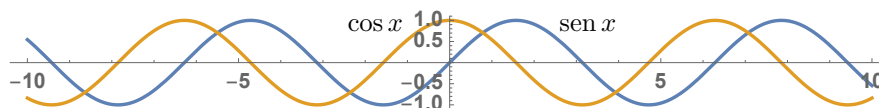
de donde

$$\operatorname{cos} z + i \operatorname{sen} z = e^{iz},$$

luego, cuando  $z$  es real,  $\operatorname{cos} z$  y  $\operatorname{sen} z$  son la parte real y la parte imaginaria de  $e^{iz}$ . Un poco más en general, ahora tenemos la expresión siguiente, que expresa la función exponencial compleja en términos de las funciones reales  $e^x$ ,  $\operatorname{sen} x$  y  $\operatorname{cos} x$ :

$$e^{x+yi} = e^x (\operatorname{cos} y + i \operatorname{sen} y). \quad (5.2)$$

El interés de haber relacionado las funciones  $\operatorname{sen} x$  y  $\operatorname{cos} x$  con la exponencial compleja es que así podemos usar las propiedades de ésta para obtener las propiedades básicas de las funciones reales  $\operatorname{sen} x$  y  $\operatorname{cos} x$ . Sus gráficas son las siguientes:



Vamos a ir demostrando las propiedades que se reflejan en la figura. La propia definición, o (5.1) nos dan:

$$\operatorname{sen} 0 = 0, \quad \operatorname{cos} 0 = 1$$

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x, \quad \operatorname{cos}(-x) = \operatorname{cos} x.$$

A continuación probamos varias identidades fundamentales:

$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1. \quad (5.3)$$

En efecto:

$$1 = e^{ix} e^{-ix} = (\operatorname{cos} x + i \operatorname{sen} x)(\operatorname{cos} x - i \operatorname{sen} x) = \operatorname{cos}^2 x + \operatorname{sen}^2 x.$$

En particular, esto implica que  $-1 \leq \operatorname{sen} x, \operatorname{cos} x \leq 1$  y, más aún, que cuando una de las funciones vale  $\pm 1$ , la otra vale 0.

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \operatorname{cos} y + \operatorname{cos} x \operatorname{sen} y, \quad (5.4)$$

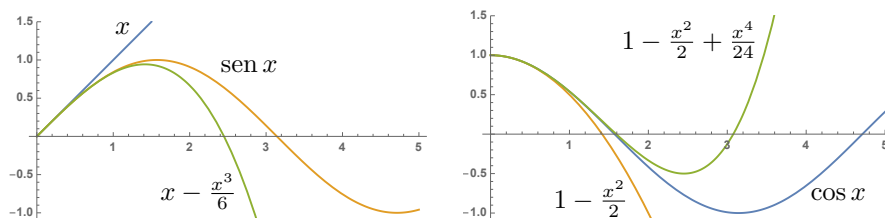
$$\operatorname{cos}(x+y) = \operatorname{cos} x \operatorname{cos} y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \quad (5.5)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \operatorname{cos}(x+y) + i \operatorname{sen}(x+y) &= e^{ix+iy} = e^{ix} e^{iy} = (\operatorname{cos} x + i \operatorname{sen} x)(\operatorname{cos} y + i \operatorname{sen} y) \\ &= \operatorname{cos} x \operatorname{cos} y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + i(\operatorname{sen} x \operatorname{cos} y + \operatorname{cos} x \operatorname{sen} y). \end{aligned}$$

Veamos ahora que, para  $x \geq 0$ , las funciones  $\operatorname{sen} x$  y  $\operatorname{cos} x$  están situadas entre las primeras sumas parciales de las series que las definen:

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \operatorname{sen} x \leq x, \quad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \operatorname{cos} x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}. \quad (5.6)$$



En el caso del seno observamos que, para  $m \geq 1$

$$\frac{x^{2m+3}}{(2m+3)!} = \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \frac{x^2}{(2m+2)(2m+3)} \leq \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

siempre que  $x^2 \leq 20 = 4 \cdot 5 \leq (2m+2)(2m+3)$ , en particular si  $0 \leq x \leq 4$ .

Esto significa que los términos de la serie del seno son decrecientes en valor absoluto a partir de  $x^3/6$ . Por lo tanto:

$$\operatorname{sen} x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

y las sumas parciales pares de la serie cumplen:

$$\sum_{n=1}^{2k} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \left( -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right) + \cdots + \left( -\frac{x^{4k-1}}{(4k-1)!} + \frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} \right) \leq 0,$$

luego la suma es negativa y concluimos que  $\operatorname{sen} x \leq x$ . Similarmente,

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

y las sumas parciales pares cumplen:

$$\sum_{n=2}^{2k+1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \left( \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \right) + \cdots + \left( \frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} - \frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!} \right) \geq 0,$$

luego la suma es positiva y se cumple la desigualdad que queríamos probar.

Con el coseno se razona de forma similar. Para  $m \geq 2$ :

$$\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} = \frac{x^{2m}}{(2m)!} \frac{x^2}{(2m+1)(2m+2)} \leq \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

si  $x^2 \leq 30 = 5 \cdot 6 \leq (2m+1)(2m+2)$ , en particular para  $0 \leq x \leq 5$ . Así,

$$1 - \frac{x^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

y como antes vemos que las sumas parciales pares de la primera serie son positivas y las de la segunda negativas, lo que nos da las desigualdades para  $0 \leq x \leq 5$ . Ahora bien, si  $x > 5$  se cumple que

$$1 - \frac{x^2}{2} < -1 \leq \cos x \leq 1 < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

y llegamos a la misma conclusión.

Ahora, la última desigualdad de (5.6) implica que  $\cos 2 \leq -1/3 < 0$ , lo que, combinado con  $\cos 0 = 1$ , nos permite aplicar el teorema de Bolzano para concluir que existe  $0 < p < 2$  tal que  $\cos p = 0$ . La gráfica de  $\cos x$  muestra que, de hecho, hay un único  $p$  que anula al coseno en dicho intervalo, pero, como no tenemos una prueba de ello, de momento tomamos como  $p$  el mínimo número que cumple esto (que existe por el teorema 3.32). Es costumbre llamar  $\pi = 2p < 4$ , de modo que el coseno es positivo en el intervalo  $[0, \pi/2[$ , pero  $\cos(\pi/2) = 0$ .

Por otro lado, la primera desigualdad de (5.6) prueba que  $\operatorname{sen} x$  es positivo en  $[0, 2]$ , por lo que (5.3) implica que  $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$ .

Con esto, las fórmulas (5.4) y (5.5) nos dan unos casos particulares de interés:

$$\operatorname{sen}(x + \pi/2) = \cos x, \quad \cos(x + \pi/2) = -\operatorname{sen} x, \quad (5.7)$$

y si las volvemos a aplicar:

$$\operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen} x, \quad \operatorname{cos}(x + \pi) = -\operatorname{cos} x. \quad (5.8)$$

Aplicando estas fórmulas dos veces:

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x, \quad \operatorname{cos}(x + 2\pi) = \operatorname{cos} x. \quad (5.9)$$

Con esto ya hemos probado una de las características más notables de las funciones  $\operatorname{sen} x$  y  $\operatorname{cos} x$ , a saber, que son periódicas, que repiten sus valores cada vez que la variable avanza  $2\pi$ .

Ahora vamos a probar que  $\operatorname{cos} x$  es estrictamente decreciente en  $[0, \pi/2]$ . Supongamos lo contrario, es decir, que existen números

$$0 \leq x < y \leq \pi/2$$

tales que  $\operatorname{cos} x \leq \operatorname{cos} y$ . Entonces, como

$$\operatorname{cos} x \leq \operatorname{cos} y \leq 1 = \operatorname{cos} 0,$$

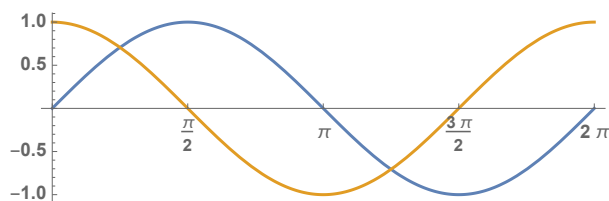
el teorema de los valores intermedios nos da un número  $0 \leq y' \leq x < y < \pi/2$  tal que  $\operatorname{cos} y' = \operatorname{cos} y$ . Como el seno y el coseno son positivos en  $[0, \pi/2]$ , la relación (5.3) nos da que  $\operatorname{sen} y' = \operatorname{sen} y$ . Observemos ahora que  $z = y' + \pi/2 - y$  cumple  $0 \leq z < \pi/2$ , pero

$$\begin{aligned} \operatorname{cos} z &= -\operatorname{sen}(y' - y) = -\operatorname{sen} y' \operatorname{cos}(-y) - \operatorname{cos} y' \operatorname{sen}(-y) \\ &= -\operatorname{sen} y \operatorname{cos} y + \operatorname{cos} y \operatorname{sen} y = 0, \end{aligned}$$

lo que contradice que  $\pi/2$  es el menor cero positivo de  $\operatorname{cos} x$ .

Así pues,  $\operatorname{cos} x$  decrece estrictamente desde 1 hasta 0 en el intervalo  $[0, \pi/2]$ , lo que implica que  $\operatorname{sen} x$  crece estrictamente desde 0 hasta 1 en ese mismo intervalo.

Ahora las relaciones (5.7) permiten concluir que el comportamiento de las funciones  $\operatorname{sen} x$  y  $\operatorname{cos} x$  en el intervalo  $[0, 2\pi]$  es justamente el que muestra la gráfica:



En particular, la función  $\operatorname{cos} x$  es estrictamente decreciente en  $[0, \pi]$  y estrictamente creciente en  $[\pi, 2\pi]$ . La función  $\operatorname{cos} x$  se anula únicamente en  $\pi/2$  y en  $3\pi/2$ , mientras que  $\operatorname{sen} x$  lo hace en  $0$ ,  $\pi$  y  $2\pi$ . En general,  $\operatorname{cos} x = 0$  si y sólo si  $x = \pi/2 + k\pi$ , y  $\operatorname{sen} x = 0$  si y sólo si  $x = k\pi$ .

Otra propiedad relevante de la función seno es la siguiente:

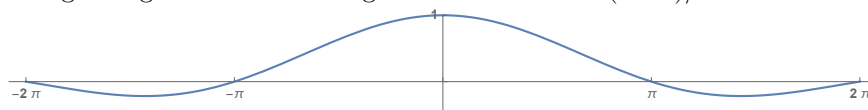
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \quad (5.10)$$

En efecto, para  $x \neq 0$  tenemos que

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n},$$

y la serie de la derecha es una función continua que toma el valor 1 en  $x = 0$ , luego su límite en 0 vale 1.

La figura siguiente muestra la gráfica de la función  $(\operatorname{sen} x)/x$ .



En general, podemos usar las series de Taylor para resolver indeterminaciones en funciones exponenciales y trigonométricas:

### Ejemplo 5.2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} = 0.$$

En efecto, tenemos una indeterminación de tipo  $0/0$ . Consideramos los desarrollos en serie:

$$x \cos x = x - \frac{x^3}{3} + \dots \quad \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \dots$$

que nos permiten expresar

$$x \cos x = x + x^3 u(x), \quad \operatorname{sen} x = x + x^3 v(x),$$

donde

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} x^{2n},$$

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)!} x^{2n}$$

son funciones continuas en  $\mathbb{C}$  que cumplen  $u(0) = -1/3$ ,  $v(0) = -1/6$ . Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3(u(x) - v(x))}{x^2 \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(u(x) - v(x))}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} = 0,$$

pues el último límite es de la forma  $0/1$ . ■

**Caracterización del seno y el coseno** En la sección 3.5 de [IGE] introducimos las funciones seno y coseno (de variable real) a partir de consideraciones geométricas de forma muy distinta a como las hemos definido aquí. En lugar de comparar las definiciones, vamos a probar que cualquier par de funciones que cumplan algunas de las propiedades básicas de las funciones seno y coseno son necesariamente estas funciones, independientemente de cómo se hayan definido:

**Teorema 5.3** Sean  $\overline{\text{sen}}, \overline{\text{cos}} : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  dos funciones que tengan las propiedades siguientes:

1.  $\overline{\text{sen}}^2 x + \overline{\text{cos}}^2 x = 1$ ,
2.  $\overline{\text{sen}}(-x) = -\overline{\text{sen}} x$ ,  $\overline{\text{cos}}(-x) = \overline{\text{cos}} x$ ,
3. Existe un número  $p > 0$  tal que  $\overline{\text{sen}} : [0, p/2] \rightarrow [0, 1]$  es estrictamente creciente y suprayectiva, mientras que  $\overline{\text{cos}} : [0, p/2] \rightarrow [0, 1]$  es estrictamente decreciente y suprayectiva.

Además, si  $0 \leq x, y \leq p/2$ :

- (a)  $\overline{\text{cos}}(x + y) = \overline{\text{cos}} x \overline{\text{cos}} y - \overline{\text{sen}} x \overline{\text{sen}} y$ ,
- (b)  $\overline{\text{sen}}(x + y) = \overline{\text{sen}} x \overline{\text{cos}} y + \overline{\text{cos}} x \overline{\text{sen}} y$ ,

y para, todo número real  $x$ , se cumple:

- (c)  $\overline{\text{sen}}(x + 2p) = \overline{\text{sen}} x$ ,  $\overline{\text{cos}}(x + 2p) = \overline{\text{cos}} x$ .

Entonces  $\overline{\text{sen}} x = \text{sen}((\pi/p)x)$ ,  $\overline{\text{cos}} x = \text{cos}((\pi/p)x)$ .

DEMOSTRACIÓN: Es inmediato comprobar que las funciones

$$\overline{\text{sen}}^*(x) = \overline{\text{sen}}((p/\pi)x), \quad \overline{\text{cos}}(x) = \overline{\text{cos}}((p/\pi)x)$$

cumplen las mismas propiedades del enunciado, pero con  $p = \pi$ . Por lo tanto, si demostramos el teorema suponiendo  $p = \pi$ , habremos probado que

$$\overline{\text{sen}}((p/\pi)x) = \text{sen} x, \quad \overline{\text{cos}}((p/\pi)x) = \text{cos} x,$$

lo que a su vez nos da la conclusión en el caso general. Así pues, no perdemos generalidad si suponemos que  $p = \pi$ .

Por 3) sabemos que  $\overline{\text{sen}}(\pi/2) = 1$ ,  $\overline{\text{cos}}(\pi/2) = 0$  y las fórmulas siguientes implican entonces en particular que

$$\overline{\text{cos}}(x + \pi/2) = -\overline{\text{sen}} x, \quad \overline{\text{sen}}(x + \pi/2) = \overline{\text{cos}} x,$$

luego si probamos que  $\overline{\text{sen}}$  y  $\overline{\text{cos}}$  coinciden con  $\text{sen}$  y  $\text{cos}$  en el intervalo  $[0, \pi/2]$ , podremos concluir que coinciden —de hecho— en  $[0, \pi]$ , y a su vez, por la propiedad 2), coincidirán en  $[-\pi, \pi]$ , y por 3c) coincidirán en  $\mathbb{R}$ .

El teorema 3.28 aplicado a las funciones  $\overline{\text{sen}}$  y  $-\overline{\text{cos}}$  prueba que  $\overline{\text{sen}}$  y  $\overline{\text{cos}}$  son continuas en el intervalo  $[0, \pi/2]$ .

a) Si  $0 \leq x \leq \pi/2$ , entonces

$$\overline{\cos} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \overline{\cos} x}{2}}, \quad \overline{\text{sen}} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \overline{\cos} x}{2}}$$

En efecto, por 3) y 1) sabemos que

$$\overline{\cos} 2y = \overline{\cos}^2 y - \overline{\text{sen}}^2 y = 2\overline{\cos}^2 y - 1,$$

luego haciendo  $x = 2y$  y despejando obtenemos la fórmula requerida (teniendo en cuenta además que  $\overline{\cos}(x/2) \geq 0$ , por lo que la raíz cuadrada tiene que ser positiva). La segunda fórmula se deduce de la primera y de 1).

b) Para todo número natural  $n \geq 1$ , se cumple que

$$\overline{\cos} \frac{\pi}{2^n} = \cos \frac{\pi}{2^n}, \quad \overline{\text{sen}} \frac{\pi}{2^n} = \cos \frac{\pi}{2^n},$$

Por inducción sobre  $n$ . El enunciado garantiza que es cierto para  $n = 1$  y el apartado a) nos permite completar la inducción.

c) Para todos los números naturales  $k, n$  con  $n \geq 1$  y  $k \leq 2^{n-1}$ , se cumple que

$$\overline{\cos} \frac{k\pi}{2^n} = \cos \frac{k\pi}{2^n}, \quad \overline{\text{sen}} \frac{k\pi}{2^n} = \text{sen} \frac{k\pi}{2^n}.$$

Para  $k = 0$  es trivial y para  $k = 1$  es el apartado b). Si es cierto para  $k$  y  $k + 1 \leq 2^{n-1}$ , basta usar la fórmula

$$\cos \left( \frac{k\pi}{2^n} + \frac{\pi}{2^n} \right) = \cos \frac{k\pi}{2^n} \cos \frac{\pi}{2^n} - \text{sen} \frac{k\pi}{2^n} \text{sen} \frac{\pi}{2^n}$$

(que la cumplen tanto  $\overline{\cos}$  como  $\cos$ , pues ambas funciones cumplen las condiciones del enunciado) para concluir que es cierto para  $k + 1$ .

Ahora, para concluir, basta probar que todo número real  $x \in [0, \pi/2]$  puede expresarse como límite de una sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  de números  $k_n \pi / 2^n \in [0, \pi/2]$ , ya que entonces

$$\overline{\text{sen}} x = \lim_r \overline{\text{sen}} x_r = \lim_r \text{sen} x_r = \text{sen} x,$$

e igualmente con el coseno. Basta tomar  $k_n = E[2^n x / \pi]$  y  $x_n = k_n \pi / 2^n$ , de modo que

$$0 \leq k_n < \frac{2^n x}{\pi} + 1 \leq 2^{n-1} + 1,$$

luego  $k_n \leq 2^{n-1}$  y, por otra parte, se cumple  $|k_n - 2^n x / \pi| \leq 1$ , con lo que  $|k_n \pi / 2^n - x| \leq \pi / 2^n$ , y entonces es claro que  $\lim_n x_n = x$ . ■

**Interpretación geométrica** El teorema anterior garantiza que el seno y el coseno que hemos definido aquí son (salvo la elección de la unidad de medida de ángulos) los mismos que se definen geoméricamente, pero ahora vamos a demostrar directamente algunos hechos que podríamos deducir indirectamente de este hecho. El resultado básico que conecta las funciones seno y coseno con su interpretación geométrica es el siguiente:

**Teorema 5.4** Si  $x, y$  son dos números reales tales que  $x^2 + y^2 = 1$ , existe un número real  $\theta$  tal que  $x = \cos \theta$ ,  $y = \sin \theta$ . Además,  $\theta$  es único salvo múltiplos de  $2\pi$ .

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que  $-1 \leq x \leq 1$  y  $\cos x$  desciende desde 1 hasta  $-1$  en  $[0, \pi]$ , luego existe un único  $0 \leq \theta \leq \pi$  tal que  $x = \cos \theta$ . Entonces  $\sin^2 \theta = y^2$ , luego  $\sin \theta = \pm y$ . Si  $\sin \theta = -y$ , cambiamos  $\theta$  por  $-\theta$ , con lo que el coseno sigue siendo el mismo, pero ahora  $\sin \theta = y$ . Es claro que este  $\theta$  es el único posible en  $[-\pi, \pi]$ , luego el hecho de que las funciones  $\sin x$  y  $\cos x$  tengan periodo  $2\pi$  implica que cualquier otro número que cumpla lo mismo tiene que ser de la forma  $\theta + 2k\pi$ . ■

He aquí una formulación equivalente:

**Teorema 5.5** Todo número complejo  $z \neq 0$  puede expresarse en la forma

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta),$$

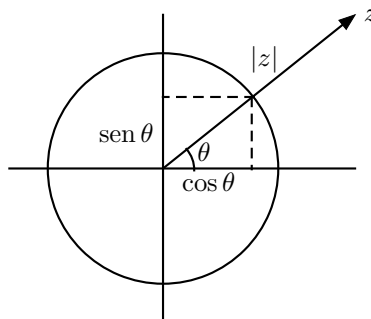
para cierto número real  $\theta$  unívocamente determinado salvo múltiplos de  $2\pi$ .

**Definición 5.6** Un *argumento* de un número complejo  $z \neq 0$  es todo número real  $\theta$  que cumpla  $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ .

Así, un número complejo no nulo está completamente determinado por su módulo y por uno cualquiera de sus argumentos, y hemos probado que dos argumentos de un mismo número complejo se diferencian necesariamente en un múltiplo de  $2\pi$ . Notemos que sumando a  $\theta$  un múltiplo adecuado de  $2\pi$ , podemos exigir que  $0 \leq \theta < 2\pi$ , o que  $-\pi < \theta \leq \pi$ .

Por ejemplo, es claro que los números reales positivos tienen argumento 0, los negativos tienen argumento  $\pi$  y los números imaginarios puros  $yi$  con  $y > 0$  tienen argumento  $\pi/2$ .

Geoméricamente, podemos considerar el argumento de un número complejo no nulo como una medida del ángulo que éste forma con el semieje real positivo. Ahora bien, una medida consiste en una comparación con una unidad de medida prefijada, pero nosotros no hemos fijado ninguna unidad de medida. Podríamos decir que ésta “se ha fijado sola” en la definición de las funciones trigonométricas.



En geometría es usual medir los ángulos en grados sexagesimales, de modo que un ángulo de un grado es el que resulta de dividir la circunferencia en 360 partes iguales, o también es natural tomar como unidad de medida el ángulo recto, pero ¿qué unidad de ángulos presuponen las funciones que hemos construido?

La unidad angular implícita en la definición de las funciones trigonométricas se llama *radián*, es decir, un radián es el ángulo que tiene por seno y coseno los valores  $\sin 1$  y  $\cos 1$ .

Para interpretar geoméricamente el radián consideremos un ángulo cualquiera de amplitud  $0 < \theta \leq \pi$  y dividámoslo en  $n$  partes iguales, es decir, consideramos los números complejos

$$z_k = \cos(k\theta/n) + i \operatorname{sen}(k\theta/n) = e^{k\theta i/n},$$

con  $k = 0, \dots, n$ . La longitud de la cuerda que une dos de estos números consecutivos es

$$\begin{aligned} |z_{k+1} - z_k| &= |e^{(k+1)\theta i/n} - e^{k\theta i/n}| = \\ &= |e^{k\theta i/n}(e^{\theta i/n} - 1)| = |e^{\theta i/n} - 1| = \sqrt{(\cos \theta/n - 1)^2 + \operatorname{sen}^2 \theta/n} = \sqrt{2 - 2 \cos \theta/n}, \end{aligned}$$

luego la poligonal formada por dichas cuerdas tiene longitud

$$L_n = n\sqrt{2 - 2 \cos(\theta/n)} = \sqrt{2n^2(1 - \cos(\theta/n))}.$$

Cuando  $n$  tiende a infinito, la longitud de la poligonal tenderá a la longitud del arco abarcado por el ángulo dado. Vamos a calcular dicho límite. Para ello usamos las desigualdades (5.6):

$$\frac{\theta^2}{2n^2} - \frac{\theta^4}{24n^4} \leq 1 - \cos \frac{\theta}{n} \leq \frac{\theta^2}{2n^2}.$$

Multiplicando por  $2n^2$  queda:

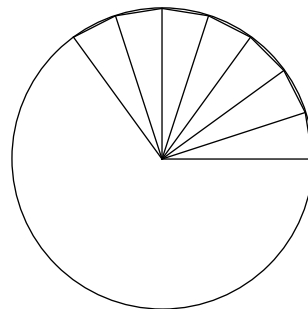
$$\theta^2 - \frac{\theta^4}{12n^2} \leq 2n^2 \left(1 - \cos \frac{\theta}{n}\right) \leq \theta^2,$$

y por el criterio del emparedado  $\lim_n L_n^2 = \theta^2$ . Por la continuidad de la raíz cuadrada concluimos que  $\lim_n L_n = \theta$ . Así pues:

**Teorema 5.7** *La medida  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  de un ángulo (en radianes) es la longitud del arco que abarca en la circunferencia unitaria.*

En particular, la longitud de la circunferencia unitaria es  $2\pi$  (y es fácil ver que la longitud de una circunferencia de radio  $r$  es entonces  $2\pi r$ ), y un radián es el ángulo que abarca un arco de longitud 1.

En otras palabras, el número  $\pi$  que hemos obtenido analizando las funciones trigonométricas no es sino el cociente de la longitud de una circunferencia sobre su diámetro, es decir, el mismo número  $\pi = 3.1415\dots$  que definieron los antiguos griegos (aunque la notación  $\pi$  es del siglo XVIII). ■



**Interpretación geométrica del producto en  $\mathbb{C}$**  Ahora podemos dar una interpretación geométrica del producto de números complejos. Si

$$z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta), \quad w = |w|(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi)$$

son dos números complejos no nulos, podemos expresarlos, alternativamente, como  $z = |z|e^{i\theta}$  y  $w = |w|e^{i\phi}$  (en virtud de la fórmula (5.2)). Con esta expresión es inmediato que

$$zw = |z||w|e^{i(\theta+\phi)},$$

y por lo tanto:

*El producto de dos números complejos no nulos es el número complejo que tiene por módulo el producto de sus módulos y por argumento la suma de sus argumentos.*

Así pues, el resultado de multiplicar un número complejo  $z$  por otro  $w$  de módulo 1 es el número que resulta de girar  $z$  tantos radianes como indica el argumento de  $w$ . En otras palabras, la aplicación  $z \mapsto wz$  es un giro si  $|w| = 1$  y, en el caso general, es un giro compuesto con una homotecia de razón  $|w|$ . ■

**Fórmulas para el ángulo doble, mitad, etc.** Un caso particular de (5.4) y (5.5) son las fórmulas siguientes, que nos dan las razones trigonométricas del ángulo doble:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2x &= 2 \operatorname{sen} x \cos x, \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x, \end{aligned} \quad (5.11)$$

Por otra parte:

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}, \quad \operatorname{sen} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \quad (5.12)$$

En efecto, basta aplicar la fórmula del coseno a  $\beta$  en lugar de  $x$  y llamar  $x = 2\beta$ , con lo que obtenemos

$$\cos x = \cos^2(x/2) - \operatorname{sen}^2(x/2) = \cos^2(x/2) - 1 + \cos^2(x/2),$$

de donde despejando se obtiene la fórmula para  $\cos(x/2)$ . Si hacemos

$$\cos x = \cos^2(x/2) - \operatorname{sen}^2(x/2) = 1 - \operatorname{sen}^2(x/2) - \operatorname{sen}^2(x/2),$$

al despejar sale la fórmula para  $\operatorname{sen}(x/2)$ .

Para obtener fórmulas para el ángulo triple planteamos:

$$\begin{aligned} \cos 3x + i \operatorname{sen} 3x &= (e^{ix})^3 = (\cos x + i \operatorname{sen} x)^3 \\ &= \cos^3 x + 3i \cos^2 x \operatorname{sen} x - 3 \cos x \operatorname{sen}^2 x - i \operatorname{sen}^3 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \cos^3 x - 3 \cos x (1 - \cos^2 x) + i(3(1 - \sin^2 x) \sin x - \sin^3 x) \\
&= 4 \cos^3 x - 3 \cos x + i(3 \sin x - 4 \sin^3 x),
\end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 3x &= 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x \\
\operatorname{cos} 3x &= 4 \operatorname{cos}^3 x - 3 \operatorname{cos} x
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Notemos que el mismo procedimiento nos permite calcular fórmulas análogas para  $\operatorname{sen} nx$  y  $\operatorname{cos} nx$ , para cualquier número natural  $n$ . Más aún, es fácil ver que  $\operatorname{cos} nx$  puede expresarse como un polinomio de grado  $n$  evaluado en  $\operatorname{cos} x$ . Por ejemplo, para  $n = 2$  sería:

$$\operatorname{cos} 2x = 2 \operatorname{cos}^2 x - 1 = P_2(t),$$

donde  $P_2(t) = 2t^2 - 1$ , mientras que  $P_3(t) = 4t^3 - 3t$ . Sin embargo, afinando un poco más, podemos probar lo siguiente:

**Teorema 5.8** *Para todo número natural  $n$ , se cumple que*

$$2 \operatorname{cos} nx = P_n(2 \operatorname{cos} x),$$

donde  $P_n(t)$  es un polinomio de grado  $n$  con coeficientes enteros y coeficiente director 1.

DEMOSTRACIÓN: Razonamos por inducción sobre  $n$ . Para  $n = 1$  sirve  $P_1(t) = t$  y para  $n = 2$  sirve  $P_2(t) = t^2 - 1$ , pues, ciertamente,

$$2 \operatorname{cos} 2x = 4 \operatorname{cos}^2 x - 1 = (2 \operatorname{cos} x)^2 - 1.$$

Supuesto cierto para todo  $m \leq n$ , aplicamos (5.5):

$$\begin{aligned}
\operatorname{cos}(x + y) &= \operatorname{cos} x \operatorname{cos} y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \\
\operatorname{cos}(x - y) &= \operatorname{cos} x \operatorname{cos} y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y,
\end{aligned}$$

de donde  $\operatorname{cos}(x + y) = 2 \operatorname{cos} x \operatorname{cos} y - \operatorname{cos}(x - y)$ . En particular

$$\operatorname{cos}(n + 1)x = 2 \operatorname{cos} nx \operatorname{cos} x - \operatorname{cos}((n - 1)x),$$

luego

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{cos}(n + 1)x &= 2 \operatorname{cos} nx 2 \operatorname{cos} x - 2 \operatorname{cos}((n - 1)x) \\
&= P_n(2 \operatorname{cos} x) 2 \operatorname{cos} x - P_{n-1}(2 \operatorname{cos} x),
\end{aligned}$$

por lo que basta tomar  $P_{n+1}(t) = tP_n(t) - P_{n-1}(t)$ , que ciertamente cumple lo requerido. ■

He aquí un ejemplo de lo necesarios que son los números irracionales:

**Teorema 5.9** *Si  $r$  es un número racional tal que  $0 < r\pi < \pi/2$  y  $\cos r\pi$  es un número racional, entonces  $r = 1/3$  y  $\cos r\pi = \cos(\pi/3) = 1/2$ .*

DEMOSTRACIÓN: Observemos que, en efecto,  $\cos(\pi/3) = 1/2$ . Basta hacer  $x = \pi/3$  en (5.13), con lo que resulta que  $\cos(\pi/3)$  es raíz del polinomio

$$4x^3 - 3x + 1 = (2x - 1)^2(x + 1),$$

que tiene raíces  $1/2$  y  $-1$ , luego el coseno tiene que ser  $1/2$ .

Pongamos ahora que  $r = p/q$ , donde  $p$  y  $q$  son números naturales. Entonces  $\cos(2qr\pi) = \cos(2p\pi) = 1$ . El teorema 5.8 nos da un polinomio  $P(t)$  de grado  $2q$  con coeficientes enteros y coeficiente director 1 que cumple  $2 = P(2\cos r\pi)$ .

Así pues,  $2\cos r\pi$  es raíz del polinomio  $P(t) - 2$ , que es también un polinomio con coeficientes enteros y coeficiente director 1. Pero si un polinomio en estas condiciones tiene una raíz racional, de hecho ésta tiene que ser entera.<sup>1</sup> Por lo tanto,  $0 < 2\cos r\pi < 2$  es un número entero, luego  $2\cos r\pi = 1$ , luego  $\cos r\pi = 1/2$ , y esto implica que  $r\pi = \pi/3$ , pues un ángulo entre  $0$  y  $\pi/2$  está determinado por su coseno. ■

**Raíces  $n$ -simas** Ahora es fácil demostrar el resultado que habíamos anticipado para demostrar el teorema fundamental del álgebra:

**Teorema 5.10** *Si  $n \geq 1$  es un número natural, todo número complejo tiene una raíz  $n$ -sima y, si es no nulo, de hecho tiene  $n$  raíces  $n$ -simas distintas.*

DEMOSTRACIÓN: Obviamente  $0$  tiene a  $0$  como única raíz  $n$ -sima. Si  $z \neq 0$ , podemos expresarlo como  $z = |z|e^{i\theta}$ , y entonces sus raíces  $n$ -simas son los números de la forma

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}e^{i(\theta+2k\pi)/n}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

En efecto, así se cumple que  $w_k^n = |z|e^{i\theta}(e^{2k\pi i})^n = |z|e^{i\theta} = z$ , donde hemos usado que  $e^{2k\pi i} = 1$ , en virtud de (5.2).

Notemos que  $w_k = w_0 e^{2k\pi i/n}$ , luego para probar que las raíces  $w_k$  son distintas dos a dos basta ver que así sucede con los números  $e^{2k\pi i/n}$ , para  $k = 0, \dots, n-1$ , y esto se debe a que

$$0 = \frac{0 \cdot \pi}{n} < \frac{2\pi}{n} < \frac{4\pi}{n} < \dots < \frac{2(n-1)\pi}{n} < 2\pi,$$

luego los números  $e^{2k\pi i/n}$  tienen argumentos distintos en el intervalo  $[0, 2\pi[$ , luego son distintos por la unicidad del argumento (salvo múltiplos de  $2\pi$ ). Notemos que  $z$  no puede tener más de  $n$  raíces  $n$ -simas porque todas ellas son raíces del polinomio  $x^n - z$ , y un polinomio de grado  $n$  no puede tener más de  $n$  raíces en un cuerpo. ■

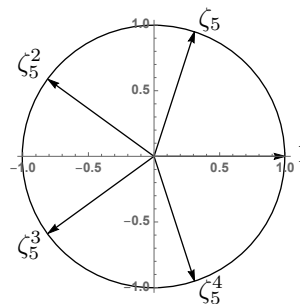
<sup>1</sup>Este resultado tiene una prueba aritmética elemental. Véase [ITal 2.28].

El teorema anterior tiene un interés especial cuando  $z = 1$ . Hemos probado que en  $\mathbb{C}$  hay  $n$  raíces  $n$ -simas de la unidad. En este caso  $\theta = 0$  y las raíces son los números  $e^{2k\pi i/n} = (e^{2\pi i/n})^k$ , para  $k = 0, \dots, n-1$ .

Si llamamos

$$\zeta_n = e^{2\pi i/n} = \cos \frac{2\pi i}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi i}{n},$$

entonces  $\zeta$  es el único número complejo de módulo 1 y argumento  $2\pi/n$ , y es lo que los algebristas llaman una raíz  $n$ -sima primitiva de la unidad, es decir, una raíz  $n$ -sima de la unidad que tiene la propiedad de que las demás son sus potencias  $\zeta_n^k$ , para  $k = 0, \dots, n-1$ .



Cada  $\zeta_n^k$  tiene argumento  $2k\pi/n$ , por lo que las raíces de la unidad son los vértices de un polígono regular de  $n$  lados inscrito en la circunferencia unitaria. La figura muestra las raíces quintas de la unidad.

Por ejemplo,

$$\zeta_1 = 1, \quad \zeta_2 = -1, \quad \zeta_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \zeta_4 = i.$$

En efecto, lo único que no es obvio es el valor de  $\zeta_3$ , pero operando vemos que  $\zeta_3^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$  es el conjugado de  $\zeta_3$ , luego  $\zeta_3^3 = 1$ , y esto prueba que  $\zeta_3$  es realmente  $e^{2\pi i/3}$  (teniendo en cuenta que  $2\pi i/3$  tiene que tener coseno negativo y seno positivo). Así pues, hemos probado que

$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Sumando  $\pi$  obtenemos a su vez que

$$\cos \frac{5\pi}{3} = \cos \frac{-\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3} = \operatorname{sen} \frac{-\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

y a su vez

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Por lo tanto,  $\zeta_6 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ . A su vez,

$$\cos \frac{\pi}{6} = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) = -\operatorname{sen} \frac{-\pi}{3} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{-\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

por lo que  $\zeta_{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ .

Usando las fórmulas (5.12) obtenemos:

$$\cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1 + \cos \pi/2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{sen } \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1 - \cos \pi/2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

luego

$$\zeta_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Tomando  $x = \pi/10$ , observamos que  $2x = \pi/2 - 3x$ , luego  $\text{sen } 2x = \cos 3x$ , luego, usando (5.11) y (5.13):

$$2 \text{sen } x \cos x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x,$$

$$2 \text{sen } x = 4 \cos^2 x - 3 = 4 - 4 \text{sen}^2 x - 3,$$

lo que nos da la ecuación de segundo grado:  $4 \text{sen}^2 x + 2 \text{sen } x - 1 = 0$ . Teniendo en cuenta que el seno y el coseno tienen que ser positivo, de la ecuación obtenemos el seno y de (5.3) el coseno:

$$\text{sen } \frac{\pi}{10} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}, \quad \cos \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

A su vez, como  $2\pi/5 = \pi/2 - \pi/10$ , obtenemos que

$$\text{sen } \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \quad \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4},$$

y así tenemos calculada la raíz quinta primitiva de la unidad que habíamos representado gráficamente más arriba:

$$\zeta_5 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} + i \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}. \quad \blacksquare$$

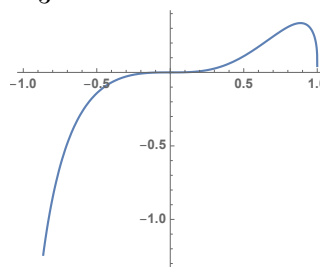
**Ejemplo 5.11 (Sobre el teorema de Abel)** Ahora podemos poner un ejemplo que muestra que el teorema de Abel 3.21 no puede extenderse para probar que la serie de potencias es continua en 1 cuando se la considera definida sobre todo su disco de convergencia (y en 1).

En efecto, sólo tenemos que considerar la serie de potencias

$$f(z) = z^3 - z^6 + \frac{z^9}{2} - \frac{z^{18}}{2} + \frac{z^{27}}{3} - \frac{z^{54}}{3} + \dots$$

(sólo son no nulos los términos de grado  $3^n$  y  $2 \cdot 3^n$ , con coeficientes  $\pm 1/n$ ). El criterio de Leibniz asegura que el radio de convergencia es  $R \geq 1$ , pero la serie diverge claramente en  $-1$ , así que el radio de convergencia es exactamente  $R = 1$ . También es claro que  $f(1) = 0$ .

El teorema de Abel nos asegura que  $f$  es continua en el intervalo  $]-1, 1]$ . La figura muestra su gráfica. Sin embargo, vamos a ver que hay sucesiones  $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$  tales que  $|z_k| < 1$ ,  $\lim_k z_k = 1$  y  $\lim_k f(z_k) = \infty$ .



Para ello llamamos  $\zeta_k = e^{i\pi/3^k}$ , que tiene la propiedad de que si  $m \geq k$  entonces  $\zeta_k^{3^m} = e^{i\pi 3^{m-k}} = (-1)^{3^{m-k}} = -1$ . Por lo tanto, si  $n \geq 2 \cdot 3^k = N_k$  se cumple que  $a_n \zeta_k^n = -|a_n|$ , bien porque  $a_n = 0$ , bien porque  $n = 3^m$  o  $n = 2 \cdot 3^m$  con  $n \leq k$ , en cuyo caso  $\zeta_k^n = \pm 1$  según si  $n$  es par o impar.

Si  $0 < x < 1$ , tenemos que

$$f(x\zeta_k) = \sum_{n=1}^{N_k-1} a_n \zeta_k^n x^n - \sum_{n=N_k}^{\infty} |a_n| x^n.$$

Por lo tanto, para todo  $M \geq N_k$ , tenemos que

$$\sum_{n=N_k}^M |a_n| x^n \leq \sum_{n=N_k}^{\infty} |a_n| x^n = \left| \sum_{n=1}^{N_k-1} a_n \zeta_k^n x^n - f(x\zeta_k) \right| \leq \sum_{n=1}^{N_k-1} |a_n| + |f(x\zeta_k)|.$$

Si fuera  $|f(x\zeta_k)| \leq k$  para todo  $x$  que cumpla  $1 - 1/k < x < 1$ , tendríamos que

$$\sum_{n=N_k}^M |a_n| x^n \leq \sum_{n=1}^{N_k-1} |a_n| + k,$$

y tomando el límite cuando  $x \rightarrow 1$  quedaría que

$$\sum_{n=N_k}^M |a_n| \leq \sum_{n=1}^{N_k-1} |a_n| + k,$$

para todo  $M > N_k$ , luego la serie  $\sum_{n=N_k}^{\infty} |a_n|$  sería convergente, pero claramente es divergente.

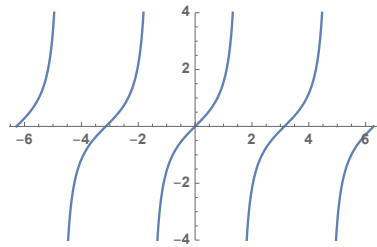
Así pues, existe un  $x_k$  tal que  $1 - 1/k < x_k < 1$  y  $z_k = x_k \zeta_k$  cumple que  $|f(z_k)| > k$ . Es claro entonces que  $\lim_k f(z_k) = \infty$ . Por otra parte, como  $|x_k - 1| < 1/k$ , se cumple que  $\lim_k x_k = 1$ , y también  $\lim_k \zeta_k = \lim_k e^{i\pi/3^k} = e^0 = 1$ , luego  $\lim_k z_k = 1$ . ■

## 5.2 La tangente

Se define la función *tangente* como la función<sup>2</sup>

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}$$

Está definida sobre los números reales que no son de la forma  $\pi/2 + 2k\pi$ . Las fórmulas (5.8) muestran que tiene periodo  $\pi$ , por lo que basta estudiarla en el intervalo  $]-\pi/2, \pi/2[$ . Como el seno es creciente en  $[0, \pi/2[$  y el coseno es decreciente, es inmediato que la tangente es estrictamente creciente en  $[0, \pi/2[$ , y también lo es en  $]-\pi/2, 0]$  debido a la relación obvia  $\tan(-x) = -\tan x$ .



<sup>2</sup>Podríamos definir la tangente de todo número complejo cuyo coseno sea no nulo, pero de momento estudiamos la función tangente definida sobre números reales.

**Teorema 5.12** *La función  $\tan : ]-\pi/2, \pi/2[ \rightarrow \mathbb{R}$  es suprayectiva, continua y estrictamente creciente.*

DEMOSTRACIÓN: La continuidad es inmediata por ser cociente de funciones continuas (y estamos considerando un dominio en el que el denominador no se anula). Ya hemos probado que es creciente, así que sólo falta probar que es suprayectiva. Para ello fijamos  $x \in \mathbb{R}$  y observamos que

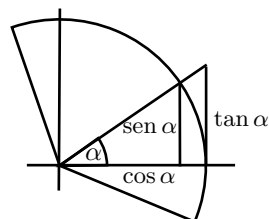
$$\lim_{x \rightarrow -\pi/2^+} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} = +\infty,$$

pues en ambos casos el denominador tiende a 0 siendo positivo y el numerador tiende a  $\pm 1$ . Por lo tanto, existen números  $-\pi/2 < a < b < \pi/2$  tales que  $\tan a < x < \tan b$ , y el teorema de los valores intermedios nos da un valor  $\alpha \in ]-\pi/2, \pi/2[$  tal que  $\tan \alpha = x$ . ■

La tabla siguiente recoge algunas de las razones trigonométricas que hemos calculado:

$\alpha$	0	$2\pi/12$	$2\pi/8$	$2\pi/6$	$2\pi/5$	$2\pi/4$
$\operatorname{sen} \alpha$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{(5 + \sqrt{5})}/8$	1
$\operatorname{cos} \alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	$(-1 + \sqrt{5})/4$	0
$\tan \alpha$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}/2$	—

La tangente tiene una interpretación geométrica sencilla: si consideramos un triángulo rectángulo de hipotenusa 1 con un ángulo  $\alpha$ , podemos identificar dicho ángulo con el que forma  $\operatorname{cos} \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$  con el eje de abscisas, y así vemos que  $\operatorname{cos} \alpha$  es el cateto contiguo,  $\operatorname{sen} \alpha$  el cateto opuesto y  $\tan \alpha$  es la longitud del segmento tangente a la circunferencia unitaria que une las prolongaciones de los dos lados del ángulo.



Dividiendo las fórmulas (5.4) y (5.5) obtenemos

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \beta + \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}$$

y, dividiendo numerador y denominador entre  $\operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta$  queda:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}. \quad (5.14)$$

En particular:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}. \quad (5.15)$$

Dividiendo las fórmulas (5.12) obtenemos:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} \alpha}{1 + \operatorname{cos} \alpha}}. \quad (5.16)$$

Claramente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \quad (5.17)$$

pues

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cos x = 1.$$

Más precisamente, para  $x \in [0, \pi/2[$ , la tangente satisface la desigualdad

$$x \leq \tan x. \quad (5.18)$$

La probamos a partir de las desigualdades (5.6), que nos dan la primera desigualdad de las dos siguientes (por lo que basta probar la segunda):

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \geq \frac{x - x^3/6}{1 - x^2/2 + x^4/24} \geq x.$$

Suponiendo  $x \neq 0$  (pues para  $x = 0$  la desigualdad es trivial), la segunda desigualdad equivale a

$$1 < \frac{1 - x^2/6}{1 - x^2/2 + x^4/24}.$$

Al operar se reduce a  $x^4 \leq 8x^2$ , que se reduce a su vez a  $x \leq \sqrt{8}$ , y esto se cumple, pues  $x < \pi/2 \leq 2 < \sqrt{8}$ . ■

**Cálculo de  $\pi$**  Vamos a mostrar un método para calcular aproximaciones de  $\pi$ . Para ello calcularemos el semiperímetro de los polígonos de  $2^k \cdot 3$  lados inscritos y circunscritos a la circunferencia unitaria, cada uno de los cuales nos dará una aproximación a  $\pi$  por defecto y por exceso, respectivamente.

Para  $k = 1$  el polígono es un hexágono, cuyos lados abarcan ángulos de  $\pi/3$  radianes, pero necesitamos considerar la mitad de dichos ángulos, que tienen una amplitud de  $\theta_1 = \pi/6$  radianes.

En general, si llamamos  $\theta_k = \frac{\pi}{3} 2^{-k}$ , el lado del polígono inscrito de  $2^k \cdot 3$  lados mide  $2 \operatorname{sen} \theta_k$ , mientras que el lado del polígono circunscrito mide  $2 \tan \theta_k$ , luego los semiperímetros correspondientes miden

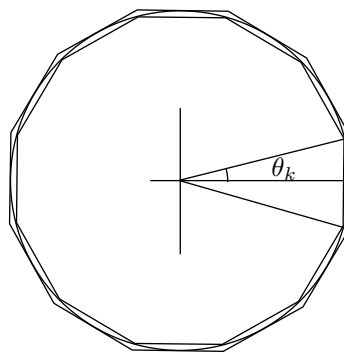
$$p_k = 3 \cdot 2^k \operatorname{sen} \theta_k, \quad P_k = 3 \cdot 2^k \tan \theta_k.$$

Se cumple que

$$p_k < \pi < P_k,$$

y ambas sucesiones convergen a  $\pi$ . En realidad podemos justificar directamente este hecho, sin recurrir a la interpretación geométrica de  $\pi$ . A partir de las desigualdades (5.6) obtenemos que

$$\frac{\pi}{3 \cdot 2^k} - \frac{\pi^3}{6 \cdot 3^3 \cdot 2^{3k}} \leq \operatorname{sen} \frac{\pi}{3 \cdot 2^k} \leq \frac{\pi}{3 \cdot 2^k},$$



luego

$$\pi - \frac{\pi^3}{6 \cdot 3^2 \cdot 2^{2k}} \leq p_k \leq \pi,$$

luego en efecto, los valores  $p_k$  aproximan a  $\pi$  por defecto y

$$0 \leq \pi - p_k \leq \frac{\pi^3}{6 \cdot 3^2 \cdot 2^{2k}},$$

de donde se sigue claramente que  $\lim_k p_k = \pi$ . Para  $P_k$  usamos (5.18):

$$\frac{\pi}{3 \cdot 2^k} \leq \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^k} \leq \frac{\pi}{3 \cdot 2^k \cos \theta_k},$$

luego

$$\pi \leq P_k \leq \frac{\pi}{\cos \theta_k},$$

y así

$$0 \leq P_k - \pi \leq \frac{\pi}{\cos \theta_k} - \pi.$$

Como  $\lim_k \theta_k = 0$ , tenemos que  $\lim_k \cos \theta_k = 1$ , por lo que la última sucesión converge a 0, y por consiguiente  $\lim_k P_k = \pi$ .

Ahora vamos a ver que existe una relación recurrente relativamente simple para calcular las sucesiones de semiperímetros. Para  $k = 1$  son

$$p_1 = 6 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = 3, \quad P_1 = 6 \tan \frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}.$$

Vamos a probar que

$$P_{k+1} = \frac{2p_k P_k}{p_k + P_k}, \quad p_{k+1} = \sqrt{P_{k+1} p_k}. \quad (5.19)$$

Para ello derivaremos primero una fórmula para la tangente del ángulo mitad distinta de la usual:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha/2) \cos(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha/2)} = \frac{(1/2) \operatorname{sen} \alpha}{(1/2)(1 + \cos \alpha)} = \frac{\tan \alpha \operatorname{sen} \alpha}{\tan \alpha + \operatorname{sen} \alpha},$$

donde hemos usado la fórmula (5.11) para el seno del ángulo doble y la fórmula (5.12) para el coseno del ángulo mitad, y luego hemos multiplicado numerador y denominador por  $\tan \alpha$ . Ahora:

$$\begin{aligned} \frac{2p_k P_k}{p_k + P_k} &= \frac{2 \cdot 2 \cdot 2^k \operatorname{sen} \theta_k \cdot 3 \cdot 2^k \tan \theta_k}{3 \cdot 2^k \operatorname{sen} \theta_k + 3 \cdot 2^k \tan \theta_k} \\ &= \frac{3 \cdot 2^{k+1} \operatorname{sen} \theta_k \tan \theta_k}{\operatorname{sen} \theta_k + \tan \theta_k} = 3 \cdot 2^{k+1} \tan \theta_{k+1} = P_{k+1}. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \sqrt{P_{k+1} p_k} &= \sqrt{3 \cdot 2^{k+1} \tan \theta_{k+1} 3 \cdot 2^k \operatorname{sen} \theta_k} = \sqrt{9 \cdot 2^{2k+1} \tan \theta_{k+1} \operatorname{sen} \theta_k} \\ &= \sqrt{9 \cdot 2^{2k+2} \tan \theta_{k+1} \operatorname{sen} \theta_{k+1} \cos \theta_{k+1}} = \sqrt{9 \cdot 2^{2k+2} \operatorname{sen}^2 \theta_{k+1}} \\ &= 3 \cdot 2^{k+1} \operatorname{sen} \theta_{k+1} = p_{k+1}. \end{aligned}$$

Así tenemos un proceso para calcular aproximaciones de  $\pi$  que no requiere más que calcular sumas, productos cocientes y raíces cuadradas. La tabla siguiente muestra las primeras aproximaciones, que nos permiten afirmar que

$$\pi = 3.1415926535 \dots$$

$k$	$p_k$	$P_k$
1	<b>3</b>	<b>3.46410161513775</b>
2	<b>3.10582854123025</b>	<b>3.21539030917347</b>
3	<b>3.13262861328124</b>	<b>3.15965994209750</b>
4	<b>3.13935020304687</b>	<b>3.14608621513143</b>
5	<b>3.14103195089051</b>	<b>3.14271459964537</b>
6	<b>3.14145247228546</b>	<b>3.14187304997982</b>
7	<b>3.14155760791186</b>	<b>3.14166274705685</b>
8	<b>3.14158389214832</b>	<b>3.14161017660469</b>
9	<b>3.14159046322805</b>	<b>3.14159703432153</b>
10	<b>3.14159210599927</b>	<b>3.14159374877135</b>
11	<b>3.14159251669216</b>	<b>3.14159292738510</b>
12	<b>3.14159261936538</b>	<b>3.14159272203861</b>
13	<b>3.14159264503369</b>	<b>3.14159267070200</b>
14	<b>3.14159265145077</b>	<b>3.14159265786784</b>
15	<b>3.14159265305504</b>	<b>3.14159265465931</b>
16	<b>3.14159265345610</b>	<b>3.14159265385717</b>
17	<b>3.14159265355637</b>	<b>3.14159265365664</b>
18	<b>3.14159265358144</b>	<b>3.14159265360650</b>
19	<b>3.14159265358770</b>	<b>3.14159265359397</b>
20	<b>3.14159265358927</b>	<b>3.14159265359084</b>

Arquímedes siguió esencialmente este proceso hasta  $k = 5$  (es decir, calculó el semiperímetro de un polígono de 96 lados), pero hay que tener en cuenta que él aproximaba las raíces cuadradas con fracciones, no con decimales. Su conclusión fue que

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

o, equivalentemente,  $3.140845 < \pi < 3.142857$ .

**El área del círculo** Podemos usar también los polígonos inscritos y circunscritos que acabamos de considerar para calcular el área de un círculo, pues ésta tiene que ser mayor que la del polígono inscrito y menor que la del circunscrito.

Si consideramos, más en general, un círculo de radio arbitrario  $r$ , entonces el área del polígono inscrito es la suma de las áreas de los  $2^k \cdot 3$  triángulos que forman su centro y sus vértices. Cada uno de ellos tiene por base el lado  $2r \operatorname{sen} \theta_k$ , y su altura es  $r \cos \theta_k$ , luego su área es  $r^2 \operatorname{sen} \theta_k \cos \theta_k = (r^2/2) \operatorname{sen} 2\theta_k$ . Por lo tanto, el área del polígono inscrito es

$$a_k = r^2 2^{k-1} \cdot 3 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2^{k-1} \cdot 3} = \pi r^2 \frac{\operatorname{sen} 2\theta_k}{2\theta_k}.$$

Similarmente, el área del polígono circunscrito es la suma de las áreas de  $2^k \cdot 3$  triángulos de base  $2r \tan \theta_k$  y altura  $r$ , luego estas áreas valen  $r^2 \tan \theta_k$  y el área del polígono es

$$A_k = r^2 2^k \cdot 3 \tan \frac{\pi}{2^k \cdot 3} = \pi r^2 \frac{\tan \theta_k}{\theta_k}.$$

Las desigualdades (5.6) y (5.18) muestran que

$$a_k \leq \pi r^2 \leq A_k.$$

Más aún, por (5.10) y (5.17), tenemos que

$$\lim_k a_k = \lim_k A_k = \pi r^2,$$

luego podemos concluir que el área de un círculo de radio  $r$  tiene que ser  $\pi r^2$ . ■

**El área de la elipse** Arquímedes usó su cálculo del área del círculo para determinar el área de una elipse. Veamos cómo lo hizo. Podemos tomar como definición (compárese con [IGE 7.15]) que la elipse de semiejes  $a$  y  $b$  es la curva de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Naturalmente, Arquímedes no usaba ecuaciones cartesianas, pero en realidad nosotros tampoco las vamos a usar. Lo único que necesitamos saber es que la elipse se obtiene del círculo de radio  $a$  sin más que aplicarle la transformación  $(x', y') = (x, by/a)$ . En efecto, si sustituimos  $x = x'$ ,  $y = ay'/b$  en la ecuación  $x^2 + y^2 = a^2$  que satisfacen los puntos de la circunferencia de radio  $a$ , obtenemos precisamente la ecuación de la elipse. Sabiendo esto —que Arquímedes sabía— ya no necesitamos las ecuaciones.<sup>3</sup>

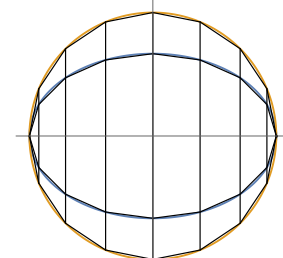
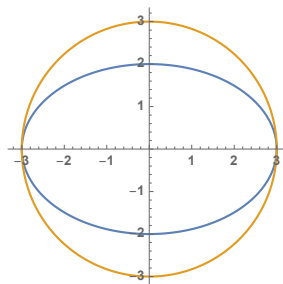
Arquímedes consideró un polígono regular  $P_n$  de  $4n$  lados inscrito en el la circunferencia y el polígono  $P'_n$  inscrito en la elipse que resulta de contraer las coordenadas verticales en la proporción  $b/a$ , y es fácil comparar las áreas de cada trapecio para concluir que

$$\frac{A(P'_n)}{A(P_n)} = \frac{b}{a}.$$

Arquímedes razonó que las áreas de  $A(P'_n)$  deben converger al área de la elipse, y de ahí obtuvo que ésta tiene que ser

$$\lim_n A(P'_n) = \frac{b}{a} \pi a^2 = \pi ab. \quad \blacksquare$$

<sup>3</sup>En realidad, sabiendo esto, el teorema A.16 nos da ya que el área de la elipse es  $\pi ab$ , pues la transformación  $(xy) \mapsto (x, by/a)$  es lineal con determinante  $b/a$ , luego el área de la elipse tiene que ser  $b/a$  por el área del círculo,  $\pi a^2$ , luego es  $\pi ab$ .



### 5.3 Funciones trigonométricas inversas

Nuestro análisis de las funciones trigonométricas nos permite concluir que las funciones:

$$\text{sen} : ]-\pi/2, \pi/2[ \longrightarrow ]-1, 1[, \quad \text{cos} : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1], \quad \text{tan} : ]-\pi/2, \pi/2[ \longrightarrow \mathbb{R}$$

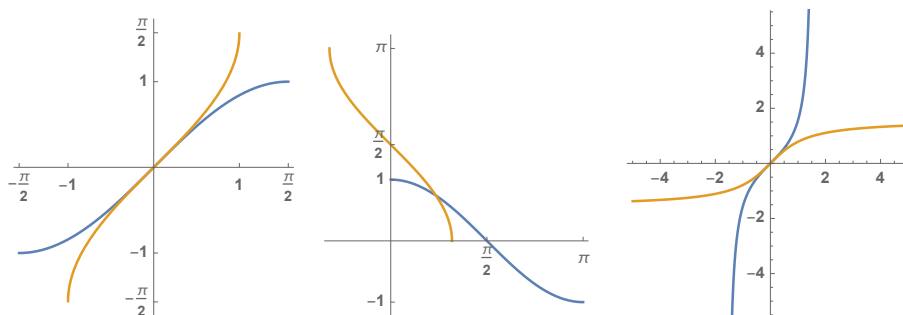
son continuas, suprayectivas y estrictamente crecientes, salvo el coseno, que es estrictamente decreciente.

Por lo tanto, podemos considerar sus funciones inversas en dichos intervalos, que reciben el nombre de *arco seno*, *arco coseno* y *arco tangente*:

$$\text{arcsen} : [-1, 1] \longrightarrow ]-\pi/2, \pi/2[, \quad \text{arccos} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi],$$

$$\text{arctan} : \mathbb{R} \longrightarrow ]-\pi/2, \pi/2[.$$

La figura siguiente muestra sus gráficas:



sen  $x$  y arcsen  $x$

cos  $x$  y arccos  $x$

tan  $x$  y arctan  $x$

El teorema 3.28 nos da que las funciones inversas son también continuas y estrictamente crecientes, salvo arccos  $x$ , que es estrictamente decreciente.<sup>4</sup> Es fácil ver que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{arctan } x = \pm \frac{\pi}{2}.$$

**Ejemplo 5.13** Euler encontró esta fórmula:

$$\frac{\pi}{4} = \text{arctan } \frac{1}{2} + \text{arctan } \frac{1}{3}. \quad (5.20)$$

Para probarlo partimos de (5.14). Llamando  $x = \tan \alpha$ ,  $y = \tan \beta$  queda

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{x + y}{1 - xy}.$$

Si  $|\alpha + \beta| < \pi/2$  podemos afirmar que

$$\text{arctan } x + \text{arctan } y = \alpha + \beta = \text{arctan } \frac{x + y}{1 - xy}.$$

<sup>4</sup>Es obvio que la demostración del teorema 3.28 se puede adaptar trivialmente para el caso de funciones estrictamente decrecientes.

Esto es aplicable a  $\alpha = 1/2$  y  $\beta = 1/3$ , y así obtenemos que

$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

■

**El problema de Basilea** Terminamos esta sección resolviendo el problema de Basilea, es decir, vamos a sumar la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Partimos de la fórmula:

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^k = e^{ikx} = \cos kx + i \operatorname{sen} kx.$$

El miembro izquierdo es

$$\sum_{r=0}^k \binom{k}{r} i^r \operatorname{sen}^r x \cos^{k-r} x.$$

La parte imaginaria de esta expresión está formada por los términos correspondientes a los valores impares de  $r = 2t + 1$ , para los que  $i^r = (-1)^t i$ . Por lo tanto, igualando las partes imaginarias queda:

$$\binom{k}{1} \operatorname{sen} x \cos^{k-1} x - \binom{k}{3} \operatorname{sen}^3 x \cos^{k-3} x + \dots = \operatorname{sen} kx.$$

Tomamos como  $k$  un número impar,  $k = 2m + 1$  y damos a  $x$  los valores

$$x_n = \frac{n\pi}{2m+1}, \quad n = 1, 2, \dots, m.$$

Así  $kx_n = n\pi$ , luego  $\operatorname{sen} kx_n = 0$  y, por otro lado,

$$0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m < \frac{\pi}{2},$$

por lo que los números  $\operatorname{sen} x_n$  son distintos dos a dos y no nulos. Dividiendo la igualdad entre  $\operatorname{sen}^k x_n$  queda:

$$\binom{k}{1} \left( \frac{\cos x_n}{\operatorname{sen} x_n} \right)^{k-1} - \binom{k}{3} \left( \frac{\cos x_n}{\operatorname{sen} x_n} \right)^{k-3} + \dots = 0$$

o equivalentemente:

$$\binom{2m+1}{1} \tan^{-2m} x_n - \binom{2m+1}{3} \tan^{-(2m-2)} x_n + \dots = 0.$$

Consideramos el polinomio

$$p(t) = \binom{2m+1}{1} t^m - \binom{2m+1}{3} t^{m-1} + \dots$$

Tiene grado  $m$ , y hemos probado que tiene  $m$  raíces distintas:  $a_n = \tan^{-2}(x_n)$ . Notemos que en efecto son distintas, pues de (5.3) se sigue que

$$1 + \tan^{-2}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x},$$

luego si  $\tan^{-2} x = \tan^{-2} y$  se cumple que  $\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2 y$  y, para  $0 < x, y < \pi/2$ , como los senos son positivos, se sigue que  $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} y$ , de donde  $x = y$ . Por consiguiente:

$$p(t) = (2m+1)(t - a_1) \cdots (t - a_m).$$

Igualamos los coeficientes de  $t^{m-1}$ :

$$(2m+1)(a_1 + \cdots + a_m) = \binom{2m+1}{3} = \frac{(2m+1)2m(2m-1)}{6},$$

luego

$$\tan^{-2} x_1 + \cdots + \tan^{-2} x_m = \frac{2m(2m-1)}{6}.$$

Por otro lado,

$$\operatorname{sen}^{-2} x_n = \frac{\cos^2 x_n + \operatorname{sen}^2 x_n}{\operatorname{sen}^2 x_n} = \tan^{-2} x_n + 1,$$

luego sumando  $m$  a ambos miembros de la igualdad anterior obtenemos

$$\operatorname{sen}^{-2} x_1 + \cdots + \operatorname{sen}^{-2} x_m = \frac{2m(2m+2)}{6}.$$

Ahora usamos las desigualdades (5.6) y (5.18)

$$0 < \operatorname{sen} x \leq x \leq \tan x,$$

de las que obtenemos:

$$0 < \tan^{-1} x_n \leq \frac{1}{x_n} \leq \operatorname{sen}^{-1} x_n,$$

y a su vez:

$$0 < \tan^{-2} x_n \leq \frac{1}{x_n^2} \leq \operatorname{sen}^{-2} x_n.$$

Sumando para  $n$  queda

$$\frac{2m(2m-1)}{6} \leq \sum_{n=1}^m \left( \frac{2m+1}{n\pi} \right)^2 \leq \frac{2m(2m+2)}{6},$$

o equivalentemente:

$$\frac{2m(2m-1)\pi}{(2m+1)^2} \frac{\pi}{6} \leq \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} \leq \frac{2m(2m+2)\pi}{(2m+1)^2} \frac{\pi}{6}.$$

Si expresamos las sucesiones de los extremos en la forma

$$\frac{1 - 1/2m}{1 + 1/m + 1/4m^2} \frac{\pi}{6} \leq \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} \leq \left(1 - \frac{1}{4m^2 + 4m + 1}\right) \frac{\pi}{6},$$

es claro que ambas convergen a  $\pi/6$ , y el criterio del emparejado nos da la conclusión. ■

## 5.4 Las funciones hiperbólicas

Recordemos que las funciones seno y coseno pueden definirse a partir de la exponencial mediante:

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \operatorname{cos} x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

De aquí se sigue que la función seno toma valores imaginarios puros sobre el eje imaginario, mientras que la función coseno toma valores reales, y esto nos da nuevas funciones elementales reales:

**Definición 5.14** Definimos el *seno* y el *coseno hiperbólico* como

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -i \operatorname{sen} ix, \quad \operatorname{cosh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{cos} ix,$$

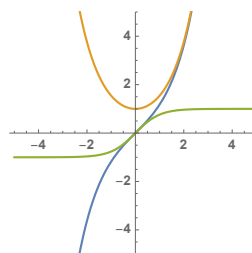
de modo que  $\operatorname{sen} ix = i \operatorname{senh} x$ ,  $\operatorname{cos} ix = \operatorname{cosh} x$ . A su vez se define la *tangente hiperbólica* como

$$\operatorname{tanh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\operatorname{cosh} x} = -i \operatorname{tan} ix = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}.$$

La figura muestra las gráficas de estas tres funciones cuando  $x$  toma valores reales. Las propiedades que se reflejan en ellas pueden justificarse fácilmente. De las propias definiciones se sigue que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{senh} x = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{cosh} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{tanh} x = \pm 1.$$



En particular vemos que no es cierto que  $|\operatorname{sen} z| \leq 1$  o que  $|\operatorname{cos} z| \leq 1$  en todo el plano complejo, pues sobre el eje imaginario ninguna de las dos funciones está acotada.

A partir de los desarrollos en serie de potencias del seno y el coseno se sigue también de forma inmediata que

$$\begin{aligned}\operatorname{senh} x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots \\ \operatorname{cosh} x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots\end{aligned}$$

Ahora es inmediato que  $\operatorname{cosh} x$  es estrictamente creciente en  $[0, +\infty[$  y, como  $\operatorname{cosh}(-x) = \operatorname{cosh} x$ , concluimos que es estrictamente decreciente en  $] -\infty, 0]$ , tal y como se aprecia en la gráfica. En cuanto a  $\operatorname{senh} x$ , también se deduce de su serie que es estrictamente creciente en  $[0, +\infty[$  y, como  $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$ , es estrictamente creciente en todo  $\mathbb{R}$ . La última expresión que hemos dado para  $\operatorname{tanh} x$  muestra que es creciente en  $\mathbb{R}$ .

