La trascendencia de e y π

Comenzamos introduciendo unos convenios útiles de notación:

Definición 1 Escribiremos $h^r = r!$, de modo que si $f(z) = \sum_{r=0}^{m} c_r z^r \in \mathbb{C}[z]$, entonces $f(h)$ representará

$$f(h) = \sum_{r=0}^{m} c_r h^r = \sum_{r=0}^{m} c_r r!$$

Igualmente, $f(z+h)$ será el polinomio que resulta de sustituir y^r por $h^r = r!$ en la expresión desarrollada de $f(z+y)$. Concretamente:

$$f(z+y) = \sum_{r=0}^{m} c_r (z+y)^r = \sum_{r=0}^{m} c_r \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} z^{r-k} y^k = \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{r=k}^{m} c_r \binom{r}{k} z^{r-k} \right) y^k,$$

luego

$$f(z+h) = \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{r=k}^{m} c_r \binom{r}{k} z^{r-k} \right) k! = \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{r=k}^{m} \frac{r!}{(r-k)!} c_r z^{r-k} \right) = \sum_{k=0}^{m} f^{k)}(z),$$

donde $f^{k)}(z)$ es la k-ésima derivada formal del polinomio f. Observar que

$$f(z+h) = \sum_{r=0}^{m} c_r (z+h)^r,$$

pues

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{m} c_r (z+h)^r &= \sum_{r=0}^{m} c_r \sum_{k=0}^{m} (z^r)^{k)} = \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{r=0}^{m} c_r z^r \right)^{k)} \\ &= \sum_{k=0}^{m} f^{k)}(z) = f(z+h). \end{aligned}$$

Así mismo,

$$f(0+h) = \sum_{k=0}^{m} f^{k)}(0) = \sum_{r=0}^{m} c_r r! = f(h).$$

Sea

$$u_r(z) = r! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(r+n)!}.$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{|z|^n}{\frac{(r+n)!}{r!}} < \frac{|z|^n}{n!},$$

es claro que la serie converge en todo $\mathbb{C}$ y que $|u_r(z)| < e^{|z|}$. Llamaremos

$$\epsilon_r(z) = \frac{u_r(z)}{e^{|z|}}.$$

Así, $|\epsilon_r(z)| < 1$.

Teorema 2 *Sea* $\phi(z) = \sum_{r=0}^{s} c_r z^r \in \mathbb{C}[z]$. *Sea* $\psi(z) = \sum_{r=0}^{s} c_r \epsilon_r(z) z^r$. *Entonces*

$$e^z \phi(h) = \phi(z+h) + \psi(z) e^{|z|}.$$

Demostración: En primer lugar

$$(z+h)^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} z^k h^{r-k} = \sum_{k=0}^{r} \frac{r!}{k!} z^k = r! \sum_{k=0}^{r} \frac{z^k}{k!},$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} r!e^z - u_r(z)z^r &= r! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} - r! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(r+n)!} z^r = r! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} - r! \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \\ &= r! \sum_{k=0}^{r} \frac{z^k}{k!}, \end{aligned}$$

o sea, $(z+h)^r = r!e^z - u_r(z)z^r$, y por lo tanto

$$e^z h^r = (z+h)^r + u_r(z) z^r = (z+h)^r + e^{|z|} \epsilon_r(z) z^r.$$

Multiplicando por c_r y sumando en r obtenemos la igualdad buscada. ∎

Teorema 3 *Sea $m \geq 2$ y $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Definimos los polinomios F_1 y F_2 mediante:*

$$F_1(x) = \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} f(x), \quad F_2(x) = \frac{x^m}{(m-1)!} f(x).$$

Entonces $F_1(h)$, $F_2(h) \in \mathbb{Z}$, $F_1(h) \equiv f(0) \pmod{m}$ y $F_2(h) \equiv 0 \pmod{m}$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $f(x) = \sum_{r=0}^{r} a_r x^r$, con $a_r \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$F_1(x) = \sum_{r=0}^{s} a_r \frac{x^{r+m-1}}{(m-1)!}, \quad F_1(h) = \sum_{r=0}^{s} a_r \frac{(r+m-1)!}{(m-1)!} \in \mathbb{Z}$$

y m divide a cada sumando excepto quizá al primero, que es $a_0 = f(0)$. Por lo tanto $F_1(h) \equiv f(0) \pmod{m}$. Con F_2 se razona análogamente. ■

Como último preliminar recordemos que $p(x_1, \ldots, x_n) \in A[x_1, \ldots, x_n]$ es un polinomio *simétrico* si para toda permutación σ de las variables se cumple que $p(x_1, \ldots, x_n) = p(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n))$. Los *polinomios simétricos elementales* de n variables son los polinomios $e_0, \ldots, e_n$ tales que e_i es la suma de todos los monomios posibles formados por i variables distintas. Por ejemplo, los polinomios simétricos elementales de tres variables son

$$e_0 = 1, \quad e_1 = x + y + z, \quad e_2 = xy + xz + yz, \quad e_3 = xyz.$$

Vamos a usar los dos resultados siguientes sobre polinomios elementales:

> *Todo polinomio simétrico $p(x_1, \ldots, x_n)$ es de la forma $q(e_1, \ldots, e_n)$, para cierto polinomio $q(x_1, \ldots, x_n)$.*
>
> *Los coeficientes $(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$ son $(-1)^i e_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, para $i = 0, \ldots, n$.*

Teorema 4 *El número e es trascendente.*

DEMOSTRACIÓN: Si e fuera algebraico sería la raíz de un polinomio con coeficientes enteros. Digamos $\sum_{t=0}^{n} c_t e^t = 0$, con $n \geq 1$, $c_t \in \mathbb{Z}$, $c_0 \neq 0$ (si c_0 fuera 0