Las relaciones siguientes se deducen inmediatamente de las correspondientes para las funciones  $\operatorname{sen} x$  y  $\operatorname{cos} x$ . La primera de ellas implica que, así como el punto  $(\operatorname{cos} x, \operatorname{sen} x)$  recorre una circunferencia cuando  $x$  recorre los números reales, el punto  $(\operatorname{cosh} x, \operatorname{senh} x)$  recorre una rama de hipérbola<sup>5</sup>:

$$\operatorname{cosh}^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

$$\begin{aligned}\operatorname{senh}(x+y) &= \operatorname{senh} x \operatorname{cosh} y + \operatorname{cosh} x \operatorname{senh} y, \\ \operatorname{cosh}(x+y) &= \operatorname{cosh} x \operatorname{cosh} y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y, \\ \operatorname{tanh}(x+y) &= \frac{\operatorname{tanh} x + \operatorname{tanh} y}{1 + \operatorname{tanh} x \operatorname{tanh} y}.\end{aligned}$$

Claramente, las funciones hiperbólicas tienen inversas en los intervalos:

$$\operatorname{arsenh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \operatorname{arcosh} : [1, +\infty[ \longrightarrow [0, +\infty[, \quad \operatorname{artanh} : ]-1, 1[ \longrightarrow \mathbb{R},$$

que reciben el nombre de *argumento del seno hiperbólico*, *argumento del coseno hiperbólico* y *argumento de la tangente hiperbólica*, respectivamente. Es fácil encontrarles expresiones explícitas. Por ejemplo, si se cumple  $y = \operatorname{arsenh} x$ , entonces  $x = \operatorname{senh} y = (e^y - e^{-y})/2$ , luego  $e^y - e^{-y} = 2x$ , luego

$$(e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0.$$

Por lo tanto,  $e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$  (notemos que la raíz tiene que ser positiva) y llegamos a que

$$\operatorname{arsenh} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Similarmente se prueba que

$$\operatorname{arcosh} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad \operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}.$$

<sup>5</sup>Véase la sección 7.4 de [IGE]

## Capítulo VI

# Las funciones elementales

Hemos definido las funciones  $e^x$ ,  $\operatorname{sen} x$  y  $\operatorname{cos} x$  para cualquier número complejo  $x$ , pero sólo las hemos estudiado con detalle para valores reales. La función exponencial compleja está determinada por la fórmula (5.2):

$$e^{x+yi} = e^x(\operatorname{cos} y + i \operatorname{sen} y),$$

de la que podemos extraer muchas consecuencias.<sup>1</sup> Empezamos estudiando los logaritmos complejos:

### 6.1 Logaritmos complejos

La relación  $e^z e^{-z} = 1$  implica que la exponencial no toma el valor 0 en ningún número complejo. Sin embargo, vamos a ver que toma cualquier otro valor complejo:

**Teorema 6.1** *Si  $z \neq 0$  es un número complejo, los números  $w \in \mathbb{C}$  que cumplen  $e^w = z$  son exactamente los de la forma  $w = \log |z| + i\theta$ , donde  $\theta$  es un argumento de  $z$ .*

DEMOSTRACIÓN: Pongamos que  $w = r + i\theta$ . Entonces

$$z = e^w = e^r(\operatorname{cos} \theta + i \operatorname{sen} \theta).$$

Tomando módulos resulta que  $e^r = |z|$ , luego  $r = \log |z|$ , y por definición tenemos que  $\theta$  es un argumento de  $z$ . Por otra parte, es claro que todo  $w$  en las condiciones del enunciado cumple  $e^w = z$ . ■

Los números  $w$  que cumplen  $e^w = z$  se llaman *logaritmos* de  $z$ . Acabamos de probar que cada número complejo  $z \neq 0$  tiene infinitos logaritmos. La parte real de un logaritmo es necesariamente  $\log |z|$ , mientras que la parte imaginaria está determinada salvo múltiplos de  $2\pi i$ .

---

<sup>1</sup>Una consecuencia notable es la famosa  $e^{i\pi} = -1$  que relaciona las constantes  $e$ ,  $i$ ,  $\pi$  y  $-1$ .

En particular,  $e^z = 1$  si y sólo si  $z = 2k\pi i$ .

Si  $x > 0$ , entonces un argumento de  $x$  es  $\theta = 0$ , por lo que sus logaritmos son los números complejos de la forma  $\log x + 2k\pi i$ . Para  $k = 0$  obtenemos el logaritmo real, pero dando a  $k$  otros valores enteros obtenemos infinitos logaritmos más.

Llamemos  $\mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$ , es decir, que  $\mathbb{C}_-$  es el plano complejo menos el semieje real negativo, incluyendo el 0 entre los números que eliminamos. Equivalentemente,  $\mathbb{C}_-$  está formado por los números complejos que admiten un argumento en el intervalo  $]-\pi, \pi[$ . Por lo tanto, podemos considerar la función

$$\arg : \mathbb{C}_- \longrightarrow ]-\pi, \pi[$$

que a cada  $z \in \mathbb{C}_-$  le asigna su único argumento  $\arg z$  en dicho intervalo.

**Teorema 6.2** *La función  $\arg : \mathbb{C}_- \longrightarrow ]-\pi, \pi[$  es continua.*

DEMOSTRACIÓN: Tomemos un punto  $a \in \mathbb{C}_-$ , y vamos a probar que  $\arg$  es continua en  $a$ . Pongamos que  $a = |a|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ , donde  $\theta = \arg a$ . Sea  $\{z_n\}_{n=0}^\infty$  una sucesión en  $\mathbb{C}_-$  que converja a  $a$ . Tenemos que probar que

$$\lim_n \arg z_n = \theta.$$

Supongamos en primer lugar que  $\operatorname{Re} a > 0$ , lo cual equivale a que  $\cos \theta > 0$ , o también a que  $|\theta| < \pi/2$ , lo cual implica a su vez que

$$\arg a = \theta = \operatorname{arcsen} \operatorname{sen} \theta = \operatorname{arcsen} \operatorname{Im} \frac{a}{|a|}.$$

Como  $\lim_n \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} a > 0$ , para todo  $n$  suficientemente grande se cumplirá que  $\operatorname{Re} z_n > 0$ , luego también

$$\arg z_n = \operatorname{arcsen} \operatorname{Im} \frac{z_n}{|z_n|}.$$

Entonces, por la continuidad de las distintas funciones involucradas, tenemos que

$$\lim_n \frac{z_n}{|z_n|} = \frac{a}{|a|}, \quad \lim_n \operatorname{Im} \frac{z_n}{|z_n|} = \operatorname{Im} \frac{a}{|a|}, \quad \lim_n \arg z_n = \arg a.$$

Supongamos ahora que  $\operatorname{Re} a \leq 0$ , en cuyo caso no puede ser  $\operatorname{Im} a = 0$ , pues entonces  $a$  no estaría en  $\mathbb{C}_-$ . Así pues, ahora tiene que ser  $\operatorname{Im} a > 0$  o bien  $\operatorname{Im} a < 0$ . Consideremos el primer caso. En general, la mera condición  $\operatorname{Im} a > 0$  implica que  $0 < \theta < \pi$ , por lo que

$$\arg a = \theta = \operatorname{arccos} \cos \theta = \operatorname{arccos} \operatorname{Re} \frac{a}{|a|}.$$

Como antes, para todo  $n$  suficientemente grande se cumplirá que  $\operatorname{Im} z_n > 0$ , luego también

$$\arg z_n = \operatorname{arccos} \operatorname{Re} \frac{z_n}{|z_n|},$$

y de nuevo por la continuidad de las funciones involucradas concluimos que  $\lim_n \arg z_n = \arg a$ .

Por último, si  $\text{Im } a < 0$ , la diferencia es que ahora  $-\pi < \theta < 0$ , por lo que ya no es cierto que  $\theta = \arccos \cos \theta$ , pues la función arco coseno nos da el ángulo entre 0 y  $\pi$  cuyo coseno es  $\cos \theta$ , y éste es  $-\theta$ . Por lo tanto ahora

$$\arg a = \theta = -\arccos \cos \theta = -\arccos \text{Re} \frac{a}{|a|},$$

e igualmente, para todo  $n$  suficientemente grande, cada  $z_n$  cumple lo mismo, y podemos concluir del mismo modo. ■

**Nota** Conviene observar que el teorema anterior sería falso si no hubiéramos excluido los números reales negativos, pues, por ejemplo,

$$\lim_n e^{(1-1/n)\pi i} = e^{\pi i} = -1, \quad \lim_n \arg e^{(1-1/n)\pi i} = \lim_n (1-1/n)\pi = \pi,$$

$$\lim_n e^{-(1-1/n)\pi i} = e^{-\pi i} = -1, \quad \lim_n \arg e^{-(1-1/n)\pi i} = \lim_n -(1-1/n)\pi = -\pi,$$

luego, para que el argumento fuera continuo en  $-1$  tendría que suceder que  $\pi = \arg(-1) = -\pi$ . ■

**Definición 6.3** Llamaremos *rama principal* del logaritmo complejo a la función  $\log : \mathbb{C}_- \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$\log z = \log |z| + i \arg z.$$

Así,  $\log z$  es el único logaritmo de  $z$  cuya parte imaginaria está en  $]-\pi, \pi[$ , y el teorema anterior prueba que se trata de una función continua.

Recordemos que, con el razonamiento previo a la definición 4.15, hemos demostrado que la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$$

asigna a cada número complejo  $z \neq -1$  tal que  $|z| \leq 1$  uno de los logaritmos complejos de  $1+z$ , que cuando  $0 < z \leq 1$  es el logaritmo real usual.

En 4.15 hemos llamado a esta serie  $\log(1+z)$ , y ahora vamos a probar que esta notación es coherente con la que acabamos de introducir, es decir, que la suma de la serie de potencias es precisamente el logaritmo principal de  $1+z$ .

**Teorema 6.4** Para todo número complejo  $z \neq -1$  tal que  $|z| \leq 1$ , se cumple que

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n,$$

donde el miembro izquierdo representa el logaritmo principal de  $1+z$ .

DEMOSTRACIÓN: Ante todo, notemos que si  $|z| \leq 1$  y  $z \neq 1$ , entonces  $1 + z \in \mathbb{C}_-$ . En principio, puesto que sabemos que la suma de la serie es un logaritmo de  $1 + z$  (no necesariamente el principal), podemos afirmar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n = \log(1 + z) + 2k_z \pi i,$$

para cierto número entero  $k_z$ , que en principio depende de  $z$ . Basta probar que  $k_z = 0$  para todo  $z$ . Sabemos que en  $z = 0$  la serie vale  $\log(1 + 0) = 0$ , luego  $k_0 = 0$ .

Ahora bien, si  $|z| < 1$ , tanto la serie como  $\log(1 + z)$  son funciones continuas en el disco  $D_1$ , luego la función  $D_1 \rightarrow \mathbb{Z}$  dada por  $z \mapsto k_z$  tiene que ser continua, pues es

$$k_z = \frac{1}{2\pi i} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n - \log(1 + z) \right).$$

Tomemos  $z \in D_1$  arbitrario y consideremos la función  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{Z}$  dada por  $f(t) = k_{tz}$ . Se trata de una función continua tal que  $f(0) = 0$  y  $f(1) = k_z$ . Si  $k_z \neq 0$ , entonces, por el teorema de los valores intermedios, debería tomar todos los valores entre 0 y  $k_z$ , pero sólo puede tomar valores enteros, así que tiene que ser  $k_z = 0$ .

Con esto tenemos probado el teorema para números que cumplan  $|z| < 1$ . En el caso  $|z| = 1$  consideramos la función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n} x^n.$$

Si  $z \neq -1$ , la serie converge en  $x = 1$ , luego el teorema 3.21 nos da que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \log(1 + zx) = \log(1 + z),$$

donde hemos usado la continuidad del logaritmo principal. ■

**La serie de Leibniz** Ahora podemos demostrar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

En efecto, basta observar que  $1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi/2) + i \operatorname{sen}(\pi/4))$  tiene argumento  $\pi/4$ , por lo que

$$\log(1 + i) = \log(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4}i = \frac{1}{2} \log 2 + \frac{\pi}{4}i.$$

Si calculamos el logaritmo con su desarrollo en serie obtenemos

$$\log(1+i) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} i^n = i + \frac{1}{2} - \frac{i}{3} - \frac{1}{4} + \frac{i}{5} + \frac{1}{6} - \frac{i}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

Separando la parte real y la parte imaginaria en cada suma parcial, es inmediato que

$$\frac{1}{2} \log 2 + \frac{\pi}{4} i = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots \right) + i \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right).$$

Igualando las partes imaginarias obtenemos la suma de la serie de Leibniz. Igualando las partes reales y multiplicando por 2 obtenemos nuevamente que

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2. \quad \blacksquare$$

**Ejemplo 6.5** Más en general, si  $|z| = 1$ , con  $z \neq 1$ , tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n = -\log(1-z).$$

Por otra parte, si  $x \in ]0, 2\pi[$ , entonces  $z = e^{ix}$  recorre todos los números complejos de módulo 1 distintos de  $z = 1$ , luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{inx} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\cos nx + i \operatorname{sen} nx) = -\log(1 - e^{ix}).$$

Ahora observamos que

$$1 - e^{ix} = e^{ix/2} (e^{-ix/2} - e^{ix/2}) = -2ie^{ix/2} \operatorname{sen}(x/2) = 2 \operatorname{sen}(x/2) e^{ix/2 - i\pi/2},$$

luego separando la parte real de la imaginaria en la serie anterior queda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\log(2 \operatorname{sen}(x/2)), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < 2\pi. \quad \blacksquare$$

De la serie para  $\log(1+z)$  podemos obtener ésta otra:

**Teorema 6.6** Si  $|z| < 1$ , entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} z^{2n+1} = \frac{z}{1} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}.$$

DEMOSTRACIÓN: Si  $|z| < 1$ , entonces  $|\operatorname{Re}(\pm z)| < 1$ , luego  $\operatorname{Re}(1 \pm z) > 0$ , mientras que  $\operatorname{Im}(1+z)$  e  $\operatorname{Im}(1-z)$  tienen signos opuestos. Esto se traduce en

que los argumentos  $\arg(1+z)$  y  $\arg(1-z)$  están uno en el intervalo  $[0, \pi/2[$  y otro en el intervalo  $]-\pi/2, 0]$ . Por lo tanto,

$$|\arg(1+z) - \arg(1-z)| < \pi.$$

Así:

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{|1+z|e^{i\arg(1+z)}}{|1-z|e^{i\arg(1-z)}} = \left| \frac{1+z}{1-z} \right| e^{i(\arg(1+z) - \arg(1-z))},$$

luego  $\arg(1+z) - \arg(1-z)$  es el argumento principal de  $(1+z)/(1-z)$ , que no es  $\pi$ , luego está definido el logaritmo principal:

$$\begin{aligned} \log \frac{1+z}{1-z} &= \log \left| \frac{1+z}{1-z} \right| + i(\arg(1+z) - \arg(1-z)) \\ &= \log |1+z| + i\arg(1+z) - \log |1-z| - \arg(1-z) = \log(1+z) - \log(1-z) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (-z)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n. \end{aligned}$$

Al sumar las sumas parciales de las dos últimas series, los términos correspondientes a potencias pares se cancelan, mientras que los correspondientes a potencias impares se multiplican por dos, y llegamos a la fórmula del enunciado. ■

## 6.2 La fórmula de Stirling

En 1730 Abraham De Moivre estaba investigando cuestiones estadísticas para las que necesitaba estimar números combinatorios como

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!^2}.$$

Aunque su trabajo era en gran parte teórico, por hacernos una idea del tipo de cálculos que manejaba, podemos pensar en

$$\frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n},$$

que es la probabilidad de que al lanzar  $2n$  veces una moneda se obtengan exactamente  $n$  caras. Se trata de un número entre 0 y 1, pero el cálculo requiere pasar por  $2n!$  y  $n!^2$ , que se hacen muy grandes en cuanto  $n$  crece un poco, y el problema es que no es fácil manipular algebraicamente los factoriales para compararlos o simplificarlos con otras expresiones, como potencias, etc. Naturalmente, De Moivre trabajaba con tablas de logaritmos, pero a los pocos días de publicar su libro *Miscellanea analytica*, su amigo James Stirling le escribió para advertirle de errores en sus tablas que las volvían inútiles. Al mismo tiempo le indicó un desarrollo en serie que le permitía aproximar  $\log n!$  con relativa

facilidad. Aunque la fórmula de Stirling era más precisa, actualmente se conoce como tal la aproximación

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}(n/e)^n.$$

Más precisamente, se cumple que

$$\lim_n \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n} = 1.$$

Esto permite en muchos contextos sustituir los factoriales por raíces, potencias y exponenciales más fáciles de manipular. Por ejemplo,

$$\frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} \approx \frac{\sqrt{4\pi n} 2^{2n} n^{2n} / e^{2n}}{2^{2n} 2\pi n n^{2n} / e^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Para hacernos una idea de la aproximación, la probabilidad de obtener 5 000 caras exactamente al lanzar 10 000 veces una moneda es de 0.007978646139382... y la aproximación que proporciona la fórmula de Stirling es de 0.00797884..., con un error del 0.0025%.

Vamos a demostrar una versión más precisa de la fórmula de Stirling:

**Teorema 6.7 (Fórmula de Stirling)** *Para cada número natural  $n$ , existe un número real  $0 < \theta < 1$  tal que*

$$n! = \sqrt{2\pi n}(n/e)^n e^{\theta/12n}.$$

DEMOSTRACIÓN: Llamemos

$$x_n = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}},$$

de modo que queremos probar que  $x_n = \sqrt{2\pi} e^{\theta_n/12n}$ , para cierto número real  $0 < \theta_n < 1$ . Observemos que

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{n! e^n (n+1)^{n+1} \sqrt{n+1}}{n^n \sqrt{n} (n+1)! e^{n+1}} = \frac{(n+1)^n \sqrt{n+1}}{e n^n \sqrt{n}} = \frac{1}{e} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n+1/2}.$$

Para estudiar el comportamiento de este cociente partimos del teorema 6.6:

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}.$$

Aplicamos esta fórmula a  $x = 1/(2n+1)$ , con lo que

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n},$$

y así:

$$\log \frac{n+1}{n} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \frac{1}{(2n+1)^{2k+1}} = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \frac{1}{(2n+1)^{2k}}.$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} \left(n + \frac{1}{2}\right) \log \frac{n+1}{n} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \frac{1}{(2n+1)^{2k}} < 1 + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^{2k}} \\ &= 1 + \frac{1}{3(2n+1)^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{(2n+1)^2}} = 1 + \frac{1}{12n(n+1)}. \end{aligned}$$

Así pues,

$$1 < \left(n + \frac{1}{2}\right) \log \frac{n+1}{n} < 1 + \frac{1}{12n(n+1)},$$

o también

$$1 < \log \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1/2} < 1 + \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}.$$

Aplicando la exponencial y dividiendo entre  $e$  queda

$$1 < \frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1/2} < \frac{e^{-1/12(n+1)}}{e^{-1/12n}}$$

o, equivalentemente,

$$1 < \frac{x_n}{x_{n+1}} < \frac{e^{-1/12(n+1)}}{e^{-1/12n}}.$$

La primera desigualdad muestra que la sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  es monótona decreciente, y está acotada inferiormente por 0, luego existe

$$\lim_n x_n = L.$$

La segunda desigualdad muestra que la sucesión  $\{x_n e^{-1/12n}\}_{n=1}^{\infty}$  es monótona creciente y, como  $\lim_n e^{-1/12n} = 1$ , tenemos que

$$\lim_n x_n e^{-1/12n} = L.$$

De hecho, tenemos que  $x_n e^{-1/12n} < L < x_n = x_n e^0$ . Ahora observamos que la función  $f(t) = x_n e^{-t/12n}$  es continua y se cumple que  $f(1) < L < f(0)$ , luego por el teorema de los valores intermedios existe un número real  $0 < \theta_n < 1$  tal que  $x_n e^{-\theta_n/12n} = L$  o, lo que es lo mismo,  $x_n = e^{\theta_n/12n} L$ . Por consiguiente:

$$n! = \sqrt{n}(n/e)^n x_n = \sqrt{n}(n/e)^n e^{\theta_n/12n} L.$$

Sólo falta probar que  $L = \sqrt{2\pi}$ . Para ello basta considerar la versión (8.2) de la fórmula de Wallis:

$$\begin{aligned} \pi &= \lim_n \frac{2^{4n+1} (n!)^4}{((2n)!)^2 (2n+1)} = \lim_n \frac{2^{4n+1} n^2 (n/e)^{4n} x_n^4}{2n(2n/e)^{4n} x_{2n}^2 (2n+1)} \\ &= \lim_n \frac{x_n^4}{x_{2n}^2} \frac{n}{2n+1} = \frac{L^2}{2}, \end{aligned}$$

luego, ciertamente,  $L = \sqrt{2\pi}$ . ■

Así pues, para cada número natural  $n$  se cumple que

$$\sqrt{2\pi n}(n/e)^n < n! < \sqrt{2\pi n}(n/e)^n e^{1/12n}. \quad (6.1)$$

La aproximación por exceso resulta ser mucho mejor. Por ejemplo,

$$\frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} \approx \frac{\sqrt{4\pi n} 2^{2n} n^{2n} / e^{2n} e^{1/24n}}{2^{2n} 2\pi n n^{2n} / e^{2n} e^{2/12n}} = \frac{e^{-1/8n}}{\sqrt{\pi n}}.$$

Si aplicamos esta corrección a  $n = 5000$ , la aproximación es

$$\mathbf{0.0079786461393818\dots}$$

donde las cifras en negrita son exactas y el error es del  $4 \cdot 10^{-12}\%$ .

Puede probarse que el 12 en la fórmula de Stirling no puede mejorarse. Por ejemplo, si tratamos de sustituirlo por 12.001, a partir de  $n = 20$  la supuesta aproximación por exceso resulta ser inferior a  $n!$

**Ejemplo 6.8** Vamos a calcular el número de cifras decimales de  $(10^{100})!$

En general, un número  $N$  tiene  $d$  cifras decimales si  $10^{d-1} \leq N < 10^d$  o, equivalentemente, si

$$d - 1 \leq \log_{10} N < d,$$

luego  $d = E[\log_{10} N] + 1$ . Por la fórmula de Stirling,

$$\log \sqrt{2\pi} + \frac{1}{2} \log n + n \log n - n < \log n! < \log \sqrt{2\pi} + \frac{1}{2} \log n + n \log n - n + \frac{1}{12n},$$

y haciendo  $n = 10^{100}$ , la aproximación por defecto es:

$$\log \sqrt{2\pi} + 50 \log 10 + 10^{102} \log 10 - 10^{100} < \log(10^{100}!),$$

luego

$$\log_{10} \sqrt{2\pi} + 50 + 10^{102} - \frac{10^{100}}{\log 10} < \log_{10}(10^{100}!).$$

Mientras el cálculo de  $10^{100}!$  está fuera del alcance de un ordenador, nada impide calcular este valor:

995 657 055 180 967 481 723 488 710 810 833 949 177 056 029 941 963 334 338

855 462 168 341 353 507 911 292 252 707 750 506 615 682 567.21202886673139...

La aproximación por exceso resulta de sumar a este número

$$\frac{1}{12 \cdot 10^{100} \log 10} < 10^{-207},$$

luego no hay ningún número entero entre la aproximación por defecto y la aproximación por exceso de  $\log_{10}(10^{100}!)$ , por lo que los tres números tienen la misma parte entera, y el número de cifras decimales resulta ser

$d = 995\,657\,055\,180\,967\,481\,723\,488\,710\,810\,833\,949\,177\,056\,029\,941\,963\,334$

$338\,855\,462\,168\,341\,353\,507\,911\,292\,252\,707\,750\,506\,615\,682\,568.$

Más aún, tenemos que la aproximación por defecto tiene más de 200 cifras decimales en común con  $\log_{10}(10^{100!})$ , es decir, que

$$\log_{10}(10^{100!}) = d - 1 + 0.21202886673139\dots,$$

luego, elevando a 10, obtenemos las primeras cifras exactas de  $10^{100!}$ :

$$\begin{aligned} 10^{100!} &= 10^{d-1} \cdot 10^{0.21202886673139\dots} = 10^{d-1} \cdot 1.6294043324593373734\dots \\ &= 1\ 629\ 404\ 332\ 459\ 337\ 373\dots \end{aligned}$$

■

### 6.3 La tangente y la cotangente

Observemos ahora que las funciones  $\sin z$  y  $\cos z$  sólo se anulan en los números reales en los que ya sabemos que lo hacen:

**Teorema 6.9** *Un número complejo  $z$  cumple  $\sin z = 0$  (resp.  $\cos z = 0$ ) si y sólo si  $z = k\pi$  (resp.  $z = \pi/2 + k\pi$ ), para cierto entero  $k$ .*

DEMOSTRACIÓN: Veámoslo para el coseno. Se cumple  $\cos z = 0$  si y sólo si  $e^{iz} = -e^{-iz}$ , si y sólo si  $e^{2iz} = -1 = e^{i\pi}$ , si y sólo si  $e^{(2z-\pi)i} = 1$ , si y sólo si  $2z - \pi = 2k\pi$ , si y sólo si  $z = \pi/2 + k\pi$ . El caso del seno es análogo. ■

Así pues, podemos considerar las funciones *tangente* y *cotangente*

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1}{\tan z}$$

que están definidas y son continuas en todo el plano complejo menos en los números de la forma  $\pi/2 + 2k\pi$  en el caso de la tangente y menos en los números de la forma  $k\pi$  en el caso de la cotangente. Ambas tienen periodo  $\pi$ .

**El arco tangente** Veamos que casi todo número complejo  $z$  tiene un arco tangente  $w$ , es decir, que existe un  $w$  tal que  $\tan w = z$ .

En efecto:  $\tan w = z$  equivale a que  $\sin w = z \cos w$ , lo que a su vez equivale a que  $e^{iw} - e^{-iw} = iz(e^{iw} + e^{iw})$ . Multiplicando por  $e^{iw}$ , esto equivale a que  $e^{2iw} - 1 = iz(e^{2iw} + 1)$ , o también a que

$$(1 - iz)e^{2iw} = 1 + iz.$$

Ahora observamos que si  $z = i$ , la ecuación se reduce a  $2e^{2iw} = 0$ , que es imposible, mientras que si  $z = -i$  obtenemos  $0 = 2$ . Pero si  $z \neq \pm i$ , entonces llegamos a que

$$e^{2iw} = \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

y, como el miembro derecho no es nulo, tiene logaritmos, y así:

$$w = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \left( \frac{1 + iz}{1 - iz} \right),$$

donde usamos  $\operatorname{Log}$  para representar un logaritmo arbitrario.

Así pues, todo número complejo distinto de  $\pm i$  tiene un arco tangente, unívocamente determinado salvo múltiplos de  $\pi$  (pues el logaritmo de la expresión anterior está unívocamente determinado salvo múltiplos de  $2\pi i$ ).

Vamos a ver qué tiene que cumplir un número complejo  $z = x + yi$  para que el cociente  $(1 + iz)/(1 - iz)$  no sea un número real negativo, y así podamos aplicarle la rama principal del logaritmo. Para ello calculamos

$$\frac{1 + iz}{1 - iz} = \frac{1 - i + xi}{1 + y - xi} = \frac{1 - x^2 - y^2 + 2xi}{x^2 + (1 + y)^2}.$$

Así vemos que el cociente es real si y sólo si  $x = 0$ , y en tal caso se reduce a

$$\frac{1 + iz}{1 - iz} = \frac{1 - y^2}{(1 + y)^2},$$

que es  $\leq 0$  si y sólo si  $|y| \geq 1$ . Así pues:

**Definición 6.10** Sea  $D$  el conjunto de los números complejos  $z$  que no son de la forma  $z = yi$  con  $y \in \mathbb{R}$ ,  $|y| \geq 1$ . Definimos la *rama principal del arco tangente* como la función

$$\arctan : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

dada por

$$\arctan z = \frac{1}{2i} \log \left( \frac{1 + iz}{1 - iz} \right),$$

donde  $\log$  es la rama principal del logaritmo.

Más explícitamente,

$$\arctan z = \frac{1}{2} \arg \frac{1 + iz}{1 - iz} - \frac{i}{2} \log \left| \frac{1 + iz}{1 - iz} \right|.$$

Si  $z$  es real, entonces  $1 - iz = \overline{1 + iz}$ , luego  $|1 - iz| = |1 + iz|$  y queda que  $\arctan z \in \mathbb{R}$  y, más concretamente,  $\arctan z \in ]-\pi/2, \pi/2[$ , luego es el arco tangente de  $z$  que ya teníamos definido. Así pues, la rama principal del arco tangente complejo extiende al arco tangente real.

Si  $|z| < 1$ , podemos calcular el logaritmo que aparece en la fórmula del arco tangente mediante la serie del teorema 6.6, y el resultado es:

**Teorema 6.11** Para todo número complejo con  $|z| < 1$ , se cumple

$$\arctan z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots$$

Evaluando la serie en  $z = 1$  (teniendo en cuenta el teorema 3.21) obtenemos nuevamente la suma de la serie de Leibniz.

**Ejemplo 6.12** La fórmula de Euler (5.13) nos da ahora una fórmula para el cálculo de  $\pi$ :

$$\pi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left( \frac{1}{2^{2n+1}} + \frac{1}{3^{2n+1}} \right).$$

Esta serie converge mucho más rápidamente que cualquiera de las que hemos considerado hasta ahora. Por ejemplo, nos proporciona las aproximaciones siguientes:

$$3.141591 < S_7 < \pi < S_8 < 3.141593,$$

$$3.1415926535891 < S_{17} < \pi < S_{18} < 3.14159265358995. \quad \blacksquare$$

**La fórmula de Machin** En 1706 John Machin encontró una fórmula similar a la anterior para aproximar  $\pi$  que converge muchísimo más rápidamente, y la usó para aproximar  $\pi$  con 100 cifras decimales.

Partimos de  $\alpha = \arctan(1/5)$ . La fórmula (5.15) nos da que

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{5}{12},$$

$$\tan 4\alpha = \frac{2 \tan 2\alpha}{1 - \tan^2 2\alpha} = \frac{120}{119}.$$

Como  $\tan 4\alpha > 1 = \tan(\pi/4)$ , tenemos que  $4\alpha - \pi/4 > 0$  y

$$\tan(4\alpha - \pi/4) = \frac{\tan 4\alpha - \tan(\pi/4)}{1 + \tan 4\alpha \tan(\pi/4)} = \frac{1}{239}.$$

Por lo tanto,

$$4 \arctan \frac{1}{5} - \frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{239},$$

luego

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239},$$

luego

$$\pi = 16 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)5^{2n+1}} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)239^{2n+1}}.$$

Por ejemplo, como son series alternadas, si llamamos  $S_k$  y  $T_k$  a sus sumas parciales respectivas, sabemos que

$$S_3 < S < S_3 + \frac{16}{9 \cdot 5^9}, \quad T_0 - \frac{4}{3 \cdot 239^3} < T < T_0.$$

Por lo tanto,

$$S_3 - T_0 < \pi = S - T < S_3 - T_0 + \frac{16}{9 \cdot 5^9} + \frac{4}{3 \cdot 239^3},$$

luego

$$|\pi - (S_3 - T_0)| < \frac{16}{9 \cdot 5^9} + \frac{4}{3 \cdot 239^3} < 0.000002.$$

donde

$$S_3 - T_0 = 16 \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5^6} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} \right) - \frac{4}{239} = \frac{1\,231\,847\,548}{392\,109\,375} = 3.1415916\dots$$

luego concluimos que

$$3.141591 < \pi < 3.141592 + 0.000002 < 3.141594,$$

con lo que obtenemos 5 cifras decimales de  $\pi$  mediante un cálculo que puede realizarse a mano con relativa facilidad. Para conseguir 100 cifras decimales hay que sumar hasta  $n = 71$ . ■

## 6.4 Desarrollos en fracciones simples

La función  $\pi \cot \pi z$  es continua en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  y tiene periodo 1. Vamos a ver que cumple todas las hipótesis del teorema 3.34. Acabamos de comprobar las dos primeras y la tercera es igualmente inmediata. La cuarta es que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\pi \cos \pi z}{\sen \pi z} - \frac{1}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\pi z \cos \pi z - \sen \pi z}{z \sen \pi z} = 0,$$

pero este límite (salvo por la presencia de  $\pi$ , que es irrelevante) está calculado en el ejemplo 5.2. Finalmente:

$$\begin{aligned} \pi \cot \frac{\pi z}{2} + \pi \cot \left( \frac{\pi z}{2} + \frac{\pi}{2} \right) &= \pi \left( \frac{\cos \frac{\pi z}{2}}{\sen \frac{\pi z}{2}} - \frac{\sen \frac{\pi z}{2}}{\cos \frac{\pi z}{2}} \right) \\ &= 2\pi \frac{\cos(\frac{\pi z}{2} + \frac{\pi z}{2})}{\sen(\frac{\pi z}{2} + \frac{\pi z}{2})} = 2\pi \cot(\pi z). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el teorema 3.34 nos permite concluir:

**Teorema 6.13** Para todo número  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ :

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Haciendo  $z = 1/4$ , puesto que  $\cot(\pi/4) = 1$ , obtenemos de nuevo la suma de la serie de Leibniz. (Véase la observación previa al teorema 3.34.)

De aquí obtenemos un desarrollo análogo para la tangente. Basta observar que

$$\tan z = \cot z - 2 \cot 2z, \quad (6.2)$$

pues

$$2 \cot 2z = 2 \frac{\cos 2z}{\sen 2z} = \frac{\cos^2 z - \sen^2 z}{\sen z \cos z} = \cot z - \tan z.$$

**Teorema 6.14** Para todo número complejo  $z$  que no sea un entero impar:

$$\frac{\pi}{2} \tan \frac{\pi z}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2n+1-z} - \frac{1}{2n+1+z} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z}{(2n+1)^2 - z^2}.$$

DEMOSTRACIÓN: Por (6.2), tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} \tan \frac{\pi z}{2} &= \frac{\pi}{2} \cot \frac{\pi z}{2} - \pi \cot \pi z \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z-2n} + \frac{1}{z+2n} \right) - \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right). \end{aligned}$$

Consideramos la primera serie como límite de sus sumas parciales y la segunda como límite de la subsucesión de sus sumas parciales pares, con lo que la suma es el límite de

$$\begin{aligned} &\frac{1}{z-2} + \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-4} + \frac{1}{z+4} + \cdots + \frac{1}{z-2k} + \frac{1}{z+2k} \\ &- \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+2} - \cdots - \frac{1}{z-2k} - \frac{1}{z+2k} = \\ &-\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z+3} - \cdots - \frac{1}{z-(2k-1)} - \frac{1}{z+(2k-1)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\pi}{2} \tan \frac{\pi z}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2n+1-z} - \frac{1}{2n+1+z} \right). \quad \blacksquare$$

A su vez:

**Teorema 6.15** Para todo  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ :

$$\frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2z}{z^2 - n^2}$$

DEMOSTRACIÓN: Observamos que

$$\frac{1}{\operatorname{sen} z} = \cot z + \tan \frac{z}{2}. \quad (6.3)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \cot z + \tan \frac{z}{2} &= \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z} + \frac{\operatorname{sen}(z/2)}{\cos(z/2)} = \frac{\cos z \cos(z/2) + \operatorname{sen} z \operatorname{sen}(z/2)}{\operatorname{sen} z \cos(z/2)} \\ &= \frac{\cos(z - z/2)}{\operatorname{sen} z \cos(z/2)} = \frac{1}{\operatorname{sen} z}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z} &= \pi \cot \pi z + 2 \frac{\pi}{2} \tan \frac{\pi z}{2} \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2n+1-z} - \frac{1}{2n+1+z} \right) \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{-2}{z-(2n+1)} - \frac{-2}{z+(2n+1)} \right) \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right). \end{aligned}$$

La última igualdad se justifica sumando las sumas parciales de ambas series. Cada término de la segunda serie se resta al término correspondiente de la primera, de modo que, cuando  $n$  es impar, queda

$$\left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) - 2 \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) = - \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right). \quad \blacksquare$$

Y a su vez:

**Teorema 6.16** Para todo número complejo  $z$  que no sea semientero:

$$\frac{\pi}{\cos \pi z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{2}{(2n+1)-2z} + \frac{2}{(2n+1)+2z} \right) = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)^2 - 4z^2}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sustituimos  $z$  por  $1/2 - z$  en la fórmula del teorema anterior:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\cos \pi z} &= \frac{2}{1-2z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{2}{1-2n-2z} + \frac{2}{2n+1-2z} \right) \\ &= \frac{2}{1-2z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{-2}{(2n-1)-2z} + \frac{2}{(2n+1)-2z} \right) \end{aligned}$$

y ahora sólo hay que observar que esta serie es:

$$\frac{2}{1-2z} + \frac{2}{1+2z} - \frac{2}{3-2z} - \frac{2}{3+2z} + \frac{2}{5-2z} + \frac{2}{5+2z} - \frac{2}{7-2z} - \dots$$

luego coincide con la indicada en el enunciado.  $\blacksquare$

Dando valores particulares a  $z$  en las fórmulas de los teoremas anteriores podemos obtener muchas sumas curiosas. Por ejemplo, haciendo  $z = 1/3$  en el desarrollo de la cotangente queda

$$\frac{\pi}{\sqrt{3}} = 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3}{1-3n} + \frac{3}{1+3n} \right),$$

luego

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \dots = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

(la sucesión de los denominadores omite los múltiplos de 3) o, haciendo  $z = 1/4$  en el desarrollo de la inversa del seno, queda

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \dots = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Por otra parte, de los desarrollos que hemos obtenido podemos deducir varios desarrollos en series de potencias. La fórmula del teorema 6.13 puede expresarse así:

$$\pi z \cot \pi z = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2 - z^2},$$

y ahora observamos que, si  $|z| < 1$ , entonces

$$\frac{z^2}{n^2 - z^2} = \frac{(z/n)^2}{1 - (z/n)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{n^{2k}}.$$

Por lo tanto:

$$\pi z \cot \pi z = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{n^{2k}}.$$

Ahora vamos a intercambiar el orden de los sumatorios, para lo cual, de acuerdo con el teorema 2.27, tenemos que justificar que la serie doble converge absolutamente. En efecto,

$$\sum_{n,k \leq N} \frac{|z|^{2k}}{n^{2k}} \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^N |z|^{2k} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{\infty} |z|^{2k}.$$

Por consiguiente:

$$\pi z \cot \pi z = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} z^{2k} = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2k) z^{2k},$$

donde definimos

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

que es una serie convergente para  $s > 1$  por el teorema 4.9 (aunque para  $s = 2k$  su convergencia es trivial por comparación con la serie para  $s = 2$ , que ya sabíamos que era convergente). Equivalentemente, llamando  $w = \pi z$ , tenemos que, para  $|w| < \pi$ , se cumple:

$$w \cot w = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}} w^{2k}. \quad (6.4)$$

Por otro lado, usando (5.1), tenemos que

$$w \cot w = iw \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{e^{iw} - e^{-iw}} = iw \frac{e^{2iw} + 1}{e^{2iw} - 1}$$

Llamando  $x = 2wi$ , resulta que

$$\frac{x}{2i} \cot \frac{x}{2i} = \frac{x}{2} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{x}{2} + \frac{x}{e^x - 1}.$$

Por lo tanto, para  $|x| < 2\pi$ , tenemos que

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{e^x - 1} = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k} (2i)^{2k}} x^{2k} = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \zeta(2k)}{(2\pi)^{2k}} x^{2k},$$

o también

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \zeta(2k)}{(2\pi)^{2k}} x^{2k}.$$

**Definición 6.17** Los *números de Bernoulli* son los números reales  $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$  que cumplen

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n, \quad \text{para } |x| < 2\pi.$$

Acabamos de probar que, en efecto, esta función admite un desarrollo en serie de potencias convergente para  $|x| < 2\pi$  y, comparando los coeficientes, vemos que

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -1/2, \quad B_{2k+1} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

mientras que

$$B_{2k} = \frac{(-1)^{k+1} 2(2k)! \zeta(2k)}{(2\pi)^{2k}}, \quad (6.5)$$

aunque es más interesante escribir la última igualdad en la forma

$$\zeta(2k) = \frac{1}{1^{2k}} + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \dots = (-1)^{k+1} \frac{2^{2k-1} \pi^{2k} B_{2k}}{(2k)!}. \quad (6.6)$$

La razón es que en la sección siguiente calcularemos explícitamente los números de Bernoulli, y esta expresión nos dará el valor explícito de las series  $\zeta(2k)$ .

De momento observamos que, en términos de los números de Bernoulli, el desarrollo en serie de la cotangente (6.4) queda así:

$$\cot x = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} x^{2k}, \quad |x| < \pi.$$

A su vez, usando (6.2) obtenemos que, para  $|x| < \pi/2$ ,

$$\tan x = \cot x - 2 \cot 2x = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} x^{2k} - \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} 2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} x^{2k},$$

luego

$$\tan x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2^{2k} (2^{2k} - 1) B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1}, \quad |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Y también, usando (6.3) obtenemos que, para  $|x| < \pi/4$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{sen} x} &= \cot x + \tan \frac{x}{2} \\ &= \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} x^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2(2^{2k} - 1) B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1} \\ &= -\frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} x^{2k} + \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (2^{2k+1} - 2) B_{2k}}{(2k)!} x^{2k} \\ &= \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (2^{2k+1} - 2^{2k} - 2) B_{2k}}{(2k)!} x^{2k}, \end{aligned}$$

luego

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (2^{2k} - 2) B_{2k}}{(2k)!} x^{2k}, \quad |x| < \frac{\pi}{4}.$$

Para obtener un desarrollo en serie de potencias para  $1/\cos x$  tenemos que partir del desarrollo dado por el teorema 6.16:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\cos \pi z} &= 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)^2 - 4z^2} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{1}{1 - \left(\frac{2z}{2n+1}\right)^2} \\ &= 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2z}{2n+1}\right)^{2k} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2k}}{(2n+1)^{2k+1}} z^{2k}, \end{aligned}$$

donde las series geométricas convergen para  $|z| < 1/2$ . Pero ahora no podemos intercambiar los sumatorios porque la serie doble no es absolutamente convergente. Ello se debe a que los términos con  $k = 0$  forman la serie

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

que no es absolutamente convergente. Por lo tanto, en primer lugar tenemos que separar estos términos:

$$\frac{\pi}{\cos \pi z} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2k}}{(2n+1)^{2k+1}} z^{2k}$$

Esto es correcto porque las sumas parciales de la última serie del paso precedente son la suma de las sumas parciales de las dos últimas series y, como la suma converge y el primer sumando también (sabemos que converge a  $\pi$ ), la segunda serie también converge, y tomando límites se tiene la igualdad de las sumas. Ahora la serie doble ya es absolutamente convergente, pues

$$\begin{aligned} \sum_{n,k \leq N} \left| \frac{(-1)^n 2^{2k}}{(2n+1)^{2k+1}} z^{2k} \right| &\leq \sum_{n,k \leq N} \frac{2^{2k}}{(2n+1)^{2k+1}} |z|^{2k} \leq \sum_{n,k \leq N} \frac{(2|z|)^{2k}}{(2n+1)^2} \\ &\leq \sum_{n=0}^N \frac{1}{(2n+1)^2} \sum_{k=1}^N (2|z|)^{2k} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \sum_{k=1}^{\infty} (2|z|)^{2k}, \end{aligned}$$

donde usamos que  $2|z| < 1$ . Por lo tanto, el teorema 2.27 nos permite intercambiar los sumatorios:

$$\frac{\pi}{\cos \pi z} = \pi + 4 \sum_{k=1}^{\infty} 2^{2k} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}} \right) z^{2k}$$

Cambiando  $x = \pi z$  obtenemos:

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k+2}}{\pi^{2k+1}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}} \right) x^{2k}, \quad |x| < \pi/2.$$

**Definición 6.18** Los números de Euler se definen como los números reales  $\{E_n\}_{n=0}^{\infty}$  que cumplen que

$$\frac{1}{\cosh x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} x^n, \quad \text{para } |x| < \pi/2.$$

Haciendo cambiando  $x$  por  $ix$  en el desarrollo que acabamos de encontrar para  $1/\cos x$  se deduce que, en efecto,  $1/\cosh x$  admite un desarrollo en serie de potencias con coeficientes reales que converge para  $|x| < \pi/2$  y que consta únicamente de potencias pares, por lo que  $E_{2k+1} = 0$  para todo  $k$  y

$$\frac{1}{\cosh x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_{2k}}{(2k)!} x^{2k},$$

luego, cambiando  $x$  por  $ix$ ,

$$\frac{1}{\cos x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k E_{2k}}{(2k)!} x^{2k}.$$

Por consiguiente, al igualar los coeficientes de ambos desarrollos obtenemos que  $E_0 = 1$  y que

$$\frac{2^{2k+2}}{\pi^{2k+1}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}} \right) = \frac{(-1)^k E_{2k}}{(2k)!},$$

luego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}} = (-1)^k \frac{E_{2k}}{2(2k)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1}. \quad (6.7)$$

En principio esto vale para  $k \geq 1$ , pero en realidad la igualdad es válida también para  $k = 0$ , pues entonces se reduce a la fórmula de Leibniz.

Resumimos en un teorema los desarrollos en series de potencias que hemos obtenido:

**Teorema 6.19** *Se cumple:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{sen} x} &= \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (2^{2k} - 2) B_{2k}}{(2k)!} x^{2k}, & |x| < \frac{\pi}{4}, \\ \frac{1}{\cos x} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k E_{2k}}{(2k)!} x^{2k}, & |x| < \frac{\pi}{2}, \\ \tan x &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2^{2k} (2^{2k} - 1) B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1}, & |x| < \frac{\pi}{2}, \\ \cot x &= \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} x^{2k}, & |x| < \pi, \end{aligned}$$

donde  $\{B_k\}_{k=0}^{\infty}$  son los números de Bernoulli y  $\{E_k\}_{k=0}^{\infty}$  son los números de Euler.

## 6.5 Los números de Bernoulli y de Euler

Recordemos que en 6.17 hemos definido los números de Bernoulli como los coeficientes de la serie de potencias

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n,$$

que sabemos que converge cuando  $|z| < 2\pi$ . Para calcularlos explícitamente basta multiplicar esta serie por la de su inversa:

$$\frac{e^z - 1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} z^n.$$

Así:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{B_k}{k!(n+1-k)!} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k \frac{z^n}{n!}, \end{aligned}$$

luego, al igualar coeficientes, resulta que  $B_0 = 1$  y que, para  $n \geq 1$ , se cumple

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k = 0,$$

luego

$$B_{n+1} = -\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k.$$

Equivalentemente, para  $n \neq 1$  (pues para  $n = 0$  es trivial), se cumple que

$$B_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k \equiv (B+1)^n, \quad (6.8)$$

donde la última expresión es sólo una regla mnemotécnica, según la cual, para calcular la suma basta desarrollar  $(B+1)^n$  formalmente mediante el teorema del binomio, y luego cambiar cada potencia  $B^k$  por el número de Bernoulli  $B_k$ .

Esta fórmula permite calcular recurrentemente todos los números de Bernoulli. Por ejemplo:

$$\begin{array}{ll} B_2 = B_0 + 2B_1 + B_2 & \text{luego } B_1 = -1/2 \\ B_3 = B_0 + 3B_1 + 3B_2 + B_3 & \text{luego } B_2 = 1/6 \\ B_5 = B_0 + 5B_1 + 10B_2 + 10B_3 + 5B_4 + B_5 & \text{luego } B_4 = -1/30 \end{array}$$

(La fórmula para  $B_4$  nos da que  $B_3 = 0$ , pero ya sabemos que los números de Bernoulli de índice impar son nulos, salvo  $B_1$ .)

Los primeros números de Bernoulli son:

$B_0$	$B_1$	$B_2$	$B_4$	$B_6$	$B_8$
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$
$B_{10}$	$B_{12}$	$B_{14}$	$B_{16}$	$B_{18}$	$B_{20}$
$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2730}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{3617}{510}$	$\frac{43867}{798}$	$-\frac{174611}{330}$

Notemos que el hecho de que puedan obtenerse de este modo implica que los números de Bernoulli son racionales. El hecho de que alternen en signo no es casual, sino que es consecuencia de la relación (6.5).

Ahora, la fórmula (6.6):

$$\zeta(2k) = \frac{1}{1^{2k}} + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \dots = (-1)^{k+1} \frac{2^{2k-1} \pi^{2k} B_{2k}}{(2k)!}$$

se particulariza a igualdades explícitas. Por ejemplo, para  $k = 1$  obtenemos una nueva solución al problema de Basilea, pues, al sustituir  $B_2 = 1/6$ , el miembro

derecho se reduce a  $\pi^2/6$ . Pero ahora podemos afirmar mucho más:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots &= \frac{\pi^2}{6} \\ \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots &= \frac{\pi^4}{90} \\ \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \cdots &= \frac{\pi^6}{945}\end{aligned}$$

etc.

Todo el tratamiento que hemos dado de los números de Bernoulli se debe a Euler, pero en realidad, los números de Bernoulli habían sido introducidos por Jacob Bernoulli para encontrar expresiones a las sumas de potencias que generalizaran a las conocidas fórmulas:

$$\begin{aligned}1 + 2 + 3 + \cdots + n &= \frac{n(n+1)}{2}, \\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}.\end{aligned}$$

Euler obtuvo la solución mediante una técnica muy distinta de la que empleó Bernoulli. Definimos  $S_n(k) = \sum_{m=0}^{k-1} m^n$  y, para calcular el valor de esta suma, consideramos la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n(k)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(mx)^n}{n!} = \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(mx)^n}{n!} = \sum_{m=0}^{k-1} e^{mx} = \frac{e^{kx} - 1}{e^x - 1}.$$

La tercera igualdad muestra que la serie converge en todo el plano complejo. La última expresión nos permite relacionar los valores  $S_n(k)$  con los polinomios de Bernoulli:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n(k)}{n!} x^n &= \frac{x}{e^x - 1} \frac{e^{kx} - 1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{n!} x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^{n-1}}{(n-1)!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^n \frac{B_r k^{n+1-r}}{r!(n+1-r)!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{r=0}^n \binom{n+1}{r} B_r k^{n+1-r} \frac{x^n}{n!}.\end{aligned}$$

**Definición 6.20** Los *polinomios de Bernoulli* son los polinomios dados por

$$B_n(x) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} B_r x^{n-r} \equiv (B+x)^n,$$

donde la última expresión es una regla mnemotécnica, según la cual, basta aplicar la regla del binomio a la expresión  $(B+x)$  y luego sustituir cada potencia  $B^r$  por  $B_r$ .

Los primeros polinomios de Bernoulli son:

$$\begin{aligned} B_0(x) &= 1 \\ B_1(x) &= x - \frac{1}{2} \\ B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6} \\ B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \\ B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30} \\ B_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x \\ &\vdots \end{aligned}$$

Por ejemplo,

$$B_3(x) = B_3 + 3B_2x + 3B_1x^2 + x^3 = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x.$$

Una definición alternativa de los polinomios de Bernoulli se basa en que están determinados por el desarrollo en serie de potencias

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n, \quad \text{para } |z| < 2\pi.$$

En efecto, por la definición 6.17 tenemos que

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{B_k}{k!} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} z^n,$$

con lo que el coeficiente de  $z^n$  es  $B_n(x)/n!$ , donde

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k x^{n-k},$$

que es el polinomio de Bernoulli.

También es útil que, para  $n \geq 1$ , los polinomios de Bernoulli satisfacen la relación recurrente

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}.$$

Para probarla basta comparar los desarrollos en serie de la igualdad:

$$z \frac{e^{(x+1)z}}{e^z - 1} - z \frac{e^{xz}}{e^z - 1} = ze^{xz}.$$

En términos de los polinomios de Bernoulli, hemos probado que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n(k)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}(k) - B_{n+1}}{n+1} \frac{x^n}{n!},$$

luego igualando los coeficientes queda que

$$S_n(k) = \frac{B_{n+1}(k) - B_{n+1}}{n+1}.$$

Hemos definido  $S_n(k)$  con la suma hasta  $k-1$  porque encajaba mejor con las cuentas que hemos hecho, pero es más natural sumar las potencias  $n$ -simas hasta  $k^n$ , es decir, que nos interesa más  $S_n(k+1)$ , y así concluimos que

$$1^n + 2^n + \dots + k^n = \frac{B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}}{n+1}.$$

Esta expresión se calcula más fácilmente en la práctica si tenemos en cuenta lo siguiente:

$$\begin{aligned} B_n(x+1) &= \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} B_r (x+1)^{n-r} = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} B_r \sum_{k=0}^{n-r} \binom{n-r}{k} x^k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \sum_{r=0}^{n-k} \frac{B_r}{r!(n-k-r)!} x^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left( \sum_{r=0}^{n-k} \binom{n-k}{r} B_r \right) x^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \tilde{B}_{n-k} x^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \tilde{B}_k x^{n-k} = \tilde{B}_n(x), \end{aligned}$$

donde, para  $k \neq 1$ , la relación (6.8) nos da que  $\tilde{B}_k = B_k$ , mientras que

$$\tilde{B}_1 = B_0 + B_1 = 1 - 1/2 = 1/2.$$

Así, tenemos que  $B_n(x+1)$  es el polinomio que se construye igual que  $B_n(x)$  salvo que tomamos  $B_1 = 1/2$  en lugar de  $B_1 = -1/2$ , y en estos términos,

$$1^n + 2^n + \dots + k^n = \frac{\tilde{B}_{n+1}(k) - B_{n+1}}{n+1}.$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + k &= \frac{2B_1k + k^2}{2} = \frac{k^2 - k}{2} = \frac{k(k+1)}{2}, \\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 &= \frac{3B_2k + 3B_1k^2 + k^3}{3} = \frac{k(k+1)(2k+2)}{6}, \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 &= \frac{4B_3k + 6B_2k^2 + 4B_1k^3 + k^4}{4} = \frac{k^2(k+1)^2}{4}, \\ 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + k^4 &= \frac{5B_5k + 10B_3k^2 + 10B_2k^3 + 5B_1k^4 + k^5}{5} \\ &= \frac{-k + 10k^3 + 15k^4 + 6k^5}{30} \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1)}{30}. \end{aligned}$$

Calculamos ahora los números de Euler, que vienen dados por

$$\frac{1}{\cosh x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_{2k}}{(2k)!} x^{2k}.$$

Para ello basta multiplicar por la serie inversa:

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k}.$$

Así:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_{2k}}{(2k)!} x^{2k} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{E_{2k}}{(2k)!(2n-2k)!} x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} E_{2k} \right) \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \end{aligned}$$

luego, igualando coeficientes, vemos que  $E_0 = 1$  6, para  $n \geq 1$ , se cumple que

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} E_{2k} = 0.$$

Por ejemplo:

$$\begin{array}{ll} E_0 + E_2 = 0 & \text{luego } E_2 = -1 \\ E_0 + 6E_2 + E_4 = 0 & \text{luego } E_4 = 5 \\ E_0 + 15E_2 + 15E_4 + E_6 = 0 & \text{luego } E_6 = -61 \end{array}$$

Es fácil ver entonces que los números de Euler son enteros. Los primeros son:

$$\begin{array}{cccccccc} E_0 & E_2 & E_4 & E_6 & E_8 & E_{10} & E_{12} & E_{14} \\ \hline 1 & -1 & 5 & -61 & 1385 & -50521 & 2702765 & -199360981 \end{array}$$

Ahora la fórmula (6.7) se particulariza a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots &= \frac{\pi}{4} \\ \frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots &= \frac{\pi^3}{32} \\ \frac{1}{1^5} - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \dots &= \frac{5\pi^5}{1536} \end{aligned} \tag{6.9}$$



## Capítulo VII

# Aplicaciones a la distribución de los primos

Los resultados que hemos demostrado hasta aquí (hasta el capítulo IV, de hecho) permiten probar varios hechos relevantes —algunos nada triviales— sobre los números primos.

### 7.1 El postulado de Bertrand

En esta sección demostraremos el teorema siguiente:

**Teorema 7.1 (Postulado de Bertrand)** *Para todo número natural  $n \geq 2$ , existe al menos un primo  $n < p < 2n$ .*

Esto fue conjeturado por Joseph Bertrand en 1845 y demostrado por Chebyshev en 1852. La prueba que veremos aquí se debe a Erdős, y es completamente elemental. Sólo requiere el uso de logaritmos. Empezamos probando lo siguiente:<sup>1</sup>

**Teorema 7.2**  $\prod_{p \leq n} p < 4^n$ .

DEMOSTRACIÓN: Lo probamos por inducción sobre  $n$ . Es claro que se cumple para los primeros valores de  $n$ , así que podemos suponer  $n \geq 3$ . Si  $n$  es par, entonces no es primo, luego

$$\prod_{p \leq n} p = \prod_{p \leq n-1} p < 4^{n-1} < 4^n.$$

Si  $n = 2m + 1$ , entonces, como

$$\binom{2m+1}{m} = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!},$$

---

<sup>1</sup>En lo sucesivo entenderemos que un índice  $p$  en una suma o un producto toma únicamente valores primos.

los primos  $p > m + 1$  no dividen al denominador, luego

$$\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \mid \binom{2m+1}{m} = \frac{1}{2} \left( \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1} \right) \leq \frac{1}{2} (1+1)^{2m+1} = 4^m.$$

Por lo tanto,

$$\prod_{p \leq n} p = \prod_{p \leq m+1} p \prod_{m+1 < p \leq n} p \leq 4^{m+1} 4^m = 4^n. \quad \blacksquare$$

Tomando logaritmos vemos que

$$\sum_{p \leq n} \log p \leq 2n \log 2. \quad (7.1)$$

Ahora hacemos una observación elemental:

$$n! = \prod_p p^{j(n,p)}, \quad (7.2)$$

donde  $j(n,p) = \sum_{m=1}^{\infty} E[n/p^m]$ .

Notemos que tanto la suma como el producto anterior son en realidad finitos, puesto que  $E[n/p^m] = 0$  cuando  $n < p^m$ , luego  $j(n,p) = 0$  siempre que  $p > n$ .

La igualdad es inmediata sin más que tener en cuenta que en  $n!$  hay  $E[n/p]$  múltiplos de  $p$ , de los cuales  $E[n/p^2]$  serán múltiplos de  $p^2$ , etc.

Si

$$N = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \prod_{p \leq 2n} p^{k_p}, \quad (7.3)$$

entonces, por (7.2),

$$k_p = \sum_{m=1}^{\infty} (E[2n/p^m] - 2E[n/p^m]).$$

Cada sumando de esta serie es 0 o 1, según si  $E[2n/p^m]$  es par o impar. En efecto, si  $2n/p^m = 2k + r$ , con  $0 \leq r < 1$ , entonces  $n/p^m = k + r/2$ , luego el sumando es  $2k - 2k = 0$ . Si es  $2n/p^m = 2k + 1 + r$ , entonces  $n/p^m = k + (r+1)/2$  y el sumando es  $2k + 1 - 2k = 1$ . En particular, los sumandos son nulos para  $p^m > 2n$ , luego

$$k_p \leq E \left[ \frac{\log 2n}{\log p} \right]. \quad (7.4)$$

Supongamos que existe un  $n > 2^9 = 512$  para el que no existe ningún primo  $p$  en las condiciones del enunciado. Sea  $N$  el dado por (7.3) y sea  $p \mid N$ , de modo que  $p \leq 2n$ , luego por hipótesis  $p \leq n$ .

Supongamos que  $2n/3 < p \leq n$ , con lo que  $2p \leq 2n < 3p$ , luego también  $p^2 > 4n^2/9 > 2n$ . Entonces

$$k_p = E[2n/p] - 2E[n/p] = 2 - 2 = 0,$$

lo que contradice que  $p \mid N$ . Por lo tanto, tiene que ser  $p \leq 2n/3$ , luego, por la desigualdad (7.1) aplicada a  $E[2n/3]$  tenemos que

$$\sum_{p \mid N} \log p \leq \sum_{p \leq 2n/3} \log p \leq \frac{4}{3}n \log 2.$$

Si se cumple  $k_p \geq 2$ , entonces, por (7.4), tenemos que

$$2 \log p \leq k_p \log p \leq \log 2n,$$

luego  $p \leq \sqrt{2n}$ , luego hay a lo sumo  $\sqrt{2n}$  primos que cumplen  $k_p \geq 2$ . Por lo tanto:

$$\sum_{k_p \geq 2} k_p \log p \leq \sqrt{2n} \log 2n,$$

luego

$$\begin{aligned} \log N &\leq \sum_{k_p=1} \log p + \sum_{k_p \geq 2} k_p \log p \leq \sum_{p \mid N} \log p + \sqrt{2n} \log 2n \\ &\leq \frac{4}{3}n \log n + \sqrt{2n} \log 2n. \end{aligned}$$

Por otra parte,  $N$  es el mayor de los  $2n$  términos del desarrollo de  $(1+1)^{2n}$ , luego  $2^{2n} \leq 2nN$ , luego

$$2n \log 2 \leq \log 2n + \log N \leq \frac{4}{3}n \log 2 + (1 + \sqrt{2n}) \log 2n,$$

de donde

$$2n \log 2 \leq 3(1 + \sqrt{2n}) \log 2n. \quad (7.5)$$

Estamos suponiendo que  $n > 512$ , luego

$$\alpha = \frac{\log(n/512)}{10 \log 2} > 0$$

y además

$$2^{10(1+\alpha)} = 2^{10} 2^{10\alpha} = 2^{10} \frac{n}{2^9} = 2n.$$

Así (7.5) se convierte en  $2^{10(1+\alpha)} \leq 30(2^{5+5\alpha} + 1)(1 + \alpha)$ , con lo que

$$2^{5\alpha} \leq 30 \cdot 2^{-5}(1 + 2^{-5-5\alpha})(1 + \alpha) < (1 - 2^{-5})(1 + 2^{-5})(1 + \alpha) < 1 + \alpha,$$

pero

$$2^{5\alpha} = e^{5\alpha \log 2} > 1 + 5\alpha \log 2 > 1 + \alpha.$$

Tenemos así una contradicción, que prueba el postulado de Bertrand para todo  $n > 512$ . Para primos menores también se cumple, pues basta considerar los primos:

$$2, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 13, \quad 23, \quad 43, \quad 83, \quad 63, \quad 317, \quad 631.$$

Cada uno es menor que el doble del anterior, por lo que entre  $n$  y  $2n$  hay siempre uno de ellos, para todo  $n < 631$ . ■

En particular, si llamamos  $p_n$  al  $n$ -simo primo, se cumple que  $p_{n+1} < 2p_n$ .

Veamos una consecuencia sencilla:

**Teorema 7.3** Los números  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$  no son enteros, para  $n > 1$ .

DEMOSTRACIÓN: Por el postulado de Bertrand, podemos tomar un primo  $n/2 < p < n$ . Esto significa que  $p < n$ , pero  $2p > n$ , por lo que ningún número  $k < n$  es múltiplo de  $p$ , salvo el propio  $p$ . Entonces

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \frac{1}{p} + \frac{a}{b},$$

donde el segundo término es la suma de todos los sumandos distintos de  $1/p$ , y cumple que  $p \nmid b$ . Si el resultado fuera entero, también lo sería  $b/p + a$ , lo que es imposible si  $p \nmid b$ . ■

## 7.2 Orden de crecimiento

Para describir el comportamiento de muchas funciones es útil utilizar la notación siguiente:

Si  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  es cualquier función, usamos la notación  $O(f(x))$  para referirnos a cualquier función  $g : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  tal que existe un  $M > 0$  de modo que  $|g(x)/f(x)| \leq M$  para todo  $x \geq a$ .

En otras palabras, una función es “del orden de  $f(x)$ ” si permanece acotada cuando se divide entre  $f(x)$ . En particular, una función  $O(1)$  es una función acotada.

Por ejemplo, el teorema 4.13 puede enunciarse así:

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + O(1/x). \quad (7.6)$$

e igualmente 4.14 admite este enunciado alternativo:

$$\sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{n \log n} = \log \log x + c + O(1/\log x). \quad (7.7)$$

**Ejemplo 7.4** Analicemos un caso muy simple, como:

$$\sum_{n \leq x} n = \frac{x^2}{2} + O(x).$$

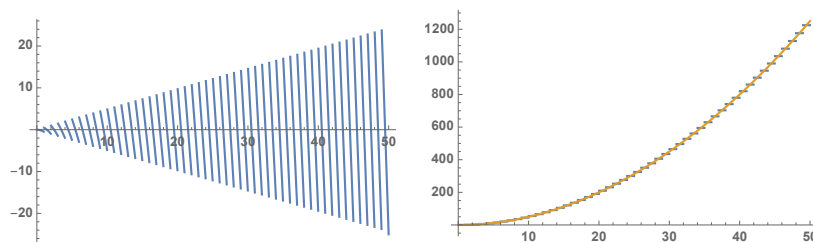
La justificación es muy sencilla, pues

$$\frac{x^2 - x}{2} \leq \sum_{n \leq x} n = \frac{E[x](E[x] + 1)}{2} \leq \frac{x^2 + x}{2},$$

luego

$$\left| \sum_{n \leq x} n - \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{x}{2} = O(x).$$

La gráfica de la izquierda muestra la diferencia  $\sum_{n \leq x} n - \frac{x^2}{2}$ :



Vemos que toma valores arbitrariamente grandes, pero la figura de la izquierda muestra las dos funciones  $\sum_{n \leq x} n$  y  $x^2/2$ , y en ella no se aprecia gran diferencia entre ambas.

Esto se debe a que el error relativo:

$$\frac{\sum_{n \leq x} n}{x^2/2} - 1 = \frac{\sum_{n \leq x} n - x^2/2}{x^2/2} = \frac{O(x)}{x^2/2} = O(1/x)$$

tiende a 0, de modo que si  $x$  es del orden de 1000, el error relativo es del orden de  $0.001 = 0.1\%$ , es decir, que la discrepancia es la milésima parte de la longitud que usamos para representar el 1000 en el eje vertical, y por eso resulta casi inapreciable. En la gráfica hasta  $x = 100$ , las imágenes llegan hasta 5000 y la discrepancia entre las dos gráficas es ya prácticamente indistinguible. ■

En general, las gráficas de dos funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  resultan indistinguibles cuando

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 1,$$

o equivalentemente,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) - f(x)}{f(x)} = 0,$$

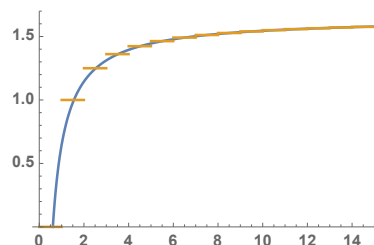
lo cual puede suceder aunque el numerador de la última fracción (el error absoluto) pueda hacerse arbitrariamente grande. Esto se aplica por ejemplo a las funciones relacionadas en (7.6) y (7.7), aunque en este caso no sólo tiende a 0 el error relativo, sino también el absoluto.

**Ejemplo 7.5** Veamos otro caso sencillo, pero no tan trivial como el precedente:

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{x} + O(1/x^2).$$

En este caso tanto el error absoluto como el relativo tienden a 0. Para probarlo observamos que

$$\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2} = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$



y

$$\frac{1}{k+1} = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{k},$$

luego

$$-\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \leq \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{k} - \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2} \leq 0,$$

luego

$$\left| \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2} - \left( \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{k} \right) \right| \leq \frac{1}{k(k+1)}$$

y en general:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^2} - \left( \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{x} \right) \right| &= \left| \sum_{n=1}^{E[x]} \frac{1}{n^2} - \left( \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{E[x]} \right) + \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{E[x]} \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{E[x](E[x]+1)} + \frac{x - E[x]}{xE[x]} \leq \frac{1}{x^2 - x} + \frac{1}{x^2 - x} < \frac{2}{x^2}. \end{aligned}$$

■

### 7.3 Los teoremas de Mertens

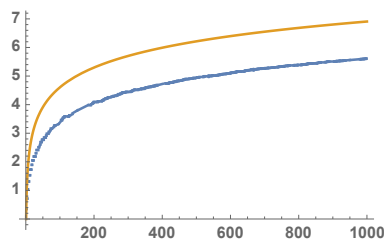
Vamos a probar ahora los teoremas de Mertens de los que hemos hablado en la introducción. El primero es la relación siguiente:

#### Teorema 7.6 (Primer teorema de Mertens)

$$\sum_p \frac{\log p}{p} = \log x + O(1).$$

La gráfica superior en la figura es  $\log x$  y la inferior es

$$\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p}.$$



Aunque no vamos a verlo aquí, puede probarse que nunca se diferencian en más de 2 unidades, de modo que, mientras las funciones son del orden de 5, como en el tramo representado, la diferencia es claramente apreciable, pero cuando las funciones pasan a ser del orden, digamos, de 1 000, la diferencia sigue siendo como máximo de 2, con lo que ya resulta inapreciable.

Todos los resultados que vamos a obtener dependen en última instancia de un estudio de la función

$$K(x) = \log E[x]! = \sum_{n \leq x} \log n. \quad (7.8)$$

Vamos a ver que se puede aproximar (excelentemente, como muestra la figura) por la función  $x \log x - x$ .

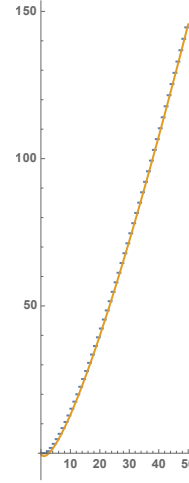
En efecto, partimos de que, según (4.13), sabemos que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \log n + \gamma + R(n),$$

donde el resto cumple  $|R(n)| \leq C/n$ .

Por lo tanto, sumando para  $n$ :

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &= K(x) + E[x]\gamma + \sum_{n \leq x} R(n) \\ &= K(x) + x\gamma - F(x)\gamma + \sum_{n \leq x} R(n), \end{aligned}$$



donde

$$\left| -F(x)\gamma + \sum_{n \leq x} R(n) \right| \leq \gamma + C \left( \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} - \log x \right) + C \log x$$

permanece acotado si lo dividimos entre  $\log x$ , luego

$$\sum_{n \leq x} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = K(x) + x\gamma + O(\log x).$$

Ahora comparamos con la expresión que obtenemos al intercambiar los sumatorios. Notemos que cada término  $1/k$  se repite tantas veces como números  $n$  hay entre  $k$  y  $x$ , de modo que:

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &= \sum_{k \leq x} \sum_{k \leq n \leq x} \frac{1}{k} = \sum_{k \leq x} \frac{1}{k} (E[x] - k) = \sum_{k \leq x} \frac{1}{k} (x - k - F(x)) \\ &= x \sum_{k \leq x} \frac{1}{k} - \sum_{k \leq x} 1 - F(x) \sum_{k \leq x} \frac{1}{k} = x \sum_{k \leq x} \frac{1}{k} - E[x] - F[x] \left( \sum_{k \leq x} \frac{1}{k} - \log x \right) + F[x] \log x \\ &= x \sum_{k \leq x} \frac{1}{k} - x + F[x] + O(\log x) = x \sum_{k \leq x} \frac{1}{k} - x + O(\log x) \\ &= x(\log x + \gamma + R(x)) - x + O(\log x). \end{aligned}$$

Combinando las dos estimaciones queda:

$$K(x) + x\gamma + O(\log x) = x \log x + x\gamma + xR(x) - x + O(\log x),$$

de donde

$$K(x) = x \log x + xO(1/x) - x + O(\log x).$$

Como  $xO(1/x)$  es una función acotada, llegamos a la conclusión que perseguíamos:

$$K(x) = x \log x - x + O(\log x).$$

En realidad nos bastará con la relación siguiente, más débil:

$$K(x) = x \log x + O(x). \quad (7.9)$$

Para relacionar la función  $K(x)$  con la distribución de los números primos introducimos la función siguiente:

**Definición 7.7** La *función de von Mangoldt* es la función definida sobre los números naturales no nulos mediante

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k, \text{ con } p \text{ primo y } k \geq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Aunque la función de von Mangoldt representa un papel central en el estudio de los números primos, en este contexto nos va a interesar esencialmente porque satisface la relación siguiente:

$$\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d). \quad (7.10)$$

En efecto, si  $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ , entonces

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = e_1 \log p_1 + \cdots + e_r \log p_r = \log n. \quad \blacksquare$$

Esto nos lleva a la expresión siguiente para  $K(x)$ :

$$K(x) = \sum_{n \leq x} \log n = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{dd' \leq x} \Lambda(d) = \sum_{d \leq x} \sum_{d' \leq x/d} \Lambda(d).$$

Equivalentemente:

$$K(x) = \sum_{d \leq x} \Lambda(d) E[x/d]. \quad (7.11)$$

Por consiguiente:

$$K(x) - 2K(x/2) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) (E[x/n] - 2E[x/2n]),$$

pero

$$E[x/n] - 2E[x/2n] \geq \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq n \leq x, \\ 1 & \text{si } x/2 < n \leq x, \end{cases}$$

luego

$$K(x) - 2K(x/2) \geq \sum_{x/2 < n \leq x} \Lambda(n) = \psi(x) - \psi(x/2),$$

donde llamamos<sup>2</sup>

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n).$$

Pero, por (7.9),

$$K(x) - 2K(x/2) = x \log x - x \log \frac{x}{2} + O(x) = x \log 2 + O(x) = O(x).$$

Por lo tanto, existe una constante  $C$  tal que, para todo  $x \geq 1$ ,

$$\psi(x) - \psi(x/2) \leq Cx.$$

Aplicando esto a  $x/2^n$  obtenemos que

$$\psi(x/2^n) - \psi(x/2^{n+1}) \leq Cx/2^n$$

y, sumando sobre  $n$ , teniendo en cuenta que  $\psi(x/2^n) = 0$  cuando  $n$  es suficientemente grande, queda que

$$\psi(x) \leq Cx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2Cx,$$

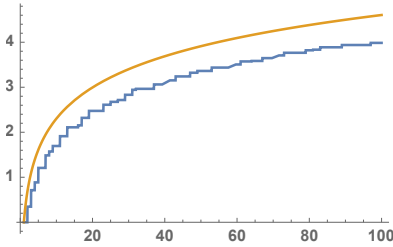
luego  $\psi(x) = O(x)$ . Usando de nuevo (7.11), tenemos que

$$\begin{aligned} K(x) &= \sum_{n \leq x} \Lambda(n)E[x/n] = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)(x/n - F[x/n]) = \\ &= x \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} + \sum_{n \leq x} \Lambda(n)(-F[x/n]) = x \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} + O(\psi(x)) \end{aligned}$$

y la última función es también  $O(x)$ . Por (7.9) concluimos:

$$\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \log x + O(1). \quad (7.12)$$

La figura muestra la similitud que expresa esta fórmula entre una función que depende de la distribución de los números primos y la simple función  $\log x$ , que es independiente de ella.



De hecho, la igualdad que acabamos de obtener contiene toda la información sobre la distribución de los números primos que necesitamos para demostrar los teoremas de Mertens. El primero se obtiene sin más que eliminar de ella términos acotados:

$$\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \sum_{p^n \leq x} \frac{\log p}{p^n} = \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} + \sum_{p^{n+1} \leq x} \frac{\log p}{p^{n+1}}$$

<sup>2</sup>La función  $\psi(x)$  es conocida como *segunda función de Chebishev* y, al igual que la función de von Mangoldt, representa un papel central en el estudio de la distribución de los números primos, pero aquí la vamos a usar colateralmente.

donde

$$\sum_{p^{n+1} \leq x} \frac{\log p}{p^{n+1}} \leq \sum_{p \leq x} \log p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^{n+1}} = \sum_{p \leq x} \log p \frac{1}{p^2 - p} \leq \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2},$$

y en el ejemplo 4.7 hemos visto que la última serie es convergente. Así pues:

$$\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} + O(1).$$

Al combinar esto con (7.12) obtenemos el primer teorema de Mertens. ■

Ahora usaremos este teorema para demostrar:

**Teorema 7.8 (Segundo teorema de Mertens)** *Existe una constante  $M$  tal que*

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log \log x + M + O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

La constante  $M = 0.2614972128\dots$  se conoce como *constante de Mertens*.

La figura muestra las funciones

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p}$$

y  $M + \log \log x$ . El tercer teorema de Mertens (que no vamos a probar aquí), aunque admite otras formulaciones, afirma esencialmente que

$$M = \gamma + \sum_p \left( \log \left( 1 - \frac{1}{p} \right) + \frac{1}{p} \right).$$

DEMOSTRACIÓN: Partimos de que, según el teorema que acabamos de probar,

$$S(x) = \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} = \log x + R(x),$$

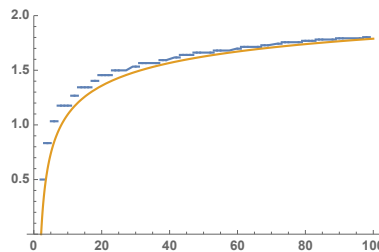
donde el resto  $R(x)$  está acotado. Pongamos que  $|R(x)| \leq K$ .

Ahora observamos que

$$S(n) - S(n-1) = \begin{cases} \frac{\log n}{n} & \text{si } n \text{ es primo,} \\ 0 & \text{si } n \text{ no es primo,} \end{cases}$$

luego

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} &= \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{\log n} (S(n) - S(n-1)) = \\ &= \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{\log n} \log \frac{n}{n-1} + \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{\log n} (R(n) - R(n-1)). \end{aligned} \quad (7.13)$$



Analizamos las dos sumas por separado:

$$\begin{aligned} & \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{\log n} (R(n) - R(n-1)) = \\ & \frac{1}{\log 2} (R(2) - R(1)) + \frac{1}{\log 3} (R(3) - R(2)) + \cdots + \frac{1}{\log E[x]} (R(E[x]) - R(E[x]-1)) \\ & = \frac{R(E[x])}{\log E[x]} - \frac{R(1)}{\log 2} + \sum_{2 \leq n \leq x-1} R(n) \left( \frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)} \right). \end{aligned}$$

La suma está mayorada por

$$K \sum_{2 \leq n \leq x-1} \left( \frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)} \right) = K \left( \frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log(E[x]-1)+1} \right),$$

luego converge a

$$c_1 = \sum_{n=2}^{\infty} R(n) \left( \frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)} \right).$$

Además,

$$\begin{aligned} \sum_{2 \leq n \leq x-1} R(n) \left( \frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)} \right) &= c_1 - \sum_{n=E[x]+1}^{\infty} R(n) \left( \frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)} \right) \\ &= c_1 + O(1/\log x), \end{aligned}$$

pues

$$\left| \sum_{n=E[x]+1}^{\infty} R(n) \left( \frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)} \right) \right| \leq \frac{K}{\log(E[x]+1)} \leq \frac{K}{\log x}.$$

Por lo tanto (teniendo en cuenta que  $R(1) = 0$ ):

$$\sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{\log n} (R(n) - R(n-1)) = c_1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right),$$

donde hemos usado que

$$\frac{|R(E[x])|}{\log E[x]} \leq \frac{K \log x}{\log x \log E[x]} \leq \frac{2K}{\log x},$$

pues  $\log x \leq \log(x-1)^2 \leq 2 \log E[x]$ , para  $x \geq 3$ .

Para tratar la suma de la izquierda de (7.13) hacemos

$$\log \frac{n}{n-1} = \log\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = \frac{1}{n} + \tilde{R}(n),$$

donde

$$\tilde{R}(n) = \log\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} \leq \frac{1}{n^2} \frac{n}{n-1} \leq \frac{2}{n^2}.$$

Así

$$\begin{aligned} \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{\log n} \log \frac{n}{n-1} &= \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{n \log n} + \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{\tilde{R}(n)}{\log n} = \\ \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{n \log n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\tilde{R}(n)}{\log n} - \sum_{n=E[x]+1}^{\infty} \frac{\tilde{R}(n)}{\log n} &= \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{n \log n} + c_2 + O(1/x), \end{aligned}$$

pues

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=E[x]+1}^{\infty} \frac{\tilde{R}(n)}{\log n} \right| &\leq \sum_{n=E[x]+1}^{\infty} \frac{2}{n^2 \log n} \leq \sum_{n=E[x]+1}^{\infty} \frac{2}{n(n-1)} \\ 2 \sum_{n=E[x]+1}^{\infty} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) &= \frac{2}{E[x]} \leq \frac{2}{x} \frac{x}{E[x]} \leq \frac{4}{x}. \end{aligned}$$

Sumando las dos estimaciones obtenemos que

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{n \log n} + c_3 + O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

Combinando esto con (7.7) obtenemos el segundo teorema de Mertens. ■

## 7.4 Convolución de funciones aritméticas

En esta sección probaremos el teorema de inversión de Möbius, un resultado elemental, pero muy útil en contextos muy diversos. Conviene introducir el concepto de “función aritmética”:

**Definición 7.9** Una *función aritmética* es una función  $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ .

Una función aritmética  $f$  es *multiplicativa* si no es idénticamente nula y además, si  $m$  y  $n$  son números naturales no nulos primos entre sí, se cumple que

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

Diremos que  $f$  es *completamente multiplicativa* si no es idénticamente nula y cumple esta relación para todo par de naturales  $m$  y  $n$  (no nulos).

Observemos que toda función multiplicativa cumple  $f(1) = 1$ , pues

$$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)f(1),$$

y no puede ser  $f(1) = 0$ , ya que entonces  $f(n) = f(1n) = f(1)f(n) = 0$  y  $f$  sería idénticamente nula.

La *suma* y el *producto de convolución* de dos funciones aritméticas  $f$  y  $g$  se definen como las función dadas por

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n), \quad (f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d).$$

Una comprobación rutinaria muestra que las funciones aritméticas, con estas operaciones, forman un anillo conmutativo y unitario. El elemento neutro para el producto es la función

$$1(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

No hay que confundir esta función con la función constante  $c_1$  dada por  $c_1(n) = 1$  para todo  $n$ .

### Ejemplos

1. Las funciones constantes  $c_k$ , al igual que 1 o la función  $N$  dada por

$$N(n) = n$$

son ejemplos de funciones aritméticas completamente multiplicativas.

2. La relación (7.10) puede expresarse en términos del producto de convolución:

$$\log = \Lambda * c_1.$$

3. Si llamamos  $d(n)$  al número de divisores (positivos) de  $n$ , se cumple que

$$d = c_1 * c_1.$$

En efecto:

$$(1 * 1)(n) = \sum_{d|n} c_1(d)c_1(n/d) = \sum_{d|n} 1 = d(n).$$

4. Otra función aritmética notable es la *función de Euler*, que a cada número natural  $n$  le asigna el número  $\phi(n)$  de números menores o iguales que  $n$  primos con  $n$ . Se cumple que

$$N = \phi * c_1.$$

En efecto, llamamos  $A_d = \{m \mid 1 \leq m \leq n, (m, n) = d\}$  y observamos que  $(m, n) = d$  si y sólo si  $(m/d, n/d) = 1$ , luego  $A_d$  tiene  $\phi(n/d)$  elementos y, como

$$\{1, \dots, n\} = \bigcup_{d|n} A_d$$

y la unión es disjunta, resulta que

$$N(n) = n = \sum_{d|n} \phi(n/d) = (\phi * c_1)(n).$$

5. La *función de Liouville* es la función completamente multiplicativa  $\lambda$  que cumple  $\lambda(p) = -1$  para todo primo  $p$ . Se cumple que

$$\lambda * c_1 = p^2,$$

donde

$$p^2(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es un cuadrado,} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

En efecto, como las tres funciones son multiplicativas, basta probar la igualdad sobre potencias de primo:

$$(\lambda * c_1)(p^n) = \sum_{k=0}^n \lambda(p^k) = \sum_{k=0}^n (-1)^k = p^2(p^n). \quad \blacksquare$$

Es fácil determinar las funciones aritméticas que tienen inversa respecto del producto de convolución:

**Teorema 7.10** *Sea  $f$  una función aritmética.*

1. *Existe una función aritmética<sup>3</sup>  $f^{-1}$  tal que  $f * f^{-1} = 1$  si y sólo si  $f(1) \neq 0$ .*
2. *En tal caso, si  $f$  es multiplicativa,  $f^{-1}$  también lo es.*

DEMOSTRACIÓN: 1) Si existe  $f^{-1}$  entonces

$$f(1)f^{-1}(1) = (f * f^{-1})(1) = 1(1) = 1,$$

luego  $f(1) \neq 0$ . Recíprocamente, si  $f(1) \neq 0$  vamos a definir inductivamente  $f^{-1}$ . En primer lugar  $f^{-1}(1) = 1/f(1)$ , con lo que el razonamiento anterior garantiza que  $f(1)f^{-1}(1) = 1(1)$ .

Para definir  $f^{-1}(n)$  con  $n > 1$  observamos que queremos que se cumpla

$$\sum_{d|n} f(d)f^{-1}(n/d) = 0,$$

luego la definición ha de ser

$$f^{-1}(n) = \frac{1}{f(1)} \sum_{1 < d|n} f(d)f^{-1}(n/d).$$

Claramente, la función  $f^{-1}$  así definida cumple  $f * f^{-1} = 1$ .

2) Supongamos que  $f$  es multiplicativa pero  $f^{-1}$  no lo es. Entonces existen números  $m$  y  $n$  primos entre sí tales que  $f^{-1}(mn) \neq f^{-1}(m)f^{-1}(n)$ . Podemos tomarlos de modo que  $mn$  sea el mínimo posible. Como la función  $f * f^{-1} = 1$  es multiplicativa, tenemos que  $(f * f^{-1})(mn) = (f * f^{-1})(m)(f * f^{-1})(n)$ , o sea,

$$\sum_{d_1|m} \sum_{d_2|n} f(d_1 d_2) f^{-1}(mn/d_1 d_2) = \sum_{d_1|m} f(d_1) f^{-1}(m/d_1) \sum_{d_2|n} f(d_2) f^{-1}(n/d_2).$$

<sup>3</sup>Es claro que si existe la inversa  $f^{-1}$ , entonces es única, pues si  $f * g = f * h = 1$ , entonces  $g = g * 1 = g * f * h = 1 * h = h$ .

Ahora bien, por la minimalidad de  $mn$  cada sumando de la izquierda es igual a un sumando de la derecha y viceversa, excepto los correspondientes a  $d_1 = d_2 = 1$ . Pero si cancelamos los sumandos iguales queda simplemente  $f^{-1}(mn) = f^{-1}(m)f^{-1}(n)$ , contradicción. ■

Otro hecho básico sobre funciones multiplicativas es el siguiente:

**Teorema 7.11** *El producto de funciones aritméticas multiplicativas es de nuevo una función multiplicativa.*

DEMOSTRACIÓN: Si  $f$  y  $g$  son multiplicativas entonces

$$(f * g)(1) = f(1)g(1) = 1 \neq 0,$$

luego  $f * g$  no es nula. Si  $m$  y  $n$  son números naturales primos entre sí,

$$\begin{aligned} (f * g)(mn) &= \sum_{d|mn} f(d)g(mn/d) = \sum_{d_1|m} \sum_{d_2|n} f(d_1d_2)g(mn/d_1d_2) \\ &= \sum_{d_1|m} \sum_{d_2|n} f(d_1)g(m/d_1)f(d_2)g(n/d_2) = (f * g)(m)(f * g)(n). \end{aligned}$$

Por lo tanto  $f * g$  es multiplicativa. ■

Sin embargo, no es cierto que el producto de funciones completamente multiplicativas sea en general completamente multiplicativo. Un ejemplo es la función divisor  $d = c_1 * c_1$ .

**La función de Möbius** Introducimos ahora una de las funciones aritméticas más interesantes:

**Definición 7.12** La *función de Möbius* es la función multiplicativa dada por

$$\mu(p^n) = \begin{cases} -1 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

Notemos que para definir una función multiplicativa  $f$  basta definirla sobre las potencias de primo, pues tiene que ser  $f(1) = 1$  y, para números mayores que 1 tiene que ser

$$f(p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}) = f(p_1^{e_1}) \cdots f(p_r^{e_r}).$$

De este modo,  $\mu(n) = 0$  salvo que  $n$  sea libre de cuadrados (incluyendo  $n = 1$ ), en cuyo caso  $\mu(n)$  es  $\pm 1$  según si es divisible entre un número par o impar de primos.

Puede parecer muy artificial, pero su interés radica en el teorema siguiente:

**Teorema 7.13** *Sea  $f$  una función aritmética completamente multiplicativa, entonces  $f^{-1}(n) = \mu(n)f(n)$ .*

DEMOSTRACIÓN: Hemos de probar que  $\mu f * f = 1$ , donde el producto  $\mu f$  no es el producto de convolución, sino el producto “ordinario” de dos funciones aritméticas dado por  $(uv)(n) = u(n)v(n)$ .

La función  $\mu f * f$  es multiplicativa por ser un producto de funciones multiplicativas, luego basta probar que  $(\mu f * f)(p^n) = 0$ , para todo primo  $p$  y todo  $n \geq 1$ . Ahora bien, como los divisores de  $p^n$  son los  $p^k$  para  $k \leq n$ , tenemos

$$\begin{aligned} (\mu f * f)(p^n) &= \sum_{k=0}^n \mu(p^k) f(p^k) f(p^{n-k}) = \sum_{k=0}^n \mu(p^k) f(p^n) \\ &= (\mu(1) + \mu(p)) f(p^n) = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Aplicando el teorema anterior a  $f = c_1$  concluimos que  $\mu = c_1^{-1}$ . Este hecho admite un enunciado clásico equivalente:

**Teorema 7.14 (Fórmula de inversión de Möbius)** *Si  $f$  y  $g$  son funciones aritméticas que cumplen  $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$ , entonces*

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \mu(n/d) = \sum_{d|n} g(n/d) \mu(d).$$

Basta observar que la hipótesis es  $g = f * c_1$  y la tesis es  $f = g * \mu = g * c_1^{-1}$ .

**Ejemplo 7.15**

$$\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \log(n/d),$$

Basta aplicar la fórmula de inversión a la relación  $\log = \Lambda * c_1$  (7.10).  $\blacksquare$

**Ejercicio:** Probar que  $\lambda^{-1} = |\mu|$ .

Vamos a necesitar una versión un poco más general de la fórmula de inversión que requiere generalizar la definición del producto de convolución:

**Definición 7.16** Si  $f$  es una función aritmética y  $F : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}$  es una función tal que  $F|_{]0,1[} = 0$ , definimos

$$(f \circ F)(x) = \sum_{n \leq x} f(n) F(x/n).$$

Observemos que  $f \circ F : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}$  también se anula en  $]0, 1[$ . Se cumple una propiedad asociativa mixta:

$$f \circ (g \circ F) = (f * g) \circ F,$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones aritméticas. En efecto:

$$\begin{aligned} (f \circ (g \circ F))(x) &= \sum_{n \leq x} f(n) \sum_{m \leq x/n} g(m) F(x/mn) \\ &= \sum_{mn \leq x} f(n) g(m) F(x/mn) = \sum_{k \leq x} \sum_{d|k} f(d) g(k/d) F(x/k) \\ &= \sum_{k \leq x} (f * g)(k) F(x/k) = ((f * g) \circ F)(x). \end{aligned}$$

Por otra parte, es claro que  $1 \circ F = F$ , lo que nos da este teorema de inversión:

**Teorema 7.17 (Fórmula de inversión generalizada)** *Si  $f$  es una función aritmética con inversa  $f^{-1}$ , las funciones  $F, G : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}$  se anulan en el intervalo  $]0, 1[$  y*

$$G(x) = \sum_{n \leq x} f(n)F(x/n),$$

entonces

$$F(x) = \sum_{n \leq x} f^{-1}(n)G(x/n).$$

DEMOSTRACIÓN: La hipótesis es que  $G = f \circ F$ , luego

$$f^{-1} \circ G = f^{-1} \circ (f \circ F) = (f^{-1} * f) \circ G = 1 \circ F = F. \quad \blacksquare$$

En particular:

**Teorema 7.18** *Si  $f$  es una función aritmética completamente multiplicativa, las funciones  $F, G : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}$  se anulan en  $]0, 1[$  y*

$$G(x) = \sum_{n \leq x} f(n)F(x/n),$$

entonces

$$F(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)f(n)G(x/n).$$

## 7.5 Caracteres de Dirichlet

Los teoremas de Mertens demuestran en particular que existen infinitos primos. Obviamente, esto se prueba de forma mucho más sencilla con el tradicional argumento de Euclides, pero la ventaja del argumento de Mertens es que es generalizable y nos permitirá demostrar en la sección siguiente que cada progresión aritmética  $mn + k$ , para  $n = 1, 2, 3, \dots$  con  $(m, k) = 1$  contiene infinitos primos.

Al tratar de aplicar las técnicas que hemos visto al estudio de los números de la forma  $mn + k$  nos encontramos con el inconveniente crucial de que el producto de números de esta forma no tiene por qué ser de esta forma, lo que en principio arruina cualquier intento de abordar el problema. Sin embargo, la clave está en no considerar una progresión aritmética aislada, sino tratar a la vez con todas las progresiones aritméticas  $mn + k$  para un  $m$  fijo, pero con  $k$  arbitrario.

Recordemos [ITal 3.2] que  $\mathbb{Z}_m$  es el anillo de las clases de restos módulo  $m$ , cuyos elementos son las  $m$  clases de congruencia

$$\bar{k} = [k]_m = \{mn + k \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

para  $k = 0, \dots, m - 1$ , de modo que lo que queremos probar es que cada clase  $[k]_m$  con  $(m, k) = 1$  contiene infinitos primos. Sabemos que  $\mathbb{Z}_m$  es un anillo cuyo grupo de unidades  $U_m$  está formado precisamente [ITAl 3.17] por las clases  $[k]_m$  con  $(k, m) = 1$ .

En estos términos, lo que queremos probar es que cada clase del grupo  $U_m$  contiene infinitos primos. Es obvio que cada clase de  $\mathbb{Z}_m$  que no sea una unidad contiene a lo sumo un primo.

Por ejemplo, si  $m = 10$  tenemos que

$$\mathbb{Z}_{10} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}\}, \quad U_{10} = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{7}, \bar{9}\}.$$

Los elementos de  $\bar{0}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}$  son múltiplos de 2, luego ninguno es primo, mientras que los elementos de  $\bar{2}, \bar{5}$  son todos múltiplos de 2 y 5, respectivamente, luego no contienen más primos que éstos. En cambio, en las otras clases sí que hay muchos primos:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1, & \mathbf{11}, & 21, & \mathbf{31}, & \mathbf{41}, & 51, & \mathbf{61}, & \mathbf{71}, & 81, & 91, & \dots \\ \mathbf{3}, & \mathbf{13}, & \mathbf{23}, & 33, & \mathbf{43}, & \mathbf{53}, & 63, & \mathbf{73}, & \mathbf{83}, & 93, & \dots \\ \mathbf{7}, & \mathbf{17}, & 27, & \mathbf{37}, & \mathbf{47}, & 57, & \mathbf{67}, & 77, & 87, & \mathbf{97}, & \dots \\ 9, & \mathbf{19}, & \mathbf{29}, & 39, & 49, & \mathbf{59}, & 69, & \mathbf{79}, & \mathbf{89}, & 99, & \dots \end{array}$$

Ahora vamos a introducir el concepto que nos permitirá trabajar conjuntamente con números de todas las clases de  $U_m$  y a la vez aislar una clase en el momento oportuno para probar que ella en particular contiene infinitos primos. Se trata de los caracteres de Dirichlet:

**Definición 7.19** Si  $m > 1$  es un número natural, un *carácter de Dirichlet módulo  $m$*  es una aplicación  $\chi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  no idénticamente nula que cumpla las propiedades siguientes:

1. Si  $k \equiv l \pmod{m}$ , entonces  $\chi(k) = \chi(l)$ .
2. Si  $(k, m) \neq 1$  entonces  $\chi(k) = 0$ .
3.  $\chi(kl) = \chi(k)\chi(l)$ .

La primera condición significa que cada carácter  $\chi$  determina (y está determinado por) una función  $\bar{\chi} : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{C}$ , la segunda condición dice que esta función se anula fuera de  $U_m$ , mientras que la tercera dice que  $\bar{\chi}([k][l]) = \bar{\chi}([k])\bar{\chi}([l])$ .

Recíprocamente, es claro que toda aplicación  $\tilde{\chi} : U_m \rightarrow \mathbb{C}$  no idénticamente nula que cumpla  $\tilde{\chi}([k][l]) = \tilde{\chi}([k])\tilde{\chi}([l])$  se extiende a  $\mathbb{Z}_m$  tomando el valor 0 en las clases que no son unidades y a su vez esta extensión induce un carácter modular dado por  $\chi(k) = \tilde{\chi}([k])$ .

En la práctica no distinguiremos entre  $\chi$  y  $\tilde{\chi}$ , es decir, escribiremos  $\chi(k) = \zeta$  o  $\chi([k]) = \zeta$  indistintamente. Más concretamente, para estudiar los caracteres de Dirichlet desde un punto de vista puramente algebraico será preferible considerarlos como funciones  $\chi : U_m \rightarrow \mathbb{C}$ , mientras que para aplicarlos a la prueba del teorema de Dirichlet nos interesará verlos como funciones  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , pero ambos puntos de vista son equivalentes.

Notemos que todo carácter cumple  $\chi(1) \neq 0$ , o de lo contrario  $\chi$  sería idénticamente nulo, y la relación  $\chi(1) = \chi(1)\chi(1)$  implica entonces que  $\chi(1) = 1$ .

A su vez, esto implica que  $\chi$  no se anula en ninguna clase de  $c \in U_m$ , pues tiene que cumplirse que  $\chi(c)\chi(c^{-1}) = \chi(1) = 1$ . Más aún, se cumple que  $\chi(c^{-1}) = \chi(c)^{-1}$ .

Además, [ITA1 3.22] se cumple que  $c^{\phi(m)} = 1$ , luego  $\chi(c)^{\phi(m)} = 1$ , lo que significa que los valores que toma  $\chi$  sobre  $U_m$  no son números complejos cualesquiera, sino que son necesariamente raíces de la unidad de orden  $\phi(m)$ . En particular  $|\chi(c)| = 1$ , luego  $\chi(c)^{-1} = \overline{\chi(c)}$ .

Podemos definir el *carácter conjugado* de un carácter de Dirichlet  $\chi$  como el dado por

$$\bar{\chi}(k) = \overline{\chi(k)}.$$

El *carácter principal*  $\chi_0$  módulo  $m$  es el carácter que, sobre  $U_m$ , es constante igual a 1, pero que sobre  $\mathbb{Z}$  viene dado por

$$\chi_0(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } (k, m) = 1, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Es inmediato comprobar que los caracteres de Dirichlet módulo  $m$  forman un grupo con el producto dado por  $(\chi\psi)(k) = \chi(k)\psi(k)$ , de modo que el elemento neutro es el carácter principal y el inverso de un carácter  $\chi$  es su conjugado  $\bar{\chi}$ .

Un carácter  $\chi$  se dice *real* si  $\chi = \bar{\chi}$ , y en caso contrario es *complejo*. Como los valores no nulos que toma un carácter tienen que ser raíces de la unidad, los caracteres reales son los que sólo toman los valores 0 y  $\pm 1$ .

**Ejemplo 7.20** Hay exactamente cuatro caracteres de Dirichlet módulo 10, y son los dados por la tabla siguiente:

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\chi_0$	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1
$\chi_1$	0	1	0	$i$	0	0	0	$-i$	0	$-1$
$\chi_2$	0	1	0	$-1$	0	0	0	$-1$	0	1
$\chi_3$	0	1	0	$-i$	0	0	0	$i$	0	$-1$

En efecto, basta observar que en  $U_{10}$  se cumple que

$$\bar{3}^2 = \bar{9}, \quad \bar{3}^3 = \bar{7}, \quad \bar{3}^4 = \bar{1}.$$

La última igualdad obliga a que  $\chi(\bar{3})^4 = 1$ , y sólo hay cuatro números complejos que cumplen esto, a saber,  $1, i, -1, -i$ , luego la columna del  $\bar{3}$  en la tabla anterior sólo puede contener estos valores, y cada uno de ellos determina el valor que debe tomar  $\chi$  sobre las demás clases:  $\chi(\bar{9}) = \chi(\bar{3})^2$ ,  $\chi(\bar{7}) = \chi(\bar{3})^3$ . ■

El único resultado sobre caracteres que vamos a necesitar y que requiere una cierta base algebraica es el siguiente:

**Teorema 7.21** *Existen exactamente  $\phi(m)$  caracteres de Dirichlet módulo  $m$ .*

DEMOSTRACIÓN: Vamos a probar de paso un hecho adicional que vamos a necesitar, y es que si  $\bar{k} \neq \bar{1}$  es una clase de  $U_m$ , existe al menos un carácter  $\psi$  tal que  $\psi(\bar{k}) \neq 1$ .

Lo probamos en primer lugar si  $m = p^n$ , donde  $p$  es un primo impar. Por claridad vamos a considerar un ejemplo concreto, pero el argumento es general. Tomemos  $m = 9$ , con lo que  $\phi(m) = 6$ . El teorema [ITAl 3.31] nos garantiza que existe una raíz primitiva de la unidad módulo  $m$ . En nuestro ejemplo sirve  $\bar{2}$ . Entonces, como  $\bar{2}^6 = \bar{1}$ , todo carácter módulo 9 tiene que cumplir que  $\chi(\bar{2})^6 = \chi(\bar{2}^6) = \chi(\bar{1}) = 1$ , pero sólo hay 6 números complejos que cumplen esto. Si llamamos  $\zeta = e^{2\pi i/6}$ , las únicas posibilidades son  $1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, \zeta^5$ , y es inmediato comprobar que si definimos  $\chi_k(\bar{2}) = \zeta^k$  y, por consiguiente,  $\chi_k(\bar{2}^j) = \zeta^{kj}$  obtenemos 6 caracteres distintos y no hay más posibilidades. En suma, los caracteres módulo 9 son los dados por la tabla siguiente:

$j$	0	1	2	3	4	5	$j$	0	1	2	3	4	5
$\bar{2}^j$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{5}$	$\bar{2}^j$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{5}$
$\chi_0(\bar{2}^j)$	1	1	1	1	1	1	$\chi_0(\bar{2}^j)$	1	1	1	1	1	1
$\chi_1(\bar{2}^j)$	1	$\zeta$	$\zeta^2$	$\zeta^3$	$\zeta^4$	$\zeta^5$	$\chi_1(\bar{2}^j)$	1	$\zeta$	$\zeta^2$	-1	$-\zeta^2$	$-\zeta$
$\chi_2(\bar{2}^j)$	1	$\zeta^2$	$\zeta^4$	1	$\zeta^2$	$\zeta^4$	$\chi_2(\bar{2}^j)$	1	$\zeta^2$	$-\zeta^2$	1	$\zeta^2$	$-\zeta^2$
$\chi_3(\bar{2}^j)$	1	$\zeta^3$	1	$\zeta^3$	1	$\zeta^3$	$\chi_3(\bar{2}^j)$	1	-1	1	-1	1	-1
$\chi_4(\bar{2}^j)$	1	$\zeta^4$	$\zeta^2$	1	$\zeta^4$	$\zeta^2$	$\chi_4(\bar{2}^j)$	1	$-\zeta^2$	$\zeta^2$	1	$-\zeta^2$	$\zeta^2$
$\chi_5(\bar{2}^j)$	1	$\zeta^5$	$\zeta^4$	$\zeta^3$	$\zeta^2$	$\zeta$	$\chi_5(\bar{2}^j)$	1	$-\zeta$	$-\zeta^2$	-1	$\zeta^2$	$\zeta$

Notemos que el carácter  $\chi_1$  sólo toma el valor 1 sobre la clase  $\bar{1}$ , luego se cumple la propiedad adicional que queremos demostrar. El mismo razonamiento vale para cualquier módulo  $m = p^n$  con  $p$  impar.

Si  $m = 2^n$  la situación es ligeramente distinta. Si  $n = 1$  tenemos que  $U_2$  es trivial, luego sólo tiene el carácter dado por  $\chi(\bar{1}) = 1$ . Si  $n = 2$  entonces  $U_4 = \{\bar{1}, -\bar{1}\}$ , y es fácil ver que sólo hay dos caracteres, según si  $\chi(-\bar{1}) = \pm 1$  (y en particular hay un carácter que no vale 1 en  $-\bar{1}$ ). Supongamos, pues, que  $n \geq 3$ .

Tomamos como ejemplo el caso  $n = 4$ , pero, al igual que antes, el razonamiento es válido en general. Tenemos que  $\phi(16) = 8$ , y el teorema [ITAl 3.32] nos asegura que  $\bar{5}$  tiene orden 4 en  $U_{16}$  y que toda clase de  $U_{16}$  se expresa de forma única como  $\pm \bar{5}^j$ , con  $j = 0, \dots, 3$ . Entonces  $\chi(\bar{5})^4 = 1$ , luego  $\chi(\bar{5})$  tiene que ser una de las raíces cuartas de la unidad  $\pm 1, \pm i$  (en general tomaríamos, como antes,  $\zeta = e^{2\pi i/\phi(m)}$ , pero en este caso es  $\zeta = i$ ). Entonces todo carácter debe cumplir que  $\chi(\bar{5}) = i^j$ , para cierto  $j = 0, \dots, 3$ , pero todavía tenemos la opción de fijar arbitrariamente  $\chi(-\bar{1})$  (que tiene que ser  $\pm 1$ , pues  $\chi(-\bar{1})^2 = 1$ ). Esto hace que, para cada  $j = 0, 1, 2, 3$ , haya dos caracteres posibles  $\chi_j^+$  y  $\chi_j^-$ , determinados por

$$\chi_j^+(\bar{5}) = i^j, \quad \chi_j^+(-\bar{1}) = 1, \quad \chi_j^-(\bar{5}) = i^j, \quad \chi_j^-(-\bar{1}) = -1.$$

Es fácil ver que estas condiciones definen ciertamente 8 caracteres, que son

concretamente los dados por la tabla siguiente:

$\bar{k}$	$\bar{3}$	$\bar{7}$	$\bar{11}$	$\bar{15}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{9}$	$\bar{13}$
	$-\bar{5}^3$	$-\bar{5}^2$	$-\bar{5}$	$-\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{5}^2$	$\bar{5}^3$
$\chi_0^+(\bar{k})$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_0^-(\bar{k})$	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
$\chi_1^+(\bar{k})$	$i^3$	$i^2$	$i$	1	1	$i$	$i^2$	$i^3$
$\chi_1^-(\bar{k})$	$-i^3$	$-i^2$	$-i$	-1	1	$i$	$i^2$	$i^3$
$\chi_2^+(\bar{k})$	$i^2$	1	$i^2$	1	1	$i^2$	1	$i^2$
$\chi_2^-(\bar{k})$	$-i^2$	-1	$-i^2$	-1	1	$i^2$	1	$i^2$
$\chi_3^+(\bar{k})$	$i$	$i^2$	$i^3$	1	1	$i^3$	$i^2$	$i$
$\chi_3^-(\bar{k})$	$-i$	$-i^2$	$-i^3$	-1	1	$i^3$	$i^2$	$i$

Notemos que  $\chi_1^+$  sólo toma el valor 1 en  $\pm\bar{1}$ , pero  $\chi_1^-(-\bar{1}) = -1$ , luego siempre existe al menos un carácter que no toma el valor 1 en cualquier clase  $\bar{k} \neq \bar{1}$  dada.

Para analizar la situación general tomamos como ejemplo  $m = 15$ . El teorema chino del resto hace corresponder las clases de  $\mathbb{Z}_{15}$  con los pares de clases de  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$ , de modo que las clases de  $U_{15}$  se corresponden con los pares de  $U_3 \times U_5$  (en el caso general, si  $m = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ , las clases de  $U_m$  se corresponden con las  $r$ -tuplas de  $U_{m_1} \times \cdots \times U_{m_r}$ , donde  $m_i = p_i^{e_i}$ ).

Por la parte ya probada sabemos que hay  $\phi(3) = 2$  caracteres módulo 3 y  $\phi(5) = 4$  caracteres módulo 5, que en este caso son los dados por las tablas siguientes:

	$\bar{1}$	$\bar{2}$		$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}^2$	$\bar{2}^3$
$\chi_0^3$	1	1	$\chi_0^5$	1	1	1	1
$\chi_1^3$	1	-1	$\chi_1^5$	1	$i$	-1	$-i$
			$\chi_2^5$	1	-1	1	-1
			$\chi_3^5$	1	$-i$	-1	$i$

Entonces podemos definir caracteres en  $U_{15}$  pasando de cada clase al par de clases que le corresponde, aplicando a cada componente un carácter y multiplicando los resultados, es decir, si  $\bar{k}$  se corresponde con  $(\bar{k}_1, \bar{k}_2)$ , entonces  $(\chi\psi)(\bar{k}) = \chi(\bar{k}_1)\psi(\bar{k}_2)$ . Es fácil ver que así, cada par de caracteres define un carácter, que en este caso son los dados por la tabla siguiente:

	$\bar{1}$	$\bar{11}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{14}$	$\bar{13}$	$\bar{8}$
	$(\bar{1}, \bar{1})$	$(\bar{2}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{2})$	$(\bar{2}, \bar{2})$	$(\bar{1}, \bar{2}^2)$	$(\bar{2}, \bar{2}^2)$	$(\bar{1}, \bar{2}^3)$	$(\bar{2}, \bar{2}^3)$
$\chi_0^3 \chi_0^5$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_1^3 \chi_0^5$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
$\chi_0^3 \chi_1^5$	1	1	$i$	$i$	-1	-1	$-i$	$-i$
$\chi_1^3 \chi_1^5$	1	-1	$i$	$-i$	-1	1	$-i$	$i$
$\chi_0^3 \chi_2^5$	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
$\chi_1^3 \chi_2^5$	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
$\chi_0^3 \chi_3^5$	1	1	$-i$	$-i$	-1	-1	$i$	$i$
$\chi_1^3 \chi_3^5$	1	-1	$-i$	$i$	-1	1	$i$	$-i$

Recíprocamente, todo carácter  $\chi$  módulo 15 es uno de los que aparecen en la tabla, pues define un carácter módulo 3 mediante  $\chi^3(\bar{k}) = \chi(\bar{k}, \bar{1})$ , y otro módulo 5 mediante  $\chi^5(\bar{k}) = \chi(\bar{1}, \bar{k})$ , y es claro que entonces  $\chi = \chi^3\chi^5$ . Tenemos así una correspondencia biunívoca entre los caracteres módulo 15 y los pares de caracteres módulo 3 y 5, lo cual prueba que hay exactamente  $\phi(3)\phi(5) = \phi(15)$  caracteres módulo 15.

Si  $\bar{k} \neq \bar{1}$ , su par asociado por el teorema chino del resto (en general, su  $r$ -tupla asociada) tendrá al menos una componente no nula y, por la parte ya probada, hay un carácter módulo  $m_i$  que no toma el valor 1 en dicha componente. El producto de dicho carácter por los caracteres principales módulo los demás factores  $m_j$  es un carácter módulo  $m$  que no se anula en la clase dada. ■

El lector puede comprobar que en cualquiera de las tablas de caracteres que hemos construido todas las filas y columnas suman 0 excepto en las columnas correspondientes a  $\bar{1}$  y en las filas correspondientes al carácter principal. Esto no es casual, y es precisamente el hecho por el que nos van a ser útiles los caracteres.

**Teorema 7.22** *Fijado un número natural  $m \geq 2$ :*

1. Si  $\chi$  es un carácter de Dirichlet módulo  $m$ , entonces

$$\sum_{k=1}^m \chi(k) = \begin{cases} \phi(m) & \text{si } \chi = \chi_0 \text{ es el carácter principal,} \\ 0 & \text{si } \chi \neq \chi_0. \end{cases}$$

2. Si  $k$  es un número entero, entonces

$$\sum_{\chi} \chi(k) = \begin{cases} \phi(m) & \text{si } k \equiv 1 \pmod{m}, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

donde  $\chi$  recorre los caracteres módulo  $m$ .

DEMOSTRACIÓN: 1) Si  $\chi = \chi_0$ , entonces  $\chi(k) = 1$  si  $(k, m) = 1$  y  $\chi(k) = 0$  en caso contrario, luego la suma es claramente igual a  $\phi(m)$ . En caso contrario existe un  $k_0$  tal que  $\chi(k_0) \neq 1$ . Las clases  $\bar{1}, \dots, \bar{m}$  son las  $m$  clases de  $\mathbb{Z}_m$ , luego las clases  $\bar{k}_0 \cdot \bar{1}, \dots, \bar{k}_0 \cdot \bar{m}$  también, aunque en otro orden. Por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^m \chi(k) = \sum_{k=1}^m \chi(k_0 k) = \chi(k_0) \sum_{k=1}^m \chi(k),$$

luego

$$(1 - \chi(k_0)) \sum_{k=1}^m \chi(k_0 k) = 0,$$

y el primer factor no es nulo, luego la suma es nula.

2) La igualdad es inmediata si  $(k, m) \neq 1$ , así como si  $k \equiv 1 \pmod{m}$  (teniendo en cuenta que hay exactamente  $\phi(m)$  caracteres módulo  $m$ ). En el caso restante, en la prueba de 7.21 hemos visto que existe un carácter  $\psi$  tal que  $\psi(k) \neq 1$ .

Si  $\chi_0, \dots, \chi_r$  son todos los caracteres módulo  $m$ , entonces  $\psi\chi_0, \dots, \psi\chi_r$  son esos mismos caracteres tal vez en otro orden, luego

$$\sum_x \chi(k) = \sum_x \psi(k)\chi(k) = \psi(k) \sum_x \chi(k),$$

luego

$$(1 - \psi(k)) \sum_x \chi(k) = 0,$$

luego la suma tiene que ser nula. ■

El interés (para nosotros) de este teorema radica en la consecuencia siguiente:

**Teorema 7.23** *Si  $C \in U_m$  y  $k \in \mathbb{Z}$ , entonces*

$$\frac{1}{\phi(m)} \sum_x \bar{\chi}(C)\chi(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in C, \\ 0 & \text{si } k \notin C. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que  $\bar{\chi}(C)\chi(k) = \chi(C)^{-1}\chi(\bar{k}) = \chi(C^{-1}\bar{k})$ , luego el teorema anterior nos da que la suma es nula salvo si  $C^{-1}\bar{k} = \bar{1}$ , es decir, salvo que  $\bar{k} = C$ , que es lo mismo que  $k \in C$ , en cuyo caso vale  $\phi(m)$ , luego la expresión de la izquierda vale 1. ■

De este modo, la expresión

$$\frac{1}{\phi(m)} \sum_x \bar{\chi}(C)\chi(k)$$

nos distingue del resto a los números enteros que pertenecen concretamente a la clase  $C \in U_m$ . Esto nos permitirá en la sección siguiente demostrar el teorema de Dirichlet sobre primos en progresiones aritméticas introduciendo caracteres en los argumentos con los que hemos probado los teoremas de Mertens, de modo que al final esta relación nos permitirá hacer referencia a los elementos de una clase arbitraria prefijada de restos módulo  $m$ .

## 7.6 El teorema de Dirichlet

Finalmente estamos en condiciones de demostrar el teorema de Dirichlet sobre primos en progresiones aritméticas:

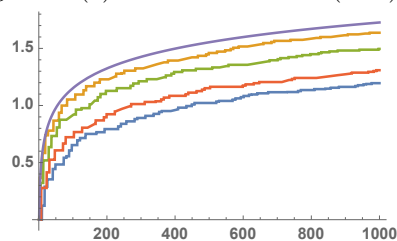
**Teorema 7.24 (Dirichlet)** *En toda progresión aritmética  $an + b$ , donde  $a$  y  $b$  son enteros primos entre sí, hay infinitos números primos.*

Cabe señalar que el mero hecho de que existan primos de la forma  $an + b$  para cualquier par de números enteros  $(a, b)$  primos entre sí ya es un hecho profundo, sin entrar en que haya infinitos. En realidad, no se conoce ninguna demostración de que existan primos de esta forma que no pruebe en realidad que hay infinitos. En otras palabras, omitir la infinitud no simplifica el trabajo.

Según ya hemos discutido en la sección anterior, el teorema de Dirichlet equivale a que toda clase de restos  $C = \bar{k}$  del grupo  $U_m$  contiene infinitos primos. Los teoremas de Mertens (que implican la existencia de infinitos primos) los hemos deducido esencialmente de la fórmula (7.12). Vamos a ver ahora que el teorema de Dirichlet se sigue de esta variante:

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in C}} \frac{\Lambda(n)}{n} = \frac{1}{\phi(m)} \log x + O(1). \tag{7.14}$$

La figura muestra las gráficas correspondientes a las cuatro clases de  $U_8$ , junto con la de la función  $(\log x)/4$ , que es la mayor de las cinco, seguida de las correspondientes a  $\bar{3}$ ,  $\bar{5}$ ,  $\bar{7}$  y  $\bar{1}$ .



En efecto, podemos descomponer

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in C}} \frac{\Lambda(n)}{n} = \sum_{\substack{p^n \leq x \\ p^n \in C}} \frac{\log p}{p^n} = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in C}} \frac{\log p}{p} + \sum_{\substack{p^{n+1} \leq x \\ p^{n+1} \in C}} \frac{\log p}{p^n},$$

donde

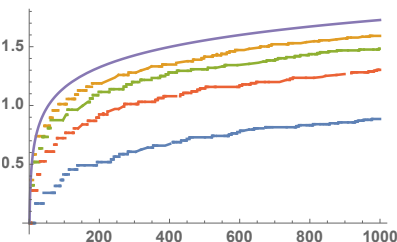
$$\sum_{\substack{p^{n+1} \leq x \\ p^{n+1} \in C}} \frac{\log p}{p^n} \leq \sum_{p^{n+1} \leq x} \frac{\log p}{p^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2},$$

luego el último sumando es  $O(1)$  y, por lo tanto,

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \in C}} \frac{\log p}{p} = \frac{1}{\phi(m)} \log x + O(1). \tag{7.15}$$

Esto es la versión para primos en progresiones aritméticas del primer teorema de Mertens, e implica que hay infinitos primos en  $C$ , pues de lo contrario la suma de la izquierda sería finalmente constante y  $\log x$  sería una función acotada.

La figura muestra las gráficas de las cuatro funciones correspondientes a  $m = 8$  junto con la gráfica del logaritmo.



El problema de cómo trabajar con sumas de este tipo, restringidas a una clase de restos, lo hemos resuelto al introducir los caracteres de Dirichlet. En efecto, usando el teorema 7.23 tenemos que

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in C}} \frac{\Lambda(n)}{n} = \frac{1}{\phi(m)} \sum_{\chi} \bar{\chi}(C) \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n) \Lambda(n)}{n}, \tag{7.16}$$

con lo que hemos sustituido la restricción  $n \in C$  por la introducción de caracteres en la serie, los cuales (restringidos a números naturales) son funciones aritméticas completamente multiplicativas, por lo que podemos manipularlos cómodamente.

Para el carácter principal,  $\chi_0$ , tenemos que

$$\sum_{n \leq x} \frac{\chi_0(n)\Lambda(n)}{n} = \sum_{\substack{n \leq x \\ (n,m)=1}} \frac{\Lambda(n)}{n} = \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \sum_{\substack{p^n \leq x \\ p|m}} \frac{\log p}{p^n},$$

donde

$$\sum_{\substack{p^n \leq x \\ p|m}} \frac{\log p}{p^n} \leq \sum_{p|m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log p}{p^n} = \sum_{p|m} \frac{\log p}{p(p-1)}.$$

Así pues, usando (7.12),

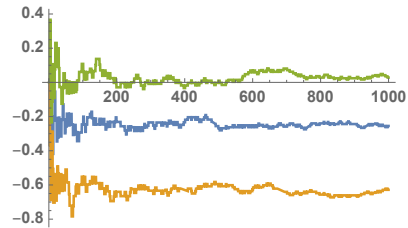
$$\sum_{n \leq x} \frac{\chi_0(n)\Lambda(n)}{n} = \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} + O(1) = \log x + O(1). \tag{7.17}$$

Por lo tanto, para concluir (7.14), en virtud de (7.16) y de (7.17), basta probar que si  $\chi$  no es el carácter principal, entonces

$$\sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n} = O(1). \tag{7.18}$$

La tabla siguiente muestra los cuatro caracteres módulo 8, y la figura muestra las gráficas de las funciones (7.12) correspondientes a los tres distintos del carácter principal:

	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$
1	1	1	1	1
$\delta$	1	-1	1	-1
$\epsilon$	1	-1	-1	1
$\delta\epsilon$	1	1	-1	-1



La inferior corresponde a  $\epsilon$ , la intermedia a  $\delta$  y la superior a  $\delta\epsilon$ .

El ejemplo 7.15 nos permite sustituir  $\Lambda$  por la función de Möbius, que es más sencilla:

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n} &= \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)}{n} \sum_{d|n} \mu(d) \log \frac{n}{d} = \sum_{dd' \leq n} \frac{\chi(d)\chi(d')}{dd'} \mu(d) \log d' = \\ &= \sum_{d \leq x} \frac{\chi(d)\mu(d)}{d} \sum_{d' \leq x/d} \frac{\chi(d') \log d'}{d'}. \end{aligned} \tag{7.19}$$

Para estudiar esta expresión emplearemos un argumento que se repetirá más veces, así que conviene enunciarlo en general:

**Teorema 7.25** Sea  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  una función positiva decreciente tal que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  y sea  $\chi$  un carácter módulo  $m$  no principal. Entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)f(n)$$

es convergente y

$$\sum_{n \leq x} \chi(n)f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)f(n) + O(f(x)).$$

DEMOSTRACIÓN: Llamemos  $R(x) = \sum_{n \leq x} \chi(n)$ . Como  $\chi$  depende sólo del resto de  $n$  módulo  $m$ , la sucesión  $\chi(1), \chi(2), \chi(3), \dots$  se repite cíclicamente con periodo  $m$ , y el teorema 7.22 nos da que  $\sum_{n=1}^m \chi(n) = 0$ . Por lo tanto, existe un  $K > 0$  tal que  $|R(x)| \leq K$  para todo  $x$ .

Aplicamos la fórmula de suma por partes 2.32:

$$\sum_{x < n \leq y} \chi(n)f(n) = \sum_{n=E[x]+1}^{E[y]} \chi(n)f(n) =$$

$$R(E[y])f(E[y]) - R(E[x])f(E[x] + 1) + \sum_{n=E[x]+1}^{E[y]-1} R(n)(f(n) - f(n+1)).$$

Ahora observamos que

$$\left| \sum_{n=E[x]+1}^{E[y]-1} R(n)(f(n) - f(n+1)) \right| \leq K \sum_{n=E[x]+1}^{E[y]-1} (f(n) - f(n+1)) =$$

$$K(f(E[x] + 1) - f(E[y])) \leq Kf(x).$$

Así, usando además que  $f(E[x] + 1) \leq f(x)$ ,

$$\left| \sum_{x < n \leq y} \chi(n)f(n) \right| \leq Kf(E[y]) + Kf(x) + Kf(x) = O(f(x)),$$

luego el valor absoluto tiende a 0 cuando  $x \rightarrow +\infty$ , luego la serie converge (es de Cauchy). Si hacemos tender  $y \rightarrow +\infty$ , en la última desigualdad, queda que

$$\left| \sum_{n > x} \chi(n)f(n) \right| \leq 2Kf(x) = O(f(x)),$$

luego

$$\sum_{x < n} \chi(n)f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)f(n) - \sum_{n > x} \chi(n)f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)f(n) + O(f(x)).$$

■

Aplicamos el teorema a la función  $f(x) = (\log x)/x$ , que es decreciente para  $x$  suficientemente grande<sup>4</sup> (es claro que el teorema vale igualmente en este caso). Concluimos que existe

$$L_1(\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n) \log n}{n} \quad (7.20)$$

y que

$$\sum_{n \leq x} \frac{\chi(x) \log n}{n} = L_1 + R(x), \quad \text{con } |R(x)| \leq M \frac{\log x}{x}.$$

Por lo tanto, volviendo a (7.19), tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n) \Lambda(n)}{n} &= \sum_{d \leq x} \frac{\chi(d) \mu(d)}{d} (L_1 + R(x/d)) = \\ &= L_1 \sum_{d \leq x} \frac{\chi(d) \mu(d)}{d} + \sum_{d \leq x} \frac{\chi(d) \mu(d)}{d} R(x/d), \end{aligned}$$

donde

$$\left| \sum_{d \leq x} \frac{\chi(d) \mu(d)}{d} R(x/d) \right| \leq \sum_{d \leq x} |R(x/d)| \leq M \sum_{d \leq x} \frac{d}{x} \log \frac{x}{d} \leq \frac{M}{x} \sum_{d \leq x} \log \frac{x}{d}.$$

Pero a su vez, teniendo en cuenta (7.9),

$$\sum_{d \leq x} \log \frac{x}{d} = \sum_{d \leq x} (\log x - \log d) = E[x] \log x - \log E[x]! =$$

$$E[x] \log x - x \log x + O(x) = -F[x] \log x + O(x) = O(x). \quad (7.21)$$

En total concluimos que

$$\sum_{n \leq x} \frac{\chi(n) \Lambda(n)}{n} = L_1 \sum_{d \leq x} \frac{\chi(d) \mu(d)}{d} + O(x). \quad (7.22)$$

Por consiguiente, para demostrar (7.18) basta probar que

$$\sum_{n \leq x} \frac{\chi(n) \mu(n)}{n} = O(1). \quad (7.23)$$

<sup>4</sup>Usando derivadas es fácil ver que  $f$  es decreciente para  $x > e$ . No obstante, sin derivadas, podemos probar que es decreciente para  $x > e^{\sqrt{2}}$ , pues, haciendo  $t = e^x$ , basta ver que  $te^{-t}$  es decreciente para  $t > \sqrt{2}$ , lo cual equivale a que  $e^t/t = 1/t + 1 + t/2 + t^2/6 + \dots$  sea creciente, y basta ver que  $1/t + t/2$  es creciente, pues el resto de la serie lo es trivialmente. Pero, si  $t \geq \sqrt{2}$  y  $h > 0$ , al desarrollar

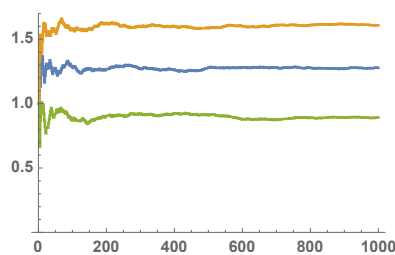
$$\frac{1}{t} + \frac{t}{2} < \frac{1}{t+h} + \frac{t}{2} + \frac{h}{2}$$

vemos que equivale a que  $2 < t^2 + th$ , lo cual es cierto.

La figura muestra las gráficas de las funciones (7.23) para los tres caracteres no principales módulo 8. Vemos que, ciertamente, se mantienen acotadas.

Observemos que el teorema 7.25 nos da también la convergencia de la serie

$$L_0(\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n},$$



y el teorema siguiente casi demuestra (7.23):

**Teorema 7.26** Si  $\chi$  es un carácter módulo  $m$  no principal, se cumple que

$$L_0(\chi) \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)\mu(n)}{n} = O(1).$$

DEMOSTRACIÓN: Aplicamos la fórmula de inversión 7.18 con  $f(n) = \chi(n)/n$  y  $F(x) = 1$ . Tenemos que

$$G(x) = \sum_{n \leq x} f(n)F(x/n) = \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)}{n} = L(\chi) + R(x),$$

donde, por el teorema 7.25,  $|R(x)| \leq M/x$ . La conclusión es que

$$1 = \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)\mu(n)}{n} (L(\chi) + R(x/n)) = \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)\mu(n)}{n} L(\chi) + \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)\mu(n)}{n} R(x/n),$$

donde

$$\left| \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)\mu(n)}{n} R(x/n) \right| \leq \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \frac{Mn}{x} \leq M,$$

lo que nos da la fórmula del enunciado.  $\blacksquare$

A partir de aquí podemos concluir (7.23) si previamente justificamos que  $L_0(\chi) \neq 0$ . Para ello probamos lo siguiente:

**Teorema 7.27** Si  $\chi$  es un carácter no principal módulo  $m$  tal que  $L_0(\chi) = 0$ , entonces

$$L_1(\chi) \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)\mu(n)}{n} = -\log x + O(1),$$

donde  $L_1(\chi)$  es el definido en (7.20).

DEMOSTRACIÓN: Aplicamos 7.18 con  $f(n) = \chi(n)/n$  y  $F(x) = \log x$ , con lo que

$$G(x) = \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)}{n} \log \frac{x}{n} = \log x \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)}{n} - \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n) \log n}{n}.$$

Por el teorema 7.25 tenemos que

$$G(x) = L_0(\chi) \log x - L_1(\chi) + R(x),$$

donde  $|R(x)| \leq M(\log x)/x$ , pero estamos suponiendo que  $L_0(\chi) = 0$ , luego el primer sumando se elimina. La conclusión es que

$$\log x = \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)\mu(n)}{n} (-L_1(\chi) + R(x/n)) = -L_1(\chi) \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)\mu(n)}{n} + O(1),$$

pues el resto cumple

$$\left| \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)\mu(n)}{n} R(x/n) \right| \leq M \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \frac{n \log(x/n)}{x} = \frac{M}{x} \sum_{n \leq x} \log \frac{x}{n} = O(1)$$

por (7.21). ■

Los dos últimos teoremas, junto con (7.22), nos dan que, para todo carácter no principal  $\chi$ :

$$\sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n} = \begin{cases} O(1) & \text{si } L_0(\chi) \neq 0, \\ -\log x + O(1) & \text{si } L_0(\chi) = 0. \end{cases}$$

Ahora consideramos (7.16) con  $C = \bar{1}$ , de modo que

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 1 \pmod{m}}} \frac{\Lambda(n)}{n} = \frac{1}{\phi(m)} \sum_{\chi} \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n},$$

luego

$$\phi(m) \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 1 \pmod{m}}} \frac{\Lambda(n)}{n} = \sum_{n \leq x} \frac{\chi_0(n)\Lambda(n)}{n} + \sum_{\chi \neq \chi_0} \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n}.$$

Por (7.17) sabemos que el primer sumando es  $\log x + O(1)$ , mientras que la segunda suma consta de, digamos  $N$  sumandos para los que  $L_0(\chi) = 0$ , que son  $-\log x + O(1)$  y los restantes son  $O(1)$ , pero entonces

$$\phi(m) \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 1 \pmod{m}}} \frac{\Lambda(n)}{n} = (1 - N) \log x + O(1).$$

Pero la suma de la izquierda es siempre  $\geq 0$ , por lo que necesariamente  $N \leq 1$ , es decir, a lo sumo hay un carácter no principal  $\chi$  tal que  $L_0(\chi) \neq 0$ . En particular,  $\chi$  tiene que ser real, ya que en caso contrario  $\chi$  y  $\bar{\chi}$  serían dos caracteres en estas condiciones.

Por lo tanto, sólo tenemos que demostrar que  $L_0(\chi) \neq 0$  para todos los caracteres reales no principales, es decir, los que toman únicamente valores  $\pm 1$ .

Consideremos la función

$$F(x) = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\chi(d)x^d}{1-x^d}.$$

La serie converge absolutamente para  $0 < x < 1$ , pues

$$\lim_d \frac{x^{d+1}/(1-x^{d+1})}{x^d/(1-x^d)} = \lim_d \frac{(1-x^d)x}{1-x^{d+1}} = \lim_d \left(1 + \frac{x-1}{1-x^{d+1}}\right) = x$$

y podemos aplicar el criterio de D'Alembert. Es fácil encontrar un desarrollo en serie de potencias para  $F$ :

$$F(x) = \sum_{d=1}^{\infty} \chi(d) \sum_{k=1}^{\infty} x^{dk} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} \chi(d)x^n.$$

Esto es correcto porque la serie doble determinada por  $a_{dk} = \chi(d)x^{dk}$  es absolutamente convergente, ya que las sumas parciales de los valores absolutos cumplen

$$S_N = \sum_{d,k=1}^N x^{dk} \leq \sum_{d=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} x^{dk} \leq \sum_{d=1}^N \frac{x^d}{1-x^d} \leq \sum_{d=1}^{\infty} \frac{x^d}{1-x^d}.$$

Por lo tanto, podemos reordenar los sumandos agrupando los términos  $\chi(d)x^{dk}$  con un mismo exponente, y así obtenemos una subsucesión de la serie de sumas parciales, que es precisamente el miembro derecho de la igualdad anterior.

Llamemos  $f(n) = \sum_{d|n} \chi(d)$ , es decir,  $f = \chi * c_1$ , que es una función multiplicativa, por ser convolución de dos funciones multiplicativas. Por lo tanto, si  $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ , se cumple que  $f(n) = f(p_1^{e_1}) \cdots f(p_r^{e_r})$ . Pero

$$f(p^e) = 1 + \sum_{j=1}^e \chi^j(p) = \begin{cases} e+1 & \text{si } \chi(p) = 1, \\ 1 & \text{si } \chi(p) = 0, \\ 0 & \text{si } \chi(p) = -1 \text{ y } e \text{ es impar,} \\ 1 & \text{si } \chi(p) = -1 \text{ y } e \text{ es par.} \end{cases}$$

En particular  $f(p^e) \geq 0$  y si  $e$  es par entonces  $f(p^e) \geq 1$ . Por lo tanto, en general,  $F(n) \geq 0$  y si  $n$  es un cuadrado, entonces  $F(n) \geq 1$ . Por otra parte, hemos visto que

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)x^n,$$

luego ahora es inmediato que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = +\infty$ .

Supongamos que  $L_0(\chi) = 0$  y vamos a llegar a una contradicción. Tenemos que

$$-F(x) = \frac{L_0(\chi)}{1-x} - f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \left( \frac{1}{n(1-x)} - \frac{x^n}{1-x^n} \right).$$

Llamemos

$$b_n(x) = \frac{1}{n(1-x)} - \frac{x^n}{1-x^n}.$$

Claramente,  $\lim_n b_n(x) = 0$ . Vamos a probar que la sucesión es decreciente. Para ello calculamos

$$\begin{aligned} (1-x)(b_n(x) - b_{n+1}(x)) &= \frac{1}{n} - \frac{x^n(1-x)}{1-x^n} - \frac{1}{n+1} + \frac{x^{n+1}(1-x)}{1-x^{n+1}} \\ &= \frac{1}{n(n+1)} - \frac{x^n(1-x)^2}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Por la desigualdad entre la media aritmética y la geométrica (teorema 4.10), tenemos que

$$\frac{1-x^n}{n(1-x)} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x^j \geq \sqrt[n]{x^{(n-1)n/2}} = x^{(n-1)/2},$$

luego

$$\frac{1-x}{1-x^n} \leq \frac{1}{nx^{(n-1)/2}}.$$

Cambiando  $n$  por  $n+1$  tenemos también que

$$\frac{1-x}{1-x^{n+1}} \leq \frac{1}{(n+1)x^{n/2}}.$$

Poniendo estas desigualdades en (7.24) obtenemos que

$$(1-x)(b_n(x) - b_{n+1}(x)) \geq \frac{1}{n(n+1)} - \frac{x^{1/2}}{n(n+1)} = \frac{1-x^{1/2}}{n(n+1)} > 0.$$

Esto prueba que la sucesión  $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  es decreciente.

Ahora llamamos  $A_n = \sum_{n=1}^n \chi(n)$  y sumamos por partes:

$$\sum_{n=1}^N \chi(n)b_n(x) = A_N b_N(x) + \sum_{n=1}^{N-1} A_n (b_n(x) - b_{n+1}(x))$$

y tomando límites en  $N$  queda que

$$-F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n (b_n(x) - b_{n+1}(x)),$$

donde hemos usado que la sucesión  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  está acotada, pues  $\{\chi(n)\}_{n=1}^{\infty}$  tiene periodo  $m$  y  $A_m = 0$ . Sea  $K$  una cota.

Entonces,

$$|F(n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| (b_n(x) - b_{n+1}(x)) \leq K \sum_{n=1}^{\infty} (b_n(x) - b_{n+1}(x)) = K b_1(x).$$

Pero

$$b_1(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x} = 1,$$

y así concluimos que  $F$  está acotada, cuando habíamos visto que tendía a  $\infty$  en 1. Esta contradicción completa la prueba del teorema de Dirichlet. ■

En particular tenemos probado (7.15). Pongamos que

$$S(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in C}} \frac{\log p}{p} = \frac{1}{\phi(m)} \log x + R(x),$$

donde el resto  $R$  está acotado. Ahora observamos que

$$S(n) - S(n-1) = \begin{cases} \frac{\log n}{n} & \text{si } n \in C \text{ es primo,} \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

luego

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in C}} \frac{1}{p} &= \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{\log n} (S(n) - S(n-1)) = \\ &= \frac{1}{\phi(m)} \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{\log n} \log \frac{n}{n-1} + \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{\log n} (R(n) - R(n-1)). \end{aligned}$$

Ahora exactamente el mismo cálculo que hemos hecho para probar el segundo teorema de Mertens nos da que

$$\sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{\log n} (R(n) - R(n-1)) = c_1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right),$$

y

$$\sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{\log n} \log \frac{n}{n-1} = \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{n \log n} + c_2 + O(1/x).$$

Sumando las dos estimaciones obtenemos que

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \in C}} \frac{1}{p} = \frac{1}{\phi(m)} \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{n \log n} + c_3 + O\left(\frac{1}{\log x}\right),$$

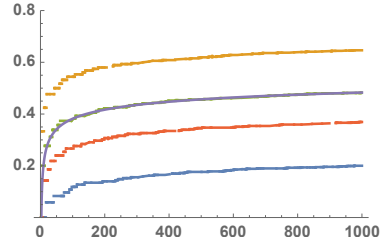
y esto, combinado con el teorema 4.14 nos permite concluir la versión para progresiones aritméticas del segundo teorema de Mertens:

**Teorema 7.28** Si  $C \in U_m$ , entonces

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \in C}} \frac{1}{p} = \frac{1}{\phi(m)} \log \log x + M_C + O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

(donde la constante  $M_C$  y el resto dependen de  $C$ ).

La figura muestra las gráficas de las funciones consideradas en el teorema anterior para las cuatro clases de  $U_8$  junto con la función  $(\log(\log x))/4$ , que se superpone a la gráfica correspondiente a la clase  $\bar{5}$ . Vemos así que las constantes  $M_C$  son ciertamente distintas para cada clase.



Como consecuencia, si  $\chi$  es un carácter no principal módulo  $m$ , se cumple que

$$\sum_{p \leq N} \frac{\chi(p)}{p} = \sum_C \chi(C) \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in C}} \frac{1}{p} =$$

$$\frac{1}{\phi(m)} \sum_C \chi(C) \log \log x + \sum_C \chi(C) M_C + O\left(\frac{1}{\log x}\right) = M_\chi + O\left(\frac{1}{\log x}\right),$$

donde hemos tenido en cuenta que el primer sumatorio de la última línea es nulo por el teorema 7.22. Con esto hemos probado el teorema siguiente:

**Teorema 7.29** *Si  $\chi$  es un carácter módulo  $m$  no principal, la serie*

$$\sum_p \frac{\chi(p)}{p}$$

*es convergente.*



## Capítulo VIII

# Productos infinitos y series de Dirichlet

Dedicamos este capítulo a estudiar dos clases de sucesiones de números complejos. La primera es la de los productos infinitos, que es el concepto análogo al de serie infinita que ya hemos estudiado, mientras que la segunda tiene conexiones muy interesantes con los números primos.

### 8.1 Productos infinitos

**Definición 8.1** El *producto infinito* determinado por una sucesión  $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$  de números complejos es la sucesión  $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$  dada por

$$P_k = \prod_{n=0}^k z_n = z_0 \cdots z_k.$$

Sin embargo, a la hora de definir la convergencia de un producto infinito, es útil introducir unos convenios que descarten ciertas situaciones indeseables. Por ejemplo, si definiéramos sin más la convergencia de un producto infinito como su convergencia en el sentido usual, nos encontraríamos con que el producto

$$\prod_{n=0}^{\infty} n = 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots = 0$$

sería convergente, mientras que

$$\prod_{n=1}^{\infty} n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots$$

sería divergente. Por otro lado, tendríamos que

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdots = 0,$$

sin que ninguno de los factores sea 0.

Vamos a ver que el comportamiento de los productos infinitos es mucho más satisfactorio si adoptamos el convenio siguiente:

Diremos que un producto infinito  $\prod_{n=0}^{\infty} z_n$  es *convergente* si existe un  $n_0$  tal que, para todo  $n \geq n_0$ , se cumple que  $z_n \neq 0$  y la sucesión  $\{P_{n_0,k}\}_{k=n_0}^{\infty}$  de los productos parciales

$$P_{n_0,k} = \prod_{n=n_0}^k z_n$$

converge a un número complejo no nulo. En tal caso definimos

$$\prod_{n=0}^{\infty} z_n = z_0 \cdots z_{n_0-1} \cdot \lim_k \prod_{n=n_0}^k z_n.$$

Observemos que, si se dan estas condiciones, el número  $\prod_{n=0}^{\infty} z_n$  es independiente de la elección de  $n_0$ , pues si tomamos  $n_1 > n_0$ , entonces, para  $k \geq n_1$ ,

$$\lim_k \prod_{n=n_0}^k z_n = \lim_k z_{n_0} \cdots z_{n_1-1} \prod_{n=n_1}^k z_n = z_{n_0} \cdots z_{n_1-1} \lim_k \prod_{n=n_1}^k z_n,$$

entendiendo que el primer límite existe si y sólo si existe el último y uno es no nulo si y sólo si lo es el otro, pues se cumple que  $z_{n_0} \cdots z_{n_1-1} \neq 0$ , luego

$$z_0 \cdots z_{n_0-1} \cdot \lim_k \prod_{n=n_0}^k z_n = z_0 \cdots z_{n_1-1} \lim_k \prod_{n=n_1}^k z_n.$$

Con estos convenios, los productos siguientes son todos divergentes:

$$\prod_{n=0}^{\infty} n, \quad \prod_{n=1}^{\infty} n, \quad \prod_{n=1}^{\infty} (1/n).$$

En el último caso se dice que el producto *diverge a 0*, es decir, que la sucesión de los productos parciales converge, pero a 0, con lo cual consideramos que el producto es divergente.

Las propiedades siguientes de los productos infinitos son casos particulares de las propiedades de los límites de sucesiones:

$$1. \quad \prod_{n=0}^{\infty} z_n = \prod_{n=0}^{n_0-1} z_n \prod_{n=n_0}^{\infty} z_n = z_0 \cdots z_{n_0-1} \prod_{n=n_0}^{\infty} z_n$$

(el primer producto converge si y sólo si lo hace el último).

$$2. \quad \prod_{n=0}^{\infty} x_n \prod_{n=0}^{\infty} y_n = \prod_{n=0}^{\infty} x_n y_n$$

(si convergen los dos primeros productos, también lo hace el tercero).

$$3. \quad \left( \prod_{n=0}^{\infty} z_n \right)^{-1} = \prod_{n=0}^{\infty} z_n^{-1}$$

(si el primer producto es no nulo, el segundo converge y se da la igualdad).

Hay una condición necesaria obvia que debe cumplir todo producto infinito convergente, análoga a la correspondiente para series:

**Teorema 8.2** Si un producto infinito  $\prod_{n=0}^{\infty} z_n$  es convergente,  $\lim_n z_n = 1$ .

DEMOSTRACIÓN: Sea  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$ , entonces  $z_n \neq 0$ . Tenemos que

$$\lim_n z_n = \lim_n \frac{\prod_{k=n_0}^n z_k}{\prod_{k=n_0}^{n-1} z_k} = \frac{\prod_{k=n_0}^{\infty} z_k}{\prod_{k=n_0}^{\infty} z_k} = 1,$$

pues, por definición, la sucesión del denominador converge a un número no nulo y la sucesión del numerador es una cola de la anterior, y converge al mismo valor. ■

Veamos algunos ejemplos:

1.  $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$  diverge a  $+\infty$ .

En efecto,

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^k \left(1 + \frac{1}{n}\right) &= \left(1 + \frac{1}{1}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{k}\right) \\ &= \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{k+1}{k} = k+1. \end{aligned}$$

luego los productos parciales tienden a  $+\infty$ .

2.  $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$  diverge a 0.

En efecto, en este caso:

$$\begin{aligned} \prod_{n=2}^k \left(1 - \frac{1}{n}\right) &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{k}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{k}{k+1} = \frac{1}{k+1}. \end{aligned}$$

3.  $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$ .

En efecto:

$$\begin{aligned} \prod_{n=2}^k \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) &= \prod_{n=2}^k \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \\ &= \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdot \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 5} \cdots \frac{(k-1)(k+1)}{k \cdot k} = \frac{k+1}{2k}. \end{aligned}$$

4. Sea  $e_1 = 1$  y  $e_{n+1} = (n+1)(e_n + 1)$ . Explícitamente:

$$\begin{array}{c|cccccc} n & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ \hline e_n & 1 & 4 & 15 & 64 & 325 & 1956 & \cdots \end{array}$$

Entonces

$$e = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e_n + 1}{e_n} = \frac{2}{1} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{65}{64} \cdot \frac{326}{325} \cdot \frac{1957}{1956} \cdots$$

En efecto, basta probar que

$$S_k = \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} = \prod_{n=1}^k \frac{e_n + 1}{e_n}.$$

En efecto, una simple inducción prueba que  $e_n = n!S_{n-1}$ , de donde

$$\frac{S_n}{S_{n-1}} = \frac{S_{n-1} + 1/n!}{S_{n-1}} = \frac{n!S_{n-1} + 1}{n!S_{n-1}} = \frac{e_n + 1}{e_n},$$

luego

$$S_k = \frac{S_1}{S_0} \cdot \frac{S_2}{S_1} \cdots \frac{S_k}{S_{k-1}} = \prod_{n=1}^k \frac{e_n + 1}{e_n}.$$

Así pues, calcular los productos parciales del producto infinito considerado equivale a calcular las sumas parciales de la serie que define a  $e$ . No obstante, los productos parciales son más fáciles de calcular. ■

**Ejercicio:** Probar que  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + (-1)^{n+1}/n) = 1$ .

En el enunciado del teorema siguiente hay que entender que  $\log z$  representa el logaritmo del número complejo  $z \neq 0$  cuya parte imaginaria está en  $]-\pi, \pi]$ :

**Teorema 8.3** Si  $\prod_{n=0}^{\infty} z_n$  es un producto infinito con factores no nulos, se cumple que es convergente si y sólo si lo es la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \log z_n$ , y en tal caso la serie converge a un logaritmo del producto.

DEMOSTRACIÓN: Sea  $S_k = \sum_{n=0}^k \log z_n$ . Entonces  $e^{S_k} = \prod_{n=0}^k z_n$ , luego si la serie converge a un valor  $L$ , tenemos que el producto converge como sucesión a  $e^L \neq 0$ , luego converge en el sentido que hemos dado a la convergencia de productos infinitos y la suma  $L$  de la serie es un logaritmo del producto.

Supongamos ahora que el producto converge a un límite  $L \neq 0$ . Llamemos  $w_n = z_n - 1$  y sea

$$1 + P_k = \frac{1}{L} \prod_{n=0}^k z_n = \frac{1}{L} \prod_{n=0}^k (1 + w_n).$$

Por el teorema anterior  $\lim_n w_n = 0$  y, por otro lado,  $\lim_k (1 + P_k) = 1$ , luego, para todo  $k$  suficientemente grande, se cumplirá que  $|w_k| < 1$ ,  $|P_k| < 1$  y podemos aplicar la rama principal del logaritmo  $\log(1 + w)$ , que es continua en el disco  $|w| < 1$ , luego

$$\lim_k \log(1 + w_k) = \log 1 = 0, \quad \lim_k \log(1 + P_k) = \log 1 = 0.$$

Por otra parte,  $\sum_{n=0}^k \log(1 + w_n) - \log L$  es un logaritmo de  $1 + P_k$ , luego existe un entero  $m_k$  tal que

$$\log(1 + P_k) = \sum_{n=0}^k \log(1 + w_n) - \log L + 2m_k\pi i.$$

De aquí se sigue que

$$m_{k+1} - m_k = \frac{1}{2\pi i} (\log(1 + P_{k+1}) - \log(1 + P_k) - \log(1 + w_{k+1})),$$

pero el miembro derecho tiende a 0, luego  $|m_{k+1} - m_k| < 1$  para todo  $k$  suficientemente grande y, como es un número entero, concluimos que  $m_{k+1} = m_k$  para todo  $k$  suficientemente grande. Así pues:

$$\sum_{n=0}^k \log z_n = \log L + \log(1 + P_k) - 2m_k\pi i,$$

luego la serie de los logaritmos converge a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \log z_n = \log L - 2m\pi i. \quad \blacksquare$$

Ahora podemos introducir el último convenio básico sobre convergencia de productos infinitos:

**Definición 8.4** Diremos que un producto infinito  $\prod_{n=0}^{\infty} z_n$  es *absolutamente convergente* si existe un  $n_0$  tal que, para todo  $n \geq n_0$  se cumple que  $z_n \neq 0$  y la serie  $\sum_{n=n_0}^{\infty} \log z_n$  es absolutamente convergente.

El teorema anterior implica que todo producto absolutamente convergente es convergente. Esto no hubiera sido cierto si hubiéramos definido la convergencia absoluta de  $\prod_{n=0}^{\infty} z_n$  como la convergencia de  $\prod_{n=0}^{\infty} |z_n|$ , pues entonces  $\prod_{n=0}^{\infty} (-1)^n$  sería un producto infinito absolutamente convergente no convergente. En cambio, con la definición que hemos dado los productos infinitos absolutamente convergentes tienen un comportamiento análogo al de las series absolutamente convergentes. Por ejemplo, el teorema 2.25 implica ahora que un producto absolutamente convergente converge al mismo límite aunque se reordenen sus términos, si bien esto se concluye más cómodamente a partir del teorema siguiente:

**Teorema 8.5** *Un producto infinito  $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + z_n)$  es absolutamente convergente si y sólo si lo es la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ .*

DEMOSTRACIÓN: Tanto si converge el producto como si lo hace la serie, se cumple que la sucesión  $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$  tiende a 0, luego no perdemos generalidad si suponemos que  $|z_n| < 1/2$  para todo  $n \geq n_0$ . Además, el producto converge absolutamente si y sólo si lo hace  $\prod_{n=n_0}^{\infty} (1+z_n)$  y la serie converge absolutamente si y sólo si lo hace la serie  $\sum_{n=n_0}^{\infty} z_n$ , luego podemos suponer, de hecho, que  $|z_n| < 1/2$  para todo  $n$ .

Entonces:

$$\log(1 + z_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} z_n^k = z_n \left( 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} z_n^{k-1} \right),$$

donde

$$\left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} z_n^{k-1} \right| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k 2^{k-1}} \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2},$$

luego

$$\frac{1}{2}|z_n| \leq |\log(1 + z_n)| \leq \frac{3}{2}|z_n|,$$

lo que implica que la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} |\log(1 + z_n)|$  es convergente si y sólo si lo es  $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ .  $\blacksquare$

Así, ahora el teorema 2.25 nos garantiza ahora que si reordenamos los factores de un producto infinito absolutamente convergente obtenemos otro producto absolutamente convergente al mismo número.

Ahora podemos afirmar que el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)$$

es convergente, pero no es obvio cuál es su valor. Lo calcularemos en la sección siguiente, en (8.3), en la cual usaremos un resultado técnico que probamos a continuación:

**Teorema 8.6** *Consideremos sucesiones de números complejos  $\{z_n(m)\}_{m=0}^{\infty}$  tales que  $\lim_m z_n(m) = z_n$  y existan números reales  $M_n$  de modo que  $|z_n(m)| \leq M_n$  para todo  $m$  y  $\sum_{n=0}^{\infty} M_n < +\infty$ . Entonces*

$$\lim_m \prod_{n=0}^m (1 + z_n(m)) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + z_n).$$

DEMOSTRACIÓN: Como  $\lim_n M_n = 0$ , podemos tomar  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$  entonces  $M_n < 1/2$ . En particular  $|z_n(m)| < 1/2$  y  $|z_n| \leq M_n < 1/2$ . En la prueba del teorema anterior hemos visto que esto implica que

$$|\log(1 + z_n(m))| \leq \frac{3}{2}|z_n(m)| \leq \frac{3}{2}M_n, \quad |\log(1 + z_n)| \leq \frac{3}{2}|z_n| \leq \frac{3}{2}M_n.$$

En particular, la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \log(1 + z_n)$  es absolutamente convergente, luego también lo es el producto infinito del enunciado.

Además, si  $n_0 \leq m_0 \leq m$ ,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=n_0}^m \log(1 + z_n(m)) - \sum_{n=n_0}^{\infty} \log(1 + z_n) \right| \leq \\ & \sum_{n=n_0}^{m_0} |\log(1 + z_n(m)) - \log(1 + z_n)| + \sum_{n=m_0+1}^m |\log(1 + z_n(m))| + \sum_{n=m_0+1}^{\infty} |\log(1 + z_n)| \leq \\ & \sum_{n=n_0}^{m_0} |\log(1 + z_n(m)) - \log(1 + z_n)| + 3 \sum_{n=m_0+1}^{\infty} M_n. \end{aligned}$$

Dado  $\epsilon > 0$ , podemos tomar  $m_0$  tal que  $\sum_{n=m_0+1}^{\infty} M_n < \epsilon/6$ , y a su vez, podemos tomar  $n_0 \geq m_0$  tal que si  $n_0 \leq n \leq m_0$  entonces

$$|\log(1 + z_n(m)) - \log(1 + z_n)| < \frac{\epsilon}{2m_0}.$$

Así, para todo  $m \geq m_0$ , se cumple que

$$\left| \sum_{n=n_0}^m \log(1 + z_n(m)) - \sum_{n=n_0}^{\infty} \log(1 + z_n) \right| < \epsilon,$$

y esto significa que

$$\lim_m \sum_{n=n_0}^m \log(1 + z_n(m)) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \log(1 + z_n).$$

Aplicando la función exponencial resulta que

$$\lim_m \prod_{n=n_0}^m (1 + z_n(m)) = \prod_{n=n_0}^{\infty} (1 + z_n),$$

donde hemos usado el teorema 8.3, que nos garantiza que la serie de los logaritmos es un logaritmo del producto. Por otro lado

$$\lim_m \prod_{n=0}^{n_0-1} (1 + z_n(m)) = \prod_{n=0}^{n_0-1} (1 + z_n),$$

y multiplicando las dos sucesiones obtenemos la igualdad del enunciado. ■

A continuación probamos un criterio similar a 8.5, pero que es aplicable a productos no absolutamente convergentes:

**Teorema 8.7** Si una serie  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  es convergente y la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n^2$  es absolutamente convergente, entonces el producto  $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + z_n)$  es convergente.

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que  $\lim_n z_n = 0$  y, como la convergencia de series y productos depende únicamente de las colas correspondientes, no perdemos generalidad si suponemos que  $|z_n| \leq 1/2$  para todo  $n$ . De acuerdo con el teorema 8.3, basta probar que la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \log(1 + z_n)$  es convergente.

Sabemos que

$$\log(1 + z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} z^k = z + z^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} z^{k-2} = z + z^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+2} z^k.$$

Así pues,  $\log(1 + z) = z + z^2 f(z)$ , donde  $f$  es una función continua en el disco cerrado  $\bar{D}_{1/2}$ , donde, por el teorema de Weierstrass, la función continua  $|f|$  alcanza un valor máximo  $M$ . Entonces

$$\log(1 + z_n) = z_n + z_n^2 f(z_n)$$

y la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n^2 f(z_n)$  converge absolutamente, pues  $|z_n^2 f(z_n)| \leq |z_n|^2 M$  y la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|^2$  converge por hipótesis. Por lo tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \log(1 + z_n) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n + \sum_{n=0}^{\infty} z_n^2 f(z_n)$$

es convergente. ■

**Ejemplo 8.8** Si  $\chi$  es un carácter de Dirichlet no principal, el producto

$$\prod_p \left( 1 + \frac{\chi(p)}{p} \right)$$

es convergente.

En efecto, basta aplicar el teorema anterior teniendo en cuenta que la serie

$$\sum_p \frac{\chi(p)}{p}$$

converge por 7.29 y la serie

$$\sum_p \frac{\chi(p^2)}{p^2}$$

es claramente absolutamente convergente. ■

Para terminar con la teoría general sobre productos infinitos, vamos a ver una versión para productos del criterio de mayoración de Weierstrass:

**Teorema 8.9** Dada una sucesión de funciones continuas  $f_n : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  y una sucesión  $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$  de números reales tal que  $|f_n(z)| \leq M_n$  para todo  $z \in D$  y de modo que la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$  es convergente, entonces el producto  $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + f_n(z))$  es absolutamente convergente y la función  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(z) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + f_n(z))$  es continua.

DEMOSTRACIÓN: Como  $\lim_n M_n = 0$ , existe un  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$ , entonces  $M_n < 1/2$ , luego  $|f_n(z)| < 1/2$ , y en la prueba del teorema 8.5 hemos visto que

$$|\log(1 + f_n(z))| \leq \frac{3}{2}|f_n(z)| \leq \frac{3}{2}M_n,$$

luego, por el criterio de mayoración de Weierstrass 3.7, la serie

$$L(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \log(1 + f_n(z))$$

converge absolutamente a una función continua en  $D$ , y el teorema 8.3 nos da que

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + f_n(z)) = e^{L(z)},$$

luego también es una función continua en  $D$ . ■

**Ejemplo 8.10** El teorema anterior nos asegura que el producto infinito

$$S(z) = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$$

converge absolutamente a una función continua en todo el plano complejo.

En efecto, basta probar que define una función continua en cada disco  $D_R$ , pero si  $z \in D_R$ , es decir, si  $|z| < R$ , entonces

$$\left| -\frac{z^2}{k^2} \right| \leq \frac{R}{k^2}$$

y la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} (R/k^2)$  es convergente, luego basta aplicar el teorema anterior. ■

Notemos que la función  $S(z)$  se anula exactamente en los números enteros. Dedicamos la sección siguiente a demostrar que es la función más natural en la que podemos pensar que tenga esta propiedad.

## 8.2 La factorización del seno

Vamos a probar el siguiente teorema de Euler:

**Teorema 8.11** Para todo número complejo  $z$ , se cumple que

$$\operatorname{sen} z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right) = z \left(1 - \frac{z}{\pi}\right) \left(1 + \frac{z}{\pi}\right) \left(1 - \frac{z}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{z}{2\pi}\right) \cdots$$

DEMOSTRACIÓN: Partimos de la relación

$$i \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = \lim_n \frac{1}{2} \left( \left(1 + \frac{iz}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{iz}{n}\right)^n \right),$$

donde hemos aplicado el teorema 4.6. Vamos a estudiar los polinomios

$$p_n(z) = \frac{1}{2i} \left( \left(1 + \frac{iz}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{iz}{n}\right)^n \right).$$

Por simplicidad vamos a suponer que  $n = 2m + 1$  es impar. Se cumple que  $p_n(z) = 0$  si y sólo si

$$\left( \frac{1 + iz/n}{1 - iz/n} \right)^n = 1$$

(notemos que el denominador no puede anularse, porque entonces sería  $iz = n$  y no sería  $p_n(z) = 0$ ), luego

$$1 + \frac{iz}{n} = \zeta \left(1 - \frac{iz}{n}\right),$$

donde  $\zeta^n = 1$ , y despejando llegamos a

$$z = \frac{n(\zeta - 1)}{i(\zeta + 1)}.$$

Expresando  $\zeta = e^{i\theta}$ , donde  $\theta = 2k\pi/(2m + 1)$ , con  $-m \leq k \leq m$ , tenemos que

$$\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} = \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} = \frac{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}}{e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}} = \frac{2i \operatorname{sen}(\theta/2)}{2 \cos(\theta/2)} = i \tan \frac{\theta}{2}.$$

En definitiva, las raíces de  $p_n(z)$  son los  $n$  números

$$(2m + 1) \tan \frac{k\pi}{2m + 1}, \quad -m \leq k \leq m.$$

Notemos que son todos distintos dos a dos y, como  $p_n$  tiene grado  $n$ , son todas las raíces, por lo que

$$\begin{aligned} p_{2m+1}(z) &= Cz \prod_{\pm k=1}^m \left(1 - \frac{z}{(2m+1) \tan(k\pi/(2m+1))}\right) \\ &= Cz \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{z^2}{(2m+1)^2 \tan^2(k\pi/(2m+1))}\right). \end{aligned}$$

Ahora bien, de la definición de  $p_n(z)$  (desarrollando los binomios) se sigue que el coeficiente de  $z$  vale 1, y en la expresión que acabamos de encontrar el producto tiene término independiente 1, luego el coeficiente de  $z$  de la expresión completa es  $C$ , luego  $C = 1$ . Así pues:

$$p_{2m+1}(z) = z \prod_{k=1}^m \left( 1 - \frac{z^2}{(2m+1)^2 \tan^2(k\pi/(2m+1))} \right).$$

Esta expresión muestra que  $p_{2m+1}(z)$  es un polinomio con coeficientes reales. Observemos ahora que

$$\lim_m (2m+1)^2 \tan^2 \left( \frac{k\pi}{2m+1} \right) = \lim_m k^2 \pi^2 \left( \frac{\tan(k\pi/(2m+1))}{k\pi/(2m+1)} \right)^2 = k^2 \pi^2,$$

donde hemos usado que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$$

Ahora basta aplicar el teorema 8.6. Para ello sólo tenemos que observar que, en virtud de la desigualdad (5.18), es decir,  $t \leq \tan t$ , para  $0 \leq t \leq \pi/2$ , se cumple que

$$\left| \frac{z^2}{(2m+1)^2 \tan^2(k\pi/(2m+1))} \right| \leq \frac{|z|^2}{k^2 \pi^2}$$

y la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|^2}{k^2 \pi^2}$$

es convergente. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= \lim_m p_{2m+1}(z) = z \lim_m \prod_{k=1}^m \left( 1 - \frac{z^2}{(2m+1)^2 \tan^2(k\pi/(2m+1))} \right) \\ &= z \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2} \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

De aquí se deducen muchas consecuencias. Observemos en primer lugar que una fórmula equivalente es

$$\operatorname{sen} \pi z = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{k^2} \right), \quad (8.1)$$

con lo que ya tenemos identificada la función  $S(z)$  que considerábamos al final de la sección precedente.

En segundo lugar, conviene destacar que la factorización del seno muestra explícitamente que  $\operatorname{sen} z = 0$  equivale a que  $z = k\pi$ , para cierto entero  $k$ .

En tercer lugar, si hacemos  $z = \pi/2$  en la fórmula de Euler obtenemos:

$$1 = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{(2k)^2} \right) = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k) \cdot (2k)},$$

y despejando queda:

**Teorema 8.12 (Fórmula de Wallis)**

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k) \cdot (2k)}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots$$

Como en el caso de la fórmula de Leibniz, la convergencia es bastante lenta. Por ejemplo, con  $k = 1000$  obtenemos la aproximación  $\pi \approx 3.14080$ , con sólo dos cifras decimales exactas. Con  $k = 100\,000$  obtenemos  $\pi \approx 3.141584$ , con cuatro cifras exactas. Con  $k = 1\,000\,000$  obtenemos  $\pi \approx 3.1415918$ , con cinco cifras exactas.

La fórmula de Wallis es equivalente a este límite:

$$\lim_n \frac{2^{4n+1}(n!)^4}{((2n)!)^2(2n+1)} = \pi. \quad (8.2)$$

En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \lim_n \frac{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 3} \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 5} \cdots \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \lim_n \frac{2^{2n}(n!)^2}{(1 \cdot 3 \cdots (2k-1))(3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1))} \\ &= \lim_n \frac{2^{2n}(n!)^2}{\frac{(2n)!}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \cdot \frac{(nk)!}{2 \cdot 4 \cdots 2n} (2n+1)} = \lim_n \frac{2^{2n}(n!)^2}{\left(\frac{(2n)!}{2^n n!}\right)^2 (2n+1)} \\ &= \lim_n \frac{2^{4n}(n!)^4}{((2n)!)^2(2n+1)}. \end{aligned}$$

Si hacemos  $z = \pi i$  en la fórmula de Euler obtenemos

$$\frac{e^{-\pi} - e^{\pi}}{2i} = \operatorname{sen} \pi i = \pi i \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right),$$

y así hemos calculado el producto

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}. \quad (8.3)$$

Si ahora sustituimos  $z$  por  $\pi/2 - z$  obtenemos:

$$\cos z = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{2z}{\pi}\right) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(\pi/2 - z)^2}{k^2 \pi^2}\right).$$

Ahora observamos que

$$1 - \frac{(\pi/2 - z)^2}{k^2 \pi^2}$$

es un polinomio de grado 2 cuyas raíces son  $(1 \pm 2k)\pi/2$ , y su coeficiente director es  $-1/k^2\pi^2$ , luego

$$\begin{aligned} 1 - \frac{(\pi/2 - z)^2}{k^2\pi^2} &= -\frac{1}{k^2\pi^2} \left( z + \frac{2k-1}{2}\pi \right) \left( z - \frac{2k+1}{2}\pi \right) \\ &= \frac{1}{k^2\pi^2} \left( \frac{2k-1}{2}\pi + z \right) \left( \frac{2k+1}{2}\pi - z \right) \\ &= \frac{(2k-1)(2k+1)\pi^2}{4k^2\pi^2} \left( 1 + \frac{2z}{(2k-1)\pi} \right) \left( 1 - \frac{2z}{(2k+1)\pi} \right) \\ &= \frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2} \left( 1 + \frac{2z}{(2k-1)\pi} \right) \left( 1 - \frac{2z}{(2k+1)\pi} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2} \left( 1 - \frac{2z}{\pi} \right) \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{2z}{(2k-1)\pi} \right) \left( 1 - \frac{2z}{(2k+1)\pi} \right) \\ &= \left( 1 - \frac{2z}{\pi} \right) \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{2z}{(2k-1)\pi} \right) \left( 1 - \frac{2z}{(2k+1)\pi} \right), \end{aligned}$$

donde hemos usado la fórmula de Wallis. El producto al que hemos llegado es

$$\left( 1 - \frac{2z}{\pi} \right) \left( 1 + \frac{2z}{\pi} \right) \left( 1 - \frac{2z}{3\pi} \right) \left( 1 + \frac{2z}{3\pi} \right) \left( 1 - \frac{2z}{5\pi} \right) \left( 1 + \frac{2z}{5\pi} \right) \left( 1 - \frac{2z}{7\pi} \right) \dots$$

con lo que casi tenemos probado el teorema siguiente:

**Teorema 8.13** *Para todo número complejo  $z$ , se cumple que*

$$\begin{aligned} \cos z &= \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{4z^2}{(2k-1)^2\pi^2} \right) \\ &= \left( 1 - \frac{z}{\pi/2} \right) \left( 1 + \frac{z}{\pi/2} \right) \left( 1 - \frac{z}{3\pi/2} \right) \left( 1 + \frac{z}{3\pi/2} \right) \dots \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN: Sólo falta observar que, si llamamos  $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$  a la sucesión de productos parciales del producto infinito al que hemos llegado a partir de  $\cos z$ , se cumple que los productos parciales del producto infinito del enunciado son

$$\left( 1 - \frac{2z}{\pi} \right) P_k \left( 1 - \frac{2z}{(2k+1)\pi} \right)^{-1},$$

luego

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{4z^2}{(2k-1)^2\pi^2} \right) &= \lim_k \left( 1 - \frac{2z}{\pi} \right) P_k \left( 1 - \frac{2z}{(2k+1)\pi} \right)^{-1} \\ &= \left( 1 - \frac{2z}{\pi} \right) \prod_{k=1}^{\infty} P_k = \cos z. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Por ejemplo, si hacemos  $z = \pi/4$  obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(4k-2)^2}\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{((4k-2)-1)((4k-2)+1)}{(4k-2)^2},$$

luego

$$\sqrt{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(4k-2)^2}{(4k-3)(4k-1)} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{11} \cdots$$

**Ejercicio:** Probar que

$$\operatorname{senh} z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right), \quad \operatorname{cosh} z = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right).$$

### 8.3 La función factorial

Observemos que el producto

$$\operatorname{sen} z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right) = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k\pi}\right) \left(1 - \frac{z}{k\pi}\right)$$

es absolutamente convergente (por el teorema 8.5) entendiendo que el primer factor (aparte de la  $z$ ) inicial es

$$\left(1 - \frac{z}{\pi}\right) \left(1 + \frac{z}{\pi}\right),$$

y el segundo es

$$\left(1 + \frac{z}{2\pi}\right) \left(1 - \frac{z}{2\pi}\right),$$

etc. En cambio, si consideramos el producto infinito

$$\operatorname{sen} z = z \left(1 + \frac{z}{\pi}\right) \left(1 - \frac{z}{\pi}\right) \left(1 + \frac{z}{2\pi}\right) \left(1 - \frac{z}{2\pi}\right) \cdots$$

cuyo primer factor (aparte de la  $z$ ) es  $1 - z/\pi$ , y cuyo segundo factor es  $1 + z/\pi$ , etc., entonces es un producto convergente (a  $\operatorname{sen} z$ ), pero no absolutamente convergente, pues la serie

$$\frac{z}{\pi} - \frac{z}{\pi} + \frac{z}{2\pi} - \frac{z}{2\pi} + \frac{z}{3\pi} - \frac{z}{3\pi} + \cdots$$

no es absolutamente convergente. Esto hace que podamos reordenar los factores del producto siempre que mantengamos cada factor  $1 - z/(k\pi)$  al lado del factor  $1 + z/(k\pi)$  correspondiente, porque si los separamos el producto puede converger a otro valor, o incluso divergir. Tampoco podemos afirmar que

$$\operatorname{sen} z = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k\pi}\right) z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k\pi}\right),$$

porque los dos productos infinitos que aparecen en esta igualdad son divergentes.

Weierstrass encontró la forma de separar los factores para poder reordenarlos con total libertad. La clave está en esta desigualdad elemental:

**Teorema 8.14** Si  $|z| \leq 1$ , entonces

$$|(1-z)e^z - 1| \leq |z|^2,$$

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que

$$\begin{aligned} 1 - (1-z)e^z &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\ &= -z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+2)!} + z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)z^n}{(n+2)!}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|1 - (1-z)e^z| \leq |z|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{(n+2)!},$$

pero el mismo cálculo anterior particularizado a  $z = 1$  nos da que la última serie es  $1 - (1-1)e^1 = 1$ . ■

Con esto podemos probar:

**Teorema 8.15** El producto infinito

$$P(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}$$

converge absolutamente a una función continua en todo el plano complejo.

DEMOSTRACIÓN: Fijemos  $R > 0$  y tomemos  $z$  en el disco  $D_R$ . Tenemos que

$$\left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k} = 1 + \left(\left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k} - 1\right)$$

y por el teorema anterior

$$\left|\left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k} - 1\right| \leq \frac{|z|^2}{k^2} \leq \frac{R}{k^2}.$$

El teorema 8.9 nos asegura que el producto infinito converge absolutamente a una función continua en cada disco  $D_R$ , luego converge a una función continua en todo el plano complejo. ■

Así pues,

$$\begin{aligned} P(z)zP(-z) &= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k} z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k}\right) e^{z/k} = \\ &= z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \left(1 - \frac{z}{k}\right) e^{-z/k} e^{z/k} = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right) = \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} \pi z \end{aligned}$$

o, equivalentemente,

$$P(z/\pi)zP(-z/\pi) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k\pi}\right) e^{-z/k\pi} z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k\pi}\right) e^{z/k\pi} = \operatorname{sen} z.$$

Aquí todos los productos son absolutamente convergentes, luego podemos afirmar que

$$\operatorname{sen} z = z \left(1 + \frac{z}{\pi}\right) e^{-z/\pi} \left(1 - \frac{z}{\pi}\right) e^{z/\pi} \left(1 + \frac{z}{2\pi}\right) e^{-z/2\pi} \dots$$

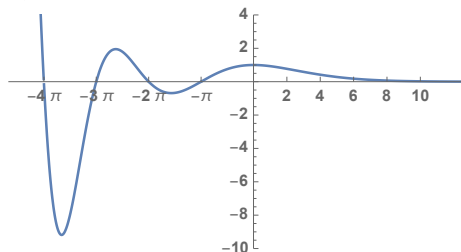
entendiendo que ahora cada término del producto infinito es de la forma

$$\left(1 \pm \frac{z}{k\pi}\right) e^{\mp z/k\pi},$$

sin necesidad de agrupar los factores correspondientes a  $\pm k$ . Si lo hacemos, las exponenciales se cancelan, pero si no lo hacemos podemos reordenar los factores a voluntad, o quedarnos únicamente con una parte de ellos sin dejar de tener un producto absolutamente convergente, etc.

La gráfica muestra la función

$$P(z/\pi) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k\pi}\right) e^{-z/k\pi},$$



que se anula exactamente en los múltiplos negativos de  $\pi$ , mientras que es estrictamente positiva para  $x > -\pi$ .

Hemos probado que es “la mitad de la función  $\operatorname{sen} z$ ”, de modo que sólo comparte sus oscilaciones en el semieje real negativo, y éstas tiene cada vez mayor amplitud. (Es fácil probar que, en efecto, como muestra la gráfica, la función  $P(z/\pi)$  cambia de signo en cada múltiplo negativo de  $\pi$ .)

Vamos a analizar con más detalle este “medio seno”. Por simplicidad consideramos  $P(z)$ , sin dividir la variable entre  $\pi$ . Vamos a ver que podemos “extirpar” las exponenciales que hemos tenido que insertar para asegurar la convergencia:

$$\begin{aligned} P(z) &= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k} = \lim_n \prod_{k=1}^n \frac{z+k}{k} e^{-z/k} = \\ &= \lim_n \frac{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}{n!} e^{-z(1+1/2+\cdots+1/n)}. \end{aligned}$$

Los dos factores divergen con  $n$ , pero podemos hacer que el segundo converja (luego también el primero) si a la suma de los inversos de los números naturales le restamos un  $\log n$ , es decir, si multiplicamos la exponencial por  $e^{z \log n} = n^z$ . Así pues:

$$\begin{aligned} P(z) &= \lim_n \frac{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}{n! n^z} e^{-z(1+1/2+\cdots+1/n-\log n)} \\ &= e^{-\gamma z} \lim_n \frac{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}{n! n^z}. \end{aligned}$$

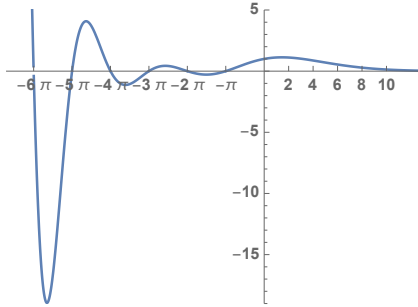
Así hemos probado la existencia del límite

$$P^*(z) = \lim_n \frac{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}{n!n^z} = e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k},$$

que define una función continua en el plano complejo que sólo se anula en los enteros negativos y de modo que

$$\frac{1}{\pi} \operatorname{sen} \pi z = P^*(z)zP^*(-z), \quad \text{o} \quad \operatorname{sen} z = P^*(z/\pi)zP^*(-z/\pi), \quad (8.4)$$

ya que las exponenciales que hemos añadido en el primer y tercer factor se cancelan mutuamente.



La figura muestra la gráfica de la función  $P^*(z/\pi)$ . Vemos que es muy similar a la de  $P(z/\pi)$ , pero vamos a ver que  $P^*(z)$  satisface una ecuación funcional muy sencilla. Para ello calculamos:

$$\begin{aligned} P^*(z-1) &= \lim_n \frac{z(z+1)(z+2)\cdots(z-1+n)}{n!n^{z-1}} \\ &= z \lim_n \frac{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}{n!n^{z-1}} \frac{n}{z+n} = zP^*(z), \end{aligned}$$

pues el último cociente tiende a 1 con  $n$ . En suma, hemos demostrado que

$$P^*(z-1) = zP^*(z).$$

La ecuación resulta más natural en la forma:

$$\frac{1}{P^*(z)} = z \frac{1}{P^*(z-1)}.$$

En efecto, Gauss le dio un nombre a la inversa de la función  $P^*$ :

**Definición 8.16** Llamaremos *función factorial* a la función<sup>1</sup>

$$\Pi(z) = \lim_n \frac{n!n^z}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} = e^{-\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} e^{z/k}.$$

De este modo  $\Pi(z) = 1/P^*(z)$  es una función continua en todo el plano complejo menos en los enteros negativos, donde se anula  $P^*(z)$ .

Hemos probado que la función factorial cumple la ecuación funcional:

$$\Pi(z) = z\Pi(z-1), \quad (8.5)$$

<sup>1</sup>Fue Gauss quien llamó  $\Pi(z)$  a la función factorial, pero más adelante Legendre definió  $\Gamma(z) = \Pi(z-1)$  y hoy en día es más habitual encontrar en los textos la función gamma que la función factorial.

lo que unido a que  $\Pi(0) = 1$  (pues claramente  $P(0) = P^*(0) = 1$ ), se traduce en que, para todo número natural  $n$ , se cumple que

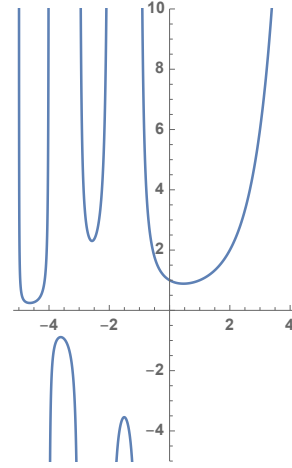
$$\Pi(n) = n!$$

Así pues, la función factorial es una función que extiende a la sucesión de los factoriales de los números naturales de modo que cumple la ecuación (8.5) para todos los números complejos, no sólo para los números naturales. Además, de (8.4) se sigue que cumple la ecuación funcional

$$\Pi(z)\Pi(-z) = \frac{\pi z}{\operatorname{sen} \pi z}. \quad (8.6)$$

La figura muestra la gráfica de la función factorial.

Resulta natural preguntarse si la ecuación (8.5), junto con  $\Pi(0) = 1$ , determina la función factorial, pero la respuesta es claramente negativa: El producto de  $\Pi(z)$  por cualquier función periódica  $f$  de periodo 1 que cumpla  $f(0) = 1$  cumple las mismas condiciones. Sin embargo es fácil añadir una propiedad más que sólo cumple la función factorial:



**Teorema 8.17** *La función factorial es la única función definida sobre todos los números complejos distintos de los enteros negativos que cumple:*

1.  $\Pi(z + 1) = (z + 1)\Pi(z)$ ,
2.  $\lim_n \frac{\Pi(z + n)}{n! n^z} = 1$ .

DEMOSTRACIÓN: Ciertamente,

$$\lim_n \frac{\Pi(z + n)}{n! n^z} = \lim_n \frac{(z + n) \cdots (z + 1)\Pi(z)}{n! n^z} = \frac{\Pi(z)}{\Pi(z)} = 1.$$

Si una función  $F$  cumple estas mismas dos propiedades, entonces

$$1 = \lim_n \frac{F(z + n)}{\Pi(z + n)} = \lim_n \frac{(z + n) \cdots (z + 1)F(z)}{(z + n) \cdots (z + 1)\Pi(z)} = \frac{F(z)}{\Pi(z)},$$

luego  $F(z) = \Pi(z)$ . ■

Para terminar observamos que haciendo  $z = 1/2$  en (8.6) resulta que

$$\Pi(1/2)\Pi(-1/2) = \frac{\pi}{2},$$

pero por (8.5) tenemos que  $\Pi(1/2) = (1/2)\Pi(-1/2)$ , luego  $2\Pi(1/2)^2 = \pi$ , luego

$$\Pi(1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \Pi(-1/2) = \sqrt{\pi}.$$

## 8.4 Series de Dirichlet

Las series de Dirichlet son una clase de series que, como las series de potencias, tienen un comportamiento especialmente satisfactorio y permiten definir fácilmente funciones de variable compleja de interés en la teoría de números.

**Definición 8.18** La *serie de Dirichlet* determinada por una sucesión  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  de números complejos es una serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$$

Conviene observar un hecho general sobre las potencias  $n^z$ , donde  $n$  es un número natural y  $z = x + yi$ , y es que

$$|n^z| = |e^{x \log n + iy \log n}| = |e^{x \log n} e^{iy \log n}| = e^{x \log n} = n^x.$$

El resultado básico sobre convergencia de series de Dirichlet que vamos a usar es el siguiente:

**Teorema 8.19** Si una serie de Dirichlet converge absolutamente en un punto  $z_0 = x_0 + y_0 i$ , entonces converge absolutamente en todos los puntos del semiplano  $\operatorname{Re} z > x_0$ , y la función

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$$

es continua en dicho semiplano.

DEMOSTRACIÓN: Por hipótesis, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{x_0}}$$

es convergente, luego si llamamos  $M_n = |a_n|/n^{x_0}$ , para todo  $z$  cuya parte real cumpla  $x > x_0$  se cumple que

$$\left| \frac{a_n}{n^z} \right| = \frac{|a_n|}{n^x} < \frac{|a_n|}{n^{x_0}} = M_n,$$

por lo que el criterio de mayoración de Weierstrass 3.7 nos da la conclusión. ■

**Definición 8.20** La *abscisa de convergencia absoluta* de una serie de Dirichlet

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$$

es el ínfimo  $\sigma_a$  del conjunto de los números reales  $x$  tales que la serie converge absolutamente en  $x$ , entendiéndose que  $\sigma_a = +\infty$  si dicho conjunto es vacío y que  $\sigma_a = -\infty$  si no está acotado inferiormente.

El *semiplano de convergencia absoluta* de la serie es el conjunto de los números complejos  $z$  que cumplen  $\operatorname{Re} z > \sigma_a$ , entendiéndose que es vacío si  $\sigma_a = +\infty$  y que es todo el plano complejo si  $\sigma_a = -\infty$ .

El teorema anterior implica que toda serie de Dirichlet converge absolutamente a una función continua en su semiplano de convergencia absoluta (supuesto que no sea vacío). En efecto, si  $z$  cumple  $\operatorname{Re} z > \sigma_a$ , por definición de la abscisa de convergencia absoluta, podemos tomar un número real  $\operatorname{Re} z > x > \sigma_a$  tal que la serie converge absolutamente en  $x$ , y por el teorema anterior la serie define una función continua en el semiplano  $\operatorname{Re} z > x$ . Como dicho semiplano contiene todos los puntos de alrededor de  $z$ , la función  $f$  definida por la serie sigue siendo continua en  $z$  cuando la consideramos definida en todo su semiplano de convergencia absoluta.

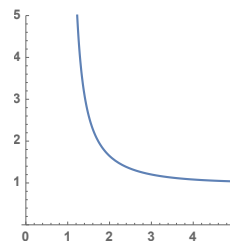
**Ejemplo: la función dseta** La serie de Dirichlet más famosa es la que Gauss definió como

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \dots$$

aunque actualmente se la conoce como *función dseta de Riemann*.

El teorema 4.9 prueba que la serie converge en todos los números reales  $x > 1$ , (y la convergencia es absoluta, pues sus términos son números reales positivos), pero sabemos que diverge en  $x = 1$ , por lo que concluimos que su abscisa de convergencia absoluta es  $\sigma_a = 1$  y  $\zeta(z)$  es una función continua en el semiplano  $\operatorname{Re} z > 1$ .

Tras la definición 6.17 obtuvimos una expresión (6.6) para  $\zeta(2k)$ . La figura muestra la gráfica de la función dseta. Ya sabemos que es continua, y el hecho de que es estrictamente decreciente se sigue fácilmente de la definición. En cambio, no es tan obvio que sus límites en 1 y en  $+\infty$  son los que sugiere la figura. Para probarlo consideramos otra serie de Dirichlet, conocida como la *función eta de Dirichlet* o función dseta alternada:



$$\eta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z} = 1 - \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} - \frac{1}{4^z} + \dots \quad (8.7)$$

Puesto que está mayorada por la función dseta y no converge absolutamente en  $x = 1$ , es claro que su abscisa de convergencia es también  $\sigma_a = 1$ . Vamos a probar que su relación con la función dseta es:

$$\eta(z) = (1 - 2^{1-z})\zeta(z). \quad (8.8)$$

En efecto, separando los términos pares de los impares tenemos:

$$\begin{aligned} \eta(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^z} \\ &= -\frac{1}{2^z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^z} = -\frac{1}{2^z} \zeta(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^z}. \end{aligned}$$

Ahora hacemos lo mismo con la función dseta:

$$\begin{aligned}\zeta(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^z} \\ &= \frac{1}{2^z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^z} = \frac{1}{2^z} \zeta(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^z}.\end{aligned}$$

Restando las dos ecuaciones llegamos a que

$$\zeta(z) - \eta(z) = \frac{2}{2^z} \zeta(z),$$

de donde llegamos a (8.8).

Pero, sobre números reales, la serie que define a  $\eta$  es alternada, luego, tal y como vimos en la prueba del criterio de Leibniz 2.9, se cumple que

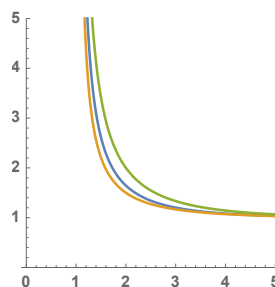
$$1 - \frac{1}{2^x} < \eta(x) < 1,$$

y como, por (8.8), tenemos que

$$\zeta(x) = \frac{\eta(x)}{1 - 2^{1-x}},$$

concluimos que

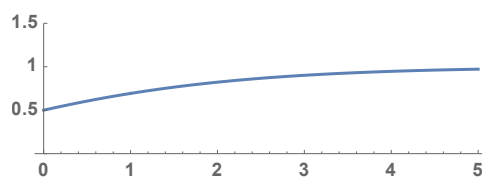
$$\frac{1 - 2^{-x}}{1 - 2^{1-x}} < \zeta(x) < \frac{1}{1 - 2^{1-x}}.$$



(la figura muestra las gráficas de estas tres funciones), y estas desigualdades prueban que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \zeta(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \eta(x) = 1.$$

Observemos que, por el criterio de Leibniz, la serie que define la función eta converge (aunque no absolutamente) en el intervalo  $]0, +\infty[$ . He aquí su gráfica:



Vemos que es una función continua, pero sólo hemos probado que lo es en  $]1, +\infty[$ . El teorema 8.31 implica que  $\eta(x)$  es continua en  $]0, +\infty[$  (y, de hecho, en todo el semiplano complejo  $\operatorname{Re} z > 0$ ), pero ahora vamos a probar lo único que realmente necesitamos, y es que existe

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \eta(x) = \log 2.$$

En efecto, dado  $\epsilon > 0$ , podemos tomar un  $k_0$  tal que si  $k \geq k_0$ , entonces

$$\left| \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} - \log 2 \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por otra parte, como la serie que define a eta es alternada:

$$\sum_{n=1}^{2k_0} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} < \eta(x) < \sum_{n=1}^{2k_0+1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}.$$

Tomamos  $\delta > 0$  tal que si  $0 < x - 1 < \delta$ , entonces

$$\left| \sum_{n=1}^{2k_0} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} - \sum_{n=1}^{2k_0} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \left| \sum_{n=1}^{2k_0+1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} - \sum_{n=1}^{2k_0+1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Así:

$$\begin{aligned} \log 2 - \epsilon &< \sum_{n=1}^{2k_0} \frac{(-1)^{n+1}}{n} - \frac{\epsilon}{2} < \sum_{n=1}^{2k_0} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} < \eta(x) < \\ &\sum_{n=1}^{2k_0+1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} < \sum_{n=1}^{2k_0+1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{\epsilon}{2} < \log 2 + \epsilon, \end{aligned}$$

luego

$$|\eta(x) - \log 2| < \epsilon.$$

De aquí deducimos una consecuencia sobre la función dseta:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)\zeta(x) = 1. \quad (8.9)$$

En efecto, por (8.8) tenemos que

$$\eta(x) = \frac{1 - 2^{1-x}}{x-1} (x-1)\zeta(x),$$

y basta tomar límites teniendo en cuenta que, por (4.8):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 2^{1-x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^{1-x} - 1}{1-x} = \log 2.$$

Por último observamos que la relación (8.8), junto con (6.6), nos da que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{2k}} = 1 - \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} - \frac{1}{4^{2k}} + \dots = (-1)^{k+1} (1 - 2^{1-2k}) \frac{2^{2k-1} \pi^{2k} B_{2k}}{(2k)!}.$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots &= \frac{\pi^2}{12}, \\ \frac{1}{1^4} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \dots &= \frac{7\pi^4}{720}. \end{aligned}$$

■

En realidad hay una razón teórica por la que el límite en  $+\infty$  de las funciones dseta y eta debía ser 1:

**Teorema 8.21** Consideremos una función

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$$

definida por una serie de Dirichlet. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a_1.$$

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = 0.$$

Tomemos  $c > \sigma_a$ . Entonces si  $x > c$  se cumple

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^x} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^c} \frac{1}{n^{x-c}} \leq \frac{1}{2^{x-c}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^c} = \frac{K}{2^x},$$

luego el límite es 0. ■

Refinando el argumento podemos probar que los coeficientes de una serie de Dirichlet convergente están determinados por la función que define:

**Teorema 8.22** Sean  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$  y  $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^z}$  dos funciones definidas por series de Dirichlet. Supongamos que existe una sucesión  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  de manera que  $\lim_k x_k = +\infty$  y  $f(x_k) = g(x_k)$  para todo  $k$ . Entonces  $a_n = b_n$  para todo  $n$ .

DEMOSTRACIÓN: La función  $f - g$  está definida por la serie de Dirichlet con coeficientes  $a_n - b_n$  y se anula en todos los puntos  $x_k$ . Por lo tanto, basta probar que si una función  $f$  definida por una serie de Dirichlet cumple  $f(x_k) = 0$  para todo  $k$ , entonces sus coeficientes son todos nulos.

En caso contrario, sea  $r$  el menor natural tal que  $a_r \neq 0$ . Por el teorema anterior  $a_1 = 0$ , luego  $r \geq 2$ .

$$f(x) = \frac{a_r}{r^x} + \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}.$$

Sea  $c > \sigma_a$ . Evaluamos en  $x_k$  tomando  $k$  suficientemente grande para que  $s_k > c$ . Así

$$a_r = -r^{s_k} \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{s_k}}.$$

Tomando módulos queda

$$|a_r| \leq r^{s_k} \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^c} \frac{1}{n^{s_k-c}} \leq \frac{r^{s_k}}{(r+1)^{s_k-c}} \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^c} = \left( \frac{r}{r+1} \right)^{s_k} K,$$

y como esto es cierto para todo  $k$  suficientemente grande, concluimos que  $a_r = 0$ , en contradicción con lo supuesto. ■

**Series de Dirichlet y funciones aritméticas** Observemos que cada función aritmética  $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  define una serie de Dirichlet

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^z}.$$

Recíprocamente, los coeficientes de una serie de Dirichlet determinan una función aritmética. Es obvio que la suma de dos series de Dirichlet es una serie de Dirichlet, concretamente, la definida por la suma de las funciones aritméticas que definen a las series dadas. Para el producto también es cierto, pero requiere algún cálculo:

**Teorema 8.23** Sean  $f$  y  $g$  dos funciones aritméticas cuyas series de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^z} \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^z}$$

sean absolutamente convergentes para  $\operatorname{Re} z > x_0$ . Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f * g)(n)}{n^z}, \quad \text{para } \operatorname{Re} z > x_0,$$

donde  $f * g$  es el producto de convolución de  $f$  y  $g$ .

DEMOSTRACIÓN: Es una consecuencia de 2.19 y de las propiedades de las series absolutamente convergentes. En principio:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(k)}{k^z} \frac{g(n-k)}{(n-k)^z}$$

Si llamamos

$$a_{mn} = \frac{f(m)}{m^z} \frac{g(n)}{n^z},$$

esta serie se calcula como

$$a_{11} + (a_{12} + a_{21}) + (a_{13} + a_{22} + a_{31}) + (a_{14} + a_{23} + a_{32} + a_{41}) + \dots$$

pero podemos aplicar la propiedad asociativa infinita 2.29, pues en este caso los conjuntos  $A_k$  son finitos (las series que determinan son trivialmente absolutamente convergentes) y la suma sobre  $k$  es absolutamente convergente porque así lo afirma 2.19. Como consecuencia, la serie producto es igual a

$$a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{13} + a_{22} + a_{31} + a_{14} + a_{23} + a_{32} + a_{41} + \dots$$

Pero ahora podemos aplicar nuevamente 2.29 tomando como  $A_k$  el conjunto de los índices correspondientes a pares cuyo producto sea igual a  $k$ , es decir, si la serie anterior es  $c_1 + c_2 + c_3 + \dots$ , tomamos  $A_1 = \{1\}$ , que corresponde a  $c_1 = a_{11}$ ,  $A_2 = \{2, 3\}$ , que corresponde a  $c_2 = a_{12}$  y  $c_3 = a_{21}$ ,  $A_3 = \{4, 6\}$ , que

corresponde a  $c_4 = a_{13}$ ,  $c_6 = a_{31}$ ,  $A_4 = \{5, 7, 10\}$ , que corresponde a  $c_5 = a_{22}$ ,  $c_7 = a_{14}$  y  $c_{10} = a_{41}$ , etc. La conclusión es que la serie es también igual a

$$a_{11} + (a_{21} + a_{12}) + (a_{13} + a_{31}) + (a_{22} + a_{14} + a_{41}) + \dots$$

y esta serie es precisamente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} \frac{f(d)}{d^z} \frac{g(n/d)}{(n/d)^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f * g)(n)}{n^z}. \quad \blacksquare$$

**Observación** Ahora es claro que si  $f$  es una función aritmética tal que  $f(1) \neq 0$  y las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^x}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{-1}(n)}{n^x}$$

convergen en un mismo semiplano, entonces las funciones continuas que determinan son mutuamente inversas, pues, según el teorema 8.23,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{-1}(n)}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1(n)}{n^x} = 1.$$

En general no podemos asegurar que la segunda serie converja donde lo hace la primera, pero si  $f$  es completamente multiplicativa, el teorema 7.13 nos da que

$$\left| \frac{f^{-1}(n)}{n^x} \right| = \frac{|\mu(n)f(n)|}{n^x} = \frac{|f(n)|}{n^x},$$

luego la segunda serie converge absolutamente donde lo hace la primera o, dicho de otro modo, la abscisa de convergencia absoluta de la segunda serie es menor o igual que la de la primera.  $\blacksquare$

**Ejemplos** Como  $c_1^{-1} = \mu$ , tenemos que, si  $\operatorname{Re} z > 1$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z} = \frac{1}{\zeta(z)}.$$

En particular,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} \dots = \frac{6}{\pi^2}.$$

Como  $d = c_1 * c_1$ , donde  $d(n)$  es el número de divisores de  $n$ , tenemos también que, si  $\operatorname{Re} z > 1$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^z} = \zeta^2(z).$$

Por ejemplo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{4^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{4}{6^2} + \frac{2}{7^2} + \frac{4}{8^2} + \dots = \frac{\pi^4}{36}.$$

Si  $p^2$  es la función aritmética que vale 1 en los cuadrados perfectos y 0 en los demás números, es claro que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^2(n)}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2z}} = \zeta(2z).$$

La relación  $\lambda * c_1 = p^2$  nos determina la serie de Dirichlet definida por la función de Liouville:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^z} = \frac{\zeta(2z)}{\zeta(z)}.$$

En particular,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} + \dots = \frac{\pi^2}{15}.$$

Por otra parte, la relación  $\lambda^{-1} = |\mu|$  nos da que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^z} = \frac{\zeta(z)}{\zeta(2z)}.$$

Por ejemplo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} + \dots = \frac{15}{\pi^2}.$$

**Ejercicio:** Expresar la serie de Dirichlet asociada a la función  $\phi$  de euler en términos de la función dseta. ■

**Ejemplo 8.24** La probabilidad de que dos números naturales elegidos al azar sean primos entre sí es  $6/\pi^2$ .

Esta afirmación ha de entenderse como el límite en  $N$  de la probabilidad de que dos números naturales entre 1 y  $N$  elegidos al azar resulten ser primos entre sí, la cual a su vez se calcula por la ley de probabilidad de Laplace:

$$\frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}.$$

El número de casos posibles es obviamente  $N^2$ , mientras que el número de casos favorables puede calcularse como sigue:

Llamamos  $A_n$  al conjunto de todos los pares  $(m, n)$  de números naturales  $1 \leq m \leq n$  primos entre sí. Entonces  $A_n$  tiene  $\phi(n)$  elementos y la unión

$$\bigcup_{n \leq N} A_n$$

consta de todos los pares  $(m, n)$  de números naturales  $1 \leq m \leq n \leq N$  primos entre sí, y tiene  $\sum_{n \leq N} \phi(n)$  elementos.

En realidad queremos contar todos los pares  $(m, n)$  de números  $1 \leq m, n \leq N$  primos entre sí, pero sin exigir  $m \leq n$ , y es claro que hay

$$2 \sum_{n \leq N} \phi(n) - 1$$

tales pares, pues al multiplicar por 2 estamos contando dos veces el par  $(1, 1)$ , que es el único que tiene sus componentes iguales. Por lo tanto, la probabilidad que queremos calcular es

$$\lim_N \frac{1}{N^2} \left( 2 \sum_{n \leq N} \phi(n) - 1 \right)$$

o, equivalentemente, queremos probar que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \left( 2 \sum_{n \leq x} \phi(n) - 1 \right) = \frac{6}{\pi^2}.$$

Para ello observamos en primer lugar que

$$\sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{6}{\pi^2} + O(1/x).$$

En efecto, basta tener en cuenta que

$$\left| \frac{6}{\pi^2} - \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n^2} \right| = \left| \sum_{n > x} \frac{\mu(n)}{n^2} \right| \leq \sum_{n > x} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^2} = O(1/x),$$

por el ejemplo 7.5. Ahora usamos que  $N = \phi * c_1$ , por lo que  $\phi = \mu * N$ , es decir:

$$\sum_{n \leq x} \phi(n) = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} = \sum_{d \leq x} \sum_{m \leq x/d} \mu(d) m = \sum_{d \leq x} \mu(d) \sum_{m \leq x/d} m.$$

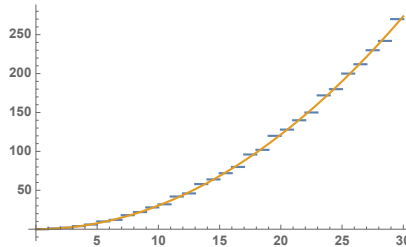
Si llamamos  $f(x) = \sum_{n \leq x} n - x^2/2$ , el ejemplo 7.4 nos da que  $|f(x)| \leq Cx$ , luego

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \phi(n) &= \sum_{d \leq x} \mu(d) \left( \frac{x^2}{2d^2} + f(x/d) \right) \leq \frac{x^2}{2} \sum_{d \leq x} \frac{\mu(d)}{d^2} + C \sum_{d \leq x} \frac{x}{d} \\ &= \frac{x^2}{2} \left( \frac{6}{\pi^2} + O(1/x) \right) + Cx(\log x + O(1)) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + O(x) + O(x \log x) + O(x), \end{aligned}$$

luego concluimos que

$$\sum_{n \leq x} \phi(n) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + O(x \log x).$$

Aquí tenemos otro ejemplo de aproximación cuyo error absoluto se hace arbitrariamente grande, pero cuyo error relativo tiende a 0. La figura muestra ambas gráficas.



Ahora la conclusión es inmediata:

$$\frac{1}{x^2} \left( 2 \sum_{n \leq x} \phi(n) - 1 \right) = \frac{6}{\pi^2} + \frac{2}{x^2} O(x \log x) - \frac{1}{x^2} = \frac{6}{\pi^2} + O\left(\frac{\log x}{x}\right) - \frac{1}{x^2}.$$

Obviamente el límite vale  $6/\pi^2$ . ■

## 8.5 Productos de Euler

El teorema siguiente conecta las series de Dirichlet con los productos infinitos y también con la aritmética de los números enteros. Notemos que en su prueba se usa de forma crucial el teorema fundamental de la aritmética, es decir, que todo número entero se expresa de forma única (salvo el orden de los factores) como producto de números primos:

**Teorema 8.25** *Sea  $f$  una función aritmética.*

1. *Si  $f$  es multiplicativa entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^z} = \prod_p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(p^n)}{p^{nz}} \quad \text{para } \operatorname{Re} z > \sigma_a,$$

*donde  $p$  recorre los números primos.*

2. *Si  $f$  es completamente multiplicativa*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^z} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{f(p)}{p^z}} \quad \text{para } \operatorname{Re} z > \sigma_a,$$

*En particular las series definidas por funciones completamente multiplicativas son no nulas en todo el semiplano  $\sigma > \sigma_a$ .*

*Todas las series y productos considerados convergen absolutamente.*

DEMOSTRACIÓN: 1) Sea  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$  la sucesión de los números primos. Cada factor del producto es de la forma

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(p_k^n)}{p_k^{nz}},$$

luego, según el teorema 8.5, para que el producto converja absolutamente basta con que la serie

$$\sum_k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(p_k^n)}{p_k^{nz}}$$

converja absolutamente, pero sus sumandos son parte de los de la serie completa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^z},$$

que converge absolutamente, luego tenemos la convergencia absoluta del producto. Ahora,

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(p^n)}{p^{nz}} &= \lim_k \sum_{n=0}^k \frac{f(2^n)}{2^{nz}} \sum_{n=0}^k \frac{f(3^n)}{2^{3z}} \cdots \sum_{n=0}^k \frac{f(p_k^n)}{p_k^{nz}} \\ &= \lim_k \sum_{e_1=0}^k \cdots \sum_{e_k=0}^k \frac{f(p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k})}{(p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k})^z}. \end{aligned}$$

Consideramos una ordenación  $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$  de los números naturales no nulos de modo que la sucesión  $\{n_m\}_{m=1}^{(k+1)^k}$  consista en todos los números naturales expresables como producto de los  $k$  primeros primos elevados a exponentes  $\leq k$ , por ejemplo, si exigimos que en cada tramo  $n_{k^{k-1}+1}, \dots, n_{(k+1)^k}$  sea creciente, se trata de la sucesión:

$$1 \mid 2 \mid 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 \mid 5, 8, 10, 15, 20, 24, 25, 27, 30, \dots$$

En virtud del teorema fundamental de la aritmética, hemos probado que

$$\prod_{n=1}^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(p^n)}{p^{nz}} = \sum_{m=1}^{(k+1)^k} \frac{f(n_m)}{n_m^z}.$$

Por lo tanto, tomando límites en  $k$  obtenemos que

$$\prod_{n=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(p^n)}{p^{nz}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(n_m)}{n_m^z}$$

y, como la serie converge absolutamente, el teorema 2.25 nos garantiza que al reordenar la serie no se altera la suma, con lo que llegamos a la fórmula del enunciado.

El apartado 2) es inmediato sin más que hacer  $f(p^n) = f(p)^n$  y sumar la serie geométrica que aparece. ■

En particular, puesto que la función  $c_1$  es completamente multiplicativa, obtenemos la factorización siguiente de la función  $\zeta$ :

**Teorema 8.26 (Euler)** *Si  $\operatorname{Re} z > 1$ , se cumple que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^z}},$$

donde  $p$  recorre los números primos.

Equivalentemente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \prod_p \frac{p^z}{p^z - 1}.$$

Por ejemplo, si  $z = 2$  queda que

$$\frac{2^2}{2^2 - 1} \cdot \frac{3^2}{3^2 - 1} \cdot \frac{5^2}{5^2 - 1} \cdot \frac{7^2}{7^2 - 1} \cdot \frac{11^2}{11^2 - 1} \cdots = \frac{\pi^2}{6}. \quad (8.10)$$

Para  $z = 4$  queda

$$\frac{2^4}{2^4 - 1} \cdot \frac{3^4}{3^4 - 1} \cdot \frac{5^4}{5^4 - 1} \cdot \frac{7^4}{7^4 - 1} \cdot \frac{11^4}{11^4 - 1} \cdots = \frac{\pi^4}{90}.$$

Si dividimos ambos productos, teniendo en cuenta que

$$\frac{\frac{p^4}{p^4 - 1}}{\frac{p^2}{p^2 - 1}} = p^2 \frac{p^2 - 1}{(p^2 + 1)(p^2 - 1)} = \frac{p^2}{p^2 + 1},$$

obtenemos que

$$\frac{2^2}{2^2 + 1} \cdot \frac{3^2}{3^2 + 1} \cdot \frac{5^2}{5^2 + 1} \cdot \frac{7^2}{7^2 + 1} \cdot \frac{11^2}{11^2 + 1} \cdots = \frac{\pi^2}{15}.$$

Si dividimos entre esta igualdad la obtenida con  $z = 2$  queda:

$$\frac{2^2 + 1}{2^2 - 1} \cdot \frac{3^2 + 1}{3^2 - 1} \cdot \frac{5^2 + 1}{5^2 - 1} \cdot \frac{7^2 + 1}{7^2 - 1} \cdot \frac{11^2 + 1}{11^2 - 1} \cdots = \frac{5}{2}.$$

**Teorema 8.27** *Consideremos una serie de Dirichlet*

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^z},$$

donde la función aritmética  $f$  es completamente multiplicativa y  $|f(n)| \leq 1$  para todo  $n$ . Entonces  $F(z)$  converge absolutamente en el semiplano  $\operatorname{Re} z > 1$  y se cumple que

$$\log F(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)f(n)}{\log n} \frac{1}{n^z}.$$

DEMOSTRACIÓN: La convergencia se debe a que la serie está mayorada por la serie que define a  $\zeta(z)$ . Aplicamos el teorema 8.3 a la expresión de  $F(z)$  como producto de Euler dada por 8.25, que nos da que un logaritmo de  $F(z)$  viene dado por

$$\log F(z) = \sum_p \log \frac{1}{1 - \frac{f(p)}{p^z}}.$$

Además, la serie es absolutamente convergente porque hemos probado que el producto lo es. Por otro lado tenemos el desarrollo en serie de potencias 4.15:

$$\log \frac{1}{1 - z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad \text{para } |z| < 1.$$

Por lo tanto:

$$\log F(z) = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(p^n)}{n p^{nz}}.$$

Usando el teorema 2.29 podemos pasar a

$$\log F(z) = \sum_{p^n} \frac{f(p^n)}{n p^{nz}},$$

donde ahora la suma recorre el conjunto de las potencias de primo (con exponente no nulo), pero es claro que esta serie es la misma del enunciado. ■

En particular

$$\log \zeta(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n} \frac{1}{n^z}, \quad \text{para } \operatorname{Re} z > 1. \quad (8.11)$$

Observemos que una consecuencia de la expresión de la función zeta como producto de Euler es que existen infinitos primos. En efecto, si hubiera sólo una cantidad finita de primos, el producto de Euler sería una función continua en  $\mathbb{R}$ , pero sabemos que  $\lim_{x \rightarrow 1} \zeta(x) = +\infty$ , luego tendríamos una contradicción.

**Ejemplo 8.28** De la fórmula (8.11) podemos deducir la divergencia de la serie de los inversos de los primos mediante un argumento conceptualmente más simple que el que nos ha permitido probar el segundo teorema de Mertens.

En efecto, podemos separar

$$\log \zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n} \frac{1}{n^x} = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n p^{nx}} = \sum_p \frac{1}{p^x} + \sum_p \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n p^{nx}}.$$

Notemos que la separación es correcta porque las dos series convergen, ya que tienen términos positivos y sus sumas parciales están acotadas por la serie completa.

Es claro que el miembro izquierdo tiende a  $\infty$  cuando  $x$  tiende a 1. Basta probar que la última serie permanece acotada, pues entonces la función  $\sum_p \frac{1}{p^x}$  tenderá también a  $\infty$  y, teniendo en cuenta que  $1/p^x \leq 1/p$ , la serie  $\sum_p \frac{1}{p}$  tendrá que ser divergente. Ahora bien:

$$\sum_p \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n p^{ns}} \leq \sum_p \sum_{n \geq 2} \frac{1}{p^n} = \sum_p \frac{1}{p(p-1)} \leq \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)} = 1. \quad \blacksquare$$

## 8.6 Convergencia condicional

Hemos observado que la serie que define a la función eta de Dirichlet (8.7) tiene abscisa de convergencia absoluta  $\sigma_a = 1$ , pero converge condicionalmente en todo punto del semiplano  $\operatorname{Re} z > 0$ . En general, toda serie de Dirichlet converge condicionalmente a una función continua en un semiplano que puede ser mayor que su semiplano de convergencia absoluta. Esto es consecuencia de una versión para series del Dirichlet del teorema de Abel que hemos probado para series de potencias:

**Teorema 8.29 (Abel)** *Si una serie de Dirichlet*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$$

*converge en un punto  $z_0 = x_0 + y_0i$ , entonces converge a una función continua  $f$  en el semiplano  $\operatorname{Re} z > x_0$ . Además,*

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x + y_0i) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{z_0}}.$$

DEMOSTRACIÓN: Dado  $\epsilon > 0$ , existe un  $N$  tal que si  $N \leq m \leq n$  entonces  $|A_{mn}| \leq \epsilon$ , donde

$$A_{mn} = \sum_{i=m}^n \frac{a_i}{n^{z_0}}.$$

Tomemos  $N \leq m \leq k$  y apliquemos el teorema 2.32 tomando como sucesiones  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  a  $\{a_n/n^{z_0}\}_{n=m}^k$  y  $\{1/n^{z-z_0}\}_{n=m}^k$ , respectivamente. Con esto obtenemos

$$S_{mk} = \sum_{n=m}^k \frac{a_n}{n^z} = A_{mk} \frac{1}{k^{z-z_0}} - \sum_{n=m}^{k-1} A_{mn} \left( \frac{1}{(n+1)^{z-z_0}} - \frac{1}{n^{z-z_0}} \right).$$

Notemos que, si  $z = x + yi$ , se cumple

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(n+1)^{z-z_0}} - \frac{1}{n^{z-z_0}} \right| &= |e^{-(z-z_0)\log(n+1)} - e^{-(z-z_0)\log n}| \\ \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z_0 - z)^k (\log(n+1) - \log n)^k}{k!} \right| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z_0 - z)^k \log^k((n+1)/n)}{k!} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z - z_0|^k \log^k((n+1)/n)}{k!} \leq C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x - x_0|^k \log^k((n+1)/n)}{k!} \\ &= C \left( \frac{1}{n^{x-x_0}} - \frac{1}{(n+1)^{x-x_0}} \right), \end{aligned}$$

donde hemos supuesto que  $|z - z_0| \leq C|x - x_0|$ , para cierta constante  $C$ . Enseguida analizaremos la interpretación geométrica de este supuesto, pero antes vamos a concluir el cálculo:

$$\begin{aligned} |S_{mk}| &\leq |A_{mk}| \frac{1}{k^{x-x_0}} + C \sum_{n=m}^{k-1} |A_{mn}| \left( \frac{1}{n^{x-x_0}} - \frac{1}{(n+1)^{x-x_0}} \right) \\ &\leq \epsilon \frac{1}{k^{x-x_0}} + C\epsilon \sum_{n=m}^{k-1} \left( \frac{1}{n^{x-x_0}} - \frac{1}{(n+1)^{x-x_0}} \right) \\ &= \epsilon \frac{1}{k^{\sigma-x_0}} + C\epsilon \left( \frac{1}{m^{\sigma-x_0}} - \frac{1}{k^{\sigma-x_0}} \right). \end{aligned}$$

Si además  $x_0 \leq x$ , entonces  $n^{x-x_0} \geq n^0 = 1$ , luego  $|S_{mk}| \leq \epsilon + C\epsilon = (C+1)\epsilon$ .

En resumen, hemos probado que fijado un  $C > 1$ , para todo  $\epsilon > 0$ , existe un número natural  $N$  tal que si  $N \leq m \leq k$  y  $z$  está en el conjunto

$$A_C = \{x + yi \in \mathbb{C} \mid x \geq x_0, |x + yi - z_0| \leq C|x - x_0|\},$$

entonces

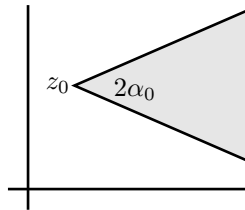
$$\left| \sum_{n=m}^k \frac{a_n}{n^z} \right| < \epsilon.$$

(En principio hemos llegado a  $\leq (C+1)\epsilon$ , pero basta elegir  $N$  a partir de  $\epsilon/(2(C+1))$  para concluir que la suma es menor que  $\epsilon$ .)

Aunque no es necesario para la prueba, conviene observar que los conjuntos  $A_C$  tienen una interpretación geométrica muy simple. Observemos que  $z = x + yi$  está en  $A_C$  si cumple  $x \geq x_0$  y  $|z - z_0| \leq C|x - x_0|$ . El único punto que cumple esto con  $x = x_0$  es el propio  $z_0$ . Si  $x > x_0$ , podemos expresar

$$z - z_0 = |z - z_0|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha), \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

de modo que  $x - x_0 = |z - z_0| \cos \alpha$ , y entonces los elementos de  $A_C$  son los números complejos tales que el argumento principal  $\alpha$  de  $z - z_0$  cumple  $\cos \alpha \geq 1/C$ , lo cual equivale a su vez a que  $\alpha \leq \alpha_0$ , donde  $\alpha_0 = \arccos(1/C)$ . Concluimos que  $A_C$  es el ángulo de vértice  $z_0$  cuyos lados forman un ángulo  $\pm\alpha_0$ , con  $0 < \alpha_0 < \pi/2$ , respecto de la horizontal:



Hemos probado que la serie de Dirichlet es una sucesión de Cauchy (luego converge) en todos los puntos de todo conjunto  $A_C$ , pero todo punto del semiplano  $\operatorname{Re} z > x_0$  está en un conjunto  $A_C$ , pues basta tomar  $C$  suficientemente grande para que  $|z - z_0| < C|x - x_0|$ , luego hemos probado que la serie define una función  $f(z)$  sobre todo el semiplano  $\operatorname{Re} z > x_0$ .

Pero lo que hemos probado implica también que  $f$  es continua en cada conjunto  $A_C$ . En efecto, dado  $\epsilon > 0$ , tenemos que existe un  $N$  tal que si  $N \leq m \leq k$  y  $z \in A_C$ , entonces

$$\left| \sum_{n=m}^k \frac{a_n}{n^z} \right| < \frac{\epsilon}{4},$$

luego, tomando el límite en  $k$ , queda que

$$\left| \sum_{n=m}^{\infty} \frac{a_n}{n^z} \right| \leq \frac{\epsilon}{4}.$$

En particular, si  $a, z \in A_C$ , se cumple que

$$\begin{aligned} |f(z) - f(a)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^a} \right| \leq \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z} \right| + \left| \sum_{n=m}^{\infty} \frac{a_n}{n^a} \right| + \left| \sum_{n=1}^{m-1} \frac{a_n}{n^z} - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{a_n}{n^a} \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=1}^{m-1} \frac{a_n}{n^z} - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{a_n}{n^a} \right| + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Como la suma parcial  $S_{m-1}(z)$  hasta  $m-1$  es una función continua, existe un  $\delta > 0$  tal que si  $|z - a| < \delta$  entonces  $|S_{m-1}(z) - S_{m-1}(a)| < \epsilon/2$  y así concluimos que  $|f(z) - f(a)| < \epsilon$ , lo cual prueba que  $f$  es continua en  $a$ , para cualquier punto  $a \in A_C$ .

Por una parte, esto implica que  $f$  es continua en el semiplano  $\operatorname{Re} z > x_0$ , pues si  $z$  está en dicho semiplano, existe un  $C$  tal que  $C|\operatorname{Re} z - x_0| - |z - z_0| > 0$  y, como esto es una función continua  $h(z)$ , existe un  $\delta > 0$  tal que si  $|w - z| < \delta$  entonces  $h(w) > 0$ , lo que implica que  $w \in A_C$ . Puesto que cada punto de  $\operatorname{Re} z > x_0$  tiene todos sus puntos de alrededor en un conjunto  $A_C$ , el hecho de que  $f|_{A_C}$  sea continua en  $z$  implica que  $f$  es continua en  $z$  como función definida en  $\operatorname{Re} z > x_0$ .

Por último, la continuidad de  $f$  en cualquier conjunto  $A_C$  implica la última afirmación del enunciado, es decir, que  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x + y_0 i) = f(x_0 + y_0 i)$ , ya que todos los puntos de la forma  $x + y_0 i$  con  $x > x_0$  están en  $A_C$ . ■

**Definición 8.30** Se llama *abscisa de convergencia* de una serie de Dirichlet al ínfimo  $\sigma_c$  del conjunto de los números reales  $x$  tales que la serie converge en  $x$ , entendiendo que  $\sigma_c = +\infty$  si dicho conjunto es vacío y que  $\sigma_c = -\infty$  si no está acotado inferiormente.

El *semiplano de convergencia* de la serie es el conjunto de los números complejos  $z$  que cumplen  $\operatorname{Re} z > \sigma_c$ , entendiendo que es vacío si  $\sigma_c = +\infty$  y que es todo el plano complejo si  $\sigma_c = -\infty$ .

El teorema anterior implica que toda serie de Dirichlet converge a una función continua en su semiplano de convergencia (supuesto que no sea vacío). El argumento es exactamente el mismo que hemos dado para el semiplano de convergencia absoluta. En cambio, la serie diverge necesariamente en todo punto que cumpla  $\operatorname{Re} z > \sigma_c$ , pues el hecho de que la serie converja en un punto  $z$  implica por definición de la abscisa de convergencia que  $\sigma_a \leq \operatorname{Re} z$ .

Como en el caso de las series de potencias, el comportamiento de una serie de Dirichlet en la frontera de su semiplano de convergencia, es decir, en los puntos de la recta  $\operatorname{Re} z = \sigma_a$ , depende de cada caso particular.

Por ejemplo, puesto que la función  $\zeta(z)$  diverge en  $z = 1$ , tenemos que  $\sigma_c = \sigma_a = 1$ , mientras que para el caso de  $\eta(z)$ , ya hemos visto que  $\sigma_a = 1$ , mientras que  $\sigma_c = 0$ , ya que la serie diverge trivialmente en  $x = 0$ , pero converge en todo  $x > 0$ , por el criterio de Leibniz.

Veamos ahora un criterio sencillo de convergencia de series de Dirichlet:

**Teorema 8.31** Si  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$  es una serie de Dirichlet tal que las sumas parciales  $\sum_{n=1}^k a_n$  están acotadas, entonces  $\sigma_c \leq 0$ .

DEMOSTRACIÓN: Claramente, las sumas  $A_{mp} = \sum_{n=m}^p a_n$  están también acotadas (digamos por  $K$ ). Basta demostrar que la serie converge en todo número real  $x > 0$ . Aplicamos el teorema 2.32 como en la prueba del teorema 8.29:

$$\sum_{n=m}^k \frac{a_n}{n^x} = A_{mk} \frac{1}{k^x} - \sum_{n=m}^{k-1} A_{mn} \left( \frac{1}{(n+1)^x} - \frac{1}{n^x} \right),$$

con lo que

$$\left| \sum_{n=m}^k \frac{a_n}{n^x} \right| \leq K \frac{1}{k^x} + K \sum_{n=m}^{k-1} \left( \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right) = \frac{K}{m^x}.$$

Como el último término tiende a 0 con  $m$ , concluimos que la serie converge. ■

En realidad, con un esfuerzo adicional, podemos probar algo más general:

**Teorema 8.32** Si  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$  es una serie de Dirichlet tal que las sumas parciales  $\sum_{n=1}^k a_n$  son de orden  $O(k^t)$ , para cierto  $t \geq 0$ , entonces  $\sigma_c \leq t$ .

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que la serie converge en los números reales  $x > t$ . Como en el teorema anterior tenemos que

$$\sum_{n=m}^k \frac{a_n}{n^x} = A_{mk} \frac{1}{k^x} - \sum_{n=m}^{k-1} A_{mn} \left( \frac{1}{(n+1)^x} - \frac{1}{n^x} \right),$$

y ahora sabemos que existe una constante  $C/2$  tal que

$$|A_{mn}| = |A_{1n} - A_{1,m-1}| \leq \frac{C}{2}(n^t + (m-1)^t) \leq Cn^t.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=m}^k \frac{a_n}{n^x} \right| &\leq C \frac{k^t}{k^x} + C \sum_{n=m}^{k-1} n^t \left( \frac{1}{(n+1)^x} - \frac{1}{n^x} \right) \\ &= \frac{C}{k^{x-t}} + C \sum_{n=m}^{k-1} n^t \left( \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right). \end{aligned}$$

Basta probar que

$$\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{x}{n^{x+1}},$$

pues entonces

$$\left| \sum_{n=m}^k \frac{a_n}{n^x} \right| \leq \frac{C}{k^{x-t}} + Cx \sum_{n=m}^{k-1} \frac{1}{n^{x-t+1}},$$

y esta expresión se hace  $< \epsilon$  para todo  $m$  suficientemente grande, debido a la convergencia de la serie que define a  $\zeta(x-t+1)$ .

La desigualdad que tenemos que probar equivale a que

$$1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^x \leq \frac{x}{n}$$

o también a que

$$1 - \frac{x}{n} \leq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^x.$$

Si el miembro izquierdo es negativo se cumple trivialmente y, en caso contrario, equivale a la desigualdad que resulta de tomar logaritmos:

$$\log\left(1 - \frac{x}{n}\right) \leq x \log\left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

Teniendo en cuenta el desarrollo en serie de potencias

$$-\log(1-z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k},$$

esto equivale a que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{kn^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{kn^k},$$

lo cual se cumple ciertamente si  $x \geq 1$ , pues entonces  $x \leq x^k$ . ■

## 8.7 Las funciones $L$ de Dirichlet

Todo carácter de Dirichlet (definición 7.19) se restringe a una función aritmética completamente multiplicativa, que a su vez define una serie de Dirichlet:

**Definición 8.33** Si  $\chi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  es un carácter de Dirichlet, la *función  $L$  de Dirichlet* asociada a  $\chi$  es la serie de Dirichlet:

$$L(z, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^z}.$$

Puesto que  $|\chi(n)| \leq 1$ , las funciones  $L$  están mayoradas por la serie de Dirichlet que define la función  $\zeta(z)$ , por lo que convergen absolutamente en el semiplano  $\operatorname{Re} z > 1$  y, según 8.25, en dicho semiplano admiten un desarrollo en producto de Euler:

$$L(z, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^z} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^z}}. \quad (8.12)$$

Supongamos en primer lugar que  $\chi$  es el carácter principal  $\chi_0$  módulo  $m$ . Esto significa que

$$\chi_0(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } (n, m) = 1, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$L(z, \chi_0) = \prod_{p \nmid m} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^z}} = \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right) \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^z}} = \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right) \zeta(z). \quad (8.13)$$

El último producto es finito y define una función continua en todo el plano complejo, por lo que

$$\lim_{x \rightarrow 1} L(x, \chi_0) = +\infty,$$

y esto implica que la abscisa de convergencia de  $L(z, \chi_0)$  es  $\sigma_c = \sigma_a = 1$ .

En cambio, si  $\chi$  es un carácter no principal módulo  $m$ , el teorema 7.22 implica que las sumas  $\sum_{n=1}^k \chi(n)$  están acotadas, pues la sucesión tiene periodo  $m$  (vuelve a 0 cada vez que  $k$  es múltiplo de  $m$ ), luego el teorema 8.31 nos da que  $L(z, \chi)$  converge en el semiplano  $\operatorname{Re} z > 0$  y, más concretamente, tenemos que  $\sigma_c = 0$ , pues

$$L(0, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)$$

es divergente (pues, como ya hemos señalado, la sucesión de sumas parciales es una sucesión periódica, que oscila sin converger a ningún límite).

En este punto se vuelve relevante el concepto de carácter primitivo que introducido en [ITA1 9.18]. En efecto, si  $\chi$  es un carácter módulo  $m$  que no es primitivo, sino que está inducido por un carácter primitivo  $\chi^*$  módulo  $m_0$ , entonces  $\chi$  y  $\chi^*$  coinciden sobre todos los primos excepto sobre los que cumplen  $p | m$  y  $p \nmid m_0$ , en los que  $\chi(p) = 0 \neq \chi^*(p)$ .

Por consiguiente, si  $\operatorname{Re} z > 1$ ,

$$\begin{aligned} L(z, \chi) &= \prod_p \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^z}} = \prod_{p \nmid m} \frac{1}{1 - \frac{\chi^*(p)}{p^z}} = \prod_{p \mid m} \left(1 - \frac{\chi^*(p)}{p^z}\right) \prod_p \frac{1}{1 - \frac{\chi^*(p)}{p^z}} \\ &= \prod_{p \mid m} \left(1 - \frac{\chi^*(p)}{p^z}\right) L(z, \chi^*). \end{aligned} \quad (8.14)$$

(No es trivial, pero puede probarse que esto también vale si  $\operatorname{Re} z > 0$ .) Esto significa que  $L(z, \chi)$  se diferencia de  $L(z, \chi^*)$  en que le faltan los factores

$$\prod_{p \mid m} \frac{1}{1 - \frac{\chi^*(p)}{p^z}}.$$

Notemos que esto es cierto incluso si  $\chi = \chi_0$  es el carácter principal módulo  $m$ , pues entonces  $\chi_0^*$  es el carácter principal módulo 1 (la función constante 1) y  $L(z, \chi_0^*) = \zeta(z)$ , por lo que la relación (8.13) es la misma que (8.14) para el caso en que  $\chi$  es principal.

El caso es que este número finito de factores “no debería faltar”, lo que hace que muchos resultados requieran la hipótesis de que los caracteres considerados sean primitivos, para que “no falte nada”.

Observemos que si  $\chi$  no es principal,

$$L(1, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n}$$

es la serie que en la sección 7.6 llamábamos  $L_0(\chi)$ , y que un paso crucial en la prueba del teorema de Dirichlet sobre primos en progresiones aritméticas ha sido demostrar que  $L(1, \chi) \neq 0$ . Ahora estamos en condiciones de calcular la suma de esta serie. En virtud de (8.14) —que por continuidad vale también para  $z = 1$ — no perdemos generalidad si suponemos que  $\chi$  es primitivo.

En primer lugar agrupamos los sumandos de la serie  $L(z, \chi)$  según las clases de  $U_m$ , donde  $m$  es el conductor de  $\chi$ . Trabajamos con  $\operatorname{Re} z > 1$ , de modo que la serie converge absolutamente y las reordenaciones son lícitas:

$$L(z, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^z} = \sum_C \chi(C) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z},$$

donde

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in C, \\ 0 & \text{si } n \notin C. \end{cases}$$

Sea  $\psi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  la aplicación dada por  $\psi(k) = \omega^k$ , donde  $\omega = e^{2\pi i/m}$ . Entonces

$$\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \omega^{rk} = \begin{cases} 1 & \text{si } m \mid r, \\ 0 & \text{si } m \nmid r. \end{cases} \quad (8.15)$$

En efecto, si  $m \mid r$ , entonces  $\omega^r = 1$  y la suma vale  $m$  trivialmente. En caso contrario,  $\omega^n \neq 1$  y

$$\sum_{k=0}^{m-1} \omega^{rk} = \frac{\omega^{rm} - 1}{\omega^r - 1} = 0.$$

Por consiguiente, si fijamos  $r \in C$ , tenemos que

$$a_n = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \omega^{(r-n)k},$$

pues la expresión de la derecha vale 1 cuando  $m \mid r - n$ , es decir, cuando  $n$  cumple  $n \equiv r \pmod{m}$ , lo que equivale a  $n \in C$ , y vale 0 en caso contrario. Volviendo a la función  $L$ :

$$L(z, \chi) = \sum_r \chi(r) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \omega^{(r-n)k} \frac{1}{n^z} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \left( \sum_r \chi(r) \omega^{rk} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^{-nk}}{n^z},$$

donde  $r$  varía en un conjunto completo de representantes de las clases de  $U_m$ . Ahora bien, el sumatorio sobre  $r$  no es si no la suma de Gauss  $G_k(\chi)$  definida en [ITA1 9.21], y el teorema [ITA1 9.22] nos da entonces que  $G_k(\chi) = \chi(k)G(\chi)$ , luego

$$L(s, \chi) = \frac{G(\chi)}{m} \sum_k \overline{\chi(k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^{-nk}}{n^s},$$

donde ahora  $k$  recorre un conjunto de representantes de las clases de  $U_m$  (siempre suponiendo que  $\chi$  es primitivo).

El paso siguiente es notar que, por (8.15), las sumas  $\sum_{n=1}^N \omega^{-nk}$  se anulan cada vez que  $m \mid N$ , y en consecuencia toman un número finito de valores. Podemos aplicar el teorema 8.31 y concluir que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^{-nk}}{n^z}$$

converge para  $\operatorname{Re} z > 0$  a una función continua. Ahora hacemos que  $z$  tienda a 1 y resulta que

$$L(1, \chi) = \frac{G(\chi)}{m} \sum_k \overline{\chi(k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^{-nk}}{n}.$$

La última serie se simplifica si tenemos presente el desarrollo en serie

$$-\log(1 - z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n},$$

que converge para  $|z| \leq 1$ , excepto en  $z = 1$ . Con ello tenemos probado el teorema siguiente:

**Teorema 8.34** Sea  $m$  un número natural, sea  $\chi$  un carácter primitivo módulo  $m$  no principal y sea  $\omega = e^{2\pi i/m}$ . Entonces

$$L(1, \chi) = -\frac{G(\chi)}{m} \sum_k \overline{\chi(k)} \log(1 - \omega^{-k}),$$

donde  $k$  recorre un conjunto de representantes de las clases de  $U_m$  y el logaritmo tiene parte imaginaria en  $]-\pi/2, \pi/2[$ .

Lo importante de esta fórmula es que la serie infinita ha sido absorbida por el logaritmo y sólo queda una suma finita. Ahora vamos a ver que podemos eliminar los logaritmos complejos. Para ello observamos que

$$1 - \omega^{-k} = 2 \operatorname{sen} \frac{k\pi}{m} \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{m} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{m} \right) \right).$$

(basta desarrollar el miembro derecho usando la trigonometría).

Si  $0 < k < m$  entonces  $-\pi/2 < \pi/2 - k\pi/m < \pi/2$ , luego

$$\log(1 - \omega^{-k}) = \log |1 - \omega^{-k}| + i\pi \left( \frac{1}{2} - \frac{k}{m} \right),$$

(recordemos que tomamos el logaritmo con parte imaginaria entre  $-\pi/2$  y  $\pi/2$ ). Como  $1 - \omega^{-k}$  y  $1 - \omega^k$  son conjugados, se cumple también

$$\log(1 - \omega^k) = \log |1 - \omega^k| - i\pi \left( \frac{1}{2} - \frac{k}{m} \right).$$

La idea es que, en la suma dada por el teorema anterior, podemos agrupar los términos

$$\begin{aligned} & \overline{\chi(k)} \log(1 - \omega^{-k}) + \overline{\chi(-k)} \log(1 - \omega^k) \\ &= \overline{\chi(k)} \log(1 - \omega^{-k}) + \chi(-1) \overline{\chi(k)} \log(1 - \omega^k), \end{aligned}$$

pero el resultado dependerá de si  $\chi(-1) = 1$  o si  $\chi(-1) = -1$  (notemos que  $\chi(-1)^2 = \chi(1) = 1$ , por lo que no hay más posibilidades).

Supongamos en primer lugar que  $\chi(-1) = 1$ . Según el teorema 8.34, haciendo el cambio de variable en el sumatorio  $k \mapsto -k$ , tenemos que

$$\begin{aligned} L(1, \chi) &= -\frac{G(\chi)}{m} \sum_k \overline{\chi(k)} \log(1 - \omega^{-k}), \\ L(1, \chi) &= -\frac{G(\chi)}{m} \sum_k \overline{\chi(k)} \log(1 - \omega^k). \end{aligned}$$

Sumando ambas expresiones

$$\begin{aligned} 2L(1, \chi) &= -\frac{G(\chi)}{m} \sum_k \overline{\chi(k)} (\log(1 - \omega^{-k}) + \log(1 - \omega^k)) \\ &= -2 \frac{G(\chi)}{m} \sum_k \overline{\chi(k)} \log |1 - \omega^k| \\ &= -2 \frac{G(\chi)}{m} \sum_k \overline{\chi(k)} \log 2 \operatorname{sen} \frac{k\pi}{m}. \end{aligned}$$

El logaritmo se descompone como  $\log 2 + 2 \log \operatorname{sen}(k\pi/m)$  y por 7.22 tenemos que  $\sum_k \overline{\chi(k)} = 0$ , por lo que la fórmula se reduce a

$$L(1, \chi) = -\frac{G(\chi)}{m} \sum_k \overline{\chi(k)} \log \operatorname{sen} \frac{k\pi}{m},$$

donde  $k$  recorre los números naturales  $0 < k < m$  primos con  $m$ . Ahora bien, si  $m > 2$ , las  $\phi(m)$  clases de  $U_m$  se pueden descomponer en dos mitades. Por una parte, las que tienen representante  $0 < k < m/2$ , y por otra las que tienen representante  $m/2 < m - k < m$ , y se cumple que

$$\overline{\chi(m-k)} \log \operatorname{sen} \frac{(m-k)\pi}{m} = \overline{\chi(k)} \log \operatorname{sen} \frac{k\pi}{m},$$

luego podemos considerar sólo la mitad de los sumandos y multiplicar por 2 la suma:

$$L(1, \chi) = -\frac{2G(\chi)}{m} \sum_k \overline{\chi(k)} \log \operatorname{sen} \frac{k\pi}{m},$$

donde ahora  $k$  recorre los índices  $0 < k < m/2$ ,  $(k, m) = 1$ .

Si  $\chi(-1) = -1$ , obtenemos

$$\begin{aligned} 2L(1, \chi) &= -\frac{G(\chi)}{m} \sum_k \overline{\chi(k)} (\log(1 - \omega^{-k}) - \log(1 - \omega^k)) \\ &= -2 \frac{G(\chi)}{m} \sum_k \overline{\chi(k)} i\pi \left( \frac{1}{2} - \frac{k}{m} \right). \end{aligned}$$

Y usando 7.22 podemos eliminar el  $1/2$ . Recogemos en el teorema siguiente las fórmulas que hemos obtenido:

**Teorema 8.35** *Sea  $\chi$  un carácter primitivo módulo  $m$ .*

1. Si  $\chi(-1) = 1$ , entonces

$$L(1, \chi) = -\frac{2G(\chi)}{m} \sum_k \overline{\chi(k)} \log \operatorname{sen} \frac{k\pi}{m},$$

donde  $k$  recorre los índices  $0 < k < m/2$ ,  $(k, m) = 1$ .

2. Si  $\chi(-1) = -1$ , entonces

$$L(1, \chi) = \frac{i\pi G(\chi)}{m^2} \sum_k \overline{\chi(k)} k,$$

donde  $k$  recorre los índices  $0 < k < m$ ,  $(k, m) = 1$ .

**Ejemplo 8.36** Vamos a calcular  $L(1, \epsilon)$ , donde  $\epsilon$  es el carácter módulo 8 dado por

$$\frac{U_8}{\epsilon} \begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & 5 & 7 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}$$

es decir:

$$L(1, \epsilon) = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \dots$$

Es fácil ver que el carácter es primitivo. Para calcular la suma de Gauss consideramos la raíz octava de la unidad

$$\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Teniendo en cuenta que  $\omega^7 = \bar{\omega}$  y  $\omega^5 = \bar{\omega}^3$ :

$$G(\epsilon) = \omega - \omega^3 - \omega^5 + \omega^7 = \sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{8}.$$

Resulta más práctico aplicar la fórmula del teorema 8.34:

$$L(1, \epsilon) = -\frac{1}{\sqrt{8}} (\log(1 - \omega^{-1}) - \log(1 - \omega^{-3}) - \log(1 - \omega^{-5}) + \log(1 - \omega^{-7}))$$

y, tal y como hemos hecho en la prueba del teorema 8.35, agrupar los pares de sumandos conjugados:

$$\begin{aligned} L(1, \epsilon) &= -\frac{1}{\sqrt{8}} (\log |1 - \omega|^2 - \log |1 - \omega^2|^2) = \frac{1}{\sqrt{8}} \log \frac{|1 - \omega^2|^2}{|1 - \omega|^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{8}} \log \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \log (1 + \sqrt{2})^2 = \frac{\log(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Así pues:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \dots = \frac{\log(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{2}}. \quad \blacksquare$$

**Ejercicio:** Usando los caracteres adecuados, calcular de nuevo las series

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \dots = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \dots = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

que ya hemos sumado en la página 153.

**Ejemplo 8.37** Consideramos ahora el carácter módulo 5 dado por

$$\frac{U_5}{\chi} \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline & 1 & i & -i & -1 \end{array}$$

Su serie de Dirichlet es:

$$L(1, \chi) = \frac{1}{1} + \frac{i}{2} - \frac{i}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{i}{7} - \frac{i}{8} - \frac{1}{9} + \dots$$

Si sumamos esta serie y separamos la parte real de la parte imaginaria, habremos sumado las series:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{5k+1} - \frac{1}{5k+4} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \dots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{5k+2} - \frac{1}{5k+3} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots$$

Ahora

$$\omega = e^{2\pi i/5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} + i\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}},$$

de modo que

$$\begin{aligned} G(\chi) &= \omega + i\omega^2 - i\omega^3 - \omega^4 = -2\operatorname{Im} \omega^2 + 2i\operatorname{Im} \omega \\ &= -\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} + i\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}. \end{aligned}$$

Como  $\chi(-1) = -1$ , aplicamos la segunda fórmula del teorema 8.35:

$$\begin{aligned} L(1, \chi) &= \frac{i\pi}{25} \left( -\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} + i\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \right) (1 - 2i + 3i - 4) \\ &= \frac{\left( \sqrt{5 - \sqrt{5}} + 3\sqrt{5 + \sqrt{5}} \right) \pi}{25\sqrt{2}} + \frac{\left( 3\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \right) \pi}{50} i, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \dots &= \frac{\left( \sqrt{5 - \sqrt{5}} + 3\sqrt{5 + \sqrt{5}} \right) \pi}{25\sqrt{2}}, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots &= \frac{\left( 3\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \right) \pi}{50}. \end{aligned}$$

■

En [ITA1 9.24] hemos calculado el valor explícito de la suma de Gauss de un carácter cuadrático primitivo,<sup>2</sup> lo cual nos simplifica las expresiones del teorema 8.35:

<sup>2</sup>En realidad hemos probado el teorema para caracteres de cuerpos cuadráticos, pero sucede que éstos coinciden con los caracteres cuadráticos primitivos. Enunciamos el teorema siguiente en términos de caracteres primitivos, pero sólo lo vamos a usar para el caso de caracteres de cuerpos cuadráticos.

**Teorema 8.38** Sea  $\chi$  un carácter cuadrático primitivo módulo  $m$ .

1. Si  $\chi(-1) = 1$ , entonces

$$L(1, \chi) = -\frac{2}{\sqrt{m}} \sum_k \chi(k) \log \operatorname{sen} \frac{k\pi}{m}.$$

donde  $k$  recorre los índices  $0 < k < m/2$ ,  $(k, m) = 1$ .

2. Si  $\chi(-1) = -1$ , entonces

$$L(1, \chi) = -\frac{\pi}{m\sqrt{m}} \sum_k \chi(k) k,$$

donde  $k$  recorre los índices  $0 < k < m$ ,  $(k, m) = 1$ .

Terminamos esta sección estudiando un último problema:

Tenemos demostrado que desarrollo en producto de Euler (8.12) es válido en el semiplano  $\operatorname{Re} z > 1$ , pero también hemos demostrado que la serie converge cuando  $\operatorname{Re} z > 0$ , en particular para  $z = 1$ , y en el ejemplo 8.8 hemos visto que el producto también converge. Resulta entonces tentador concluir que

$$L(1, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p}}. \quad (8.16)$$

Vamos a probar que esta igualdad es cierta, aunque no es trivial. Consideremos concretamente el carácter módulo 4 dado por

$$\chi(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ -1 & \text{si } n \equiv -1 \pmod{4}, \\ 0 & \text{si } n \equiv 0, 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

Euler dio por hecha sin complejos la igualdad (8.16) en el caso de este carácter, y así obtuvo una fórmula muy interesante:

$$\prod_{p>2} \frac{p}{p \pm 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4},$$

donde el signo en el denominador del producto es el que cumple  $4 \mid p \pm 1$ . Explícitamente:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdots = \frac{\pi}{4}. \quad (8.17)$$

de modo que los numeradores son los primos impares y cada denominador es el múltiplo de 4 anterior o posterior al numerador.

Recordemos ahora la fórmula (8.10):

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \frac{7 \cdot 7}{6 \cdot 8} \cdot \frac{11 \cdot 11}{10 \cdot 12} \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Dividiendo esta fórmula entre la que acabamos de obtener resulta:

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdots = \frac{4\pi}{6},$$

y multiplicando por  $3/4$  llegamos a

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdots = \frac{\pi}{2}, \quad (8.18)$$

en la que los numeradores son los primos impares y cada denominador es el anterior o posterior al numerador que no es múltiplo de 4.

Si dividimos (8.17) entre (8.18), obtenemos:

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdots = 2,$$

donde cada factor se obtiene a partir de un primo impar  $p$  considerando  $(p \pm 1)/2$ , tomando el número par como numerador y el impar como denominador.

Estas fórmulas se basan en la igualdad (8.16), que tenemos pendiente demostrar. Más en general, vamos a probar que el teorema 8.27 es válido para  $x = 1$  supuesto que el producto de Euler converja. Para ello necesitaremos un resultado elemental sobre la distribución de los números primos:

Para cada número real  $x > 0$ , llamamos  $\pi(x)$  al número de primos menores o iguales que  $x$ . Una estimación un tanto basta de la función  $\pi(x)$  es la siguiente:

**Teorema 8.39** *Para todo  $x > 1$  se cumple que*

$$\pi(x) \leq 6 \log 2 \frac{x}{\log x}.$$

DEMOSTRACIÓN: Para cada número natural  $n$ , tenemos que

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!^2},$$

luego los primos  $n < p \leq 2n$  dividen al numerador, pero no al denominador. Por consiguiente:

$$n^{\pi(2n) - \pi(n)} \leq \prod_{n < p \leq 2n} p \leq \binom{2n}{n} \leq (1+1)^{2n} = 2^{2n}.$$

Tomando logaritmos,  $(\pi(2n) - \pi(n)) \log n \leq 2n \log 2$ , luego

$$\pi(2n) \leq \pi(n) + 2 \log 2 \frac{n}{\log n}.$$

Ahora una simple inducción prueba que  $\pi(2^k) \leq 3 \frac{2^k}{k}$ . En efecto, se verifica directamente para  $k \leq 5$  y, en general,

$$\begin{aligned} \pi(2^{k+1}) &\leq \pi(2^k) + 2 \log 2 \frac{2^k}{k \log 2} = \pi(2^k) + \frac{2^{k+1}}{k} \\ &\leq \frac{3 \cdot 2^k}{k} + \frac{2 \cdot 2^k}{k} = \frac{5 \cdot 2^k}{k} \leq \frac{3 \cdot 2^{k+1}}{k}. \end{aligned}$$

Por último, para  $x > 4$ , tomamos  $4 \leq 2^k < x \leq 2^{k+1}$ , con lo que

$$\pi(x) \leq \pi(2^{k+1}) \leq 6 \frac{2^k}{k+1} \leq 6 \log 2 \frac{x}{\log x}.$$

Se comprueba directamente que el resultado es válido para  $1 < x \leq 4$ . ■

En particular, esto implica que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi(x)}{x} = 0.$$

Consideremos ahora la serie de Dirichlet  $L(x)$  asociada a una función aritmética  $f$  completamente multiplicativa tal que  $|f(n)| \leq 1$  para todo  $n$  (en particular, tomando  $f(n) = 1$  tenemos la función  $\zeta(x)$ ). Puesto que la serie está mayorada por  $\zeta(x)$ , es claro que su abscisa de convergencia absoluta es  $\sigma_a \leq 1$ , y por 8.25, para todo  $x > 1$ , se cumple que

$$L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^x} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{f(p)}{p^x}}.$$

Fijemos un número real  $x \geq 1$  en el cual el producto converja. Notemos que admitimos la posibilidad de que sea  $x = 1$  y que no suponemos que la convergencia del producto sea absoluta. En particular, no tenemos garantizado que la igualdad anterior se cumpla para  $x = 1$ . Por ello, entenderemos que  $L(x)$  representa la función definida por el producto de Euler, no necesariamente por la serie de Dirichlet.

Como en la prueba del teorema 8.27, sabemos que

$$\log L(x) = \sum_p \log \frac{1}{1 - \frac{f(p)}{p^x}} = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(p^n)}{np^{nx}} = \sum_{p^n} \frac{f(p^n)}{np^{nx}}.$$

Hay que entender que la última serie es la suma para todos los números naturales que son potencia de primo (con exponente  $n \geq 1$ ). La última igualdad es trivial si la convergencia es absoluta, pero en nuestro contexto no es trivial en absoluto. Más explícitamente, las dos últimas series son, respectivamente:

$$\lim_N \sum_{p \leq N} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(p^n)}{np^{nx}}, \quad \lim_N \sum_{p^n \leq N} \frac{f(p^n)}{np^{nx}}.$$

Sabemos que el límite de la izquierda existe (y es  $\log L(x)$ ), y vamos a probar que

$$\sum_{p \leq N} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(p^n)}{np^{nx}} - \sum_{p^n \leq N} \frac{f(p^n)}{np^{nx}}$$

tiende a 0, lo que nos dará la existencia del segundo límite, así como que es igual al primero. Para ello descomponemos la última suma (finita) en tantas sumas

finitas como primos  $p$  menores o iguales que  $N$ , y, restando cada una al término de la primera suma correspondiente a  $p$ , queda que la diferencia es

$$\sum_{p \leq N} \sum_{p^n > N} \frac{f(p^n)}{np^{nx}},$$

donde hay que entender que la suma interior es para los números  $n$  tales que  $p^n > N$ .

Descomponemos esta suma finita en dos partes:

$$\sum_{\sqrt{N} < p < N} \sum_{p^n > N} \frac{f(p^n)}{np^{nx}} + \sum_{p \leq \sqrt{N}} \sum_{p^n > N} \frac{f(p^n)}{np^{nx}}.$$

Vamos a probar que ambas tienden a 0 con  $N$ . Para la primera tenemos:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\sqrt{N} < p < N} \sum_{p^n > N} \frac{f(p^n)}{np^{nx}} \right| &\leq \sum_{\sqrt{N} < p < N} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{np^{nx}} \leq \frac{1}{2} \sum_{\sqrt{N} < p < N} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{p^{nx}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\sqrt{N} < p < N} \frac{1}{p^2} \frac{1}{1-1/p} < \frac{1}{2} \sum_{\sqrt{N} < p < N} \frac{1}{p^2} < \frac{1}{2} \sum_{\sqrt{N} < n} \frac{1}{n^2}, \end{aligned}$$

donde en la última suma  $n$  recorre todos los números mayores que  $\sqrt{N}$ . Es claro entonces que

$$\lim_N \sum_{\sqrt{N} < p < N} \sum_{p^n > N} \frac{f(p^n)}{np^{nx}} = 0,$$

pues la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$  es convergente. Por otra parte, llamando  $n_0^p$  al menor número natural tal que  $n_0^p > \log_p N$ ,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{p \leq \sqrt{N}} \sum_{p^n > N} \frac{f(p^n)}{np^{nx}} \right| &\leq \sum_{p \leq \sqrt{N}} \sum_{n > \log_p N} \frac{1}{np^{nx}} \leq \sum_{p \leq \sqrt{N}} \frac{1}{\log_p N} \sum_{n > \log_p N} \frac{1}{p^{nx}} \\ &\leq \sum_{p \leq \sqrt{N}} \frac{\log p}{\log N} \frac{1/p^{n_0^p}}{1-1/p} \leq \sum_{p \leq \sqrt{N}} \frac{\log \sqrt{N}}{\log N} \frac{1/p^{\log_p N}}{1-1/p} = \frac{1}{2} \sum_{p \leq \sqrt{N}} \frac{1/N}{(p-1)/p} \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{p \leq \sqrt{N}} \frac{p}{N(p-1)} \leq \frac{1}{2} \sum_{p \leq \sqrt{N}} \frac{\sqrt{N}}{N} \leq \frac{1}{2} \sum_{p \leq \sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{\pi(\sqrt{N})}{2\sqrt{N}}, \end{aligned}$$

y de nuevo

$$\lim_N \sum_{p \leq \sqrt{N}} \sum_{p^n > N} \frac{f(p^n)}{np^{nx}} = 0$$

porque el teorema anterior implica que

$$\lim_N \frac{\pi(\sqrt{N})}{\sqrt{N}} = 0.$$

Así pues, hemos probado que

$$\log \prod_p \frac{1}{1 - \frac{f(p)}{p^x}} = \sum_{p^n} \frac{f(p^n)}{np^{nx}},$$

para todo  $x \geq 1$  tal que el producto infinito converja (lo que ciertamente sucede si  $x > 1$ ). La última serie se expresa como serie de Dirichlet en términos de la función de Mangoldt:

$$\log \prod_p \frac{1}{1 - \frac{f(p)}{p^x}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)f(n)}{\log n} \frac{1}{n^x}.$$

Observemos además que una condición suficiente y necesaria para que el producto de Euler converja es que lo haga la serie

$$\sum_p \frac{f(p)}{p}.$$

En efecto, si esta serie converge, puesto que

$$\sum_p \frac{f^2(p)}{p^2}$$

converge absolutamente, ya que en módulo está mayorada por  $\zeta(2)$ , el teorema 8.7 nos da la convergencia de

$$\prod_p \left(1 - \frac{f(p)}{p}\right),$$

luego también la del producto de los inversos. Resumimos lo que hemos obtenido:

**Teorema 8.40** *Sea  $f(n)$  una función aritmética completamente multiplicativa tal que  $|f(n)| \leq 1$  para todo  $n$  y supongamos que las series*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^x}, \quad \sum_p \frac{f(p)}{p}$$

*son convergentes. Entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^x} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{f(p)}{p^x}} \quad \text{para } x \geq 1.$$

DEMOSTRACIÓN: Tenemos probada la convergencia de la serie y del producto para  $x \geq 1$  y la igualdad para  $x > 1$ . Sólo falta probar la igualdad para  $x = 1$ . Ahora bien, esto es consecuencia de que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^x}, \quad \prod_p \frac{1}{1 - \frac{f(p)}{p^x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \prod_p \frac{1}{1 - \frac{f(p)}{p^x}}.$$

En efecto, para el caso de la serie esto es consecuencia del teorema de Abel 8.29, y también podemos aplicar este teorema a la serie de Dirichlet

$$\log L(s) = \log \prod_p \frac{1}{1 - \frac{f(p)}{p^s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)f(n)}{\log n} \frac{1}{n^s},$$

que nos da que  $L(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} L(x)$ , y aplicando la exponencial obtenemos que  $L(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} L(x)$ . ■



## Capítulo IX

# Fracciones continuas

En los capítulos anteriores hemos estudiado diversas clases particulares de sucesiones: series infinitas (en particular, series de potencias), productos infinitos y series de Dirichlet. Ahora vamos a estudiar una más, que permite obtener expresiones tan interesantes como

$$\pi = 3 + \frac{1^2}{6 + \frac{3^2}{6 + \frac{5^2}{6 + \frac{7^2}{6 + \ddots}}}}$$

y que también nos permitirá demostrar algunos resultados de interés, como que  $\pi$  es irracional.

### 9.1 Fracciones continuas y convergentes

**Definición 9.1** Llamaremos *fracción continua* definida por dos sucesiones de números complejos  $\{a_n\}_{n=0}^\infty$  y  $\{b_n\}_{n=1}^\infty$  como la sucesión  $\{c_n\}_{n=0}^\infty$  dada por

$$c_0 = a_0, \quad c_1 = a_0 + \frac{b_1}{a_1}, \quad c_2 = a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2}}, \quad c_3 = a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3}}}, \quad \dots$$

Los  $c_n$  se llaman *convergentes* de la fracción continua.

Notemos que, en principio,  $c_n$  puede no estar definido si se anula alguno de los denominadores de las fracciones que aparecen en la expresión que lo define. Para tratar con esta posibilidad vamos a introducir un nuevo “número” al que llamaremos  $\infty$  y, para todo  $a \in \mathbb{C}$ , definimos

$$\frac{0}{0} = 0 \quad \frac{a}{0} = \infty \quad (a \neq 0), \quad \frac{a}{\infty} = 0, \quad a \pm \infty = \infty.$$

Con esto quedan indefinidos  $\infty/\infty$  o  $\infty \pm \infty$ , pero nunca nos encontraremos estos casos al evaluar convergentes.

**Ejemplo 9.2** Consideremos los convergentes definidos por sucesiones dadas por  $a_n = 1$  y  $b_n = (-1)^{n+1}$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} c_0 &= 1, \\ c_1 &= 1 + \frac{1}{1} = 2, \\ c_2 &= 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1}} = 1 + \frac{1}{0} = \infty, \\ c_3 &= 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3, \\ c_4 &= 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1}}}}} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{0}}} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{\infty}} = 1 + \frac{1}{1} = 2. \end{aligned}$$

■

Cuando una fracción continua sea convergente (entendiendo que esto supone, en particular, que todos los convergentes  $c_n$  son finitos a partir de un cierto  $n_0$ ) representaremos el límite con la notación:

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \ddots}}}$$

No obstante, en la práctica será más conveniente usar la notación

$$c_n = a_0 + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_n}{a_n}$$

para los convergentes y

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \frac{b_4}{a_4} + \cdots$$

para el límite. Por ejemplo, demostraremos que

$$\pi = 3 + \frac{1^2}{6} + \frac{3^2}{6} + \frac{5^2}{6} + \frac{7^2}{6} + \cdots$$

Observemos que los convenios  $0/0 = 0/\infty = 0$  que hemos adoptado se traducen en que si un  $b_n = 0$ , entonces todos los convergentes posteriores a  $c_n$  son iguales a  $c_n$ , pues las fracciones con numerador  $b_n$  son todas nulas. Así pues, las fracciones continuas con algún  $b_n = 0$  son “triviales”.

Un caso en el que podemos asegurar que todos los convergentes serán finitos se da cuando  $a_n, b_n > 0$ , para  $n \geq 1$ , pues entonces todos los denominadores son positivos.

En principio, los convergentes de una fracción continua tienen que calcularse “de derecha a izquierda”. Por ejemplo, el convergente  $c_4$  de la fracción continua de  $\pi$  que hemos mostrado se calcula empezando por  $7^2/6$ , a partir del resultado  $x$  se calcula  $6 + 5^2/x$ , etc. Sin embargo, esto no es nada práctico. El teorema siguiente nos da la forma de calcularlos “de izquierda a derecha”, de modo que cada uno se puede calcular recurrentemente a partir de los dos anteriores:

**Teorema 9.3** *Dadas dos sucesiones  $\{a_n\}_{n=0}^\infty$  y  $\{b_n\}_{n=1}^\infty$  con  $b_n \neq 0$  para todo  $n$ , los convergentes de la fracción continua que determinan pueden calcularse como  $c_n = p_n/q_n$ , donde  $p_n$  y  $q_n$  se definen recurrentemente como*

$$p_{-1} = 1, \quad p_0 = a_0, \quad q_{-1} = 0, \quad q_0 = 1,$$

$$p_n = a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}, \quad q_n = a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}.$$

DEMOSTRACIÓN: Vamos a probar además que  $p_n$  y  $q_n$  no se pueden anular simultáneamente. Razonamos por inducción sobre  $n$ . Observemos que, por definición,

$$p_1 = a_1 a_0 + b_1, \quad q_1 = a_1.$$

Ciertamente  $c_0 = a_0 = p_0/q_0$  y  $c_1 = a_0 + b_1/a_1 = p_1/q_1$  (donde el numerador y el denominador no se anulan simultáneamente). Si la igualdad es cierta para  $n$ , vemos que

$$c_{n+1} = a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}} = a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}}.$$

Si  $a_{n+1} = 0$ , vemos que  $c_{n+1} = c_{n-1}$ , mientras que las relaciones recurrentes dan

$$p_{n+1} = b_{n+1} p_{n-1}, \quad q_{n+1} = b_{n+1} q_{n-1},$$

luego también  $p_{n+1}/q_{n+1} = p_{n-1}/q_{n-1} = c_{n-1}$  y no se anulan a la vez numerador y denominador. A partir de aquí suponemos que  $a_{n+1} \neq 0$ . Aplicamos la hipótesis de inducción al convergente  $n$ -simo definido por la sucesión  $a_0, \dots, a_{n-1}, \tilde{a}_n$ , donde  $\tilde{a}_n = a_n + b_{n+1}/a_{n+1}$ . La conclusión es que

$$c_{n+1} = \frac{\left(a_n + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) p_{n-1} + b_n p_{n-2}}{\left(a_n + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) q_{n-1} + b_n q_{n-2}}$$

$$= \frac{a_{n+1} a_n p_{n-1} + b_{n+1} p_{n-1} + a_{n+1} b_n p_{n-2}}{a_{n+1} a_n q_{n-1} + b_{n+1} q_{n-1} + a_{n+1} b_n q_{n-2}} = \frac{a_{n+1} p_n + b_{n+1} p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + b_{n+1} q_{n-1}}.$$

Observemos que las dos últimas igualdades son correctas incluso si el denominador es nulo en la primera fracción, pues entonces el numerador no lo es, y en la segunda fracción sucede lo mismo (ya que resulta de multiplicar numerador y denominador por  $a_{n+1} \neq 0$ ) y lo mismo en la tercera, pues las dos últimas fracciones tienen iguales sus numeradores y denominadores. ■

**Ejemplo 9.4** Consideremos la fracción continua que hemos presentado al principio de este capítulo. Todavía no hemos demostrado que converge a  $\pi$ , pero podemos calcular sus primeros convergentes:

$n$	-1	0	1	2	3	4	5
$a_n$	-	3	6	6	6	6	6
$b_n$	-	-	1	9	25	49	81
$p_n$	1	3	19	141	1321	14835	196011
$q_n$	0	1	6	45	420	4725	62370
$c_n$	-	3	3.16	3.13	3.145	3.139	3.142

Notemos que la disposición en la tabla permite aplicar las fórmulas mecánicamente. Por ejemplo,  $p_3$  y  $q_3$  se calculan multiplicando el 25 y el 6 por el 19 y el 41 para obtener  $p_n$  y por el 6 y el 45 para obtener  $q_n$ .

La convergencia no es muy rápida, pero es bastante más rápida que la de otras expresiones sencillas que hemos encontrado, como la serie de Leibniz o la del problema de Basilea. Por ejemplo,  $c_{50} = 3.141590$  tiene 5 decimales exactos,  $c_{100} = 3.1415924$  tiene 6 y  $c_{1000} = 3.1415926533$  tiene 9. ■

**Ejemplo 9.5** Veamos ahora cómo se usa el teorema anterior para calcular los convergentes de

$$1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

$n$	-1	0	1	2	3	4	5
$a_n$	-	1	1	1	1	1	1
$b_n$	-	-	1	-1	1	-1	1
$p_n$	1	1	2	1	3	2	5
$q_n$	0	1	1	0	1	1	2
$c_n$	-	1	2	$\infty$	3	2	5/2

■

**Fracciones continuas simples** Las fracciones continuas *simples* son las que cumplen  $b_n = 1$  para todo  $n$  y en las que los  $a_n$  son números naturales no nulos salvo a lo sumo  $a_0$  (que puede valer 0).

Esta clase de fracciones continuas es especialmente relevante, por ejemplo porque todo número irracional positivo se puede expresar de forma única como fracción continua simple, y además intervienen en diversos resultados importantes de la teoría algebraica de números.<sup>1</sup> ■

**Transformación de fracciones continuas** En general un mismo número complejo puede admitir desarrollos distintos en fracción continua. Vamos a probar ahora un resultado que usaremos a menudo para simplificar desarrollos.

<sup>1</sup>Por este motivo las estudiamos separadamente en el capítulo X de [ITAI].

Consideremos ahora una fracción continua convergente y una sucesión  $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$  de números complejos no nulos. Claramente:

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \ddots}}} = a_0 + \frac{r_1 b_1}{r_1 a_1 + \frac{r_1 b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \ddots}}}$$

(se comprueba trivialmente que esto es cierto para los convergentes, y luego pasamos al límite). A su vez:

$$\begin{aligned} a_0 + \frac{r_1 b_1}{r_1 a_1 + \frac{r_1 b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \ddots}}} &= a_0 + \frac{r_1 b_1}{r_1 a_1 + \frac{r_1 r_2 b_2}{r_2 a_2 + \frac{r_2 b_3}{a_3 + \ddots}}} \\ &= a_0 + \frac{r_1 b_1}{r_1 a_1 + \frac{r_1 r_2 b_2}{r_2 a_2 + \frac{r_2 r_3 b_3}{r_3 a_3 + \ddots}}} \end{aligned}$$

En general tenemos el teorema siguiente:

**Teorema 9.6** Dadas sucesiones  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ,  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$  de números complejos no nulos con  $r_0 = 1$ , se cumple que

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \cdots + \frac{b_n}{a_n}}} = r_0 a_0 + \frac{r_0 r_1 b_1}{r_1 a_1 + \frac{r_1 r_2 b_2}{r_2 a_2 + \cdots + \frac{r_{n-1} r_n b_n}{r_n a_n}},$$

por lo que

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \ddots}}} = r_0 a_0 + \frac{r_0 r_1 b_1}{r_1 a_1 + \frac{r_0 r_1 b_2}{r_2 a_2 + \frac{r_2 r_3 b_3}{r_3 a_3 + \ddots}}}$$

entendiendo que una fracción continua converge si y sólo si lo hace la otra.

DEMOSTRACIÓN: Una simple inducción muestra que los convergentes de la segunda fracción continua vienen dados por  $\tilde{p}_n = r_n p_n$ ,  $\tilde{q}_n = r_n q_n$ , por lo que son iguales a los de la primera. ■

## 9.2 La fórmula de Euler

Vamos a probar ahora una fórmula general debida a Euler de la que deduciremos numerosos desarrollos interesantes en fracción continua.

**Teorema 9.7 (Fórmula de Euler)** Sea  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de números complejos no nulos. Entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} t_0 \cdots t_n = \frac{t_0}{1} + \frac{-t_1}{1+t_1} + \frac{-t_2}{1+t_2} + \cdots$$

entendiendo que la serie converge si y sólo si lo hace la fracción continua. Más aún:

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} t_0 \cdots t_n = \frac{1}{1} + \frac{-t_0}{1+t_0} + \frac{-t_1}{1+t_1} + \frac{-t_2}{1+t_2} + \cdots$$

DEMOSTRACIÓN: Vamos a probar que, para todo  $k \geq 0$ , se cumple que

$$\sum_{n=0}^k t_0 \cdots t_n = \frac{t_0}{1} + \frac{-t_1}{1+t_1} + \frac{-t_2}{1+t_2} + \cdots + \frac{-t_{k-1}}{1+t_{k-1}} + \frac{-t_k}{1+t_k}.$$

Así pues, los convergentes son una forma alternativa de expresar las sumas parciales de la serie, por lo que es inmediato que la serie converge si y sólo si lo hace la fracción continua.

Para  $k = 0$  la igualdad se reduce a  $t_0 = t_0$ , mientras que para  $k = 1$  es

$$t_0 + t_0 t_1 = \frac{t_0}{1 - \frac{t_1}{1+t_1}},$$

que se comprueba también trivialmente. Supongamos que la igualdad es cierta para  $k$ . Entonces

$$\sum_{n=0}^{k+1} t_0 \cdots t_n = \sum_{n=0}^{k-1} t_0 \cdots t_n + t_0 \cdots t_k (1 + t_{k+1}).$$

Si  $t_{k+1} = -1$ , entonces la suma hasta  $k+1$  coincide con la suma hasta  $k-1$  y, paralelamente, los convergentes cumplen  $c_{k+1} = c_{k-1}$ , luego también se da la igualdad. En el caso en que  $t_{k+1} \neq -1$ , aplicamos la hipótesis de inducción a la sucesión definida por  $t_0, \dots, t_{k-1}, \tilde{t}_k$ , donde  $\tilde{t}_k = t_k(1+t_{k+1})$ , y el resultado es que la suma precedente es igual a

$$\frac{t_0}{1} + \frac{-t_1}{1+t_1} + \frac{-t_2}{1+t_2} + \cdots + \frac{-t_{k-1}}{1+t_{k-1}} + \frac{-t_k(1+t_{k+1})}{1+t_k(1+t_{k+1})}.$$

Pero es fácil ver que

$$\frac{-t_k(1+t_{k+1})}{1+t_k(1+t_{k+1})} = \frac{-t_k}{1+t_k + \frac{-t_{k+1}}{1+t_{k+1}}}$$

(incluso si el denominador vale 0), por lo que la expresión precedente coincide con

$$\frac{t_0}{1} + \frac{-t_1}{1+t_1} + \frac{-t_2}{1+t_2} + \cdots + \frac{-t_{k+1}}{1+t_{k+1}}. \quad (9.1)$$

Esto prueba la primera igualdad del enunciado, de la que se sigue que

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} t_0 \cdots t_n = 1 + \frac{t_0}{1} + \frac{-t_1}{1+t_1} + \frac{-t_2}{1+t_2} + \cdots$$

La segunda fórmula del enunciado es consecuencia de la identidad

$$1 + \frac{t_0}{1+R} = \frac{1}{1 - \frac{t_0}{1+t_0+R}},$$

que se comprueba sin dificultad (incluso si  $R = \infty$ ). Sustituyendo  $R$  por los convergentes de

$$\frac{-t_1}{1+t_1} + \frac{-t_2}{1+t_2} + \cdots$$

obtenemos que los convergentes del miembro derecho de (9.1) coinciden con los de la fracción continua de la fórmula que queremos probar. ■

Veamos varias aplicaciones:

**Ejemplo 9.8** Podemos expresar así la serie de la exponencial:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z}{1} \cdot \frac{z}{2} + \frac{z}{1} \cdot \frac{z}{2} \cdot \frac{z}{3} + \frac{z}{1} \cdot \frac{z}{2} \cdot \frac{z}{3} \cdot \frac{z}{4} + \cdots$$

Por el teorema anterior,

$$e^z = \frac{1}{1 + \frac{-z/1}{1+z/1} + \frac{-z/2}{1+z/2} + \frac{-z/3}{1+z/3} + \frac{-z/4}{1+z/4} + \cdots}$$

Ahora aplicamos el teorema 9.6 con  $r_1 = r_2 = 1$ ,  $r_3 = 2$ ,  $r_4 = 3$ , ... y así:

$$e^z = \frac{1}{1 + \frac{-z}{1+z} + \frac{-z}{2+z} + \frac{-2z}{3+z} + \frac{-3z}{4+z} + \cdots}$$

o más explícitamente:

$$e^z = \frac{1}{1 - \frac{z}{1+z - \frac{z}{2+z - \frac{2z}{3+z - \frac{3z}{4+z - \ddots}}}}} \quad (9.2)$$

Notemos que a lo sumo un  $a_n$  es nulo, sólo cuando  $z$  es un entero negativo, y es fácil ver entonces que todos los convergentes son finitos. En particular, si hacemos  $z = 1$  queda:

$$e = \frac{1}{1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{3 - \frac{2}{4 - \frac{3}{5 - \ddots}}}}}$$

Pero se obtiene una expresión más elegante con  $z = -1$ , que nos da:

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{1 + \frac{1}{0 + \frac{1}{1 + \frac{2}{2 + \frac{3}{3 + \ddots}}}}}$$

de donde:

$$e = 1 + \frac{1}{\frac{1}{1 + \frac{2}{2 + \frac{3}{3 + \ddots}}}} = 1 + 1 + \frac{2}{2 + \frac{3}{3 + \ddots}}$$

(Todas estas manipulaciones se justifican viendo que valen para los convergentes y luego pasando al límite.) Así pues:

$$e = 2 + \frac{2}{2 + \frac{4}{3 + \frac{5}{4 + \frac{\ddots}{5 + \ddots}}}} \quad (9.3)$$

La convergencia no es excesivamente lenta. Con 10 términos obtenemos 8 cifras decimales exactas y con 100 términos 35.

**Ejemplo 9.9** Ahora consideramos:

$$\log(1+z) = z + z \cdot \frac{-z}{2} + z \cdot \frac{-z}{2} \cdot \frac{-2z}{3} + z \cdot \frac{-z}{2} \cdot \frac{-2z}{3} \cdot \frac{-3z}{4} + \dots$$

donde la serie converge para  $|z| \leq 1$ ,  $z \neq -1$ . La fórmula de Euler nos da que

$$\log(1+z) = \frac{z}{1} + \frac{z/2}{1 - z/2} + \frac{2z/3}{1 - 2z/3} + \frac{3z/4}{1 - 3z/4} + \dots$$

El teorema 9.6 con  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 2$ ,  $r_3 = 3$ , etc. nos da:

$$\log(1+z) = \frac{z}{1} + \frac{1^2 z}{2 - z} + \frac{2^2 z}{3 - 2z} + \frac{3^2 z}{4 - 3z} + \dots$$

O más explícitamente:

$$\log(1+z) = \frac{z}{1 + \frac{1^2 z}{2 - z + \frac{2^2 z}{3 - 2z + \frac{3^2 z}{4 - 3z + \ddots}}}} \quad (9.4)$$

En particular, para  $z = 1$  queda que

$$\log 2 = \frac{1}{1 + \frac{1^2}{1 + \frac{2^2}{1 + \frac{3^2}{1 + \ddots}}}}. \quad (9.5)$$

La convergencia es muy lenta. El convergente milésimo sólo tiene dos cifras decimales exactas.

**Ejemplo 9.10** Ahora consideramos el desarrollo en serie

$$\arctan z = z + z \cdot \frac{-z^2}{3} + z \cdot \frac{-z^2}{3} \cdot \frac{-3z^2}{5} + z \cdot \frac{-z^2}{3} \cdot \frac{-3z^2}{5} \cdot \frac{-5z^2}{7} + \dots$$

que es válido para  $|z| < 1$  (pero también para  $z = 1$ ). La fórmula de Euler nos da:

$$\arctan z = \frac{z}{1 + \frac{z^2/3}{1 + \frac{3z^2/5}{1 + \frac{5z^2/7}{\ddots}}}}$$

Aplicando 9.6 obtenemos:

$$\arctan z = \frac{z}{1 + \frac{1^2 z^2}{3 - z^2} + \frac{3^2 z^2}{5 - 3z^2} + \frac{5^2 z^2}{7 - 5z^2} + \dots}$$

o explícitamente:

$$\arctan z = \frac{z}{1 + \frac{1^2 z^2}{3 - z^2 + \frac{3^2 z^2}{5 - 3z^2 + \frac{5^2 z^2}{7 - 5z^2 + \ddots}}}} \quad (9.6)$$

En particular, si  $z = 1$ , obtenemos:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \ddots}}}} \quad \pi = \frac{4}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \ddots}}}}. \quad (9.7)$$

Como en el ejemplo anterior, el convergente milésimo sólo da dos cifras exactas y el diezmilésimo tres. Invertiendo la primera fracción continua queda

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \ddots}}}}. \quad (9.8)$$

**Ejemplo 9.11** La serie de potencias del seno puede expresarse así:

$$\operatorname{sen} z = z + z \cdot \frac{-z^2}{2 \cdot 3} + z \cdot \frac{-z^2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{-z^2}{4 \cdot 5} + \dots$$

Dejamos al lector la comprobación de que de ella se deduce el desarrollo:

$$\operatorname{sen} z = \frac{z}{1 + \frac{z^2}{2 \cdot 3 - z^2 + \frac{2 \cdot 3z^2}{4 \cdot 5 - z^2 + \frac{4 \cdot 5z^2}{6 \cdot 7 - z^2 + \ddots}}}} \quad (9.9)$$

Y análogamente:

$$\operatorname{cos} z = \frac{1}{1 + \frac{z^2}{1 \cdot 2 - z^2 + \frac{1 \cdot 2z^2}{3 \cdot 4 - z^2 + \frac{3 \cdot 4z^2}{5 \cdot 6 - z^2 + \ddots}}}} \quad (9.10)$$

### 9.3 Otros desarrollos de $\pi$

Vamos a probar ahora el desarrollo de  $\pi$  en fracción continua que hemos anunciado al principio del capítulo. Para ello nos basaremos en otra fórmula que transforma series infinitas en fracciones continuas, similar a la de Euler:

**Teorema 9.12** Si  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de números complejos no nulos, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{z_n} = \frac{1}{z_1 + \frac{z_1^2}{z_2 - z_1 + \frac{z_2^2}{z_3 - z_2 + \dots}}}$$

entendiendo que la fracción continua converge si y sólo si lo hace la serie.

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que, para todo  $k$ , se cumple que

$$\sum_{n=1}^k \frac{(-1)^{n+1}}{z_n} = \frac{1}{z_1 + \frac{z_1^2}{z_2 - z_1 + \frac{z_2^2}{z_3 - z_2 + \dots + \frac{z_{k-1}^2}{z_k - z_{k-1}}}}}$$

Razonamos por inducción sobre  $k$ . Para  $k = 1$  ambos miembros son  $1/z_1$ . Supuesto cierto para  $k$ , observamos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{k+1} \frac{(-1)^{n+1}}{z_n} &= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{(-1)^{n+1}}{z_n} + (-1)^{k+1} \left( \frac{1}{z_k} - \frac{1}{z_{k+1}} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{(-1)^{n+1}}{z_n} + \frac{(-1)^{k+1}}{\frac{z_k z_{k+1}}{z_{k+1} - z_k}}. \end{aligned}$$

Si  $z_{k+1} = z_k$ , entonces la suma hasta  $k+1$  coincide con la suma hasta  $k-1$  y, por otra parte, los convergentes cumplen  $c_{k+1} = c_{k-1}$ , luego se cumple la igualdad para  $k+1$ . En caso contrario aplicamos la hipótesis de inducción a la sucesión definida por  $z_1, \dots, z_{k-1}, \tilde{z}_k$ , donde

$$\tilde{z}_k = \frac{z_k z_{k+1}}{z_{k+1} - z_k},$$

con lo que concluimos que la suma precedente es igual a

$$\frac{1}{z_1 + z_2 - z_1} + \frac{z_1^2}{z_3 - z_2} + \frac{z_2^2}{z_{k-1} - z_k} + \frac{z_{k-2}^2}{\frac{z_k z_{k+1}}{z_{k+1} - z_k} - z_{k-1}},$$

ahora bien, es fácil ver que:

$$\frac{z_k z_{k+1}}{z_{k+1} - z_k} - z_{k-1} = z_k - z_{k-1} + \frac{z_k^2}{z_{k+1} - z_k},$$

luego la última suma es

$$\frac{1}{z_1 + z_2 - z_1} + \frac{z_1^2}{z_3 - z_2} + \frac{z_2^2}{z_{k-1} - z_k} + \frac{z_k^2}{z_{k+1} - z_k}. \quad \blacksquare$$

**Ejemplo 9.13** Observemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) = \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) - \dots = 1.$$

Por otra parte

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \pi &= 4 - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} = 3 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \\ &= 3 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1} \right) \\ &= 3 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} \\ &= 3 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n(2n+1)(2n+2)}. \end{aligned}$$

Si llamamos  $x_n = 2n(2n+1)(2n+2)$ , se cumple que

$$\begin{aligned} x_n - x_{n-1} &= 2n(2n+1)(2n+2) - 2(n-1)(2n-1)2n \\ &= 4n((2n+1)(n+1) - (n-1)(2n-1)) = 24n^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, al aplicar el teorema 9.12 obtenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{(2 \cdot 3 \cdot 4)^2}{24 \cdot 2^2} + \frac{(4 \cdot 5 \cdot 6)^2}{24 \cdot 3^2} + \dots$$

Por lo tanto:

$$\pi = 3 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{(2 \cdot 3)^2 \cdot 4}{24 \cdot 2^2} + \frac{(4 \cdot 5 \cdot 6)^2}{24 \cdot 3^2} + \frac{(6 \cdot 7 \cdot 8)^2}{24 \cdot 4^2} + \dots$$

y ahora aplicamos el teorema 9.6 con  $r_1 = 1$  y  $r_n = 1/4n^2$ , para  $n \geq 2$ . El resultado es

$$\pi = 3 + \frac{1^2}{6} + \frac{3^2}{6} + \frac{5^2}{6} + \frac{7^2}{6} + \dots$$

o equivalentemente:

$$\pi = 3 + \frac{1^2}{6 + \frac{3^2}{6 + \frac{5^2}{6 + \frac{7^2}{6 + \dots}}}} \quad (9.11)$$

Esta fracción continua converge algo más rápidamente que las anteriores. Con 50 términos proporciona 5 cifras decimales exactas y con 1000 proporciona 9. ■

El teorema siguiente nos permite expresar productos infinitos como fracciones continuas:

**Teorema 9.14** Sea  $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$  una sucesión de números complejos distintos de 0 o  $-1$  y definamos

$$a_0 = 1 + z_0, \quad a_1 = 1, \quad a_n = 1 + z_n + \frac{z_n}{z_{n-1}},$$

$$b_1 = (1 + z_0)z_1, \quad b_n = -(1 + z_{n-1})\frac{z_n}{z_{n-1}}.$$

Entonces

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + z_n) = a_0 + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \dots$$

entendiendo que la fracción continua converge si y sólo si lo hace el producto.

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que, para todo  $k$ , se cumple que

$$\prod_{n=0}^k (1 + z_n) = a_0 + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \dots + \frac{b_k}{a_k}.$$

Para  $k = 0$  la identidad se reduce a  $1 + z_0 = 1 + z_0$ , y para  $k = 1$  tenemos

$$(1 + z_0)(1 + z_1) = 1 + z_0 - \frac{(1 + z_0)z_1}{1},$$

que es claramente cierto. Supongamos que la igualdad es cierta para  $k$ . Entonces

$$\prod_{n=0}^{k+1} (1 + z_n) = \prod_{n=0}^{k-1} (1 + z_n)(1 + z_k + z_{k+1} + z_k z_{k+1})$$

Aplicamos la hipótesis de inducción al producto definido por la sucesión  $z_0, \dots, z_{k-1}, \tilde{z}_k$ , donde  $\tilde{z}_k = z_k + z_{k+1} + z_k z_{k+1}$ , con lo que obtenemos que el producto anterior es igual a

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \dots + a_{k-1} + 1 + z_k + z_{k+1} + z_k z_{k+1} + \frac{z_k + z_{k+1} + z_k z_{k+1}}{z_{k-1}}}$$

y basta comprobar que

$$\frac{-(1 + z_{k-1}) \frac{z_k + z_{k+1} + z_k z_{k+1}}{z_{k-1}}}{1 + z_k + z_{k+1} + z_k z_{k+1} + \frac{z_k + z_{k+1} + z_k z_{k+1}}{z_{k-1}}} = \frac{-(1 + z_{k+1}) \frac{z_k}{z_{k-1}}}{1 + z_k + \frac{z_k}{z_{k-1}} - \frac{(1 + z_k)z_{k+1}/z_k}{1 + z_{k+1} + z_{k+1}/z_k}},$$

pues esto implica que la expresión precedente es

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \dots + a_{k-1} + a_k + \frac{b_{k+1}}{b_k}} = a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \dots + a_{k-1} + a_k} + \frac{b_k}{a_k} + \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}.$$

Notemos que la identidad que tenemos que probar (incluso si el denominador es 0) es:

$$\frac{z_k + z_{k+1} + z_k z_{k+1}}{1 + z_k + z_{k+1} + z_k z_{k+1} + \frac{z_k + z_{k+1} + z_k z_{k+1}}{z_{k-1}}} = \frac{z_k}{1 + z_k + \frac{z_k}{z_{k-1}} - \frac{z_k + z_{k+1} + z_k z_{k+1}}{z_k + z_{k+1} + z_k z_{k+1}}},$$

Si  $z_k + z_{k+1} + z_k z_{k+1} = 0$ , ambos miembros valen 0. En caso contrario, al multiplicar el numerador y el denominador del miembro derecho por el término  $z_k + z_{k+1} + z_k z_{k+1}$  obtenemos:

$$\frac{z_k(z_k + z_{k+1} + z_k z_{k+1})}{z_k + z_k(z_k + z_{k+1} + z_k z_{k+1}) + \frac{z_k(z_k + z_{k+1} + z_k z_{k+1})}{z_{k-1}}}$$

y simplificando  $z_k$  obtenemos el miembro izquierdo. ■

Vamos a aplicar este teorema a la factorización del seno (8.1):

$$\frac{\text{sen } \pi z}{\pi z} = (1 - z)(1 + z) \left(1 - \frac{z}{2}\right) \left(1 + \frac{z}{2}\right) \left(1 - \frac{z}{3}\right) \left(1 + \frac{z}{3}\right) \dots$$

Con la notación del teorema anterior, tenemos que

$n$	$z_n$	$a_n$	$b_n$
0	$-z$	$1 - z$	$-$
1	$z$	$1$	$(1 - z)z$
2	$-z/2$	$(1 - z)/2$	$(1 + z)1/2$
3	$z/2$	$z/2$	$1 - z/2$
4	$-z/3$	$(1 - z)/3$	$(1 + z/2)2/3$
5	$z/3$	$z/3$	$1 - z/3$
6	$-z/4$	$(1 - z)/4$	$(1 + z/3)3/4$
7	$z/4$	$z/4$	$1 - z/4$

por lo que

$$\frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi z} = 1 - z + \frac{(1 - z)z}{1} + \frac{(1 + z)1/2}{(1 - z)/2} + \frac{1 - z/2}{z/2} + \frac{(1 + z/2)2/3}{(1 - z)/3} +$$

$$\frac{1 - z/3}{z/3} + \frac{(1 + z/3)3/4}{(1 - z)/4} + \frac{1 - z/4}{z/4} + \dots$$

Ahora aplicamos el teorema 9.6 con  $r_0 = r_1 = 1$ ,  $e_2 = r_3 = 2$ ,  $r_4 = r_5 = 3, \dots$

$$\frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi z} = 1 - z + \frac{(1 - z)z}{1} + \frac{1 + z}{1 - z} + \frac{2(2 - z)}{z} + \frac{2(2 + z)}{1 - z} +$$

$$\frac{3(3 - z)}{z} + \frac{3(3 + z)}{1 - z} + \frac{4(4 - z)}{z} + \dots$$

La asimetría de los primeros términos se puede arreglar observando que

$$1 - z + \frac{(1 - z)z}{1 + R} = 1 - \frac{z(z + R)}{1 + R} = 1 - \frac{z}{\frac{1 + R}{z + R}} = 1 - \frac{z}{1 + \frac{1 - z}{z + R}}$$

(incluso si  $R = \infty$ ). Sustituyendo  $R$  por los convergentes de

$$\frac{1 + z}{1 - z} + \frac{2(2 - z)}{z} + \frac{2(2 + z)}{1 - z} + \frac{3(3 - z)}{z} + \frac{3(3 + z)}{1 - z} + \dots$$

y tomando el límite queda que

$$\frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi z} = 1 - \frac{z}{1 + \frac{1(1 - z)}{z}} + \frac{1(1 + z)}{1 - z} + \frac{2(2 - z)}{z} + \frac{2(2 + z)}{1 - z} +$$

$$\frac{3(3 - z)}{z} + \frac{3(3 + z)}{1 - z} + \frac{4(4 - z)}{z} + \dots$$

o equivalentemente:

$$\frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi z} = 1 - \frac{z}{1 + \frac{1(1-z)}{z + \frac{1(1+z)}{1-z + \frac{2(2-z)}{z + \frac{2(2+z)}{1-z + \frac{3(3-z)}{z + \frac{3(3+z)}{1-z + \dots}}}}}} \quad (9.12)$$

Así, haciendo  $z = 1/2$  queda:

$$\frac{2}{\pi} = 1 - \frac{1/2}{1 + \frac{1/2}{1/2 + 1/2} + \frac{3/2}{1/2} + \frac{2 \cdot 3/2}{1/2} + \frac{2 \cdot 5/2}{1/2} + \frac{3 \cdot 5/2}{1/2} + \frac{3 \cdot 7/2}{1/2} + \dots$$

y el teorema 9.6 nos da:

$$\frac{2}{\pi} = 1 - \frac{1}{2 + \frac{1 \cdot 2}{1 + \frac{2 \cdot 3}{1 + \frac{3 \cdot 4}{1 + \frac{4 \cdot 5}{1 + \frac{5 \cdot 6}{1 + \frac{6 \cdot 7}{1 + \dots}}}}}}}$$

Usando que

$$1 - \frac{1}{2+R} = \frac{1+R}{2+R} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+R}}$$

podemos transformar la expresión anterior en

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1 \cdot 2}{1 + \frac{2 \cdot 3}{1 + \frac{3 \cdot 4}{1 + \frac{4 \cdot 5}{1 + \frac{5 \cdot 6}{1 + \frac{6 \cdot 7}{1 + \dots}}}}}}}}$$

luego

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1 \cdot 2}{1 + \frac{2 \cdot 3}{1 + \frac{3 \cdot 4}{1 + \frac{4 \cdot 5}{1 + \frac{5 \cdot 6}{1 + \frac{6 \cdot 7}{1 + \dots}}}}}}$$

o equivalentemente

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1 \cdot 2}{1 + \frac{2 \cdot 3}{1 + \frac{3 \cdot 4}{1 + \frac{4 \cdot 5}{1 + \dots}}}}} \quad (9.13)$$

## 9.4 La irracionalidad de $\pi$

En 1761 el matemático suizo Johann Heinrich Lambert demostró que  $\pi$  es irracional. Su demostración se basaba en un desarrollo en fracción continua

de la función  $\tan x$  que probaremos en esta sección. Sin embargo, la prueba que daremos de la irracionalidad de  $\pi$  es una simplificación del argumento de Lambert publicada en 1977 por el matemático húngaro Miklós Laczkovich que no requiere dicho desarrollo, sino que se basa en los resultados preliminares que permiten probarlo.

Todos los resultados de esta sección se basan en la relación de las funciones trigonométricas con una función perteneciente a una familia de funciones que fue estudiada sistemáticamente por Gauss, conocidas como funciones hipergeométricas.

**Definición 9.15** Para cada número complejo  $a$  y cada número natural  $n$ , se define el *símbolo de Pochhammer* (o factorial creciente) como

$$(a)_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ a(a+1) \cdots (a+n-1) & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Si  $a$  no es un entero menor o igual que 0, definimos<sup>2</sup>

$$F(a, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a)_n n!} z^n.$$

Observemos que la serie de potencias tiene radio de convergencia infinito, por lo que define una función continua en todo el plano complejo. En efecto, basta aplicar el criterio de D'Alembert:

$$\lim_n \frac{\frac{|z|^{n+1}}{|(a)_{n+1}|(n+1)!}}{\frac{|z|^n}{|(a)_n|n!}} = \lim_n \frac{|z|}{(n+1)|a+n|} = 0.$$

Las funciones hipergeométricas aparecen en diversos contextos, fundamentalmente como soluciones de determinadas ecuaciones diferenciales. A nosotros nos interesan por la relación siguiente con las funciones trigonométricas:

$$F(1/2, -z^2/4) = \cos z, \quad F(3/2, -z^2/4) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}. \quad (9.14)$$

En efecto,

$$F(1/2, -z^2/4) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1/2)_n n!} \frac{z^{2n}}{2^{2n}}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n},$$

luego basta probar que

$$(1/2)_n n! 2^{2n} = (2n)!$$

Observamos que es cierto para  $n = 0$ , y si vale para  $n$ , entonces

$$\begin{aligned} (1/2)_{n+1} (n+1)! 2^{2n+2} &= (1/2)_n n! 2^{2n} (1/2+n)(n+1)4 \\ &= (2n)!(2n+1)(2n+2) = (2n+2)! \end{aligned}$$

La igualdad para el seno se demuestra análogamente. ■

<sup>2</sup>Esta función recibe el nombre de *función hipergeométrica confluyente límite* y se representa habitualmente por  ${}_0F_1$ .

Necesitamos dos propiedades de la función  $F$ . La primera es:

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} F(a, z) = 1. \tag{9.15}$$

Se entiende que aquí consideramos únicamente valores reales para  $a$ . Tenemos que

$$|F(a, z) - 1| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a)_n n!} z^n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{(a)_n n!}.$$

Ahora bien, si  $a > 0$ , entonces  $(a)_n \geq a^n$ . Además, como la sucesión  $\{z^n/n!\}_{n=0}^{\infty}$  tiende a 0 (pues define la serie de la función exponencial), está acotada, digamos por  $M$ , de modo que

$$|F(a, z) - 1| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{a^n} = \frac{M}{a-1}. \quad \blacksquare$$

Por otra parte:

$$F(a, z) = F(a+1, z) + \frac{z}{a(a+1)} F(a+2, z). \tag{9.16}$$

En efecto:

$$\begin{aligned} F(a+1, z) + \frac{z}{a(a+1)} F(a+2, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+1)_n n!} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a)_{n+2} n!} z^{n+1} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(a+1)_n n!} + \frac{1}{(a)_{n+1} (n-1)!} \right) z^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(a+1)_n} + \frac{n}{(a)_{n+1}} \right) \frac{z^n}{n!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a}{a+n} + \frac{n}{a+n} \right) \frac{z^n}{(a)_n n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = F(a, z). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Con esto tenemos suficiente para probar:

**Teorema 9.16** *Si  $x \neq 0$  es un número racional, entonces, para todo  $a$  racional que no sea un entero menor o igual que 0, se cumple que  $F(a, x) \neq 0$  y además  $F(a+1, x)/F(a, x)$  es irracional.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que  $F(a, x) = 0$  o que  $F(a+1, x)/F(a, x)$  es racional. En el segundo caso,

$$\frac{F(a+1, x)}{F(a, x)} = \frac{u}{v},$$

para ciertos enteros  $u$  y  $v$ . Si  $u \neq 0$ , llamamos

$$y = \frac{F(a+1, x)}{u} = \frac{F(a, x)}{v},$$

de modo que

$$F(a, x) = vy, \quad F(a+1, x) = uy.$$

Si  $u = 0$  se cumple esto mismo con  $v = 1$ ,  $y = F(a, x)$ , y si  $F(a, x) = 0$  se cumple con  $u = 1$ ,  $v = 0$ ,  $y = F(a + 1, x)$ , luego bajo las hipótesis del teorema se cumplen estas relaciones con  $u, v$  enteros (tal vez nulos). Notemos que no puede ser  $y = 0$ , pues entonces la relación (9.16) implicaría que  $F(a + n, x) = 0$  para todo  $n \geq 0$ , en contra de (9.15). Cambiando el signo a  $u$  y a  $v$  si es preciso, podemos suponer que  $y > 0$ .

Consideremos ahora la relación (9.16) aplicada a  $x$  y  $a + n$ :

$$F(a + n, x) = F(a + n + 1, x) + \frac{x}{(a + n)(a + n + 1)} F(a + n + 2, x),$$

Si  $m$  es un número natural arbitrario, tenemos que

$$\frac{m^n m^2}{(a)_n} F(a + n, x) = \frac{m^{n+1} m(a + n)}{(a)_{n+1}} F(a + n + 1, x) + \frac{m^{n+2} x}{(a)_{n+2}} F(a + n + 2, x).$$

Definimos:

$$G_n = \frac{m^n}{(a)_n} F(a + n, x),$$

de modo que la relación precedente es  $m^2 G_n = m(a + n) G_{n+1} + x G_{n+2}$ , o también:

$$G_{n+2} = \frac{m^2}{x} G_n - \left( \frac{ma}{x} + \frac{m}{x} n \right) G_{n+1}. \quad (9.17)$$

Además:  $G_0 = F(a, x) = vy$ ,  $G_1 = (m/a)F(a + 1, x) = (mu/a)y$ .

Podemos elegir  $m$  de modo que  $mu/a$ ,  $ma/x$  y  $m/x$  sean enteros. Así, todos los coeficientes en (9.17) son enteros, lo que a su vez implica que todos los  $G_n$  son múltiplos enteros de  $y$ . Además, por 9.15 sabemos que  $G_n > 0$  para todo  $n$  suficientemente grande, luego  $G_n \geq y > 0$ . Pero esto es absurdo, porque

$$\lim_n \frac{m^n}{(a)_n} = 0,$$

luego también  $\lim_n G_n = 0$ . En efecto, basta observar que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n}{(a)_n}$$

converge por el criterio de D'Alembert. ■

**Teorema 9.17**  $\pi$  es irracional.

DEMOSTRACIÓN: Vamos a probar algo más fuerte:  $\pi^2$  es irracional. En efecto, como  $\sin \pi = 0$ , por (9.14) tenemos que  $F(3/2, -\pi^2/4) = 0$ , y el teorema anterior nos da que  $-\pi^2/4$  es irracional, luego  $\pi^2$  también lo es. ■

Teniendo en cuenta que  $\tan(\pi/4) = 1$ , la irracionalidad de  $\pi$  se sigue también de la consecuencia siguiente del teorema 9.16:

**Teorema 9.18** *Si  $x \neq 0$  es un número racional, entonces  $\tan x$  es irracional.*

DEMOSTRACIÓN: Por (9.14),

$$\tan x = \frac{x F(3/2, -x^2/4)}{F(1/2, -x^2/4)},$$

y el teorema 9.16 nos asegura que el denominador no se anula y que el cociente (sin la  $x$  en el numerador, luego también con ella) es irracional. ■

Más aún, teniendo en cuenta que

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = -i \tan ix = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1},$$

obtenemos que

$$\tanh x = \frac{x F(3/2, x^2/4)}{F(1/2, x^2/4)},$$

luego el mismo argumento empleado en la prueba del teorema anterior nos da que si  $x \neq 0$  es racional, entonces  $\tanh x$  es irracional, pero esto implica que  $e^{2x}$  es irracional y, aplicándolo a  $x/2$ , concluimos:

**Teorema 9.19** *Si  $x \neq 0$  es racional, entonces  $e^x$  es irracional.*

Esto equivale a que  $e^n$  es racional para todo número natural  $n$ , pero lo más interesante es que nos permite probar el resultado análogo para el logaritmo:

**Teorema 9.20** *Si  $x > 0$ ,  $x \neq 1$  es racional, entonces  $\log x$  es irracional.*

DEMOSTRACIÓN: Si  $\log x$  es racional, entonces como  $e^{\log x} = x$  es racional, por el teorema anterior tiene que ser  $\log x = 0$ , luego  $x = 1$ . ■

Vamos a ver ahora que los resultados sobre la función  $F$  que nos han permitido demostrar el teorema 9.16 nos permiten obtener el desarrollo en fracción continua que uso Lambert para probar la irracionalidad de  $\pi$ .

Observemos que (9.16) puede expresarse así:

$$\frac{F(a, z)}{F(a+1, z)} = 1 + \frac{z}{a(a+1)} \frac{F(a+2, z)}{F(a+1, z)},$$

o también:

$$\frac{F(a+1, z)}{F(a, z)} = \frac{1}{1 + \frac{z}{a(a+1)} \frac{F(a+2, z)}{F(a+1, z)}}. \quad (9.18)$$

**Teorema 9.21** *Para todo  $a > 0$  y todo número complejo  $z$ :*

$$\frac{F(a+1, z)}{aF(a, z)} = \frac{1}{a} + \frac{z}{a+1} + \frac{z}{a+2} + \frac{z}{a+3} + \dots$$

DEMOSTRACIÓN: conviene introducir la notación

$$[b_1, \dots, b_n] = \frac{b_1}{1 + \frac{b_2}{1 + \dots + \frac{b_{n-1}}{1 + \frac{b_n}{1}}}}.$$

En primer lugar vamos a probar que si  $|b_i| \leq 1/4$  para  $i = 1, \dots, n-1$  y  $|b_n| \leq 1/2$ , entonces

$$|[b_1, \dots, b_n]| \leq 1/2. \quad (9.19)$$

En efecto, para  $n = 1$  es inmediato y, si vale para  $n$ , entonces

$$[b_1, \dots, b_{n+1}] = \frac{b_1}{1 + [b_2, \dots, b_{n+1}]}.$$

Por hipótesis de inducción  $|[b_2, \dots, b_{n+1}]| \leq 1/2$ , luego

$$|1 + [b_2, \dots, b_{n+1}]| \geq |1 - |[b_2, \dots, b_{n+1}]|| \geq 1/2,$$

luego

$$|[b_1, \dots, b_{n+1}]| \leq 2|b_1| \leq 1/2.$$

Ahora probamos que si  $|b_i| \leq 1/4$  para  $i = 1, \dots, n$  y  $|\delta| \leq 1/4$ , entonces

$$|[b_1, \dots, b_{n-1}, b_n + \delta] - [b_1, \dots, b_n]| \leq |\delta|. \quad (9.20)$$

Para  $n = 1$  es trivial. Si es cierto para  $n$ , definimos

$$u = [b_2, \dots, b_{n+1}], \quad v = [b_2, \dots, b_n, b_{n+1} + \delta].$$

Por (9.19) sabemos que  $|u| \leq 1/2$  y  $|v| \leq 1/2$ , y  $|u - v| \leq |\delta|$  por hipótesis de inducción. Entonces,

$$\begin{aligned} |[b_1, \dots, b_n, b_n + \delta] - [b_1, \dots, b_n]| &= \left| \frac{b_1}{1+v} - \frac{b_1}{1+u} \right| = \left| \frac{b_1(u-v)}{(1+u)(1+v)} \right| \\ &\leq \frac{|\delta|/4}{(1-1/2)(1-1/2)} = |\delta|. \end{aligned}$$

Ahora, fijados un número real  $a > 0$  y un número complejo  $z \neq 0$ , no puede suceder que  $F(a+n, z) = F(a+n+1, z) = 0$ , pues en tal caso (9.16) implicaría que  $F(a+k, z) = 0$  para todo  $k \geq n$ , en contradicción con (9.15). Por lo tanto podemos definir

$$a_n = \frac{F(a+n+1, z)}{F(a+n, z)},$$

que será  $a_n = \infty$  si se anula el denominador (pero no puede ser  $0/0$ ). Entonces (9.18) equivale a:

$$a_n = \frac{1}{1 + \frac{z}{(a+n)(a+n+1)} a_{n+1}}.$$

En particular,  $a_0$  es

$$\frac{F(a+1, z)}{F(a, z)} = \left[ 1, \frac{z}{a(a+1)}, \frac{z}{(a+1)(a+2)}, \dots, \frac{z}{(a+n)(a+n+1)} a_{n+1} \right],$$

para todo  $n$ . Por otra parte, (9.15) implica que  $\lim_n a_n = 1$ . Sea  $n_0 > 1$  tal que si  $n \geq n_0$  entonces (para  $a$  y  $z$  fijos):

$$\left| \frac{z}{(a+n)(a+n+1)} \right| < \frac{1}{4}, \quad 0 < a_n < 2.$$

Sean

$$P_n = \left[ \frac{z}{(a+n_0)(a+n_0+1)}, \dots, \frac{z}{(a+n)(a+n+1)} \right],$$

$$Q_n = \left[ \frac{z}{(a+n_0)(a+n_0+1)}, \dots, \frac{z}{(a+n)(a+n+1)} a_{n+1} \right].$$

Notemos que (9.19) implica que los  $P_n$  y  $Q_n$  son finitos, y (9.20) implica que

$$|Q_n - P_n| \leq \left| \frac{z}{(a+n)(a+n+1)} \right| |a_{n+1} - 1| \leq |a_{n+1} - 1|. \quad (9.21)$$

Consideremos ahora la función

$$H(w) = \left[ 1, \frac{z}{a(a+1)}, \frac{z}{(a+1)(a+2)}, \dots, \frac{z}{(a+n_0-1)(a+n_0)}, w \right].$$

Así

$$a_0 = \frac{F(a+1, z)}{F(a, z)} = H(Q_n),$$

pero, en virtud del teorema 9.3, la función  $H$  es de la forma

$$H(w) = c_{n_0+2} = \frac{p_{n_0+1} + p_{n_0}w}{q_{n_0+1} + q_{n_0}w}$$

para ciertos números complejos  $p_{n_0+1}, p_{n_0}, q_{n_0+1}, q_{n_0}$ , donde el numerador y el denominador no pueden anularse simultáneamente. Así pues,

$$a_0 = \frac{p_{n_0+1} + p_{n_0}Q_n}{q_{n_0+1} + q_{n_0}Q_n},$$

y esto implica que la sucesión  $Q_n$  es constante, pues si  $a_0 = \infty$  tiene que ser necesariamente  $Q_n = -q_{n_0+1}/q_{n_0}$  y si  $a_0$  es finito, despejando queda que

$$Q_n = \frac{p_{n_0+1} - a_0 q_{n_0+1}}{a_0 q_{n_0} - p_{n_0}}.$$

En otros términos,  $Q_n = H^{-1}(a_0)$ , y ahora (9.21) se traduce en que

$$\lim_n P_n = H^{-1}(a_0).$$

Pero la función  $H(w)$  es continua, luego

$$\lim_n H(P_n) = a_0,$$

y esto vale incluso si  $a_0 = \infty$ , pues en tal caso  $\lim_n P_n = -q_{n_0+1}/q_{n_0}$  y entonces el límite de  $H(P_n)$  es  $\infty$  (ya que no puede quedar una indeterminación  $0/0$ , pues el numerador y el denominador de  $H(w)$  no pueden anularse simultáneamente). Ahora sólo queda observar que

$$H(P_n) = \left[ 1, \frac{z}{a(a+1)}, \frac{z}{(a+1)(a+2)}, \dots, \frac{z}{(a+n)(a+n+1)} \right],$$

por lo que

$$\frac{F(a+1, z)}{F(a, z)} = \frac{1}{1 + \frac{\frac{z}{a(a+1)}}{1 + \frac{\frac{z}{(a+1)(a+2)}}{1 + \frac{\frac{z}{(a+2)(a+3)}}{1 + \dots}}}}$$

y aplicando 9.6 obtenemos:

$$\frac{F(a+1, z)}{F(a, z)} = \frac{a}{a + \frac{z}{a+1} + \frac{z}{a+2} + \frac{z}{a+3} + \dots}$$

Dividiendo entre  $a$  llegamos a (9.21). En la demostración hemos supuesto  $z \neq 0$ , pero si  $z = 0$  la igualdad se reduce a

$$\frac{F(a+1, 0)}{aF(a, 0)} = \frac{1}{a},$$

que se sigue de la definición de  $F$ , pues es claro que  $F(a, 0) = 1$ . ■

En particular, haciendo  $a = 1/2$  y evaluando en  $-z^2/4$ , teniendo en cuenta (9.14), obtenemos:

$$\frac{2 \operatorname{sen} z}{z \cos z} = \frac{1}{1/2 - \frac{z^2/4}{3/2} - \frac{z^2/4}{5/2} - \frac{z^2/4}{7/2} + \dots}$$

de donde

$$\tan z = \frac{z/2}{1/2 - \frac{z^2/4}{3/2} - \frac{z^2/4}{5/2} - \frac{z^2/4}{7/2} + \dots}$$

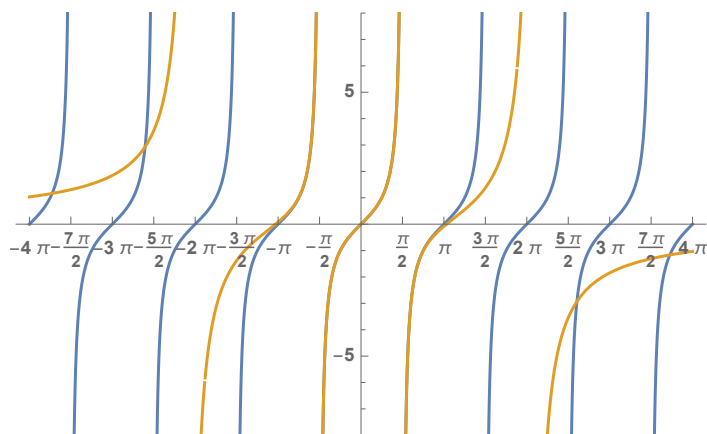
y aplicando una vez más 9.6:

$$\tan z = \frac{z}{1 - \frac{z^2}{3} - \frac{z^2}{5} - \frac{z^2}{7} + \dots}$$

o equivalentemente:

$$\tan z = \frac{z}{1 - \frac{z^2}{3 - \frac{z^2}{5 - \frac{z^2}{7 - \dots}}}} \quad (9.22)$$

La gráfica siguiente muestra el convergente  $c_4$  de la fracción continua anterior. Vemos que aproxima muy bien la rama central de la tangente. Por ejemplo,  $\tan 1 = 1.5577407\dots$ , mientras que  $c_4(1) = 95/61 = 1.5573770\dots$



La relación  $\tanh z = -i \tan iz$  nos da a su vez:

$$\tanh z = \frac{z}{1 + \frac{z^2}{3 + \frac{z^2}{5 + \frac{z^2}{7 + \dots}}}} \quad (9.23)$$

A su vez,

$$\frac{z}{\tanh z} = 1 + \frac{z^2}{3} + \frac{z^2}{5} + \frac{z^2}{7} + \dots$$

luego

$$\frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1} = \coth z = \frac{1}{z} + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{5} + \frac{z^2}{7} + \dots$$

luego

$$\frac{e^{2/z} + 1}{e^{2/z} - 1} = z + \frac{1/z}{3} + \frac{1/z^2}{5} + \frac{1/z^2}{7} + \dots$$

y aplicando el teorema 9.6

$$\frac{e^{2/z} + 1}{e^{2/z} - 1} = z + \frac{1}{3z} + \frac{1}{5z} + \frac{1}{7z} + \dots$$

y para  $z = 2$  obtenemos:

$$\frac{e + 1}{e - 1} = 2 + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} + \dots \quad (9.24)$$

En [ITA1 10.8] demostramos que todo número irracional admite un único desarrollo en fracción continua simple, es decir, con todos los  $b_n = 1$  y los  $a_n$

naturales no nulos (salvo que puede ser  $a_0 = 0$ ). En [ITA1 10.6] se explica cómo calcular la sucesión  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  para cualquier número real dado (que será finita si es racional). En el caso de  $e$  los primeros valores resultan ser:

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \ddots}}}}}}}}}} \quad (9.25)$$

pero no es fácil probar que el patrón que se conjetura a partir de aquí se dé realmente. Vamos a ver que se sigue fácilmente de (9.24). Observemos que, para  $n \geq 1$ , la sucesión de coeficientes del miembro derecho de (9.25) viene dada por

$$a_{3n-1} = 2n, \quad a_{3n} = a_{3n+1} = 1.$$

Si llamamos  $r_n/s_n$  a los convergentes, sucede que satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned} r_{3n+1} &= 2(2n+1)r_{3(n-1)+1} + r_{3(n-2)+1}, \\ s_{3n+1} &= 2(2n+1)s_{3(n-1)+1} + s_{3(n-2)+1}. \end{aligned} \quad (9.26)$$

Demostraremos la primera, pues la segunda se obtiene análogamente. En efecto, aplicamos varias veces el teorema 9.3:

$$r_{3n+1} = r_{3n} + r_{3n-1} = r_{3n-1} + r_{3n-2} + r_{3n-1} = 2r_{3n-1} + r_{3n-2}.$$

Por otra parte,  $r_{3n-1} = 2nr_{3n-2} + r_{3n-3}$ , luego

$$\begin{aligned} r_{3n+1} &= 2(2nr_{3n-2} + r_{3n-3}) + r_{3n-2} = (4n+1)r_{3n-2} + r_{3n-3} + r_{3n-3} \\ &= (4n+1)r_{3n-2} + r_{3n-3} + r_{3n-4} + r_{3n-5} \end{aligned}$$

y, como  $r_{3n-2} = r_{3n-3} + r_{3n-4}$ ,

$$\begin{aligned} r_{3n+1} &= (4n+1)r_{3n-2} + r_{3n-2} + r_{3n-5} = (4n+2)r_{3n-2} + r_{3n-5} \\ &= 2(2n+1)r_{3(n-1)+1} + r_{3(n-2)+1}. \end{aligned}$$

■

Por otra parte, la fracción continua (9.24) cumple  $a_n = 2(2n+1)$ , luego sus convergentes  $p_n/q_n$  cumplen

$$p_n = 2(2n+1)p_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = 2(2n+1)q_{n-1} + q_{n-2}.$$

Combinando esto con (9.26) obtenemos que

$$r_{3n+1} = p_n + q_n, \quad s_{3n+1} = p_n - q_n.$$

Veamos la primera igualdad. Para ello llamamos  $u_n = r_{3n+1} - p_n - q_n$  y observamos que

$$\begin{aligned} u_n &= 2(2n+1)r_{3(n-1)+1} + r_{3(n-2)+1} - 2(2n+1)p_{n-1} - p_{n-2} \\ &= 2(2n+1)u_{n-1} + u_{n-2}, \end{aligned}$$

pero una comprobación rutinaria nos da que  $u_0 = u_1 = 0$ , luego por inducción  $u_n = 0$  para todo  $n$ . ■

Ahora ya podemos concluir: el miembro derecho de (9.25) es<sup>3</sup>

$$\lim_n \frac{r_n}{s_n} = \lim_n \frac{r_{3n+1}}{s_{3n+1}} = \lim_n \frac{p_n + q_n}{p_n - q_n} = \lim_n \frac{p_n/q_n + 1}{p_n/q_n - 1} = \frac{\frac{e+1}{e-1} + 1}{\frac{e+1}{e-1} - 1} = e.$$

Observemos que (9.25) es equivalente a

$$e = 1 + \frac{1}{0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \ddots}}}}}}}} \quad (9.27)$$

que no es una fracción continua simple, pero muestra más claramente el patrón de los coeficientes.

---

<sup>3</sup>Al pasar a una subsucesión usamos que la fracción continua de (9.25) es convergente, pero en [ITA1 10.4] se prueba que toda fracción continua simple es convergente.





DEMOSTRACIÓN: Sea  $f(x) = a_0x^d + a_1x^{d-1} + \dots + a_d \in \mathbb{Z}[x]$  el polinomio mínimo de  $\alpha$  (multiplicado por un  $a_0 \in \mathbb{Z}$  para que sus coeficientes sean enteros). Entonces

$$f(x) = (x - \alpha)g(x),$$

donde  $g(x)$  es un polinomio con coeficientes reales.

La función  $|g(x)|$  es continua, luego por el teorema de Weierstrass toma un valor máximo  $M$  en el compacto  $K = [\alpha - 1, \alpha + 1]$ . Así, si  $p/q$  es un número racional tal que  $|p/q - \alpha| \leq 1$ , entonces

$$|f(p/q)| = |p/q - \alpha||g(p/q)| \leq M|p/q - \alpha|.$$

Ahora observamos que  $q^d f(p/q)$  es un número entero, y  $f(p/q) \neq 0$ , ya que  $f(x)$  es irreducible en  $\mathbb{Q}[x]$ , luego no puede tener raíces racionales. Por lo tanto, tiene que ser  $|q^d f(p/q)| \geq 1$ . Así pues:

$$\frac{1}{q^d} \leq q^d |f(p/q)| \leq M \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|,$$

siempre y cuando  $p/q$  aproxime a  $\alpha$  con error menor que 1, pero tomando  $C = \min\{1, 1/M\}$  tenemos una constante que vale para todo  $p/q$ . ■

Conviene observar que podemos eliminar la constante  $C$  del enunciado a cambio de admitir un número finito de contraejemplos:

**Teorema 10.2** *Si  $\alpha$  es un número real algebraico de grado  $d$ , entonces hay a lo sumo una cantidad finita de números racionales  $p/q$  que cumplen*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{d+1}}.$$

DEMOSTRACIÓN: Para cada valor de  $q$  hay a lo sumo una cantidad finita de valores de  $p$  que cumplan la aproximación, luego si existieran infinitas aproximaciones, las habría con denominador arbitrariamente grande, luego podríamos tomar una tal que  $1/q^{d+1} < C/q^d$ , donde  $C$  es la constante del teorema anterior, lo cual es imposible. ■

Ahora es fácil probar que la constante de Liouville es trascendente. Más en general:

**Teorema 10.3** *Si  $b \geq 2$  es un número natural, el número*

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b^{k!}}$$

*es trascendente.*

DEMOSTRACIÓN: Para todo  $j \geq j_0$ , podemos aproximar  $\alpha$  mediante  $p_j/q_j$ , donde

$$p_j = b^{j!}(b^{-1!} + b^{-2!} + \dots + b^{-j!}), \quad q_j = b^{j!},$$

y la diferencia es

$$\begin{aligned} \left| \alpha - \frac{p_j}{q_j} \right| &= b^{-(j+1)!} + b^{-(j+2)!} + \dots < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{b^{(j+1)!+k}} = \frac{1}{b^{(j+1)!}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{b^k} \\ &= \frac{b}{(b-1)b^{(j+1)!}} < \frac{1}{b^{(j+1)!-1}} = \frac{1}{b^{j!j+j!-1}} < \frac{1}{b^{j!j}} = \frac{1}{q_j^j} \leq \frac{1}{q_j^{j_0}}. \end{aligned}$$

Claramente  $\alpha$  es irracional (pues su desarrollo decimal en base  $b$  no es periódico). Si  $\alpha$  fuera algebraico, su grado debería ser  $d \geq j_0 - 1$  para todo  $j_0$ , lo cual es absurdo. ■

Así, para  $b = 10$  tenemos la constante de Liouville. Para  $b = 2$  tenemos el número

$$\alpha = 2^{-1!} + 2^{-2!} + 2^{-3!} + \dots = 0.76562505960464477539\dots$$

Sin embargo, éstos son números contruidos a propósito para que se pueda aplicar el teorema de Liouville. Puede probarse éste no es aplicable a  $e$  y  $\pi$ , pese a lo cual son números trascendentes, según veremos en las secciones siguientes.

## 10.2 La trascendencia de $e$

Para probar que  $e$  es trascendente empezamos introduciendo unos convenios útiles de notación:

**Definición 10.4** Escribiremos  $h^r = r!$ , de modo que si  $f(z) = \sum_{r=0}^m c_r z^r \in \mathbb{C}[z]$ , entonces  $f(h)$  representará

$$f(h) = \sum_{r=0}^m c_r h^r = \sum_{r=0}^m c_r r!$$

Igualmente,  $f(z+h)$  será el polinomio que resulta de considerar el polinomio  $f(z+y)$  y sustituir  $y^r$  por  $h^r = r!$  en la expresión desarrollada de los binomios. Concretamente:

$$f(z+y) = \sum_{r=0}^m c_r (z+y)^r = \sum_{r=0}^m c_r \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} z^{r-k} y^k = \sum_{k=0}^m \left( \sum_{r=k}^m c_r \binom{r}{k} z^{r-k} \right) y^k,$$

por lo que, por definición,

$$f(z+h) = \sum_{k=0}^m \left( \sum_{r=k}^m c_r \binom{r}{k} z^{r-k} \right) k! = \sum_{k=0}^m \left( \sum_{r=k}^m \frac{r!}{(r-k)!} c_r z^{r-k} \right).$$

De la propia definición se sigue que:

$$f(z+h) = \sum_{r=0}^m c_r (z+h)^r. \tag{10.1}$$

Debemos tener presente que esto es un mero convenio de notación, de modo que “ $z + h$ ” no es realmente una suma, por lo que no es inmediato, aunque es fácil de comprobar, que, por ejemplo,  $f(0 + h) = f(h)$ . En efecto

$$f(0 + h) = \sum_{k=0}^m \left( \sum_{r=k}^m \frac{r!}{(r-k)!} c_r 0^{r-k} \right) = \sum_{k=0}^m \frac{k!}{(k-k)!} c_k = f(h).$$

Sea

$$u_r(z) = r! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(r+n)!}.$$

Teniendo en cuenta que<sup>1</sup>

$$\frac{|z|^n}{(r+n)!} < \frac{|z|^n}{n!},$$

es claro que la serie converge en todo  $\mathbb{C}$  y que  $|u_r(z)| < e^{|z|}$ . Llamaremos

$$\epsilon_r(z) = \frac{u_r(z)}{e^{|z|}}.$$

Así,  $|\epsilon_r(z)| < 1$ .

**Teorema 10.5** Sea  $\phi(z) = \sum_{r=0}^s c_r z^r \in \mathbb{C}[z]$ . Sea  $\psi(z) = \sum_{r=0}^s c_r \epsilon_r(z) z^r$ . Entonces

$$e^z \phi(h) = \phi(z+h) + \psi(z) e^{|z|}.$$

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar

$$(z+h)^r = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} z^k h^{r-k} = \sum_{k=0}^r \frac{r!}{k!} z^k = r! \sum_{k=0}^r \frac{z^k}{k!},$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} r!e^z - u_r(z)z^r &= r! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} - r! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(r+n)!} z^r = r! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} - r! \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \\ &= r! \sum_{k=0}^r \frac{z^k}{k!}, \end{aligned}$$

o sea,  $(z+h)^r = r!e^z - u_r(z)z^r$ , y por lo tanto

$$e^z h^r = (z+h)^r + u_r(z)z^r = (z+h)^r + e^{|z|} \epsilon_r(z) z^r.$$

Teniendo en cuenta (10.1), multiplicando por  $c_r$  y sumando en  $r$  obtenemos la igualdad requerida. ■

<sup>1</sup>Notemos que el denominador tiene  $n$  factores, que son  $r+n > n$ ,  $r+n-1 > n-1$ , etc., luego el denominador es mayor que  $n!$ .

**Teorema 10.6** Sea  $m \geq 2$  y  $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ . Definimos los polinomios  $F_1$  y  $F_2$  mediante:

$$F_1(x) = \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} f(x), \quad F_2(x) = \frac{x^m}{(m-1)!} f(x).$$

Entonces  $F_1(h), F_2(h) \in \mathbb{Z}$ ,  $F_1(h) \equiv f(0) \pmod{m}$  y  $F_2(h) \equiv 0 \pmod{m}$ .

DEMOSTRACIÓN: Sea  $f(x) = \sum_{r=0}^s a_r x^r$ , con  $a_r \in \mathbb{Z}$ . Entonces

$$F_1(x) = \sum_{r=0}^s a_r \frac{x^{r+m-1}}{(m-1)!}, \quad F_1(h) = \sum_{r=0}^s a_r \frac{(r+m-1)!}{(m-1)!} \in \mathbb{Z}$$

y  $m$  divide a cada sumando excepto quizá al primero, que es  $a_0 = f(0)$ . Por lo tanto  $F_1(h) \equiv f(0) \pmod{m}$ . Con  $F_2$  se razona análogamente. ■

Con esto ya podemos demostrar:

**Teorema 10.7** El número  $e$  es trascendente.

DEMOSTRACIÓN: Si  $e$  fuera algebraico sería la raíz de un polinomio con coeficientes enteros. Digamos  $\sum_{t=0}^n c_t e^t = 0$ , con  $n \geq 1$ ,  $c_t \in \mathbb{Z}$ ,  $c_0 \neq 0$  (si fuera  $c_0 = 0$  podríamos dividir entre  $e$  y quedarnos con un polinomio de grado menor). Sea  $p$  un primo tal que  $p > n$  y  $p > |c_0|$ . Sea

$$\phi(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} ((x-1)(x-2)\cdots(x-n))^p.$$

Por el teorema 10.5:

$$0 = \sum_{t=0}^n c_t e^t \phi(h) = \sum_{t=0}^n c_t \phi(t+h) + \sum_{t=0}^n c_t \psi(t) e^t = S_1 + S_2.$$

Tomando  $m = p$ , el teorema 10.6 nos da que  $\phi(h) \in \mathbb{Z}$  y

$$\phi(h) \equiv (-1)^{pn} (n!)^p \pmod{p}.$$

Si  $1 \leq t \leq n$ , entonces

$$\phi(t+x) = \frac{(x+t)^{p-1}}{(p-1)!} ((x+t-1)(x+t-2)\cdots x \cdots (x+t-n))^p,$$

y sacando el factor  $x$  queda

$$\phi(t+x) = \frac{x^p}{(p-1)!} f(x),$$

con  $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ . Por el teorema 10.6 tenemos que  $\phi(t+h) \in \mathbb{Z}$  y es un múltiplo de  $p$ . Ahora (teniendo en cuenta que  $\phi(0+h) = \phi(h)$ ),

$$S_1 = \sum_{t=0}^n c_t \phi(t+h) \equiv c_0 \phi(h) \equiv c_0 (-1)^{pn} (n!)^p \not\equiv 0 \pmod{p},$$

ya que  $c_0 \neq 0$  y  $p > n, |c_0|$ .

Así pues,  $S_1 \in \mathbb{Z}$  y  $S_1 \neq 0$ , luego  $|S_1| \geq 1$ . Como  $S_1 + S_2 = 0$ , lo mismo vale para  $S_2$ , es decir,  $|S_2| \geq 1$ . Por otro lado, sea  $\phi(x) = \sum_{r=0}^s a_r x^r$ . Entonces

$$|\psi(t)| = \left| \sum_{r=0}^s a_r \epsilon_r(t) t^r \right| \leq \sum_{r=0}^s |a_r| |\epsilon_r(t)| t^r \leq \sum_{r=0}^s |a_r| t^r.$$

Observemos que  $|a_r|$  es el coeficiente de grado  $r$  del polinomio

$$\frac{x^{p-1}}{(p-1)!} ((x+1) \cdots (x+n))^p.$$

Basta ver que si  $b_k$  es el coeficiente de grado  $i$  de  $((x-1) \cdots (x-n))^p$ , entonces  $|b_k|$  es el coeficiente de grado  $k$  de  $((x+1) \cdots (x+n))^p$ . Para ello usamos las fórmulas de Vieta [ITAI 8.4], que nos dan que

$$((x-1) \cdots (x-n))^p = \sum_{k=0}^{np} (-1)^{np-k} e_{np-k}(1, \dots, n, \dots, 1, \dots, n) x^k,$$

$$((x+1) \cdots (x+n))^p = \sum_{k=0}^{np} (-1)^{np-k} e_{np-k}(-1, \dots, -n, \dots, -1, \dots, -n) x^k,$$

por lo que

$$\begin{aligned} |b_k| &= |(-1)^{pn-k} e_{np-k}(1, \dots, n, \dots, 1, \dots, n)| \\ &= e_{np-k}(1, \dots, n, \dots, 1, \dots, n) \\ &= (-1)^{pn-k} e_{np-k}(-1, \dots, -n, \dots, -1, \dots, -n). \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos concluir que, si  $t \geq 0$ ,

$$|\psi(t)| \leq \sum_{r=0}^s |a_r| t^r = \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} ((t+1)(t+2) \cdots (t+n))^p,$$

y en definitiva:

$$|\psi(t)| \leq (t+1)(t+2) \cdots (t+n) \frac{(t(t+1) \cdots (t+n))^{p-1}}{(p-1)!}.$$

Pero esta expresión tiende a 0 cuando  $p$  tiende a infinito (por la convergencia de la serie de la función exponencial). En consecuencia, tomando  $p$  suficientemente grande podemos exigir que  $S_2 = \sum_{t=0}^n c_t \psi(t) e^t$  cumpla  $|S_2| < 1$ , cuando hemos demostrado lo contrario para todo  $p$ . Esto prueba que  $e$  es trascendente. ■

### 10.3 La trascendencia de $\pi$

La trascendencia de  $\pi$  es algo más complicada de probar. Además de los teoremas 10.5 y 10.6 necesitaremos otro resultado auxiliar. Recordemos que un polinomio en varias indeterminadas es simétrico [ITAL 8.2] si al intercambiarlas el polinomio queda invariable.

**Teorema 10.8** Sea  $p(x) = dx^m + d_1x^{m-1} + \dots + d_{m-1}x + d_m \in \mathbb{Z}[x]$ , sean  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  sus raíces en  $\mathbb{C}$  y sea  $q(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$  un polinomio simétrico. Entonces  $q(d\alpha_1, \dots, d\alpha_m) \in \mathbb{Z}$ .

DEMOSTRACIÓN: Claramente

$$d^{m-1}p(x) = (dx)^m + d_1(dx)^{m-1} + dd_2(dx)^{m-2} + \dots + d^{m-2}d_{m-1}(dx) + d^{m-1}d_m.$$

O sea,  $d^{m-1}p(x) = r(dx)$ , donde

$$r(x) = x^m + d_1x^{m-1} + dd_2x^{m-2} + \dots + d^{m-2}d_{m-1}x + d^{m-1}d_m \in \mathbb{Z}[x]$$

es un polinomio mónico y sus raíces son obviamente  $d\alpha_1, \dots, d\alpha_m$ . Consecuentemente,  $r(x) = (x - d\alpha_1) \cdots (x - d\alpha_m)$  y los coeficientes de  $r(x)$  son  $(-1)^i e_i(d\alpha_1, \dots, d\alpha_m)$  para  $i = 0, \dots, m$ . Así pues,  $e_i(d\alpha_1, \dots, d\alpha_m) \in \mathbb{Z}$  para  $i = 1, \dots, m$ .

Por otro lado, el teorema [ITAL 8.5] afirma que todo polinomio simétrico se puede expresar en función de los polinomios simétricos elementales, es decir, que  $q(x_1, \dots, x_m) = r(e_1, \dots, e_m)$  para cierto polinomio  $r(t_1, \dots, t_m)$  con coeficientes enteros, luego

$$q(d\alpha_1, \dots, d\alpha_m) = r(e_1(d\alpha_1, \dots, d\alpha_m), \dots, e_m(d\alpha_1, \dots, d\alpha_m)) \in \mathbb{Z}. \quad \blacksquare$$

**Teorema 10.9** El número  $\pi$  es trascendente.

DEMOSTRACIÓN: El teorema [ITAL 8.9] afirma que los números algebraicos forman un subcuerpo de  $\mathbb{C}$ , de modo que si  $\pi$  fuera algebraico, también lo sería  $i\pi$ . Así pues, basta probar que  $i\pi$  es trascendente. Supongamos, por el contrario, que existe un polinomio

$$dx^m + d_1x^{m-1} + \dots + d_{m-1}x + d_m \in \mathbb{Z}[x]$$

con  $d \neq 0$  que tenga entre sus raíces a  $i\pi$  y sean  $\omega_1, \dots, \omega_m$  todas estas raíces. Como una de ellas es  $i\pi$  y  $e^{i\pi} + 1 = 0$ , tenemos que  $(1 + e^{\omega_1}) \cdots (1 + e^{\omega_m}) = 0$ , o sea,

$$1 + \sum_{t=1}^{2^m-1} e^{\alpha_t} = 0,$$

donde  $\alpha_1, \dots, \alpha_{2^m-1}$  son  $\omega_1, \dots, \omega_m, \omega_1 + \omega_2, \dots, \omega_{m-1} + \omega_m, \dots, \omega_1 + \dots + \omega_m$ . Supongamos que  $c - 1$  de estos números son nulos y  $n = 2^m - 1 - (c - 1)$  no son nulos. Ordenémoslos como  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0, \dots, 0$ . Así  $c \geq 1$  y

$$c + \sum_{t=1}^n e^{\alpha_t} = 0. \quad (10.2)$$

Notemos lo siguiente:

$$e_i(x_1, \dots, x_n) = e_i(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0),$$

donde  $e_i$  es a la izquierda el polinomio simétrico elemental de  $n$  variables y a la derecha el de  $2^m - 1$  variables. Por lo tanto

$$e_i(d\alpha_1, \dots, d\alpha_n) = e_i(d\alpha_1, \dots, d\alpha_{2^m-1})$$

$$= e_i(d\omega_1, \dots, d\omega_m, d\omega_1 + d\omega_2, \dots, d\omega_{m-1} + d\omega_m, \dots, d\omega_1 + \dots + d\omega_m).$$

Sea

$$q_i(x_1, \dots, x_m) = e_i(x_1, \dots, x_m, x_1 + x_2, \dots, x_{m-1} + x_m, \dots, x_1 + \dots + x_m).$$

Claramente se trata de polinomios simétricos con coeficientes enteros y

$$e_i(d\alpha_1, \dots, d\alpha_n) = q_i(d\omega_1, \dots, d\omega_m),$$

luego el teorema anterior nos permite afirmar que  $e_i(d\alpha_1, \dots, d\alpha_n) \in \mathbb{Z}$ .

Si  $s(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  es simétrico, entonces  $s$  depende polinómicamente de los  $e_i$ , luego  $s(d\alpha_1, \dots, d\alpha_n) \in \mathbb{Z}$ . Sea  $p$  un primo tal que  $p > |d|$ ,  $p > c$ ,  $p > |d^n \alpha_1 \cdots \alpha_n|$ . Sea

$$\phi(x) = \frac{d^{np+p-1} x^{p-1}}{(p-1)!} ((x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n))^p.$$

Multiplicamos (10.2) por  $\phi(h)$  y aplicamos el teorema 10.5. Nos queda

$$c\phi(h) + \sum_{t=1}^n \phi(\alpha_t + h) + \sum_{t=1}^n \psi(\alpha_t) e^{|\alpha_t|} = S_0 + S_1 + S_2 = 0.$$

Ahora,

$$\phi(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} d^{p-1} ((dx - d\alpha_1) \cdots (dx - d\alpha_n))^p.$$

Los coeficientes de  $(y - d\alpha_1) \cdots (y - d\alpha_n)$  son polinomios simétricos elementales sobre  $d\alpha_1, \dots, d\alpha_n$ , luego son enteros, según hemos visto antes. De aquí se sigue que también son enteros los coeficientes de  $(dx - d\alpha_1) \cdots (dx - d\alpha_n)$ , con lo que

$$\phi(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \sum_{r=0}^{np} g_r x^r, \quad \text{donde cada } g_r \in \mathbb{Z}.$$

Por el teorema 10.6 tenemos que  $\phi(h) \in \mathbb{Z}$  y  $\phi(h) \equiv g_0 \pmod{p}$ . Concretamente,

$$g_0 = (-1)^{pn} d^{p-1} (d\alpha_1 \cdots d\alpha_n)^p,$$

luego por la elección de  $p$  resulta que  $p \nmid g_0$  (aquí usamos que  $d\alpha_1 \cdots d\alpha_n \in \mathbb{Z}$  porque es el término independiente de  $(y - d\alpha_1) \cdots (y - d\alpha_n)$ ). Como  $p \nmid c$ , resulta que  $p \nmid S_0 = c\phi(h)$ .

Nos ocupamos ahora de  $S_1$ . Tenemos que

$$\begin{aligned}\phi(\alpha_t + x) &= \frac{d^{np+p-1}(\alpha_t + x)^{p-1}}{(p-1)!} ((x + \alpha_t - \alpha_1) \cdots (x + \alpha_t - \alpha_{t-1}) \\ &\quad x(x + \alpha_t - \alpha_{t+1}) \cdots (x + \alpha_t - \alpha_n))^p \\ &= \frac{x^p}{(p-1)!} d^p (d\alpha_t + dx)^{p-1} ((dx + d\alpha_t - d\alpha_1) \cdots (dx + d\alpha_t - d\alpha_{t-1}) \\ &\quad (dx + d\alpha_t - d\alpha_{t+1}) \cdots (dx + d\alpha_t - d\alpha_n))^p \\ &= \frac{x^p}{(p-1)!} \sum_{r=0}^{np-1} f_{rt} x^r,\end{aligned}$$

donde  $f_{rt} = f_r(d\alpha_t, d\alpha_1, \dots, d\alpha_{t-1}, d\alpha_{t+1}, \dots, d\alpha_n)$  y  $f_r$  es un polinomio simétrico respecto a todas las variables excepto la primera, con coeficientes enteros y que no depende de  $t$ . En efecto, consideramos el polinomio

$$(y - (-x_1))^{p-1} \left( (y - (x_2 - x_1)) \cdots (y - (x_n - x_1)) \right)^p.$$

Sus coeficientes son los polinomios simétricos elementales actuando sobre  $-x_1$  ( $p-1$  veces) y sobre  $x_2 - x_1, \dots, x_n - x_1$  ( $p$  veces cada uno), luego son polinomios simétricos en  $x_2, \dots, x_n$ . Digamos que el polinomio es  $\sum_{r=0}^{np-1} s_r(x_2, \dots, x_n) y^r$ . Entonces

$$\phi(\alpha_t + x) = \frac{x^p}{(p-1)!} \sum_{r=0}^{np-1} d^p s_r(d\alpha_t, d\alpha_1, \dots, d\alpha_{t-1}, d\alpha_{t+1}, \dots, d\alpha_n) d^r x^r,$$

es decir,  $f_r = d^{r+p} s_r(x_2, \dots, x_n)$ . Por lo tanto,

$$\sum_{t=1}^n \phi(\alpha_t + x) = \frac{x^p}{(p-1)!} \sum_{r=0}^{np-1} \left( \sum_{t=1}^n f_{rt} \right) x^r,$$

pero

$$\sum_{t=1}^n f_{rt} = \sum_{t=1}^n f_r(d\alpha_t, d\alpha_1, \dots, d\alpha_{t-1}, d\alpha_{t+1}, \dots, d\alpha_n),$$

y el polinomio  $\sum_{t=1}^n f_r(x_t, x_1, \dots, x_{t-1}, x_{t+1}, \dots, x_n)$  es simétrico (respecto a todas las variables), luego  $F_r = \sum_{t=1}^n f_{rt}$  depende simétricamente de  $d\alpha_1, \dots, d\alpha_n$  y por lo tanto es un entero. Así pues,

$$\sum_{t=1}^n \phi(\alpha_t + x) = \frac{x^p}{(p-1)!} \sum_{r=0}^{np-1} F_r x^r,$$

y por el teorema 10.6 concluimos que  $S_1 = \sum_{t=1}^n \phi(\alpha_t + h) \in \mathbb{Z}$  y es múltiplo de  $p$  (aquí hemos usado que  $(\phi_1 + \phi_2)(h) = \phi_1(h) + \phi_2(h)$ , lo cual es evidente).

Esto nos da que  $S_0 + S_1 \in \mathbb{Z}$  y no es un múltiplo de  $p$ . En particular  $|S_0 + S_1| \geq 1$  y, por la ecuación  $S_0 + S_1 + S_2 = 0$  resulta que también  $S_2 \in \mathbb{Z}$  y  $|S_2| \geq 1$ . Como en el caso de  $e$ , ahora probaremos lo contrario.

Sea  $\psi(x) = \sum_{r=0}^{np+p-1} c_r \epsilon_r(x) x^r$ . Entonces

$$\begin{aligned} |\psi(x)| &= \left| \sum_{r=0}^{np+p-1} c_r \epsilon_r(x) x^r \right| \leq \sum_{r=0}^{np+p-1} |c_r| |x^r| \\ &\leq \frac{|d|^{np+p-1} |x|^{p-1}}{(p-1)!} ((|x| + |\alpha_1|) \cdots (|x| + |\alpha_n|))^p \end{aligned}$$

(por el mismo razonamiento que en la prueba de la trascendencia de  $e$ ) y así

$$|\psi(x)| \leq \frac{M^{2np+2p-2}}{(p-1)!},$$

donde  $M$  es una cota que no depende de  $p$ .

Como  $M^{2np+2p-2} \leq M^{2np+2p} = M^{(2n+2)p} = K^p = KK^{p-1}$ , tenemos que

$$|\psi(x)| \leq K \frac{K^{p-1}}{(p-1)!}$$

y la sucesión converge a 0 cuanto  $p$  tiende a infinito, pues la serie converge a  $Ke^K$ . Esto para cada  $x$  fijo. Tomando un primo  $p$  suficientemente grande podemos exigir que  $|S_2| \leq \sum_{t=1}^n |\psi(\alpha_t)| e^{|\alpha_t|} < 1$ , con lo que llegamos a una contradicción. ■

## Capítulo XI

# La función dseta de Dedekind

En este capítulo veremos un ejemplo ilustrativo de cómo se combinan las técnicas algebraicas que hemos estudiado en [ITA1] con las técnicas analíticas que estudiamos aquí. Como aplicación mostraremos la solución de una cuestión que se planteó Dirichlet en 1828, pero que no fue resuelta hasta 1937 por el matemático soviético B.A. Venkov.

El teorema de Wilson afirma que si  $p$  es primo, entonces

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

Si  $p > 2$ , podemos tomar como representantes de las clases módulo  $p$  los números

$$-\frac{p-1}{2}, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}. \quad (11.1)$$

Por lo tanto,

$$(p-1)! \equiv -\frac{p-1}{2} \dots (-2)(-1)1 \cdot 2 \dots \frac{p-1}{2} \pmod{p},$$

luego

$$(-1)^{(p-1)/2} \left(\frac{p-1}{2}!\right)^2 \equiv (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

o, equivalentemente,

$$\left(\frac{p-1}{2}!\right)^2 \equiv (-1)^{(p+1)/2} \pmod{p}. \quad (11.2)$$

Si  $p \equiv -1 \pmod{4}$ , entonces el exponente es par y queda que

$$\left(\frac{p-1}{2}!\right)^2 \equiv 1 \pmod{p},$$

luego

$$\frac{p-1}{2}! \equiv \pm 1 \pmod{p}.$$

Dirichlet se planteó cuál es el signo correcto en esta congruencia. La tabla siguiente no muestra ningún patrón claro:

$p$	3	7	11	19	23	31	43	47	59	67	71	79	83
$\frac{p-1}{2}!$	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1

Dirichlet obtuvo una respuesta no del todo satisfactoria. Observó que si  $p \equiv -1 \pmod{4}$ , entonces  $-1$  no es un resto cuadrático módulo  $p$ , luego, cuando tomamos como representantes de las clases módulo  $p$  a los números (11.1), sucede que

$$\left(\frac{-k}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) \left(\frac{k}{p}\right) = -\left(\frac{k}{p}\right),$$

es decir, que  $-k$  es un resto cuadrático si y sólo si no lo es  $k$ . Por lo tanto, si llamamos  $r_1, \dots, r_R$  y  $n_1, \dots, n_N$  a los restos cuadráticos y no cuadráticos, respectivamente, comprendidos entre 1 y  $(p-1)/2$ , el producto de todos los restos cuadráticos (no nulos) de  $\mathbb{Z}_p$  es

$$r_1 \cdots r_R (-n_1) \cdots (-n_N) = (-1)^N r_1 \cdots r_R n_1 \cdots n_N \equiv (-1)^N \frac{p-1}{2}! \pmod{p},$$

pues el producto intermedio contiene todos los números entre 1 y  $(p-1)/2$ , luego es el factorial de  $(p-1)/2$ . Por otro lado, el producto de todos los restos cuadráticos módulo  $p$  es

$$1^2 \cdot 2^2 \cdots \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{p-1}{2}!\right)^2,$$

pues al elevar al cuadrado los representantes (11.1) cada resto cuadrático aparece dos veces, como cuadrado de un representante positivo y de su opuesto, luego para obtener una única vez cada resto cuadrático sólo tenemos que considerar los representantes positivos. Así pues:

$$\left(\frac{p-1}{2}!\right)^2 \equiv (-1)^N \frac{p-1}{2}! \pmod{p},$$

luego

$$\frac{p-1}{2}! \equiv (-1)^N \pmod{p},$$

donde  $N$  es el número de restos no cuadráticos módulo  $p$  comprendidos entre 1 y  $(p-1)/2$ . La tabla siguiente muestra algunos ejemplos:

$p$	3	7	11	19	23	31	43	47	59	67	71	79	83
$\frac{p-1}{2}!$	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1
$N$	0	1	1	3	4	6	9	9	10	15	14	17	16
$R$	1	2	4	6	7	9	12	14	19	18	21	22	25

Vemos que, efectivamente, el factorial de  $(p-1)/2$  módulo  $p$  es positivo cuando  $N$  es par. Esto puede considerarse una respuesta a la pregunta de Dirichlet, pero es bastante pobre. No hay mucha diferencia entre decir que el

signo del factorial es “el que sale al calcularlo”, o decir que es “el que sale cuando calculamos el número de restos no cuadráticos entre 1 y  $(p-1)/2$ ”. El resultado que obtuvo Venkov es que

$$\frac{p-1}{2}! \equiv (-1)^{(h+1)/2} \pmod{p},$$

donde  $h$  es el número de clases del anillo de enteros algebraicos del cuerpo  $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ . Así, resulta que el signo es positivo si y sólo si  $h \equiv -1 \pmod{4}$ .

Podría objetarse que, al fin y al cabo,  $h$  es también “lo que sale al calcular el número de clases”, pero esta relación pone de manifiesto que ese signo cuyo comportamiento parece caótico a primera vista es un reflejo de un valor con un significado aritmético tan profundo como es el número de clases, hecho que dista mucho de ser trivial. Aquí tenemos la tabla ampliada que permite comparar la fórmula de Venkov.

$p$	3	7	11	19	23	31	43	47	59	67	71	79	83
$\frac{p-1}{2}!$	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1
$N$	0	1	1	3	4	6	9	9	10	15	14	17	16
$R$	1	2	4	6	7	9	12	14	19	18	21	22	25
$h$	1	1	1	1	3	3	1	5	3	1	7	5	3

Pero en la tabla se puede apreciar otros hechos nada triviales, como que siempre se cumple  $R > N$ , es decir, aunque el número de restos cuadráticos módulo  $p$  es necesariamente igual al número de restos no cuadráticos, cuando consideramos únicamente los “positivos”, es decir, los que tienen representante positivo en la lista (11.1), el número de restos cuadráticos siempre es mayor que el de los restos no cuadráticos. Más aún, ¿puede conjeturar el lector alguna relación entre  $h$  y  $R - N$ ? Otro hecho que no es casual es que  $h$  siempre es impar.

En este punto resulta natural comparar con lo que sucede con los primos  $p \equiv 1 \pmod{4}$ . He aquí una tabla:

$p$	5	13	17	29	37	41	53	61	73	89	97
$\frac{p-1}{2}!$	2	5	-4	12	-6	9	23	11	27	34	22
$N$	1	3	4	7	9	10	13	15	18	22	24
$R$	1	3	4	7	9	10	13	15	18	22	24
$h$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

La última fila es el número de clases del cuerpo  $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ . Que sea siempre 1 es casual. Por ejemplo, para los primos  $p = 229, 257$  es  $h = 3$ . Que ahora sea  $N = R$  no es casual, pero es fácil de explicar: Como  $(-1/p) = 1$ , un número  $k$  de la lista (11.1) es un resto cuadrático si y sólo si lo es  $-k$ , luego tiene que haber el mismo número de restos cuadráticos positivos que de negativos, luego hay  $(p-1)/4$  restos cuadráticos positivos y, por consiguiente, también el mismo número de restos no cuadráticos.

En cuanto al factorial de  $(p-1)/2$  módulo  $p$ , ahora (11.2) nos da que tiene que ser una de las dos raíces cuadradas de  $-1$  módulo  $p$ , pero ¿cuál, la positiva o la negativa? En [ITAI] probaremos un resultado obtenido en 1961 por S. Chowla, que responde a esta pregunta en términos de  $h$  y de la unidad fundamental del anillo de enteros del cuerpo  $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ .

Las respuestas que vamos a dar a todos estos problemas se apoyarán en unas fórmulas para el número de clases del anillo de enteros algebraicos  $\mathcal{O}$  de un cuerpo cuadrático  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  que demostraremos aquí analizando lo que se conoce como la *función dseta de Dedekind* asociada a  $K$ , que es la función

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s},$$

donde  $\mathfrak{a}$  recorre los ideales no nulos de  $\mathcal{O}$ .

Notemos que si en lugar de un cuerpo cuadrático tomamos  $K = \mathbb{Q}$ , con lo que  $\mathcal{O} = \mathbb{Z}$ , entonces los ideales no nulos de  $\mathbb{Z}$  se corresponden con los números naturales, por lo que  $\zeta_{\mathbb{Q}}(s)$  no es sino la función dseta de Riemann usual.

## 11.1 La convergencia de la función dseta

El primer punto que debemos investigar es para qué valores de  $s$  converge la función  $\zeta_K(s)$ . Veremos que, al igual que la función dseta de Riemann, converge absolutamente para todo número complejo en el semiplano  $\operatorname{Re} s > 1$ . Para probarlo empezamos descomponiéndola como

$$\zeta_K(z) = \sum_C \sum_{\mathfrak{a} \in C} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^z},$$

donde ahora  $C$  recorre el grupo (finito) de clases de ideales de  $\mathcal{O}$ .

En segundo lugar, si llamamos  $f_C(n)$  al número de ideales de  $C$  de norma  $n$  (que es finito), tenemos que

$$\zeta_C(z) = \sum_{\mathfrak{a} \in C} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_C(n)}{n^z},$$

y la última serie es una serie de Dirichlet ordinaria.

Recapitulando, si probamos que la última serie de Dirichlet converge absolutamente en el semiplano  $\operatorname{Re} s > 1$ , el teorema 2.29 nos asegura que  $\zeta_C(s)$  (calculada con cualquier ordenación de los ideales  $\mathfrak{a} \in C$ ) converge absolutamente en dicho semiplano. Los conjuntos  $A_k$  son en este caso los conjuntos de ideales de cada norma  $k$ , de modo que

$$\sum_{\mathfrak{a} \in A_k} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^z} = \frac{f_C(k)}{k^s}, \quad \sum_{\mathfrak{a} \in A_k} \frac{1}{|N(\mathfrak{a})^z|} = \frac{f_C(k)}{k^{\operatorname{Re} z}}.$$

A su vez, ese mismo teorema, tomando ahora como conjuntos  $A_k$  las distintas clases  $C$ , nos da la convergencia absoluta de  $\zeta_K(z)$ .

Para estudiar la convergencia de la serie de Dirichlet vamos a estudiar la función  $j_C(r)$ , definida como el número de ideales en  $C$  de norma menor o igual que  $r$ .

Fijamos un ideal  $\mathfrak{b}$  en la clase inversa  $C^{-1}$  en el grupo de clases. Así, para cada ideal  $\mathfrak{a} \in C$ , el producto  $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$  está en la clase principal, es decir, es un ideal principal  $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = (\alpha)$ . La aplicación que a cada ideal  $\mathfrak{a} \in C$  le asigna el ideal  $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$  hace corresponder biunívocamente los ideales de  $C$  con los ideales principales  $(\alpha)$  de  $\mathcal{O}$  divisibles entre  $\mathfrak{b}$ . Además,  $N(\mathfrak{a})N(\mathfrak{b}) = |N(\alpha)|$ . Por lo tanto, se cumple  $N(\mathfrak{a}) \leq r$  si y sólo si  $|N(\alpha)| \leq rN(\mathfrak{b})$ . En definitiva:

*$j_C(r)$  es el número de ideales principales de  $\mathcal{O}$  divisibles entre  $\mathfrak{b}$  de norma menor o igual que  $rN(\mathfrak{b})$ .*

En lugar de contar ideales principales  $(\alpha)$  contaremos elementos  $\alpha \in \mathcal{O}$ , pero aquí hay que tener en cuenta que dos enteros algebraicos generan el mismo ideal si y sólo si son asociados, es decir, si se diferencian en un factor unitario.

La situación es mucho más simple en el caso en que  $K$  es un cuerpo cuadrático imaginario, así que vamos a tratar primero este caso. El teorema [ITAl 9.4] nos da que  $\mathcal{O}$  tiene un número finito  $m$  de unidades, que es, de hecho  $m = 2$  salvo cuando  $d = -1, -3$ . Por lo tanto, cada ideal principal admite  $m$  generadores distintos, luego, teniendo en cuenta que  $\mathfrak{b} \mid \alpha$  equivale a  $\alpha \in \mathfrak{b}$ :

*Si  $m$  es el número de unidades de  $\mathcal{O}$ , entonces  $mj_C(r)$  es el número de elementos no nulos  $\alpha \in \mathfrak{b}$  de norma menor o igual que  $rN(\mathfrak{b})$ .*

Ahora observamos que la norma algebraica es  $N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2$ . Por lo tanto:

*Si  $m$  es el número de unidades de  $\mathcal{O}$ , entonces  $mj_C(r)$  es el número de elementos no nulos  $\alpha \in \mathfrak{b}$  tales que  $|\alpha| \leq \sqrt{rN(\mathfrak{b})}$ .*

Llamemos  $n_{\mathfrak{b}}(r)$  al número de elementos  $\alpha \in \mathfrak{b}$  tales que  $|\alpha| \leq r$ . Entonces (teniendo en cuenta que ahora estamos contando también a  $\alpha = 0$ ):

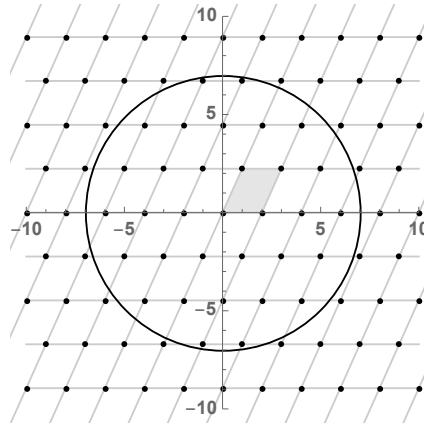
$$j_C(r) = \frac{n_{\mathfrak{b}}(\sqrt{rN(\mathfrak{b})}) - 1}{m},$$

y vamos a estudiar el crecimiento de la función  $n_{\mathfrak{b}}(r)$ . Para ello, de acuerdo con el teorema [ITAl 13.8], podemos expresar  $\mathfrak{b} = \langle a, \gamma \rangle$ , con  $a \in \mathbb{Z}$  y  $\gamma \in \mathcal{O}$ .

Con esto hemos reducido el estudio de la función  $j_C(r)$  a una formulación puramente geométrica en términos de  $n_{\mathfrak{b}}(r)$ :

*$n_{\mathfrak{b}}(r)$  es el número de números complejos de la forma  $\alpha = ua + v\gamma$ , donde  $u, v \in \mathbb{Z}$ , que cumplen  $|\alpha| \leq r$ .*

**Ejemplo** Consideremos el caso de  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ , de modo que  $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ , cuyo grupo de clases tiene dos elementos,<sup>1</sup> la clase principal y la clase  $C = [\mathfrak{b}]$ , donde  $\mathfrak{b} = \langle 2, 1 + \sqrt{-5} \rangle$ . Como  $C = C^{-1}$ , el propio ideal  $\mathfrak{b}$  nos sirve para aplicar el razonamiento general que estamos siguiendo. En este caso  $a = 2$  y  $\gamma = 1 + \sqrt{-5}$  y la figura muestra que  $n_{\mathfrak{b}}(7) = 33$ .



■

El conjunto

$$P = \{xa + y\gamma \mid 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}$$

es un paralelogramo (que está sombreado en la figura del ejemplo anterior) cuyos trasladados  $\alpha + P$ , donde  $\alpha$  varía en  $\mathfrak{b}$  cubren todo el plano complejo sin solaparse.

En efecto, el teorema [ITAl 13.8] nos asegura que  $\gamma = b + ci$ , donde  $c \neq 0$  (y también  $a \neq 0$ ), luego, dado un punto arbitrario  $z = x + yi$ , la ecuación

$$ua + v\gamma = ua + vb + vci = x + yi$$

es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} au + bv &= x \\ cv &= y \end{aligned}$$

que claramente tiene solución única  $(u, v)$ . Si  $u = E[u] + x_0$ ,  $v = E[v] + y_0$ , con  $0 \leq x_0 < 1$ ,  $0 \leq y_0 < 1$ , tenemos que

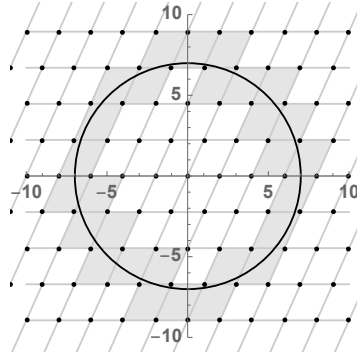
$$z = E[u]a + E[v]\gamma + x_0a + y_0\gamma = \alpha + p,$$

donde  $\alpha = E[u]a + E[v]\gamma \in \mathfrak{b}$  y  $p = x_0a + y_0\gamma \in P$  están unívocamente determinados, luego cada punto  $z$  está en un único trasladado de  $P$ , lo que significa que dichos trasladados cubren el plano sin solaparse, tal y como habíamos afirmado.

<sup>1</sup>Tras el teorema [ITAl 1.19] vemos que hay dos clases de equivalencia estricta de formas cuadráticas de discriminante  $-20$ , y tras la definición [ITAl 13.1] vemos que el ideal  $\mathfrak{b}$  no es principal, luego sirve como representante de la clase  $C$ .

Llamamos  $m(r)$  al número de trasladados  $\alpha + P$  que están contenidos en el círculo de centro 0 y radio  $r$ , mientras que  $f(r)$  será el número de trasladados que contienen puntos del círculo  $|z| \leq r$ , pero sin estar completamente contenidos en él.

Por ejemplo, según la figura del ejemplo precedente,  $m(7) = 20$ ,  $f(7) = 28$ :



Ahora observamos que  $P$  contiene únicamente un punto de  $\mathfrak{b}$ , que es 0 (los otros tres vértices de  $P$  no forman parte de  $P$ , por definición) luego cada trasladado  $\alpha + P$  contiene únicamente un punto de  $\mathfrak{b}$ , que es  $\alpha$ . Por otra parte, si  $\alpha \in \mathfrak{b}$  cumple  $|\alpha| \leq r$ , entonces  $\alpha + P$  es uno de los trasladados contados en  $m(r)$  o bien en  $f(r)$ . Recíprocamente, si  $\alpha + P$  es uno de los trasladados contados en  $m(r)$ , necesariamente  $|\alpha| \leq r$ , luego, en conclusión:

$$m(r) \leq n(r) \leq m(r) + f(r).$$

Por otra parte, la unión de los  $m(r)$  trasladados de  $P$  contenidos en el círculo  $|z| \leq r$  está contenida en dicho círculo, el cual a su vez está contenido en la unión de los  $m(r) + f(r)$  trasladados de  $P$  que tienen puntos en común con el círculo. Por lo tanto, si llamamos  $S$  al área de  $P$  (que es la misma que la de sus trasladados), podemos afirmar que

$$m(r)S \leq \pi r^2 \leq (m(r) + f(r))S$$

o, equivalentemente,

$$m(r) \leq \frac{\pi r^2}{S} \leq m(r) + f(r).$$

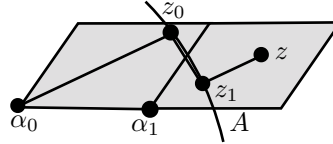
Por lo tanto,

$$|n(r) - \pi r^2/S| \leq f(r).$$

Ahora vamos a probar que  $f(r) = O(r)$ , es decir, que existe una constante  $C$  tal que  $f(r) \leq Cr$ . Para ello llamamos  $e = E[r]$  y dividimos la circunferencia  $|z| = r$  en  $e$  arcos de longitud  $2\pi r/e \leq 4\pi$ , pues

$$\frac{r}{e} = \frac{e + F[r]}{e} = 1 + \frac{F[r]}{e} \leq 2.$$

Así  $f(r)$  es la suma del número de trasladados  $\alpha + P$  que cortan a cada uno de estos arcos. Pongamos que  $A$  es uno de ellos y fijemos uno de sus puntos,  $z_0 \in A$ . Entonces  $z_0$  está en un trasladado  $\alpha_0 + P$ .



Supongamos ahora que  $\alpha + P$  es cualquier trasladado que corta a  $A$  en un punto  $z_1$ . Entonces, para todo punto  $z \in \alpha + P$ , tenemos que

$$|z - \alpha_0| \leq |z - z_1| + |z_1 - z_0| + |z_0 - \alpha_0|.$$

Ahora bien, la distancia entre dos puntos de un mismo trasladado  $\alpha + P$  es a lo sumo

$$|\alpha + xa + y\gamma - (\alpha + x'a + y'\gamma)| \leq |x - x'| |a| + |y - y'| |\gamma| \leq |a| + |\gamma| = D,$$

mientras que la distancia entre dos puntos del arco  $A$  tiene que ser menor o igual que la distancia entre sus extremos, que a su vez es menor o igual que su longitud, que a su vez es menor o igual que  $4\pi$ . Por consiguiente:

$$|z - \alpha_0| \leq 2D + 4\pi = R_0,$$

donde la constante  $R_0$  no depende de  $r$ . Así pues, todos los trasladados de  $P$  que cortan a  $A$  están contenidos en el círculo de centro  $\alpha_0$  y radio  $R_0$ , luego su número es menor o igual que el número de puntos de  $\mathfrak{b}$  contenidos en este círculo, que es el mismo que el número  $C$  de puntos de  $\mathfrak{b}$  contenidos en el círculo  $|z| \leq R_0$  (ya que la aplicación  $\alpha \mapsto \alpha_0 + \alpha$  hace corresponder biunívocamente éstos con aquéllos).

Así pues, el número de trasladados de  $P$  que cortan a  $A$  está acotado por un número  $C$  que no depende de  $r$  y, como hay  $e$  arcos  $A$ , podemos concluir que  $f(r) \leq Ce \leq Cr$ .

En resumen, hemos probado que

$$n(r) = \frac{\pi r^2}{S} + O(r).$$

Sólo nos falta calcular  $S$ . En principio,  $S$  es el área de un paralelogramo de base  $|a|$  y altura  $|\operatorname{Im} \gamma|$ , luego es  $S = |a \operatorname{Im} \gamma|$ . Ahora bien, esto tiene una interpretación algebraica. De acuerdo con [ITA1 12.6], el discriminante del módulo  $\mathfrak{b} = \langle \alpha, \beta \rangle$  está definido como

$$\Delta[M] = \begin{vmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}^2,$$

que en nuestro caso es

$$\Delta[\mathfrak{b}] = \begin{vmatrix} a & \bar{\gamma} \\ a & \gamma \end{vmatrix}^2 = (a(\gamma - \bar{\gamma}))^2 = a^2(2\operatorname{Im}\gamma)^2 = 4S^2.$$

Más aún, según [ITAl 12.12], teniendo en cuenta que el ideal  $\mathfrak{b}$  tiene por anillo de coeficientes el anillo  $\mathcal{O}$ , se cumple que

$$\Delta[\mathfrak{b}] = N(\mathfrak{b})^2 \Delta_K,$$

donde  $\Delta_K$  es el discriminante del módulo  $\mathcal{O}$ , es decir, lo que llamamos discriminante del cuerpo cuadrático  $K$ . Concluimos que

$$S = \frac{\sqrt{|\Delta_K|}}{2} N(\mathfrak{b}),$$

luego en total hemos demostrado lo siguiente:

**Teorema 11.1** *Si  $K$  es un cuerpo cuadrático imaginario de discriminante  $\Delta_K$ ,  $\mathcal{O}$  es su anillo de enteros algebraicos,  $m$  es su número de unidades,  $C$  es una clase de similitud de ideales de  $\mathcal{O}$  y  $\mathfrak{b}$  es un ideal de la clase  $C^{-1}$ , entonces la función  $j_C(r)$  que determina el número de ideales en  $C$  de norma menor o igual que  $r$  cumple*

$$j_C(r) = \frac{2\pi}{m\sqrt{|\Delta_K|}} r + O(\sqrt{r}).$$

DEMOSTRACIÓN: En efecto, acabamos de probar que

$$n(r) = \frac{2\pi}{\sqrt{|\Delta_K|} N(\mathfrak{b})} r^2 + O(r),$$

y también hemos visto que

$$j_C(r) = \frac{n_{\mathfrak{b}}(\sqrt{r N(\mathfrak{b})}) - 1}{m} = \frac{2\pi}{m\sqrt{|\Delta_K|}} r + O(\sqrt{r}),$$

donde hemos usado que si  $f(r) \leq Cr$ , entonces

$$\frac{|-1/m + f(\sqrt{N(\mathfrak{b})}\sqrt{r})|}{\sqrt{r}} \leq \frac{1 + C\sqrt{r}}{\sqrt{r}} \leq 1 + C. \quad \blacksquare$$

Con esto ya podemos probar la convergencia de la función dseta para cuerpos cuadráticos imaginarios, pero antes vamos a probar un resultado análogo para el caso en que  $K$  es un cuerpo cuadrático real.

Como en el caso imaginario, queremos contar el número  $j_C(r)$  de ideales principales de  $\mathcal{O}$  divisibles entre un ideal  $\mathfrak{b} = \langle a, \gamma \rangle$  de norma menor o igual que  $r N(\mathfrak{b})$ . El problema es que ahora  $\mathcal{O}$  tiene infinitas unidades y cada ideal admite, por tanto, infinitos generadores distintos.

Ahora  $K \subset \mathbb{R}$ , con lo que el argumento geométrico que hemos empleado en el caso imaginario hace aguas, pero podemos forzar la situación para tener un caso análogo. Para ello consideramos la aplicación

$$x : K \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

dada por  $x(\alpha) = (\alpha, \bar{\alpha})$ . A su vez, si  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\}$ , definimos

$$l : R \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mediante  $l(x, y) = (\log |x|, \log |y|)$ . Notemos que si  $\alpha \in K^* = K \setminus \{0\}$ , se cumple que  $x(\alpha) \in R$ , por lo que está definido  $l(x(\alpha))$ .

Sea  $\epsilon > 1$  la unidad fundamental de  $\mathcal{O}$ . Como  $\bar{\epsilon} = \epsilon^{-1}$ , tenemos que

$$l(x(\epsilon)) = l(\epsilon, \epsilon^{-1}) = (\log \epsilon, -\log \epsilon).$$

Sea  $X$  el conjunto de todos los pares  $(x, y) \in R$  tales que  $x > 0$  y

$$l(x, y) = \xi_1(1, 1) + \xi_2 l(x(\epsilon)), \quad 0 < \xi_2 < 1.$$

El interés de todas estas definiciones es que se cumple el teorema siguiente:

**Teorema 11.2** *En las condiciones anteriores, todo  $\alpha \in \mathcal{O}$  no nulo tiene un único asociado  $\beta$  tal que  $x(\beta) \in X$ .*

DEMOSTRACIÓN: Podemos expresar  $x(\alpha)$  de forma única como

$$l(x(\alpha)) = \xi_1(1, 1) + \xi_2' l(x(\epsilon)),$$

pues esto equivale al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \xi_1 + \xi_2' \log \epsilon &= \log |\alpha| \\ \xi_1 - \xi_2' \log \epsilon &= \log |\bar{\alpha}| \end{aligned}$$

y la matriz de coeficientes tiene determinante<sup>2</sup> no nulo  $-2 \log \epsilon$ , por lo que el sistema tiene solución única. Ahora descomponemos  $\xi_2' = k + \xi_2$ , con  $k \in \mathbb{Z}$  y  $0 \leq \xi_2 < 1$ . Entonces

$$l(x(\alpha)) = \xi(1, 1) + kl(x(\epsilon)) + \xi_1 l(x(\epsilon)),$$

luego

$$\begin{aligned} l(x(\alpha\epsilon^{-k})) &= (\log |\alpha\epsilon^{-k}|, \log |\bar{\alpha}\bar{\epsilon}^{-k}|) = (\log |\alpha|, \log |\bar{\alpha}|) + (\log \epsilon^{-k}, \log \bar{\epsilon}^{-k}) \\ &= l(x(\alpha)) - k(\log \epsilon, \log \bar{\epsilon}) = l(x(\alpha)) - kl(x(\epsilon)) = \xi(1, 1) + \xi_1 l(x(\epsilon)), \end{aligned}$$

luego  $\beta = \alpha\epsilon^{-k}$  es un asociado de  $\alpha$ . Si es negativo, le cambiamos el signo para hacerlo positivo, lo cual no altera el valor de  $l(x(\beta))$ , y así  $x(\beta) \in X$ .

<sup>2</sup>Véase la sección 11.2 de [ITAl].

Si  $\beta'$  cumple lo mismo, entonces  $\beta$  y  $\beta'$  son asociados a  $\alpha$ , luego son asociados entre sí. Pongamos que  $\beta' = \beta\epsilon^k$  (en principio podría ser  $\beta' = -\beta\epsilon^k$ , pero el signo negativo no es posible porque  $\beta$  y  $\beta'$  son ambos positivos). Entonces

$$\xi'_1(1, 1) + \xi'_2 l(x(\epsilon)) = l(x(\beta')) = l(x(\beta)) + kl(x(\epsilon)) = \xi_1(1, 1) + (\xi_2 + k)x(l(\epsilon)),$$

luego

$$(\xi'_1 - \xi_1)(1, 1) + (\xi'_2 - \xi_2 - k)l(x(\epsilon)) = (0, 0),$$

pero, como antes, esto equivale a un sistema de ecuaciones lineales con determinante no nulo  $-2 \log \epsilon$ , por lo que tiene que tener solución única y dicha solución tiene que ser

$$\xi'_1 - \xi_1 = 0, \quad \xi'_2 - \xi_2 - k = 0,$$

pero  $|k| = |\xi_2 - \xi'_2| < 1$ , luego tiene que ser  $k = 0$ , y así  $\beta' = \beta$ . ■

De este modo podemos usar el conjunto  $X$  para seleccionar un generador de cada ideal principal de  $\mathcal{O}$ , pues cada ideal principal  $(\alpha)$  de  $\mathcal{O}$  admite un único generador  $\alpha$  que cumpla  $x(\alpha) \in X$ . Por lo tanto,  $j_C(r)$ , que en principio es el número de ideales principales  $(\alpha)$  divisibles entre  $\mathfrak{b}$  de norma menor o igual que  $rN(\mathfrak{b})$  tiene la caracterización siguiente:

*$j_C(r)$  es el número de elementos  $\alpha \in \mathfrak{b}$  que cumplen  $x(\alpha) \in X$  y  $N(\alpha) \leq rN(\mathfrak{b})$ .*

Si llamamos  $n_{\mathfrak{b}}(r)$  al número de elementos  $\alpha \in \mathfrak{b}$  que cumplen  $x(\alpha) \in X$  y  $N(\alpha) \leq r$ , entonces  $j_C(r) = n_{\mathfrak{b}}(rN(\mathfrak{b}))$  (notemos que ahora no tenemos que excluir al 0 porque ya está lo excluye la definición de  $X$ ).

Hemos definido el conjunto  $X$  de forma un tanto técnica para relacionarlo con la aritmética de  $\mathcal{O}$ , pero en realidad admite una descripción geométrica muy sencilla:

Explícitamente, un par  $(x, y) \in R$  está en  $X$  si y sólo si  $x > 0$  y podemos expresar

$$(\log |x|, \log |y|) = \xi_1(1, 1) + \xi_2(\log \epsilon, -\log \epsilon), \quad 0 \leq \xi_2 < 1,$$

lo que equivale a que

$$\log |x| = \xi_1 + \xi_2 \log \epsilon, \quad \log |y| = \xi_1 - \xi_2 \log \epsilon,$$

o también a que

$$|x| = e^{\xi_1} \epsilon^{\xi_2}, \quad |y| = e^{\xi_1} \epsilon^{-\xi_2},$$

Como  $\xi_1$  es arbitrario, esto equivale a que

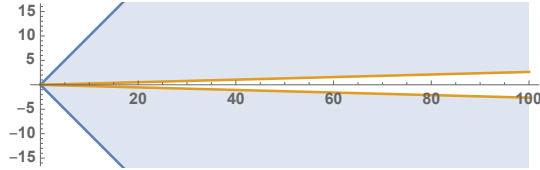
$$\epsilon^{-2} < |y/x| = \epsilon^{-2\xi_2} \leq 1.$$

Geoméricamente, esto significa que la pendiente de la recta que pasa por  $(0, 0)$  y  $(x, y)$  está comprendida entre  $\epsilon^{-2}$  y 1.

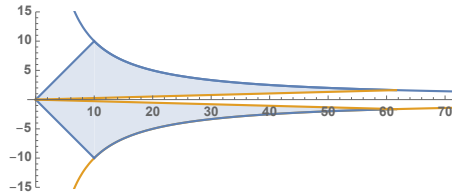
**Ejemplo** Consideremos el cuerpo cuadrático  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{10})$ , cuyo anillo de enteros es  $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[\sqrt{10}]$  y cuya unidad fundamental es  $\epsilon = 3 + \sqrt{10}$ .

El anillo  $\mathcal{O}$  tiene dos clases de equivalencia de ideales, la principal y la clase  $C$  representada por el ideal  $\mathfrak{b} = \langle 2, \sqrt{10} \rangle$ . Como  $C = C^{-1}$ , también nos sirve  $\mathfrak{b}$  como representante de  $C^{-1}$ .

La figura muestra el conjunto  $X$ , que consta de dos “piezas” simétricas, limitadas por las rectas  $y = \pm x$  e  $y = \pm \epsilon^{-2}x$ :



La condición  $N(\alpha) \leq r$  también tiene una interpretación geométrica simple: Puesto que  $N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha}$ , si definimos  $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mediante  $N(x, y) = xy$ , tenemos que  $N(\alpha) = N(x(\alpha))$ . Por lo tanto, para calcular  $n_{\mathfrak{b}}(r)$  nos interesa únicamente el conjunto  $T_r$  de los puntos de  $X$  que están por debajo de la hipérbola  $xy = r$ . En el ejemplo que hemos planteado, para  $r = 100$ , se trata del conjunto sombreado en la figura siguiente:

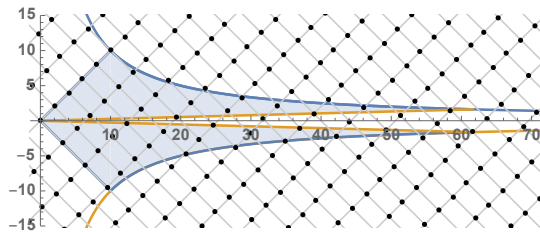


Vemos que  $T_r$  consta de dos sectores hiperbólicos simétricos. El superior va desde el punto  $(\sqrt{r}, \sqrt{r})$  hasta el punto  $(\epsilon\sqrt{r}, \sqrt{r}/\epsilon)$  de la hipérbola, y su área la hemos calculado en el teorema 4.11. Multiplicándola por 2 para cubrir ambos sectores, resulta ser  $A = 2r \log \epsilon$ .

En general, si  $\mathfrak{b} = \langle a, \gamma \rangle$ , es decir, si sus elementos son los de la forma  $\alpha = ua + v\gamma$ , con  $u, v \in \mathbb{Z}$ , entonces el conjunto  $x[\mathfrak{b}]$  formado por las imágenes por  $x$  de los elementos de  $\mathfrak{b}$  está formado por los pares de la forma:

$$x(\alpha) = (ua + v\gamma, ua + v\bar{\gamma}) = u(a, a) + v(\gamma, \bar{\gamma}).$$

La figura muestra los puntos de  $x[\mathfrak{b}]$  en el ejemplo que estamos considerando:



Como en el caso imaginario, podemos definir

$$P = \{x(a, a) + y(\gamma, \bar{\gamma}) \mid 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\},$$

y así tenemos un paralelogramo cuyos trasladados  $(x, y) + P$ , con  $(x, y) \in x[\mathfrak{b}]$ , cubren todo el plano  $\mathbb{R}^2$  sin solaparse. (Notemos que el teorema [ITAl 13.8] nos asegura que  $\gamma \neq \bar{\gamma}$ , lo que nos asegura que  $(\gamma, \bar{\gamma})$  no es un múltiplo de  $(a, a)$ .)

Equivalentemente,  $P$  es el paralelogramo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(a, a)$ ,  $(\gamma, \bar{\gamma})$  y  $(a, a) + (\gamma, \bar{\gamma})$ . Para calcular su área  $S$  podemos usar el teorema<sup>3</sup> A.18, según el cual ésta es el valor absoluto del determinante

$$\begin{vmatrix} a & \bar{\gamma} \\ a & \gamma \end{vmatrix},$$

luego, como en el caso imaginario, por [ITAl 12.6], [ITAl 12.12], tenemos que

$$S^2 = \begin{vmatrix} a & \bar{\gamma} \\ a & \gamma \end{vmatrix}^2 = \Delta[\mathfrak{b}] = N(\mathfrak{b})^2 \Delta_K,$$

luego  $S = N(\mathfrak{b})\sqrt{\Delta_K}$ . Ahora ya podemos calcar el razonamiento que hemos aplicado en el caso imaginario. Llamamos  $m(r)$  al número de trasladados de  $P$  por puntos de  $x[\mathfrak{b}]$  contenidos en el conjunto  $T_r$ . Como en el caso imaginario, tenemos por una parte que

$$m(r) \leq n(r) \leq m(r) + f(r)$$

y, por otra parte, tomando áreas,

$$m(r)S \leq 2r \log \epsilon \leq (m(r) + f(r))S,$$

luego

$$\left| n(r) - \frac{2r \log \epsilon}{N(\mathfrak{b})\sqrt{\Delta_K}} \right| \leq f(r),$$

con lo que casi tenemos demostrado el teorema siguiente:

<sup>3</sup>También podemos demostrar dicho teorema sin usar los resultados del apéndice A si aceptamos que el área es invariante por giros. En efecto, para calcular el área de un paralelogramo de vértices  $0$ ,  $z_1 = x_1 + y_1 i = |z_1|e^{i\theta_1}$ ,  $z_2 = x_2 + y_2 i = |z_2|e^{i\theta_2}$ ,  $z_1 + z_2$ , aplicamos un giro de ángulo  $-\theta_1$ , lo cual equivale a multiplicar todos los números por  $e^{-i\theta_1}$ . Esto no afecta al área y ahora los vértices son  $0$ ,  $z_1 e^{-i\theta_1}$ ,  $z_2 e^{-i\theta_1}$ ,  $z_1 e^{-i\theta_1} + z_2 e^{-i\theta_1}$ . Pero  $z_1 e^{-i\theta_1} = |z_1|$  y  $z_2 e^{-i\theta_1} = |z_2|e^{i(\theta_2 - \theta_1)} = |z_2|(\cos(\theta_2 - \theta_1) + i \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1))$ . Este paralelogramo tiene dos lados horizontales, por lo que podemos calcular su área multiplicando la longitud de su base, que es  $|z_1|$  por su altura, que es  $|z_2| \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)$ . Por lo tanto, el área buscada es

$$\begin{aligned} & |z_1| |z_2| \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1 - \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 | \\ &= ||z_2| \operatorname{sen} \theta_2 |z_1| \cos \theta_1 - |z_1| \operatorname{sen} \theta_1 |z_2| \cos \theta_2| = |y_2 x_1 - y_1 x_2|. \end{aligned}$$

**Teorema 11.3** Si  $K$  es un cuerpo cuadrático real de discriminante  $\Delta_K$ ,  $\mathcal{O}$  es su anillo de enteros algebraicos,  $\epsilon > 1$  es su unidad fundamental,  $C$  es una clase de similitud de ideales de  $\mathcal{O}$  y  $\mathfrak{b}$  es un ideal de la clase  $C^{-1}$ , entonces la función  $j_C(r)$  que determina el número de ideales en  $C$  de norma menor o igual que  $r$  cumple

$$j_C(r) = \frac{2r \log \epsilon}{\sqrt{\Delta_K}} r + O(\sqrt{r}).$$

DEMOSTRACIÓN: Con la notación precedente, sólo falta demostrar que  $f(r) = O(\sqrt{r})$ . El conjunto  $T_r$  es la unión de dos sectores hiperbólicos. Si llamamos  $f_1(r)$  y  $f_2(r)$  al número de trasladados de  $P$  que cortan a cada uno de estos sectores, tenemos que  $f(r) \leq f_1(r) + f_2(r)$  (la desigualdad se debe a que un mismo trasladado puede cortar a ambos sectores, por lo que en la suma lo estamos contando dos veces), luego basta probar que  $f_1(r) = O(\sqrt{r})$  y  $f_2(r) = O(\sqrt{r})$  o, equivalentemente, podemos considerar que  $T_r$  consta únicamente del sector situado en el cuadrante positivo.

Entonces el borde de  $T_r$  está formado por dos segmentos de recta que unen el punto  $(0, 0)$  con los puntos  $(\sqrt{r}, \sqrt{r})$  y  $(\sqrt{r}\epsilon, \sqrt{r}/\epsilon)$  y el arco de hipérbola que une los dos últimos puntos. Si llamamos  $L_1, L_2, L_3$  a estas tres piezas, llamamos  $f_1(r), f_2(r), f_3(r)$  al número de trasladados de  $P$  que cortan a cada  $L_i$ , de modo que  $f(r) \leq f_1(r) + f_2(r) + f_3(r)$  y nuevamente basta probar que cada  $f_i(r)$  es de orden  $O(\sqrt{r})$ .

Para ello sólo necesitamos observar que los tres  $L_i$  cumplen la propiedad siguiente:

*Existe una constante  $C_0$  (independiente de  $r$ ) tal que, si llamamos  $e = E[\sqrt{r}]$ , podemos dividir  $L_i$  en  $e$  arcos  $A$  con la propiedad de que si  $x, y \in A$ , entonces  $|x - y| \leq C_0$ .*

En efecto, para el caso de los segmentos de recta, sus longitudes son  $\sqrt{2r}$  y  $\sqrt{r} \sqrt{\epsilon^2 + 1/\epsilon^2}$ , respectivamente, luego si los dividimos en  $e$  partes iguales, cada una de ellas tiene longitud  $(\sqrt{r}/e)\sqrt{2}$  y  $(\sqrt{r}/e)\sqrt{\epsilon^2 + 1/\epsilon^2}$ , respectivamente, pero

$$\frac{\sqrt{r}}{e} = \frac{e + F[\sqrt{r}]}{e} = 1 + \frac{F[\sqrt{r}]}{e} \leq 2,$$

luego todas las longitudes están acotadas independientemente de  $r$ .

En el caso del arco de hipérbola, también podríamos dividirlo en partes iguales, pero ello requeriría calcular la longitud de un arco de hipérbola, y no necesitamos entrar en ello. En su lugar, partimos el intervalo  $[\sqrt{r}, \sqrt{r}\epsilon]$  en  $e$  partes iguales:

$$\sqrt{r} = x_0 < x_1 < \dots < x_e = \sqrt{r}\epsilon$$

y consideramos los arcos hiperbólicos correspondientes, de extremos  $(x_i, y_i)$ , donde  $y_i = r/x_i$ . Ahora bien, tenemos que

$$|x_i - x_{i-1}| \leq \frac{\sqrt{r}\epsilon - \sqrt{r}}{e} \leq 2(\epsilon - 1)$$

y, como  $x_i, x_{i-1} \geq x_0 = \sqrt{r}$ , también

$$|y_i - y_{i-1}| = \left| \frac{r}{x_i} - \frac{r}{x_{i-1}} \right| = r \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i x_{i-1}} \leq r \frac{2(\epsilon - 1)}{r} = 2(\epsilon - 1),$$

luego

$$|(x_i, y_i) - (x_{i-1}, y_{i-1})| = \sqrt{|x_i - x_{i-1}|^2 + |y_i - y_{i-1}|^2} \leq 2\sqrt{2}(\epsilon - 1).$$

Hemos calculado la distancia entre los dos extremos de cada arco, pero es fácil ver que la distancia entre dos puntos cualesquiera del arco está acotada igualmente.

Con esto, el argumento empleado en el caso imaginario se aplica ya sin cambio alguno:

La distancia entre dos puntos cualesquiera de un trasladado  $w + P$  del paralelepípedo  $P$  está acotada por

$$\begin{aligned} & |w + x(a, a) + u(\gamma, \bar{\gamma}) - (w + x'(a, a) + y'(\gamma, \bar{\gamma}))| \\ & \leq (x - x')|(a, a)| + (y - y')|(\gamma, \bar{\gamma})| \leq |(a, a)| + |(\gamma, \bar{\gamma})| = D. \end{aligned}$$

Llamamos  $A$  a uno cualquiera de los  $e$  arcos en que hemos dividido el tramo  $L_i$ , fijamos un punto  $z_0 \in A$ , que estará en un trasladado  $w_0 + P$ , con  $w_0 \in x[\mathbf{b}]$ . Tomamos cualquier trasladado  $w + P$  que corte a  $A$  en un punto  $z_1$ . Entonces, para todo punto  $z \in w + P$  tenemos que

$$|z - w_0| \leq |z - z_1| + |z_1 - z_0| + |z_0 - w_0| \leq D + C_0 + D = 2D + C_0 = C_1.$$

Por lo tanto, todos los trasladados de  $P$  que cortan a  $A$  están contenidos en el círculo de centro  $w_0$  y radio  $C_1$ , pero el número  $C$  de trasladados contenidos en dicho círculo es el mismo que el de trasladados contenidos en el círculo de centro  $(0, 0)$  y radio  $C_1$ , por lo que no depende de  $w_0$ . Por consiguiente, el número de trasladados que cortan a  $L_i$  cumple

$$f_i(r) \leq eC_1 \leq C_1\sqrt{r}. \quad \blacksquare$$

Ahora ya podemos probar:

**Teorema 11.4** *Si  $K$  es un cuerpo cuadrático de discriminante  $\Delta_K$ , su anillo de enteros es  $\mathcal{O}$  y  $C$  es una clase de similitud estricta de ideales de  $\mathcal{O}$ , entonces la serie*

$$\zeta_C(z) = \sum_{\mathfrak{a} \in C} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^z}$$

*converge absolutamente en el semiplano  $\operatorname{Re} z > 1$ . Además*

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1)\zeta_C(x) = L,$$

donde

$$L = \begin{cases} \frac{2\pi}{m\sqrt{|\Delta_K|}} & \text{si } K \text{ es imaginario,} \\ \frac{2\log \epsilon}{\sqrt{\Delta_K}} & \text{si } K \text{ es real.} \end{cases}$$

En el primer caso  $m$  es el número de unidades de  $\mathcal{O}$ , y en el segundo  $\epsilon$  es la unidad fundamental de  $\mathcal{O}$ . A su vez, la serie

$$\zeta_K(z) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^z}$$

converge absolutamente en el mismo semiplano y

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)\zeta_K(x) = Lh,$$

donde  $h$  es el número de clases de  $\mathcal{O}$ .

DEMOSTRACIÓN: Hemos visto que

$$\zeta_C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$$

es una serie de Dirichlet, donde  $a_n$  es el número de ideales en  $C$  de norma  $n$ .

Entonces

$$\sum_{n=1}^k a_n = j_C(n) = O(n),$$

por los teoremas 11.1 y 11.3, luego el teorema 8.32 nos da la convergencia de la serie en el semiplano  $\operatorname{Re} z > 1$ . La convergencia es absoluta, pues

$$\left| \frac{a_n}{n^z} \right| = \frac{a_n}{n^{\operatorname{Re} z}},$$

luego la convergencia de la serie en  $\operatorname{Re} z$  equivale a la convergencia absoluta de la serie en  $z$ .

Sea ahora  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  la sucesión que consta de  $a_1$  unos, seguidos de  $a_2$  doses, seguidos de  $a_3$  treses, etc. Entonces, para  $x > 1$ ,

$$\zeta_C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n^x}.$$

Así, si  $b_n = c$ , tenemos que  $j_C(b_n)$  es el número de ideales de  $\mathfrak{b}$  de norma menor o igual que  $c$ , que es también el número de términos  $b_k \leq c$ , o también el número de términos  $b_k \leq b_n$ . Esto implica que

$$j_C(b_n - 1) < n \leq j_C(b_n),$$

pues  $j_C(b_n - 1)$  es el número de términos  $b_k < b_n$ , que es necesariamente menor que  $n$ , y el hecho de que la sucesión  $j_C(b_n)$  sea creciente implica que  $n \leq j_C(b_n)$  (esto es cierto para toda sucesión creciente de números naturales). Por lo tanto:

$$\frac{b_n - 1}{b_n} \frac{j_C(b_n - 1)}{b_n - 1} < \frac{n}{b_n} \leq \frac{j_C(b_n)}{b_n}.$$

Es obvio que  $b_n$  tiende a infinito, luego, teniendo en cuenta los teoremas 11.1 y 11.3, por el criterio del emparedado 1.12,

$$\lim_n \frac{n}{b_n} = L.$$

Para todo  $\epsilon > 0$ , existe un  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$ , entonces

$$L - \epsilon < \frac{n}{b_n} < L + \epsilon,$$

luego

$$(L - \epsilon)^x \frac{1}{n^x} < \frac{1}{b_n^x} < (L + \epsilon)^x \frac{1}{n^x},$$

luego

$$(L - \epsilon)^x \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^x} \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{b_n^x} \leq (L + \epsilon)^x \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Llamamos  $S_1(x)$  y  $S_2(x)$  a las sumas de los  $n_0 - 1$  primeros términos de las series de  $\zeta(x)$  y  $\zeta_C(x)$ , que son funciones continuas en  $\mathbb{R}$ . Las desigualdades anteriores equivalen a que

$$(L - \epsilon)^x \zeta(x) - (L - \epsilon)^x S_1(x) \leq \zeta_C(x) - S_2(x) \leq (L + \epsilon)^x \zeta(x) - (L + \epsilon)^x S_1(x).$$

Multiplicamos por  $x - 1$ :

$$\begin{aligned} (L - \epsilon)^x (x - 1) \zeta(x) - (L - \epsilon)^x (x - 1) S_1(x) + (x - 1) S_2(x) \\ \leq (x - 1) \zeta_C(x) \leq \\ (L + \epsilon)^x (x - 1) \zeta(x) - (L + \epsilon)^x (x - 1) S_1(x) + (x - 1) S_2(x). \end{aligned}$$

Ahora observamos que, cuando  $x \rightarrow 1^+$ , teniendo en cuenta (8.9), el primero de los tres términos tiende a  $L - \epsilon$  y el último a  $L + \epsilon$ . Por lo tanto, existe un  $\delta > 0$  tal que si  $1 < x < 1 + \delta$ , entonces

$$L - 2\epsilon < (x - 1) \zeta_C(x) < L + 2\epsilon,$$

y esto implica que  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) \zeta_C(x) = L$ .

La segunda parte del teorema es consecuencia inmediata de la primera, sin más que tener en cuenta la relación

$$\zeta_K(z) = \sum_C \zeta_C(z). \quad \blacksquare$$

Observemos que el hecho de que  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) \zeta_C(x) > 0$  implica que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta_C(x) = +\infty,$$

e igualmente con  $\zeta_K(x)$ , por lo que ambas series de Dirichlet tienen abscisa de convergencia  $\sigma_c = \sigma_a = 1$ .

## 11.2 El producto de Euler

Ahora, usando la factorización única ideal de los cuerpos cuadráticos, podemos probar el análogo al teorema 8.25:

**Teorema 11.5** *Sea  $K$  un cuerpo cuadrático. Para cada  $x > 1$  se cumple*

$$\zeta_K(x) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^x}},$$

donde  $\mathfrak{p}$  recorre los ideales primos de  $K$ . La convergencia del producto es absoluta.

DEMOSTRACIÓN: Para probar que el producto converge absolutamente observamos que

$$\prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^x}} = \prod_{\mathfrak{p}} \left( 1 + \frac{1}{N(\mathfrak{p})^x - 1} \right),$$

y así, por 8.5, es suficiente probar que la serie

$$\sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N(\mathfrak{p})^x - 1}$$

converge (absolutamente). Ahora bien, la convergencia de esta serie se sigue inmediatamente de la convergencia de  $\sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N(\mathfrak{p})^x}$ , que a su vez es consecuencia de la convergencia de  $\sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^x}$  (donde ahora  $\mathfrak{a}$  recorre todos los ideales no nulos de  $K$ ). Ahora pasamos a probar la igualdad.

Para cada ideal primo  $\mathfrak{p}$  se cumple que

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{N(\mathfrak{p})^{kx}}.$$

Sea  $N$  un número natural y sean  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$  los primos de  $K$  de norma menor o igual que  $N$ . Multiplicando las series anteriores para estos primos obtenemos

$$\prod_{N(\mathfrak{p}) \leq N} \frac{1}{1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^x}} = \sum_{k_1, \dots, k_r=0}^{\infty} \frac{1}{N(\mathfrak{p}_1^{k_1} \dots \mathfrak{p}_r^{k_r})^x} = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^x},$$

donde  $\mathfrak{a}$  recorre los ideales no divisibles entre primos de norma mayor que  $N$ . Así pues,

$$\left| \prod_{N(\mathfrak{p}) \leq N} \frac{1}{1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^x}} - \zeta_K(x) \right| < \sum_{N(\mathfrak{a}) > N} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^x},$$

pero esta última expresión tiende a 0 con  $N$ , luego se tiene la igualdad buscada. ■

En el producto de Euler podemos agrupar los factores correspondientes a primos que dividen a un mismo primo racional:

$$\zeta_K(x) = \prod_p \prod_{\mathfrak{p}|p} \frac{1}{1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^x}}.$$

Para cada primo  $p$ , el producto asociado puede ser de tres tipos:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p^{2x}}} = \begin{cases} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^x}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^x}} & \text{si } p \text{ se escinde,} \\ \frac{1}{1 - \frac{1}{p^x}} \frac{1}{1 + \frac{1}{p^x}} & \text{si } p \text{ se conserva,} \\ \frac{1}{1 - \frac{1}{p^x}} & \text{si } p \text{ se ramifica.} \end{cases}$$

Pero si  $\chi_K$  es el carácter de  $K$  [ITA1 9.14], los tres casos se engloban en la fórmula

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p^x}} \frac{1}{1 - \frac{\chi_K(p)}{p^x}}.$$

Por lo tanto

$$\zeta_K(x) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^x}} \prod_p \frac{1}{1 - \frac{\chi_K(p)}{p^x}} = \zeta(x)L(x, \chi_K),$$

donde hemos usado la fórmula de Euler para la función zeta de Riemann (teorema 8.26).

### 11.3 El número de clases de un cuerpo cuadrático

Acabamos de probar que la función  $\zeta_K$  de un cuerpo cuadrático factoriza como producto de la función zeta de Riemann usual y la función  $L$  definida por el carácter  $\chi_K$ . Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)\zeta_K(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)\zeta(x) L(1, \chi_K),$$

El teorema 11.4 nos da el valor del límite de la izquierda, mientras que el de la derecha es (8.9) y vale 1. Por lo tanto, concluimos que

$$L(1, \chi_K) = \begin{cases} \frac{2\pi h}{m\sqrt{|\Delta_K|}} & \text{si } K \text{ es imaginario,} \\ \frac{2h \log \epsilon}{\sqrt{\Delta_K}} & \text{si } K \text{ es real.} \end{cases} \quad (11.3)$$

Pero el valor de  $L(1, \chi_K)$  lo habíamos calculado ya explícitamente en el teorema 8.38, luego combinando las dos expresiones que hemos obtenido llegamos a una expresión explícita para el número de clases de un cuerpo cuadrático:

**Teorema 11.6** Sea  $K$  un cuerpo cuadrático de discriminante  $\Delta$  y sea  $h$  su número de clases. Entonces

1. Si  $K$  es real y  $\epsilon > 1$  es su unidad fundamental,

$$h = -\frac{1}{\log \epsilon} \sum_k \chi_K(k) \log \operatorname{sen} \frac{k\pi}{\Delta},$$

donde  $k$  recorre los números naturales  $0 < k < \Delta/2$ ,  $(k, \Delta) = 1$ .

2. Si  $K$  es imaginario y  $\Delta < -4$ ,

$$h = -\frac{1}{|\Delta|} \sum_k \chi(k)k,$$

donde  $k$  recorre los números naturales  $0 < k < |\Delta|$ ,  $(k, \Delta) = 1$ .

En el caso imaginario hemos descartado los casos  $\Delta = -4$  y  $\Delta = -3$  para que el número de unidades de  $K$  sea  $m = 2$ . Los casos descartados son triviales, pues ambos cumplen  $h = 1$ .

La fórmula para cuerpos cuadráticos imaginarios todavía se puede simplificar más si tenemos en cuenta la nota tras el teorema [ITA1 9.25], en la que probamos que si  $m = |\Delta|$  es par entonces

$$\chi_K(k + m/2) = -\chi_K(k).$$

En las sumas siguientes  $k$  recorre sólo los números primos con  $m$  en los rangos indicados:

$$\begin{aligned} hm &= -\sum_k \chi_K(k)k = -\sum_{k=1}^{m/2} \chi_K(k)k - \sum_{k=1}^{m/2} \chi_K\left(k + \frac{m}{2}\right)\left(k + \frac{m}{2}\right) = \\ &= -\sum_{k=1}^{m/2} \chi_K(k)k + \sum_{k=1}^{m/2} \chi_K(k)\left(k + \frac{m}{2}\right) = \frac{m}{2} \sum_{k=1}^{m/2} \chi_K(k), \end{aligned}$$

luego

$$h = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m/2} \chi_K(k).$$

Por el contrario, si  $m$  es impar, como  $\chi_K(m-k) = \chi_K(-k) = -\chi_K(k)$ ,

$$\begin{aligned} hm &= -\sum_k \chi_K(k)k = -\sum_{k=1}^{m/2} \chi_K(k)k - \sum_{k=1}^{m/2} \chi_K(m-k)(m-k) \\ &= -\sum_{k=1}^{m/2} \chi_K(k)k + \sum_{k=1}^{m/2} \chi_K(k)(m-k) \\ &= -2 \sum_{k=1}^{m/2} \chi_K(k)k + m \sum_{k=1}^{m/2} \chi_K(k). \end{aligned} \tag{11.4}$$

Por otra parte separamos los sumandos pares de los impares:

$$\begin{aligned} hm &= -\sum_k \chi_K(k)k = -\sum_{k=1}^{m/2} \chi_K(2k)2k - \sum_{k=1}^{m/2} \chi_K(m-2k)(m-2k) \\ &= -2\chi_K(2) \sum_{k=1}^{m/2} \chi_K(k)k + \sum_{k=1}^{m/2} \chi_K(2k)(m-2k) \\ &= -4\chi_K(2) \sum_{k=1}^{m/2} \chi_K(k)k + m\chi_K(2) \sum_{k=1}^{m/2} \chi_K(k). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$hm\chi_K(2) = -4 \sum_{k=1}^{m/2} \chi_K(k)k + m \sum_{k=1}^{m/2} \chi_K(k). \tag{11.5}$$

Multiplicamos (11.4) por 2 y le restamos (11.5):

$$hm(2 - \chi_K(2)) = m \sum_{k=1}^{m/2} \chi_K(k).$$

Finalmente observamos que la ecuación obtenida en el caso  $m$  par es ésta misma, puesto que entonces  $\chi_K(2) = 0$ . En resumen, tenemos estas fórmulas para el número de clases de un cuerpo cuadrático:

**Teorema 11.7** *Sea  $K$  un cuerpo cuadrático de discriminante  $\Delta$  y sea  $h$  su número de clases. Entonces:*

1. Si  $K$  es real y  $\epsilon > 1$  es su unidad fundamental,

$$h = -\frac{1}{\log \epsilon} \sum_k \chi_K(k) \log \operatorname{sen} \frac{k\pi}{\Delta}.$$

2. Si  $K$  es imaginario y  $\Delta < -4$ ,

$$h = \frac{1}{2 - \chi_K(2)} \sum_k \chi_K(k).$$

En ambos casos  $k$  recorre los números naturales  $0 < k < |\Delta|/2$ ,  $(k, \Delta) = 1$ .

**Ejemplo** Vamos a calcular el número de clases del cuerpo  $\mathbb{Q}(\sqrt{39})$ . Su discriminante es  $\Delta = 156$  y su unidad fundamental  $\epsilon = 25 + 4\sqrt{39}$ . La tabla siguiente muestra el valor de  $\chi_K(k) = (39/k)$  para  $k < 78$ :

1	5	7	11	17	19	23	25	29	31	35	37
1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	1	1	-1
41	43	47	49	53	55	59	61	67	71	73	77
1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1

Un ordenador calcula fácilmente la suma

$$\begin{aligned} & -\log \operatorname{sen} \frac{\pi}{156} - \log \operatorname{sen} \frac{5\pi}{156} - \log \operatorname{sen} \frac{7\pi}{156} + \log \operatorname{sen} \frac{11\pi}{156} + \log \operatorname{sen} \frac{17\pi}{156} - \log \operatorname{sen} \frac{19\pi}{156} \\ & - \log \operatorname{sen} \frac{23\pi}{156} - \log \operatorname{sen} \frac{25\pi}{156} + \log \operatorname{sen} \frac{29\pi}{156} - \log \operatorname{sen} \frac{31\pi}{156} - \log \operatorname{sen} \frac{35\pi}{156} + \log \operatorname{sen} \frac{37\pi}{156} \\ & - \log \operatorname{sen} \frac{41\pi}{156} + \log \operatorname{sen} \frac{43\pi}{156} + \log \operatorname{sen} \frac{47\pi}{156} - \log \operatorname{sen} \frac{49\pi}{156} + \log \operatorname{sen} \frac{53\pi}{156} + \log \operatorname{sen} \frac{55\pi}{156} \\ & + \log \operatorname{sen} \frac{59\pi}{156} - \log \operatorname{sen} \frac{61\pi}{156} - \log \operatorname{sen} \frac{67\pi}{156} + \log \operatorname{sen} \frac{71\pi}{156} + \log \operatorname{sen} \frac{73\pi}{156} + \log \operatorname{sen} \frac{77\pi}{156} \end{aligned}$$

que resulta ser  $S = 7.82325\dots$  y entonces

$$h = \frac{7.82325}{\log(25 + 4\sqrt{39})} = 2. \quad \blacksquare$$

**Ejemplo** Vamos a calcular el número de clases del cuerpo  $\mathbb{Q}(\sqrt{-41})$ . Tenemos que  $\Delta = -164$  y la tabla siguiente muestra el valor de  $\chi_K(k) = (-41/k)$  para  $k < 82$ :

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
1	1	1	1	1	1	-1	1	-1	1
21	23	25	27	29	31	33	35	37	39
1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1
43	45	47	49	51	53	55	57	59	61
-1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1
63	65	67	69	71	73	75	77	79	81
1	-1	1	-1	1	1	1	1	1	1

El 1 aparece 28 veces y el  $-1$  aparece 12 veces, luego

$$h = \frac{1}{2}(28 - 12) = 8. \quad \blacksquare$$

La fórmula para cuerpos imaginarios se simplifica aún más cuando se aplica a cuerpos de discriminante primo. Concretamente tendrán que ser cuerpos de la forma  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ , donde  $p \equiv -1 \pmod{4}$ . Entonces el carácter de  $K$  es el símbolo de Legendre y  $\chi(2)$  depende del resto de  $p$  módulo 8. El enunciado es claramente:

**Teorema 11.8** Sea  $p \equiv -1 \pmod{4}$  un primo racional  $p > 3$  y sean respectivamente  $R$  y  $N$  el número de restos cuadráticos y restos no cuadráticos módulo  $p$  en el intervalo  $[0, p/2]$ . Entonces el número de clases de  $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$  viene dado por

$$h = \begin{cases} R - N & \text{si } p \equiv 7 \pmod{8} \\ \frac{1}{3}(R - N) & \text{si } p \equiv 3 \pmod{8} \end{cases}$$

**Ejercicio:** Probar que, en las condiciones del teorema anterior,  $h$  es impar.

**Ejemplo** Vamos a calcular el número de clases de  $\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$ . La tabla siguiente indica el símbolo de Legendre de los números necesarios:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1

Por consiguiente  $h = 7 - 4 = 3$ . ■

El teorema 11.8 prueba uno de los hechos que habíamos constatado en la introducción, y es que para primos  $p \equiv -1 \pmod{4}$  se cumple que  $R > N$ , así como la relación entre  $R - N$  y el número de clases que tal vez el lector haya conjeturado a partir de las tablas. Notemos que, como muestran las tablas de la introducción, no se cumple para  $p = 3$ . Ahora también es fácil probar:

**Teorema 11.9** Si  $p > 3$  es un primo  $p \equiv -1 \pmod{4}$ , entonces

$$\frac{p-1}{2}! \equiv (-1)^{(h+1)/2} \pmod{p},$$

donde  $h$  es el número de clases del anillo de enteros del cuerpo  $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ .

DEMOSTRACIÓN: Sea  $R$  el número de restos cuadráticos módulo  $p$  comprendidos entre 1 y  $(p-1)/2$ . Entonces  $R + N = (p-1)/2$  y  $R - N$  viene dado por el teorema 11.8. Distinguiamos los dos casos:

Si  $p \equiv 7 \pmod{8}$  entonces  $p-1 \equiv 6 \pmod{8}$ , luego  $(p-1)/2 \equiv 3 \pmod{4}$ , y además:

$$R - N = h, \quad R + N = \frac{p-1}{2},$$

luego  $2N = (p-1)/2 - h \equiv 3 + 3h \pmod{4}$ , luego

$$N \equiv 3\frac{1+h}{2} \equiv \frac{h+1}{2} \pmod{2},$$

luego, según la discusión que hemos hecho en la introducción a este capítulo,

$$\frac{p-1}{2}! \equiv (-1)^N = (-1)^{(h+1)/2} \pmod{p}.$$

Si  $p \equiv 3 \pmod{8}$  tenemos que  $p-1 \equiv 2 \pmod{8}$ , luego  $(p-1)/2 \equiv 1 \pmod{4}$ , y además:

$$R - N = 3h, \quad R + N = \frac{p-1}{2},$$

luego  $2N = (p-1)/2 - 3h \equiv 1 + h \pmod{4}$  y llegamos a la misma conclusión. Notemos que para  $p = 3$  no se cumple el teorema. ■

Notemos que este teorema implica en particular que  $h$  es impar.



## Apéndice A

# El área de una figura plana

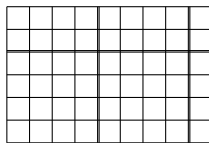
### A.1 El problema de la medida

El propósito de este apéndice es dar una definición precisa del concepto de área de una figura plana. Fijada una unidad de medida, consideremos el caso de un rectángulo cuyos lados midan 2 y 3 unidades, respectivamente:



Si tomamos como unidad de medida un cuadrado cuyo lado mida una unidad, vemos que el rectángulo contiene seis cuadrados unitarios, por lo que es natural considerar que su área es de 6 unidades (cuadradas). En general, un rectángulo cuyos lados tengan longitudes naturales  $m$  y  $n$  es “ $mn$  veces mayor” que el cuadrado unitario, y expresamos esto diciendo que su área es  $mn$ .

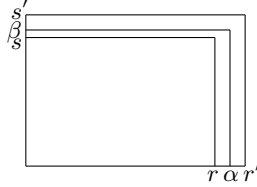
Ahora consideremos un rectángulo cuyos lados midan  $9/4$  y  $3/2$ :



Ahora en el rectángulo no cabe un número exacto de cuadrados unitarios, pero cada cuadrado unitario puede dividirse en 16 cuadrados de lado  $1/4$ , y en el rectángulo caben exactamente  $9 \cdot 6 = 54$  de estos cuadrados, a los que es natural asignarles un área de  $1/16$ , por lo que el área total es de  $54/16 = (9/4) \cdot (3/2)$ .

Es fácil convencerse de que, en general, el área de un rectángulo cuyos lados tengan medidas racionales  $r$  y  $s$  “debe ser”  $rs$ , en el sentido de que si, por ejemplo, el resultado es  $54/16$ , eso significa que el rectángulo es 54 veces mayor que la dieciseisava parte del cuadrado unidad.

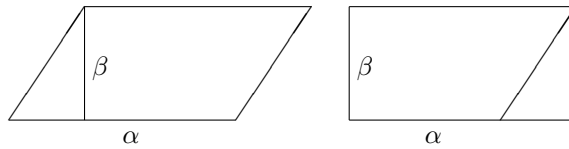
Por último, si las medidas de los lados de un rectángulo son números reales (positivos) arbitrarios  $\alpha$  y  $\beta$ , observamos que, para todos los números racionales  $r < \alpha < r'$ ,  $s < \beta < s'$  el rectángulo dado contiene uno de lados  $r$ ,  $s$  y está contenido en otro de lados  $r'$ ,  $s'$ :



Por lo tanto, el área del rectángulo debería ser un número  $A$  que cumpla  $rs < A < r's'$ , para todos los números racionales en las condiciones dadas. Tomando sucesiones  $\{r_n\}_{n=0}^\infty$ ,  $\{s_n\}_{n=0}^\infty$ ,  $\{r'_n\}_{n=0}^\infty$ ,  $\{s'_n\}_{n=0}^\infty$  que converjan a  $\alpha$  y  $\beta$ , respectivamente, cumpliendo dichas condiciones, es fácil concluir que el único número  $A$  que cumple lo requerido es  $A = \alpha\beta$ , por lo que este número es el que expresa correctamente la relación entre el “tamaño” del rectángulo dado y el cuadrado unitario.

Concluimos que el área de un rectángulo “debe ser” el producto de las longitudes de sus lados, tanto si éstas son racionales como si no.

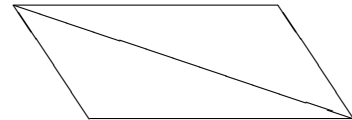
A partir de aquí es fácil deducir “cuál debe ser” el área de muchas otras figuras sencillas. Por ejemplo, las figuras siguientes muestran que un paralelogramo se puede transformar en un rectángulo sin más que cortarle un triángulo y trasladarlo:



Esto significa que ambas figuras “gastan la misma cantidad de papel”, por lo que es razonable considerar que tienen la misma área, y así podemos concluir que el área de un paralelogramo “debe ser” el producto de la longitud de su base por su altura.

Más detalladamente, es natural considerar que el área del paralelogramo “debe ser” la suma del área del triángulo más el área del resto de la figura, y que el área del triángulo no se altera al trasladarlo, así como que el área del rectángulo también tiene que ser la suma de las dos áreas, por lo que tiene que ser igual al área del paralelogramo.

A su vez, es fácil convencerse de que, dado cualquier triángulo, podemos convertirlo en un paralelogramo con la misma base y la misma altura sin más que yuxtaponerle una copia obtenida trazando las paralelas a dos de sus lados. La conclusión es que el área de un triángulo “debe ser” la mitad del producto de su base por su altura.



Decimos en todo momento “debe ser” en lugar de “es” porque no hemos dado ninguna definición de área y no podemos tomar sin más como definiciones las conclusiones a las que estamos llegando porque, en general, hay muchos argumentos distintos que pueden convencernos de que el área de una misma figura tiene que ser un determinado valor, y no tenemos ninguna garantía *a priori* de que todos ellos vayan a dar el mismo resultado.

Por ejemplo, en el caso de un triángulo, sin ir más lejos, podemos aplicar la fórmula  $A = ba/2$  (el área es la mitad del producto de la base por la altura) considerando como base cualquiera de sus tres lados con su altura correspondiente, y nada nos asegura en principio que el resultado no vaya a depender del lado que tomamos como base. En este caso en concreto no es difícil justificar que no es así, pero en general, si calculamos el área de una figura descomponiéndola en fragmentos, trasladándolos, recomponiéndolos, etc., no podemos asegurar *a priori* que haya una magnitud subyacente invariante que podemos considerar que estamos midiendo y que será el resultado final independientemente del proceso que sigamos para determinarla.

Ése es precisamente el objetivo de este apéndice, definir una familia suficientemente amplia de figuras para las que podamos dar una definición general de área que cumpla las propiedades que usamos cuando calculamos áreas mediante razonamientos similares a los que hemos estado empleando en los ejemplos precedentes.

## A.2 Figuras elementales

Empezamos considerando una familia de figuras demasiado restrictiva, pero sobre las que no hay duda de cuál debe ser la definición de área. Aun así, para justificar que la definición es coherente tendremos que resolver algunos problemas técnicos.

**Definición A.1** Una *celda* es un producto

$$C = I \times J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, y \in J\},$$

donde  $I, J$  son intervalos acotados, de cualquiera de las cuatro formas

$$]u, v[, \quad ]u, v], \quad [u, v[, \quad [u, v],$$

para ciertos números  $u \leq v$  (no necesariamente los mismos en  $I$  y en  $J$ ).

Así, un ejemplo de celda es

$$C = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$$

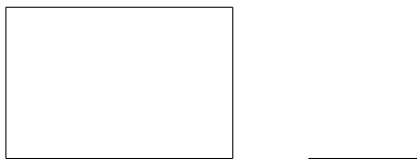
pero admitimos cualquiera de las 16 combinaciones de desigualdades que resultan de considerar desigualdades estrictas ( $<$ ) o no estrictas ( $\leq$ ) en cada una de las cuatro posiciones.

Los intervalos de la forma  $]u, v[$  se llaman *intervalos abiertos*, y los de la forma  $[u, v]$  se llaman intervalos cerrados. Los de la forma  $[u, v[$  o  $]u, v]$  se llaman *semiabiertos*. Una celda es *abierta* si es producto de intervalos abiertos, es *cerrada* si es producto de intervalos cerrados y, en caso contrario, es *semiabierto*.

Geoméricamente, una celda  $C$  puede ser una figura de los tipos siguientes:

1. Si  $a < b$  y  $c < d$ , entonces  $C$  es un rectángulo cuyos lados miden  $b - a$  y  $d - c$ , respectivamente.
2. Si  $a = b$  y  $c < d$ , entonces  $C = [a, a] \times J$  es un segmento vertical de longitud  $d - c$ , mientras que si  $a < b$  y  $c = d$ , entonces  $C = I \times [c, c]$  es un segmento horizontal de longitud  $b - a$ .
3. Si  $a = b$  y  $c = d$ , entonces  $C = [a, a] \times [c, c]$  es el punto  $(a, c)$ .
4. Si  $a = b$  o  $c = d$ , entonces  $C = ]a, a[ \times J$  o  $C = I \times ]c, c[$  es el conjunto vacío.

Así pues, una celda puede ser vacía, ser un punto, un segmento horizontal o vertical o bien un rectángulo con lados horizontales y verticales. En el caso de los segmentos, la definición de celda permite que contenga o no a sus extremos (o a uno sí y al otro no) e, igualmente, en el caso de los rectángulos, la celda puede contener o no a cada uno de sus lados.



La figura muestra tres ejemplos de celdas, entendiendo que el rectángulo puede corresponder tanto a una celda abierta (si entendemos que la celda no contiene los lados), cerrada (si entendemos que los contiene) o semiabierto (si contiene algunos sí y otros no). Un segmento nunca puede ser abierto (pues uno de sus factores es un intervalo  $[u, u]$ , que es cerrado), pero puede ser cerrado si contiene sus extremos. Los puntos necesariamente son cerrados.

Definimos el *contenido* de una celda  $C$  como el número real

$$|C| = (b - a)(d - c).$$

Así, el contenido de una celda es (lo que queremos que sea) su área cuando ésta es un rectángulo y es 0 cuando se trata de un segmento, de un punto o del conjunto vacío.

Observemos que si tenemos dos celdas  $C \subset C'$ , entonces  $|C| \leq |C'|$ .

En efecto, esto es trivialmente cierto si una de ellas es vacía (teniendo en cuenta que, si  $C'$  es vacía, también tiene que serlo  $C$ ). En caso contrario, la

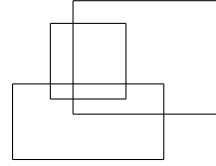
inclusión implica que<sup>1</sup>

$$]a, b[ \subset [a', b'], \quad ]c, d[ \subset [c', d'],$$

lo cual a su vez implica que  $a' \leq a \leq b \leq b'$ , luego  $b - a \leq b' - a'$ , e igualmente  $d - c \leq d' - c'$ , de donde  $|C| \leq |C'|$ .

Llamaremos *figuras elementales* a las uniones finitas de celdas. Llamaremos  $\mathcal{E}$  al conjunto de todas las figuras elementales.

Notemos que no exigimos que las celdas no se solapen. La imagen de la derecha muestra un ejemplo de figura elemental. Un hecho obvio es que toda figura elemental  $F$  está contenida en una celda suficientemente grande, que podemos tomar incluso de la forma  $[a, b] \times [a, b]$ . Basta tomar como  $a$  un número menor que todos los extremos inferiores de los factores de todas las celdas que componen la figura y como  $b$  un número mayor que todos los extremos superiores.



Veamos algunas propiedades básicas:

**Teorema A.2** Si  $A$  y  $B$  son figuras elementales, también lo son

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \setminus B \quad \text{y} \quad (u, v) + A,$$

donde  $(u, v) + A = \{(u, v) + (x, y) \mid (x, y) \in A\}$  es la imagen de  $A$  por la traslación  $(x, y) \mapsto (u + x, v + y)$ .

DEMOSTRACIÓN: Sea  $A = \bigcup_{k=1}^m C_k$ ,  $B = \bigcup_{l=1}^r D_l$ , donde cada  $C_k$  y  $D_l$  son celdas. Es trivial que  $A \cup B$  es también una figura elemental. Por otra parte,

$$A \cap B = \bigcup_{k=1}^m \bigcup_{l=1}^r (C_k \cap D_l),$$

luego basta probar que la intersección de dos celdas  $C$  y  $D$  es una celda. Ahora bien, si

$$C = I_1 \times J_1, \quad D = I_2 \times J_2,$$

es claro que  $C \cap D = (I_1 \cap I_2) \times (J_1 \cap J_2)$ , así como que una intersección de intervalos acotados es un intervalo acotado, luego  $C \cap D$  es una celda.

Tomemos ahora una celda tal que  $A \cup B \subset [a, b] \times [a, b]$ . Podemos exigir que  $a$  sea estrictamente menor que todos los extremos inferiores de todos los intervalos que aparecen en las celdas de  $A$  y  $B$ , así como que  $b$  sea estrictamente mayor que todos los extremos superiores de dichos intervalos. Entonces

$$A \setminus B = A \cap (([a, b] \times [a, b]) \setminus B),$$

<sup>1</sup>Por ejemplo, si  $x \in ]a, b[$ , tomamos un  $y$  tal que  $(x, y) \in C \subset C'$  (que existe, porque  $C$  no es vacío), con lo que  $x \in [a', b']$ .

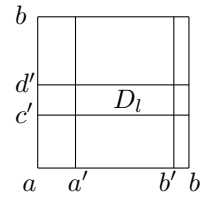
y como ya hemos probado que la intersección de figuras elementales es una figura elemental, basta probar que  $([a, b] \times [a, b]) \setminus B$  también lo es. A su vez:

$$([a, b] \times [a, b]) \setminus B = \bigcap_{l=1}^r (([a, b] \times [a, b]) \setminus D_l),$$

luego basta probar que  $([a, b] \times [a, b]) \setminus D_l$  es una figura elemental, donde  $D_l$  es una celda contenida en  $[a, b] \times [a, b]$ . Si  $D_l$  es vacía la conclusión es trivial y, en caso contrario,  $D_l$  es un producto de intervalos (del tipo que sea) con

$$a < a' \leq b' < b, \quad a < c' \leq d' < b.$$

Hay que distinguir 16 casos, según cómo sean las cuatro desigualdades que definen a  $D_l$ , pero en todas ellas la situación es la que ilustra la figura. La celda  $[a, b] \times [a, b]$  se divide en nueve celdas, una de las cuales es  $D_l$ , y las ocho restantes forman el complementario



$$([a, b] \times [a, b]) \setminus D_l$$

que es, por lo tanto, una figura elemental. La definición concreta de las ocho figuras depende de las desigualdades concretas que aparezcan en la definición de  $D_l$ , pero en todos los casos se obtiene la descomposición requerida del complementario.

Por último, es claro que si  $C = I \times J$  es una celda, entonces

$$(u, v) + C = (u + I) \times (v + J),$$

donde  $u + I = \{u + x \mid x \in I\}$  es claramente un intervalo, al igual que  $v + J$ , por lo que los trasladados de celdas son celdas y

$$(u, v) + A = \bigcup_{k=1}^m ((u, v) + C_k),$$

es una figura elemental. ■

Conviene dar nombre a la situación dada por el teorema anterior:

**Definición A.3** Si  $X$  es un conjunto, un *anillo* de subconjuntos de  $X$  es una familia  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}X$  que cumpla las propiedades siguientes:<sup>2</sup>

1.  $\emptyset \in \mathcal{A}$ .
2. Si  $A, B \in \mathcal{A}$ , entonces  $A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{A}$ .

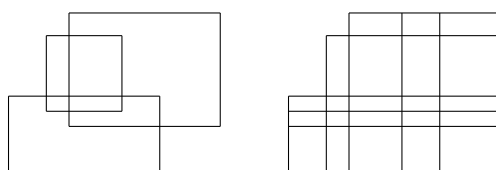
<sup>2</sup>El nombre se debe a que todo anillo de conjuntos es un anillo conmutativo en el sentido algebraico usual con las operaciones  $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  y  $A \cdot B = A \cap B$ , pero no vamos a necesitar este hecho.

Así, hemos probado que el conjunto de las figuras elementales es un anillo de subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  invariante por traslaciones, en el sentido de que cualquier trasladado de una figura elemental es una figura elemental.

Necesitamos un último resultado técnico:

**Teorema A.4** *Toda figura elemental puede expresarse como unión de celdas disjuntas.*

La idea subyacente es muy simple. La imagen siguiente muestra una figura elemental formada por la unión de tres celdas no disjuntas, pero, sin más que prolongar todos los lados, obtenemos una partición en celdas disjuntas:



El argumento que sigue es simplemente una formalización de esta idea:

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar demostramos lo siguiente: Si  $I_1, \dots, I_k$  son intervalos acotados en  $\mathbb{R}$ , existen intervalos acotados  $J_1, \dots, J_l$  disjuntos dos a dos tales que  $I_1 \cup \dots \cup I_k = J_1 \cup \dots \cup J_l$  y, para cada  $i, j$ , o bien  $J_j \subset I_i$ , o bien  $J_j \cap I_i = \emptyset$ .

En efecto, consideremos el conjunto de todos los extremos de los intervalos dados y ordenémoslos:  $a_1 < a_2 < \dots < a_r$ . Tomamos como intervalos  $J_j$  todos los de la forma  $\{a_r\}$  o  $]a_r, a_{r+1}[$  que estén contenidos en alguno de los  $I_i$ . Es claro entonces que  $J_1 \cup \dots \cup J_l \subset I_1 \cup \dots \cup I_k$ .

Recíprocamente, dado  $x \in I_1 \cup \dots \cup I_k$ , existe un  $i$  tal que  $x \in I_i$ . Si  $x = a_r$ , para cierto  $r$ , entonces  $\{x\} = \{a_r\} \subset I_i$ , luego  $\{x\}$  es un  $J_j$  y  $x$  está en la unión de todos ellos. La otra posibilidad es que  $a_r < x < a_{r+1}$ . En este caso los extremos de  $I_i$  deben cumplir  $u \leq a_r < x < a_{r+1} \leq v$ , por lo que  $x \in ]a_r, a_{r+1}[ \subset I_i$ , luego  $]a_r, a_{r+1}[$  es un  $J_j$  y de nuevo  $x$  está en la unión.

Con esto tenemos probado que  $J_1 \cup \dots \cup J_l = I_1 \cup \dots \cup I_k$ , y es claro que los intervalos  $J_j$  son disjuntos dos a dos. Si  $J_j \cap I_i \neq \emptyset$ , tomamos  $x \in J_j \cap I_i$  y distinguimos dos casos. O bien  $J_j = \{a_r\}$ , en cuyo caso  $x = a_r$  y trivialmente  $J_j \subset I_i$ , o bien  $J_j = ]a_r, a_{r+1}[$ , en cuyo caso  $I_i$  es un intervalo cuyos extremos cumplen  $u \leq a_r < x < a_{r+1} \leq v$ , por lo que  $J_j \subset I_i$ .

Basta probar que si  $C_1, \dots, C_k$  son celdas, existen otras celdas  $D_1, \dots, D_l$  disjuntas dos a dos de manera que  $D_1 \cup \dots \cup D_l = C_1 \cup \dots \cup C_k$ .

En efecto, si  $C_v = I_{1v} \times I_{2v}$ , aplicamos el resultado anterior a las familias  $\{I_{1v} \mid v = 1, \dots, k\}$  y  $\{I_{2v} \mid v = 1, \dots, k\}$ , lo que nos da dos familias de intervalos  $\{J_{iu} \mid u = 1, \dots, l_i\}$  disjuntos dos a dos de modo que  $\bigcup_{v=1}^k I_{iv} = \bigcup_{u=1}^{l_i} J_{iu}$  y cada  $J_{iu}$  está contenido en cada  $I_{iv}$  o bien es disjunto de él.

Llamamos  $D_r$  a las celdas de la forma  $J_{1u} \times J_{2u'}$  contenidas en algún  $C_v$ . Claramente son disjuntas dos a dos, pues si dos de ellas, digamos  $J_{1u} \times J_{2v}$  y  $J_{1u'} \times J_{2v'}$ , son distintas, entonces  $J_{1u} \neq J_{1u'}$  o bien  $J_{2v} \neq J_{2v'}$ , luego los intervalos correspondientes son disjuntos y las celdas también.

Es obvio que  $D_1 \cup \dots \cup D_l \subset C_1 \cup \dots \cup C_k$  y, si  $(x_1, x_2) \in C_1 \cup \dots \cup C_k$ , entonces  $(x_1, x_2) \in C_v = I_{1v} \times I_{2v}$ , para cierto  $v$ , luego  $x_i \in J_{iu_i}$ , para ciertos  $u_i$ , pero entonces cada intervalo  $J_{iu_i}$  no es disjunto de  $I_{iv}$ , luego  $J_{iu_i} \subset I_{iv}$ , luego tenemos que  $(x, y) \in J_{1u_1} \times J_{2u_2} \subset C_v$ , luego el producto es una de las celdas  $D_r$  y concluimos que  $(x, y) \in D_1 \cup \dots \cup D_l$ . ■

Pasamos ya al problema de asignar un “área” a cada figura elemental. Entre las condiciones que obviamente debe cumplir una definición de área para que sea admisible es que si dos figuras son disjuntas, el área de la unión sea la suma de las áreas de las figuras dadas. La definición siguiente recoge esta condición junto con otro requisito obvio:

**Definición A.5** Una *medida finitamente aditiva* en un anillo  $\mathcal{A}$  en un conjunto  $X$  es una aplicación  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty[$  que cumpla las propiedades siguientes:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ .
2. Si  $A, B \in \mathcal{A}$  son disjuntos, entonces  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ .

Toda medida finitamente aditiva cumple estas propiedades adicionales:

1. Si  $A \subset B$  son elementos de  $\mathcal{A}$ , entonces  $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ .  
En efecto,  $B = A \cup (B \setminus A)$  y la unión es disjunta, luego tomando medidas queda que  $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ .
2. Si  $A \subset B$  son elementos de  $\mathcal{A}$ , entonces  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .  
Es consecuencia del apartado anterior.
3. Si  $A, B \in \mathcal{A}$ , entonces  $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ .  
En efecto,  $\mu(A \cup B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \leq \mu(A) + \mu(B)$ .
4. Si  $A, B \in \mathcal{A}$  tienen medida nula, entonces  $\mu(A \cup B) = 0$ .  
Es un caso particular del apartado anterior.
5. Si  $A, B \in \mathcal{A}$ , entonces  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$ .  
En efecto,  $A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B))$  y la unión es disjunta. Basta tomar medidas y aplicar los apartados anteriores.

Otra propiedad que debemos exigir a una definición “razonable” de área es que sea invariante por traslaciones, es decir, que el área de una figura no se vea alterada por un mero cambio de posición. Si añadimos a esto la exigencia de que el cuadrado unitario  $[0, 1] \times [0, 1]$  tenga área 1, el teorema siguiente prueba que el área de una figura elemental está completamente determinada:

**Teorema A.6** *Existe una única medida finitamente aditiva  $m : \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty[$  que cumple las propiedades siguientes:*

1.  $m([0, 1] \times [0, 1]) = 1$ ,
2. Si  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  y  $A \in \mathcal{E}$ , entonces  $m((u, v) + A) = m(A)$ .

DEMOSTRACIÓN: Veamos primero la unicidad. Para ello probaremos algunos hechos que debe cumplir cualquier medida en las condiciones del enunciado:

1. Si  $C = I \times J$  cumple que  $I = \{x\}$  o bien  $J = \{y\}$ , entonces  $m(C) = 0$ .

En efecto, supongamos que es  $I = \{x\}$  y que  $m(C) > 0$ . Entonces  $(-x, 0) + C = \{0\} \times J$  y tiene la misma medida que  $C$ , luego no perdemos generalidad si suponemos que  $x = 0$ .

Fijemos un número natural  $N > m([0, 1] \times J)/m(C)$  y tomemos  $N$  puntos  $0 < x_1 < \dots < x_N < 1$ .

Entonces las celdas  $(x_i, 0) + C = \{x_i\} \times J$  son disjuntas dos a dos, tienen todas medida  $m(C)$  y están contenidas en  $[0, 1] \times J$ , luego

$$(\{x_1\} \times J) \cup \dots \cup (\{x_N\} \times J) \subset [0, 1] \times J$$

y, tomando medidas,

$$Nm(C) \leq m([0, 1] \times J),$$

en contra de la elección de  $N$ .

2.  $m(]0, 1[ \times ]0, 1[) = 1$ .

En efecto, el cuadrado cerrado se descompone en unión disjunta del cuadrado abierto y sus cuatro lados:

$$\begin{aligned} [0, 1] \times [0, 1] &= (]0, 1[ \times ]0, 1[) \cup (\{0\} \times [0, 1]) \cup (\{1\} \times [0, 1]) \\ &\quad \cup (]0, 1[ \times \{0\}) \cup (]0, 1[ \times \{1\}), \end{aligned}$$

pero en el punto anterior hemos probado que los lados tienen medida 0, luego al tomar medidas queda que  $1 = m([0, 1] \times [0, 1]) = m(]0, 1[ \times ]0, 1[)$ .

3. Si  $C = I_1 \times I_2$  es una celda y cada  $I_i$  es un intervalo de extremos 0 y 1, entonces  $m(C) = 1$ .

Basta tener en cuenta que  $]0, 1[ \times ]0, 1[ \subset C \subset [0, 1] \times [0, 1]$ , y que las dos celdas de los extremos tienen medida 1.

4. Si  $C = I_1 \times I_2$  es una celda y cada  $I_i$  es un intervalo de longitud 1, entonces  $m(C) = 1$ .

Porque  $C$  es un trasladado de una celda como la del apartado anterior.

5. Si  $C = I_1 \times I_2$  es una celda y cada  $I_i$  es un intervalo de extremos enteros, entonces  $m(C) = |C|$ .

Sea  $k_i \in \mathbb{N}$  la diferencia entre los extremos de  $I_i$ . Es claro que cada intervalo  $I_i$  se descompone en unión disjunta de  $k_i$  intervalos disjuntos de longitud 1, luego  $C$  se descompone en  $k_1 k_2$  celdas disjuntas en las condiciones del apartado anterior, luego  $m(C) = k_1 k_2 = |C|$ .

6. Si  $C = I_1 \times I_2$  es una celda y cada  $I_i$  es un intervalo de extremos racionales, entonces  $m(C) = |C|$ .

En efecto, si los extremos de  $I_i$  son  $a_i = a'_i/d$ ,  $b_i = b'_i/d$ , llamamos  $I'_i$  al intervalo de extremos  $a'_i$  y  $b'_i$  que sea del mismo tipo que  $I_i$ . Entonces por el apartado anterior

$$m(C') = (b'_1 - a'_1)(b'_2 - a'_2) = d^2(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) = d^2 |C|.$$

Por otra parte,  $I'_i$  se descompone en unión de  $d$  intervalos disjuntos de longitud  $b_i - a_i$ , todos los cuales son trasladados de  $I_i$ , luego  $C'$  se descompone en  $d^2$  celdas disjuntas trasladadas de  $C$ , luego  $m(C') = d^2 m(C)$  y llegamos a la igualdad del enunciado.

7. Si  $C = I_1 \times I_2$  es una celda cualquiera, entonces  $m(C) = |C|$ .

En efecto, si algún  $I_i$  es vacío o se reduce a un punto, ya sabemos que la medida es 0, luego se cumple la igualdad. En caso contrario, dado  $\epsilon > 0$ , tomando sucesiones de números racionales que converjan a los extremos de los intervalos de  $I_1$  e  $I_2$ , es fácil construir celdas  $C' \subset C \subset C''$  formadas por productos de intervalos con extremos racionales de modo que  $|C| - |C'| < \epsilon$  y  $|C''| - |C| < \epsilon$ . Así, por el apartado anterior,

$$|C| - \epsilon < |C'| = m(C') \leq m(C) \leq m(C'') = |C''| < |C| + \epsilon,$$

luego  $|m(C) - |C|| < \epsilon$  para todo  $\epsilon > 0$ , luego  $m(C) = |C|$ .

De aquí se sigue ya la unicidad de la medida: si tenemos dos medidas  $m$  y  $m'$  en las condiciones del enunciado y  $A \in \mathcal{E}$ , podemos descomponer  $A = \bigcup_{i=1}^k C_i$ , donde las  $C_i$  son celdas disjuntas dos a dos, y entonces

$$m(A) = \sum_{i=1}^k m(C_i) = \sum_{i=1}^k |C_i| = \sum_{i=1}^k m'(C_i) = m'(A),$$

luego las dos medidas son la misma.

Ahora pasamos al problema más delicado, y es justificar que realmente existe una medida  $m : \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty[$  que cumpla lo requerido. En principio, parece que baste definirla así:

Para cada figura elemental  $A$ , por el teorema A.4, podemos expresarla como unión de celdas disjuntas,  $A = \bigcup_{k=1}^m C_k$ , y entonces definimos

$$m(A) = \sum_{k=1}^n |C_k|.$$

Sin embargo, esta definición no es correcta porque una misma figura  $A$  admite infinitas descomposiciones distintas en unión de celdas disjuntas, y no tenemos garantizado que todas ellas vayan a dar lugar al mismo valor de  $m(A)$ . Vamos a probar que, en efecto, la definición de  $m$  es independiente de la elección de la descomposición. Admitiendo esto, es inmediato que  $m$  es realmente una medida finitamente aditiva invariante por traslaciones, con lo que el teorema quedará demostrado.

Dado un intervalo  $I$  de extremos  $a \leq b$ , para cada número natural  $m > 0$  definimos

$$C(I, m) = \{n \in \mathbb{Z} \mid n/m \in I\},$$

y vamos a probar que, si llamamos  $c(I, m)$  al número de elementos de  $C(I, m)$ , entonces

$$\lim_m \frac{c(I, m)}{m} = b - a.$$

En efecto, tenemos que

$$C(I, m) \subset \{n \in \mathbb{Z} \mid ma \leq n \leq mb\} \subset \{n \in \mathbb{Z} \mid E[ma] \leq n \leq E[mb] + 1\},$$

luego  $c(I, m) \leq mb + 1 - (ma - 1) + 1 = m(b - a) + 3$ .

Igualmente

$$C(I, m) \supset \{n \in \mathbb{Z} \mid ma < n < mb\} \supset \{n \in \mathbb{Z} \mid E[ma] + 1 < n < E[mb]\},$$

luego  $c(I, m) \geq mb - 2 - ma + 1 = m(b - a) - 1$ . Por lo tanto

$$b - a - \frac{1}{m} \leq \frac{c(I, m)}{m} \leq b - a + \frac{3}{m},$$

y por consiguiente el límite es  $b - a$ .

En segundo lugar probamos que si  $C = I \times J$  es una celda y  $d(C, m)$  es el número de elementos del conjunto

$$D(C, m) = \{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid (n_1/m, n_2/m) \in C\},$$

entonces

$$|C| = \lim_m \frac{d(C, m)}{m^2}.$$

En efecto,  $(n_1, n_2) \in D(C, m)$  si y sólo si  $n_1/m \in I$  y  $n_2/m \in J$ , es decir, si y sólo si  $n_1 \in C(I, m)$  y  $n_2 \in C(J, m)$ , luego  $d(C, m) = c(I, m)c(J, m)$ , luego, si los intervalos  $I, J$  tienen extremos  $a, b$  y  $c, d$ , respectivamente,

$$\lim_m \frac{d(C, m)}{m^2} = \lim_m \frac{c(I, m)}{m} \lim_m \frac{c(J, m)}{m} = (b - a)(d - c) = |C|.$$

Finalmente, si  $A$  es una figura elemental y la expresamos como unión de celdas disjuntas  $A = \bigcup_{k=1}^l C_k$ , la definición de  $d(A, m)$  que hemos dado para celdas vale igualmente para figuras elementales, y es claro que el conjunto  $D(A, m)$  es la unión disjunta de los conjuntos  $D(C_k, m)$ , por lo que

$$d(A, m) = \sum_{k=1}^l d(C_k, m),$$

de donde, a su vez,

$$\sum_{k=1}^l |C_k| = \sum_{k=1}^l \lim_n \frac{d(C_k, m)}{m^2} = \lim_n \frac{d(A, m)}{m^2},$$

pero la última expresión depende únicamente de  $A$ , no de la descomposición en celdas considerada, lo que prueba que la suma de los contenidos no depende de la descomposición elegida y la medida  $m$  está bien definida. ■

Así pues, sólo hay una definición “razonable” del área de una figura elemental, y es la dada por la medida cuya existencia acabamos de demostrar. La familia de las figuras elementales es demasiado reducida, pues no incluye siquiera a los triángulos, pero enseguida veremos que, con el trabajo que hemos hecho, estamos muy cerca de tener una definición de “área” aplicable a una familia de figuras suficientemente amplia.

### A.3 La medida de Jordan

**Definición A.7** Sea  $A \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto acotado. Definimos la *medida exterior de Jordan*  $J^*(A)$  y la *medida interior de Jordan*  $J_*(A)$  como

$$J^*(A) = \inf\{m(B) \mid B \in \mathcal{E}, A \subset B\}, \quad J_*(A) = \sup\{m(B) \mid B \in \mathcal{E}, B \subset A\}.$$

Notemos que si  $A \subset \mathbb{R}^2$  es un conjunto acotado, existen siempre figuras elementales  $B \subset A \subset B'$ , pues como  $B$  podemos tomar el conjunto vacío, y hemos visto que como  $A$  podemos tomar incluso una simple celda. Entonces  $m(B) \leq m(B')$ , luego  $m(B')$  es una cota superior del conjunto de todas las medidas de figuras elementales contenidas en  $A$ , luego, por definición de supremo, se cumple que  $J_*(A) \leq m(B')$ . Esto a su vez implica que  $J_*(A)$  es una cota inferior del conjunto de todas las medidas de figuras elementales que contienen a  $A$ , luego por definición de ínfimo se cumple:

$$J_*(A) \leq J^*(A).$$

La idea que nos lleva a dar estas definiciones es muy simple: pongamos que  $A \subset \mathbb{R}^2$  es cualquier figura plana a la que queremos asignarle un área “razonable”.

Si  $B \subset A$  es una figura elemental, sabemos que el área de  $B$  tiene que ser  $m(B)$ , y “lo razonable” es que si  $A$  tiene que tener definida un área  $m(A)$ , se

cumpla que  $m(B) \leq m(A)$ . Así pues,  $m(A)$  tiene que ser una cota superior del conjunto de las medidas de todas las figuras elementales contenidas en  $A$ . Por la definición de supremo, esto implica que tiene que ser  $J_*(A) \leq m(A)$ .

Similarmente, si  $B$  es una figura elemental tal que  $A \subset B$ , cualquier definición “razonable” de área de  $A$  debe cumplir que  $m(A) \leq m(B)$  y, por la definición de ínfimo, tiene que ser  $m(A) \leq J^*(A)$ .

Así pues, el área de cualquier figura plana  $A$  debe cumplir que

$$J_*(A) \leq m(A) \leq J^*(A).$$

Si se cumple  $J_*(A) < J^*(A)$ , esto no nos permite concluir nada, pero si se da el caso en que  $J_*(A) = J^*(A)$ , entonces podemos asegurar que el área de  $A$  “tiene que ser” necesariamente  $m(A) = J_*(A) = J^*(A)$ . Sucede que este caso es suficiente para nuestros fines:

Diremos que un conjunto acotado  $A \subset \mathbb{R}^2$  es *medible Jordan* si cumple  $J_*(A) = J^*(A)$ , y en tal caso, a este valor común lo llamaremos *medida de Jordan* de  $A$ , y lo representaremos por  $m(A) = J^*(A) = J_*(A)$ . Llamaremos  $\mathcal{J}$  al conjunto de todos los subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  medibles Jordan.

Acabamos de razonar que si una figura  $A$  es medible Jordan, entonces la única definición razonable de área de  $A$  es  $m(A)$ .

Vamos a probar que la medida de Jordan cumple todas las propiedades razonables que cabe exigir que cumpla el concepto de “área”, así como que todas las figuras geométricas “habituales” son medibles Jordan. En primer lugar conviene probar un criterio teóricamente simple que determina cuándo una figura es medible Jordan:

**Teorema A.8** *Un subconjunto acotado  $A \subset \mathbb{R}^2$  es medible Jordan si y sólo si para todo  $\epsilon > 0$  existen figuras elementales  $A_0$  y  $A_1$  tales que  $A_0 \subset A \subset A_1$  y  $m(A_1 \setminus A_0) < \epsilon$ .*

DEMOSTRACIÓN: Si  $A$  es medible Jordan, basta aplicar las definiciones de supremo e ínfimo para encontrar figuras elementales  $A_0 \subset A \subset A_1$  tales que  $m(A) - m(A_0) < \epsilon/2$ ,  $m(A_1) - m(A) < \epsilon/2$ , y entonces

$$\begin{aligned} m(A_1 \setminus A_0) &= m(A_1) - m(A_0) < m(A) + \epsilon/2 - m(A_0) \\ &< m(A_0) + \epsilon/2 + \epsilon/2 - m(A_0) = \epsilon. \end{aligned}$$

Recíprocamente, la hipótesis del teorema nos da que

$$0 \leq J^*(A) - J_*(A) \leq m(A_1) - m(A_0) = m(A_1 \setminus A_0) < \epsilon$$

para todo  $\epsilon > 0$ , luego  $J^*(A) = J_*(A)$ . ■

El teorema siguiente contiene los hechos básicos sobre la medida de Jordan:

**Teorema A.9**  $\mathcal{J}$  es un anillo en  $\mathbb{R}^2$  que contiene a  $\mathcal{E}$  y la medida de Jordan  $m : \mathcal{J} \rightarrow [0, +\infty[$  es la única medida finitamente aditiva que extiende a la medida de figuras elementales.

DEMOSTRACIÓN: Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos medibles Jordan. Vamos a probar que  $A \cup B$  también lo es. Dado  $\epsilon > 0$ , sean  $A_0 \subset A \subset A_1$ ,  $B_0 \subset B \subset B_1$  figuras elementales tales que  $m(A_1 \setminus A_0) < \epsilon/2$ ,  $m(B_1 \setminus B_0) < \epsilon/2$ . Entonces  $C_0 = A_0 \cup B_0 \subset A \cup B \subset A_1 \cup B_1 = C_1$  y

$$m(C_1 \setminus C_0) \leq m((A_1 \setminus A_0) \cup (B_1 \setminus B_0)) \leq m(A_1 \setminus A_0) + m(B_1 \setminus B_0) < \epsilon.$$

Por lo tanto,  $A \cup B$  es medible Jordan.

Similarmente,  $C'_0 = A_0 \cap B_0 \subset A \cap B \subset A_1 \cap B_1 = C'_1$  y

$$m(C'_1 \setminus C'_0) \leq m((A_1 \setminus A_0) \cup (B_1 \setminus B_0)) < \epsilon.$$

Por último tomamos  $C''_0 = A_0 \setminus B_1 \subset A \setminus B \subset A_1 \setminus B_0 = C''_1$  y también

$$m(C''_1 \setminus C''_0) \leq m((A_1 \setminus A_0) \cup (B_1 \setminus B_0)) < \epsilon.$$

Así,  $A \setminus B$  es medible Jordan y queda probado que  $\mathcal{J}$  es un anillo de conjuntos.

Es inmediato que, si  $A$  es una figura elemental,  $J_*(A) = J^*(A) = m(A)$ , luego  $A \in \mathcal{J}$  y la medida de Jordan extiende a la que ya teníamos definida sobre las figuras elementales. En particular la medida de la celda unitaria es 1.

Si  $\mu : \mathcal{J} \rightarrow [0, +\infty[$  es cualquier medida finitamente aditiva que cumpla estas propiedades, entonces a partir de las definiciones de medida interior y exterior es trivial que  $m(A) = J_*(A) \leq \mu(A) \leq J^*(A) = m(A)$ , luego  $\mu = m$ . ■

Es fácil ver que la medida de Jordan es invariante por traslaciones. De hecho, esto nos da otra caracterización:

**Teorema A.10** La medida de Jordan es también la única medida finitamente aditiva en  $\mathcal{J}$  invariante por traslaciones que cumple  $m([0, 1] \times [0, 1]) = 1$ .

DEMOSTRACIÓN: Dado  $(u, v) \in \mathbb{R}$  y un  $A \in \mathcal{J}$ , es inmediato comprobar que  $J_*(a + A) = J_*(A) = J^*(A) = J^*((u, v) + A)$ , luego  $(u, v) + A \in \mathcal{J}$  y  $m((u, v) + A) = m(A)$ .

Si una medida  $\mu : \mathcal{J} \rightarrow [0, +\infty[$  cumple esto mismo, entonces su restricción a  $\mathcal{E}$  es una medida finitamente aditiva invariante por traslaciones, luego, por la unicidad, tiene que ser la medida de las figuras elementales, y por el teorema anterior  $\mu = m$ . ■

Observemos ahora que en el teorema A.8 podemos sustituir las figuras elementales por conjuntos medibles cualesquiera:

**Teorema A.11** Un subconjunto acotado  $A \subset \mathbb{R}^2$  es medible Jordan si y sólo si para todo  $\epsilon > 0$  existen conjuntos medibles  $A_0$  y  $A_1$  tales que  $A_0 \subset A \subset A_1$  y  $m(A_1 \setminus A_0) < \epsilon$ .

DEMOSTRACIÓN: Una implicación es trivial, pues basta tomar  $A_0 = A_1 = A$ . Para la contraria, dado  $\epsilon > 0$ , existen conjuntos medibles  $A_0$  y  $A_1$  tales que  $A_0 \subset A \subset A_1$  y  $m(A_1) - m(A_0) < \epsilon/2$ .

Por la definición de la medida interior, existe una figura elemental  $A'_0 \subset A_0$  tal que  $m(A'_0) > m(A_0) - \epsilon/4$ , y por la definición de la medida exterior existe una figura elemental  $A'_1 \supset A_1$  tal que  $m(A'_1) < m(A_1) + \epsilon/4$ . Así tenemos que  $A'_0 \subset A_0 \subset A \subset A_1 \subset A'_1$  y

$$m(A'_1 - A'_0) = m(A'_1) - m(A'_0) < m(A_1) - m(A_0) + \epsilon/4 + \epsilon/4 < \epsilon,$$

luego el teorema A.8 implica que  $A$  es medible Jordan. ■

## A.4 Criterios de medibilidad

Con lo visto en la sección anterior, ni siquiera sabemos si un triángulo (o incluso un rectángulo de lados no horizontales ni verticales) es medible Jordan. Necesitamos un último teorema laborioso que nos dará un criterio sencillo para reconocer conjuntos medibles Jordan. La idea básica es que un conjunto acotado es medible Jordán si y sólo si lo es su “borde” y éste tiene además medida nula. Para precisarla necesitamos una definición precisa de “borde”:

**Definición A.12** Si  $A \subset \mathbb{R}^2$ , llamaremos *frontera* de  $A$ , y la representaremos por  $\partial A$ , al conjunto de todos los puntos que son límite tanto de una sucesión de puntos de  $A$  como de una sucesión de puntos que no están en  $A$ .

Así, un punto está en la frontera de  $A$  si es posible aproximarse hasta el desde dentro y desde fuera de  $A$ . Es fácil ver, por ejemplo, que la frontera de un círculo es la circunferencia que lo rodea.

En la prueba del teorema siguiente usaremos este hecho elemental:

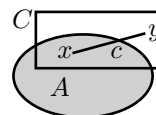
*Si una celda  $C$  contiene un punto  $x$  de un conjunto  $A$  y otro punto  $y$  que no está en  $A$ , entonces contiene un punto  $z \in \partial A$ .*

En efecto, sea  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  la función dada por  $f(t) = (1 - t)x + ty$ . Geométricamente, su imagen es el segmento de extremos  $x$  e  $y$ . En realidad se cumple que  $f : [0, 1] \rightarrow C$ , pues si  $C = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  (suponemos, por ejemplo, que los intervalos son cerrados, pero el argumento vale igual si son abiertos o semiabiertos), entonces  $a_i \leq x_i, y_i \leq b_i$ , luego

$$a_i = (1 - t)a_i + ta_i \leq (1 - t)x_i + ty_i \leq (1 - t)b_i + tb_i = b_i,$$

luego  $f(t) \in C$ .

Ahora la idea del argumento es que si nos movemos desde un punto de  $A$  hasta otro punto que no está en  $A$ , en algún momento tendremos que salir de  $A$  pasando por un punto de su borde  $\partial A$ .



Consideramos el conjunto  $X = \{t \in [0, 1] \mid f(t) \in A\}$ . Como  $0 \in X$ , no es vacío, luego podemos tomar su supremo  $0 \leq s \leq 1$ . Si  $s > 0$ , de la definición de supremo se sigue que existe una sucesión  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$  de números  $0 \leq t_n < s$  convergente a  $s$  tal que  $f(t_n) \in A$  (pues  $s - 1/n$  no puede ser una cota superior de  $X$ , luego existe un  $t_n \in X$  tal que  $s - 1/n < t_n \leq s$ ), y como  $f$  es continua  $c = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n)$  es el límite de una sucesión contenida en  $A$ .

Similarmente, si  $s < 1$ , cualquier sucesión  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$  de números  $s < t_n \leq 1$  convergente a  $s$  cumple que  $f(t_n) \notin A$  y entonces  $c = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n)$  es el límite de una sucesión de puntos que no están en  $A$ , luego  $c \in \partial A \cap C$ .

En el caso en que  $s = 0$ , tenemos que  $c = f(0) = x \in A$ , luego es el límite de la sucesión constante igual a  $x$ , que está en  $A$ , e igualmente resulta que  $c \in \partial A$ , y si  $s = 1$  entonces  $c = f(1) = y \notin A$ , luego es el límite de una sucesión (constante) de puntos que no están en  $A$ , y también  $c \in \partial A$ .

**Teorema A.13** *Un conjunto acotado  $A \subset \mathbb{R}^2$  es medible Jordan si y sólo si lo es su frontera y  $m(\partial A) = 0$ .*

DEMOSTRACIÓN: Como  $A$  está acotado, existen números  $a < b$  tales que  $A \subset [a, b] \times [a, b]$ . Supongamos que  $m(\partial A) = 0$  y fijemos  $\epsilon > 0$ . Puesto que  $J^*(\partial A) = 0 < \epsilon$ , existe una figura elemental  $F$  tal que  $\partial A \subset F$  y  $m(F) < \epsilon$ . Expresamos  $F$  como unión de celdas disjuntas:

$$F = C_1 \cup \dots \cup C_k.$$

Sea  $\eta = (\epsilon - m(F))/k > 0$ . Dada una celda  $C = [u_1, v_1] \times [u_2, v_2]$ , como la función  $h(\delta) = (v_1 + \delta - (u_1 - \delta))(v_2 + \delta - (u_2 - \delta))$  es continua y  $h(0) = m(C)$ , existe un  $\delta > 0$  tal que  $h(\delta) - m(C) < \eta$ , lo que significa que la celda

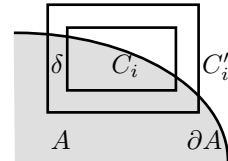
$$C' = [u_1 - \delta, v_1 + \delta] \times [u_2 - \delta, v_2 + \delta]$$

cumple  $C \subset C'$  y  $m(C') < m(C) + \eta$ .

Aplicando esto a cada una de las celdas  $C_i$ , obtenemos nuevas celdas  $C_i \subset C'_i$  de modo que  $m(C'_i) < m(C_i) + \eta$ , luego la figura  $F' = C'_1 \cup \dots \cup C'_k$  cumple que  $\partial A \subset F' \subset F$  y

$$m(F') \leq m(C'_1) + \dots + m(C'_k) < m(F) + k\eta < \epsilon.$$

Así, lo que estamos haciendo es cubrir  $\partial A$  con un número finito de celdas  $C_i$  cuyas medidas sumen menos de  $\epsilon$  y aprovechar el margen para ensanchar cada celda con un “marco” de grosor  $\delta$  sin que la suma de las celdas ensanchadas exceda de  $\epsilon$ .



Sea  $n$  un número natural tal que  $h = (b - a)/n < \delta$ . Entonces, la celda  $[a, b] \times [a, b]$  se descompone en unión de  $n^2$  celdas cuadradas de lado  $h$ . Sea  $F''$  la unión de todas aquellas que contienen algún punto de  $A$  y son disjuntas de  $F$ . Vamos a probar que

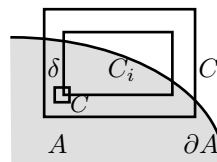
$$F'' \subset A \subset F'' \cup F'.$$

Admitiendo esto, como  $m((F'' \cup F') \setminus F'') \leq m(F') < \epsilon$ , el teorema A.8 nos asegura que  $A$  es medible Jordan.

Para probar la primera inclusión tomamos una de las celdas cuadradas  $C$  de lado  $h$  que contiene un punto  $x \in A$  y es disjunta de  $F$ . Tenemos que probar que  $C \subset A$ . Supongamos, por el contrario, que existe un punto  $y \in C \setminus A$ . Entonces, por la observación precedente al enunciado,  $C$  contiene un punto de  $\partial A \subset F$ , lo que entra en contradicción con que  $C$  es disjunta de  $F$ .

Para probar la segunda inclusión tomamos un punto  $x \in A \setminus F'$  y vamos a probar que  $x \in F''$ . Como  $x \in [a, b] \times [a, b]$ , entonces  $x$  está en una de las celdas cuadradas  $C$  en las que hemos dividido este cuadrado, la cual ciertamente corta a  $A$ . Basta probar que  $C$  es disjunta de  $F$  para que podamos concluir que  $x \in C \subset F''$ .

Pero si  $C$  corta a  $F$ , entonces corta concretamente a una de las celdas  $C_i$ , pero es fácil ver que si un cuadrado de lado menor que  $\delta$  corta a  $C_i$ , entonces está contenido en la celda  $C'_i$  ensanchada con el marco de grosor  $\delta$ , luego  $x \in C \subset C'_i \subset F'$ , en contradicción con que  $x \notin F'$ .



Ahora supongamos que  $A$  es medible Jordan y sea  $\epsilon > 0$ . Como  $A$  es medible, existen figuras elementales  $A_0 \subset A \subset A_1$  tales que  $m(A_1 \setminus A_0) < \epsilon$ . Expresemos  $A_0 = \bigcup_{k=1}^m C_k$ ,  $A_1 = \bigcup_{r=1}^l C'_r$  como uniones de celdas disjuntas, de modo que

$$\sum_{r=1}^l m(C'_r) < \sum_{k=1}^m m(C_k) + \epsilon.$$

Reduciendo  $A_0$  y ampliando  $A_1$ , podemos suponer que las celdas  $C_k$  son abiertas y que las  $C'_r$  son cerradas (al extenderlas así, puede que las  $C'_r$  ya no sean disjuntas, pero no importa).

Basta probar que  $\partial A \subset A_1 \setminus A_0$ , pues entonces, llamando  $B = A_1 \setminus A_0$ , tenemos que

$$m(B) \leq m\left(\bigcup_{r=1}^l C'_r\right) - m\left(\bigcup_{k=1}^m C_k\right) \leq \sum_{r=1}^l m(C'_r) - \sum_{k=1}^m m(C_k) < \epsilon,$$

luego  $0 \leq J_*(\partial A) \leq J^*(\partial A) \leq \epsilon$  y, como esto se cumple para todo  $\epsilon > 0$ , concluimos que  $J_*(A) = J^*(A) = 0$  y así  $\partial A$  es medible Jordan y tiene medida nula.

Tomemos, pues, un punto  $x \in \partial A$ . Entonces existe una sucesión  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  contenida en  $A$  convergente a  $x$ . Cada  $x_n$  está en una celda cerrada  $C'_r$  y, como éstas son una cantidad finita, tiene que haber infinitos términos de la sucesión en la misma celda  $C'_r$ , luego tomando una subsucesión podemos suponer que toda ella está contenida en  $C'_r$ , luego su límite también cumple  $x \in C'_r \subset A_1$  (véase la definición 3.30 y la observación posterior, según la cual las celdas que hemos definido como “cerradas” lo son realmente en el sentido de dicha definición).

Por otra parte, existe otra sucesión  $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$  convergente a  $x$  formada por puntos que no están en  $A$ . Si fuera  $x \in A_0$ , entonces  $x$  estaría en una de las celdas abiertas  $C_k = ]u_1, v_1[ \times ]u_2, v_2[$ , lo que significa que sus coordenadas cumplen  $u_1 < x_1 < v_1$ ,  $u_2 < x_2 < v_2$ , luego existe un  $n$  tal que las coordenadas de  $y_n$  cumplen lo mismo, lo que significa que  $x_n \in C_k \subset A_0 \subset A$ , con lo que tenemos una contradicción. ■

Así pues, a la hora de determinar si un conjunto es o no medible Jordan y también a la hora de calcular su área, es indiferente si consideramos que el conjunto contiene o no a su frontera. El conjunto será medible si dicha frontera (tanto si está contenida en el conjunto como si no) es medible con medida nula, y por lo tanto la medida del conjunto será la misma tanto si incluimos en él su frontera como si no.

Esto hace también que cuando usamos que la medida de una unión de figuras es la suma de las medidas, no es necesario que las figuras sean estrictamente disjuntas, sino que no hay inconveniente en que puedan tener en común una parte de su frontera, pues en la fórmula general

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$$

el último término se anula si  $A \cap B$  está formado por puntos fronterizos. Para expresar esto convendremos en decir que dos figuras “se solapan” sólo si su intersección tiene medida no nula.

Vamos a dar ahora un criterio que permite probar fácilmente que las fronteras de los conjuntos “razonables” tienen medida nula, para lo cual necesitamos un sencillo (caso particular de un) teorema general:

**Teorema A.14 (Heine-Cantor)** *Si  $K \subset \mathbb{R}^2$  es compacto y  $f : K \rightarrow \mathbb{C}$  es una función continua, entonces, para todo  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que si  $x, x' \in K$  cumplen  $|x - x'| < \delta$ , entonces  $|f(x) - f(x')| < \epsilon$ .*

La diferencia con lo que afirma la mera definición de continuidad es que, en principio, el  $\delta$  necesario para que se cumpla la definición de continuidad en un punto  $x$  para un  $\epsilon$  dado, puede depender del punto  $x$ , mientras que vamos a probar que, si el dominio  $K$  es compacto, la definición de continuidad se cumple con el mismo  $\delta$  en todos los puntos.

DEMOSTRACIÓN: En caso contrario, existiría un  $\epsilon > 0$  tal que, para cualquier  $\delta > 0$  existen puntos  $x, x' \in K$  tales que  $|x - x'| < \delta$ , pero  $|f(x) - f(x')| \geq \epsilon$ . Si aplicamos esto a  $\delta = 1/n$ , podemos encontrar puntos  $x_n, x'_n \in K$  tales que  $|x_n - x'_n| < 1/n$ , pero  $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \epsilon$ .

Como  $K$  es compacto, la sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  está acotada, luego por el teorema de Bolzano-Weierstrass 1.24 tiene una subsucesión convergente  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ , y como  $K$  es cerrado, el límite  $x$  estará en  $K$ . El mismo razonamiento aplicado a la subsucesión  $\{x'_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  nos permite tomar una subsucesión  $\{x'_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$  convergente a un punto  $x' \in K$ . Sustituyendo las sucesiones por las subsucesiones que hemos encontrado, no perdemos generalidad si suponemos que  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

y  $\{x'_n\}_{n=1}^\infty$  convergen a puntos  $x, x' \in K$ . Ahora bien, tomando límites en  $|x_n - x'_n| < 1/n$  resulta que  $|x - x'| \leq 0$ , luego  $x = x'$ . Por otra parte, tomando límites en  $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \epsilon$  resulta que  $0 = |f(x) - f(x)| \geq \epsilon$ , y tenemos una contradicción. ■

Ahora ya podemos probar:

**Teorema A.15** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua en un intervalo cerrado, entonces su gráfica:

$$G(f) = \{(t, f(t)) \mid t \in [a, b]\}$$

es medible Jordan con medida nula.

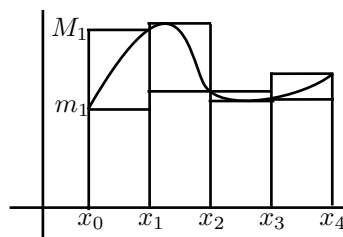
DEMOSTRACIÓN: Dado  $\epsilon > 0$ , por el teorema anterior existe un  $\delta > 0$  tal que si  $t, t' \in [a, b]$  cumplen  $|t - t'| < \delta$ , entonces  $|f(t) - f(t')| < \epsilon/(b - a)$ . Consideremos un número natural tal que  $h = (b - a)/n < \delta$  y dividamos el intervalo  $[a, b]$  en  $n$  intervalos de longitud  $h$ :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Por el teorema de Weierstrass, en cada intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  la función  $f$  toma un valor mínimo  $m_i$  y un valor máximo  $M_i$ , de modo que  $M_i - m_i < \epsilon/(b - a)$ . La celda

$$C_i = [x_{i-1}, x_i] \times [m_i, M_i]$$

cubre todos los puntos de la gráfica de  $f$  correspondientes al intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ , luego la figura  $A = \bigcup_{i=1}^n C_i$  cumple que  $G(f) \subset A$ , luego



$$J_*(A) \leq J^*(A) \leq m(A) \leq \sum_{i=1}^n m(C_i) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)h < \frac{nh\epsilon}{b - a} = \epsilon$$

y, como esto vale para todo  $\epsilon > 0$ , concluimos que  $J_*(A) = J^*(A) = 0$ . ■

En particular, todo segmento de recta tiene medida nula, luego todas las figuras limitadas por un número finito de segmentos (todos los polígonos) son medibles Jordan, pero también lo es un círculo, porque la función  $f(t) = \sqrt{r^2 - t^2}$  es continua en  $[-r, r]$  y su gráfica es una semicircunferencia, y así una circunferencia es unión de dos conjuntos de medida nula, luego tiene medida nula, y del mismo modo es fácil probar que cualquier figura “razonable”, limitada por una curva continua, es medible Jordan.

En particular ahora sabemos que todos los rectángulos son medibles, pero nada de lo que hemos dicho justifica que su medida sea el producto de su base por su altura, salvo que sus lados sean horizontales y verticales, en cuyo caso se

trata de una celda cuya medida sabemos calcular. Vamos a probar que la medida de un conjunto no se altera si le aplicamos un giro, para lo cual observamos en primer lugar que el razonamiento que hemos dado al principio de este apéndice para justificar que el área de un paralelogramo es el producto de su base por su altura prueba ahora que su medida de Jordan puede calcularse de ese modo siempre que tenga dos lados horizontales o verticales, pues lo único que se usa es que, con una disección y una traslación, el paralelogramo se transforma en un rectángulo con lados horizontales y verticales, cuya medida sabemos calcular. Usamos este hecho en la prueba del teorema siguiente:

**Teorema A.16** *Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una aplicación lineal, es decir, una aplicación de la forma*

$$f(x, y) = (ax + cy, bx + dy).$$

*Si  $A$  es un conjunto medible Jordan, entonces también lo es su imagen  $f[A]$ , y*

$$m(f[A]) = |ad - bc| m(A).$$

DEMOSTRACIÓN: La función  $f$  admite la expresión matricial<sup>3</sup>

$$f(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

de modo que  $ad - bc$  no es sino el determinante de la matriz. Ahora observamos que si  $b \neq 0$ , podemos descomponer

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d/b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c - ad/b & 0 \end{pmatrix}.$$

Esto se traduce en que si llamamos  $f_1$  y  $f_2$  a las aplicaciones lineales definidas por estas dos matrices  $M_1$  y  $M_2$ , se cumple que  $f(x, y) = f_2(f_1(x, y))$  y, teniendo en cuenta que el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes, basta probar el teorema para las aplicaciones  $f_1$  y  $f_2$ . En efecto, si ambas lo cumplen, tendremos que  $f_1[A]$  será un conjunto medible con medida  $|\det M_1| m(A)$  y, aplicando el teorema a  $f_2$  y este conjunto, concluimos que  $f[A] = f_2[f_1[A]]$  es medible con medida  $|\det M_2| |\det M_1| m(A) = |\det M| m(A)$ .

Por lo tanto, no perdemos generalidad si suponemos que  $b = 0$  o que  $d = 0$ . Los dos casos se tratan igual, así que supondremos que  $b = 0$ .

Empezamos probando que se cumple el teorema para el caso de una celda  $C = [u_1, v_1] \times [u_2, v_2]$ . Observemos que

$$f(u_1, u_2) + (x, y) = f(u_1, u_2) + f(x, y),$$

por lo que, para cualquier conjunto  $A \subset \mathbb{R}^2$ , se cumple que

$$f[(u_1, u_2) + A] = f(u_1, u_2) + f[A].$$

<sup>3</sup>Véase la sección 11.2 de [ITAI].

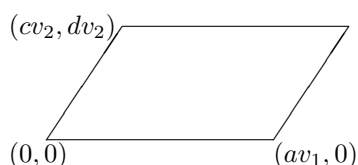
Como  $C = (u_1, u_2) + C_0$ , donde  $C_0 = [0, v_1 - u_1] \times [0, v_2 - u_2]$ , se cumple que  $f[C]$  es un trasladado de  $f[C_0]$ , luego será medible si y sólo si lo es  $f[C_0]$  y su medida será la misma. Por lo tanto, no perdemos generalidad si suponemos que  $C$  es de la forma  $C = [0, v_1] \times [0, v_2]$ . Equivalentemente,  $C$  está formado por todos los puntos de la forma

$$s(1, 0) + t(0, 1), \quad 0 \leq s \leq v_1, \quad 0 \leq t \leq v_2,$$

luego  $f[C]$  está formado por los puntos de la forma

$$sf(1, 0) + tf(0, 1) = s(a, 0) + t(c, d), \quad 0 \leq s \leq v_1, \quad 0 \leq t \leq v_2.$$

Es fácil ver que estos puntos forman el paralelogramo



de vértices  $(0, 0)$ ,  $(av_1, 0)$ ,  $(cv_2, dv_2)$ ,  $(av_1, 0) + (cv_2, dv_2)$ , donde en la figura hemos supuesto que todos los signos son positivos, pero cualquiera de ellos puede ser negativo, lo que se traduce meramente en que el paralelogramo esté a un lado u otro de los ejes, pero siempre será un paralelogramo con dos lados horizontales, salvo si  $a = 0$  o  $d = 0$ , en cuyo caso se reduce a un segmento (o a un punto).

En cualquier caso, concluimos que  $f[C]$  es medible Jordan, y sabemos que su medida es el producto de la base por la altura, es decir,

$$|av_1||dv_2| = |ad|v_1v_2 = |ad - bc| m(C),$$

como había que probar. Notemos que esta fórmula vale igualmente si  $a = 0$  o  $d = 0$ , pues entonces el miembro derecho es 0 y  $f[C]$  es un segmento (o un punto) y su medida es ciertamente 0.

Una vez probado el teorema para celdas, es inmediato que también vale para figuras elementales, pues si  $A = \bigcup_{n=1}^l C_n$  es una unión de celdas disjuntas,

$$f[A] = \bigcup_{n=1}^l f[C_n]$$

es una unión de conjuntos medibles disjuntos, luego es medible y, si llamamos  $\Delta = ad - bc$ ,

$$m(f[A]) = \sum_{n=1}^l m(f[C_n]) = \sum_{n=1}^l |\Delta| m(C_n) = |\Delta| m(A).$$

Finalmente, si  $A$  es un conjunto medible arbitrario, distinguimos dos casos: si  $\Delta = 0$ , entonces, consideramos cualquier figura elemental  $A \subset A_1$  y tenemos que  $f[A] \subset f[A_1]$ , donde  $m(f[A_1]) = 0$ , de donde se sigue que  $f[A]$  es medible y  $m(f[A]) = 0 = |\Delta| m(A)$ .

Si  $\Delta \neq 0$ , fijamos  $\epsilon > 0$  y tomamos figuras elementales  $A_0 \subset A \subset A_1$  tales que  $m(A_1 \setminus A_0) < \epsilon/|\Delta|$ . Entonces  $f[A_0] \subset f[A] \subset f[A_1]$  y

$$m(f[A_0]) = |\Delta| m(A_0), \quad m(f[A_1]) = |\Delta| m(A_1),$$

luego  $m(f[A_1] \setminus f[A_0]) = |\Delta|(m(A_1) - m(A_0)) < \epsilon$ , y el teorema A.11 nos da que  $f[A]$  es medible. Además,

$$|\Delta| m(A_0) = m(f[A_0]) \leq m(f[A]) \leq m(f[A_1]) = |\Delta| m(A_1),$$

luego

$$-\epsilon < |\Delta|(m(A_0) - m(A)) \leq m(f[A]) - |\Delta| m(A) \leq |\Delta|(m(A_1) - m(A)) < \epsilon,$$

luego  $|m(f[A]) - |\Delta| m(A)| < \epsilon$  para todo  $\epsilon > 0$ , lo que nos da la igualdad  $m(f[A]) = |\Delta| m(A)$ . ■

Como consecuencia:

**Teorema A.17** *La medida de Jordan es invariante por traslaciones, giros y simetrías.*

DEMOSTRACIÓN: Ya sabemos que la medida de Jordan es invariante por traslaciones. Efectuar un giro de ángulo  $\theta$  respecto de un centro arbitrario  $O$  equivale a trasladar primero el centro hasta  $(0, 0)$ , luego efectuar el giro y luego efectuar la traslación inversa. Por lo tanto, basta considerar giros con centro en  $(0, 0)$ . Identificando  $\mathbb{R}^2$  con el plano complejo, efectuar un giro de ángulo  $\theta$  equivale a sumar  $\theta$  al argumento de cada número complejo, es decir, que el giro es la aplicación

$$|z|e^{i\alpha} \mapsto |z|e^{i(\alpha+\theta)} = |z|e^{i\alpha}e^{i\theta}$$

o, más simplemente, la aplicación  $z \mapsto ze^{i\theta}$ . Si  $z = x + yi$ , esto equivale a

$$x + yi \mapsto (x + yi)(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta + i(x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta).$$

Por lo tanto, visto como aplicación de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ , un giro de centro  $(0, 0)$  es una aplicación lineal de matriz

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

que tiene determinante 1, luego el teorema anterior implica que al girar un conjunto medible obtenemos otro conjunto medible de la misma medida.

En el caso de una simetría respecto de una recta, mediante una traslación podemos suponer que la recta pasa por  $(0, 0)$  y, mediante un giro, que es el eje

horizontal. Entonces la simetría es simplemente  $(x, y) \mapsto (x, -y)$  que es una aplicación lineal de matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que tiene determinante  $-1$ , y concluimos igualmente. Por último, queda el caso de una simetría respecto de un punto que, nuevamente mediante una traslación, podemos suponer que es el  $(0, 0)$ , y entonces la simetría es  $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ , que es también una aplicación lineal, de matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es  $1$ , luego también se conserva la medida. (En realidad, una simetría respecto de un punto es un giro de  $180$  grados, por lo que no hacía falta considerar este caso.) ■

Un último caso de interés es el de las homotecias, es decir, de las aplicaciones

$$f_r(x, y) = (rx, ry),$$

que transforman cada figura en otra “a escala”, es decir, cuyas dimensiones están multiplicadas todas por  $r$ . Se trata de una aplicación lineal de determinante  $r^2$ , luego concluimos que cuando una figura se hace  $r$  veces mayor (o menor), su área se multiplica por  $r^2$ .

Terminamos con una consecuencia sencilla del teorema A.16 que vamos a necesitar:

**Teorema A.18** *El área del paralelogramo determinado por los vértices  $(0, 0)$ ,  $(a, b)$ ,  $(c, d)$ ,  $(a, b) + (c, d)$  es  $|ad - bc|$ .*

DEMOSTRACIÓN: Es fácil ver que el paralelogramo es la imagen de la celda unitaria  $[0, 1] \times [0, 1]$  por la aplicación lineal de matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

■

De aquí se sigue a su vez:

**Teorema A.19** *El área del triángulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(a, b)$ ,  $(c, d)$  es igual a  $(1/2)|ad - bc|$ .*

En efecto, basta tener en cuenta que el área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo del teorema anterior.

**Conjuntos no medibles Jordan** Resulta natural plantearse si existen conjuntos (acotados) no medibles Jordan. La respuesta es afirmativa. Basta considerar

$$A = ([0, 1] \times [0, 1]) \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}), \quad B = ([0, 1] \times [0, 1]) \setminus (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}).$$

Así

$$A \cup B = [0, 1] \times [0, 1], \quad A \cap B = \emptyset.$$

En cierto sentido, podemos decir que ambos conjuntos “ocupan” todo el cuadrado unitario  $[0, 1] \times [0, 1]$ , pero sin “llenarlo”. No es difícil probar que las únicas celdas no vacías contenidas en  $A$  o en  $B$  son puntos, de donde se sigue que  $J_*(A) = J_*(B) = 0$ . Esto basta para concluir que ninguno de los dos es medible, ya que si uno de ellos lo fuera, también lo tendría que ser el otro (porque  $A = ([0, 1] \times [0, 1]) \setminus B$ ), pero ambos tendrían que tener medida 0, y eso implicaría que el cuadrado unidad también tendría medida 0.

No obstante, también podemos calcular  $J^*(A) = J^*(B) = 1$ . La razón es que si fuera, por ejemplo,  $J^*(A) < 1$  (el mismo razonamiento vale para ambos) existiría una figura elemental  $A \subset F$  tal que  $m(F) < 1$ , y podemos tomarla formada por cubos cerrados, pero entonces es fácil probar que  $[0, 1] \times [0, 1] \subset F$  y tenemos una contradicción.

Por lo tanto, la medida de Jordan no nos resuelve el problema de cuál es el área de  $A$  o de  $B$ . Ahora bien, la pregunta correcta no es tanto cuál es su área como cuál queremos que sea su área, pues se trata de conjuntos demasiado abstractos como para que pueda decirse que tienen un área objetivamente determinada en algún sentido intuitivo de la palabra.

Sucede que la medida de Jordan puede extenderse a un anillo de conjuntos sustancialmente mayor que incluye a  $A$  y a  $B$ . Se trata de los conjuntos *medibles Lebesgue*, y la extensión recibe el nombre de *medida de Lebesgue*. Concretamente, sucede que la medida de Lebesgue de estos conjuntos es  $m(A) = 0$  y  $m(B) = 1$ . Ésta asignación resulta ser el convenio más práctico para trabajar con áreas de la forma más cómoda posible. ■

# Índice de Materias

- abscisa de convergencia, 232
  - absoluta, 217
- absolutamente convergente
  - producto, 203
  - serie, 40
- acotado (conjunto), 77
- anillo (de conjuntos), 314
- arco seno, coseno, tangente, 134
- argumento, 121
- arquimediana (propiedad), 2
  
- Basilea (problema de), xxx
- Bernoulli (números de), 155
  
- carácter, 182
- Cauchy
  - producto de, 41
  - sucesión de, 27
- celda, 311
- cerrado (conjunto), 77
- cola, 20
- compacto (conjunto), 77
- complejo (número), 8
- completitud, 3
- condensación (criterio de), 39
- condicionalmente convergente (serie), 41
- conjugado, 9
- contenido, 312
- convergencia
  - absoluta, 40, 203
  - de funciones, 65
  - de productos infinitos, 200
  - de sucesiones, 11
- coseno, 114
  - hiperbólico, 137
- cuerpo, 3
  
- D'Alembert (criterio de), 37
- Dirichlet (serie de), 217
- disco de convergencia, 51
  
- entorno, 61
- Euler
  - número de, 24
  - números de, 157
- Euler-Mascheroni (constante de), 101
- exponencial (función), 88
  
- factorial (función), 215
- figura elemental, 313
- fracción continua, 249
  - simple, 252
- función
  - aritmética, 176
    - completamente multiplicativa, 176
    - multiplicativa, 176
  - dseta
    - de Dedekind, 288
    - de Riemann, 218
  - eta de Dirichlet, 218
  - L de Dirichlet, 235
  
- Jordan (medida de), 321
  
- límite
  - lateral, 70
- Leibniz
  - criterio de, 35
  - serie de, xxix
- límite
  - de funciones, 66
  - de sucesiones, 12
- Liouville (función de), 178
- logaritmo, 90

Machin (fórmula de), 150  
Mangoldt (función de), 172  
medida  
    de Jordan, 320  
    finitamente aditiva, 316  
Möbius  
    fórmula de inversión de, 180  
    función de, 179  
módulo, 6  
  
producto infinito, 199  
punto de acumulación, 65  
  
radian, 122  
radio de convergencia, 51  
reales (números), 3  
  
seno, 114  
    hiperbólico, 137  
serie, 29  
    de Dirichlet, 217  
Stirling (fórmula de), 145  
subsucesión, 20  
suma  
    de Abel, 73  
    de Cesàro, 34  
  
tangente, 128  
Teorema  
    de Bolzano, 74  
    de Dirichlet, 187  
    de Liouville, 275  
    de los valores intermedios, 75  
    de Mertens, 170, 174  
    de Weierstrass, 78  
    fundamental del Álgebra, 79  
  
Wallis (fórmula de), 210  
Weierstrass (criterio de mayoración),  
    61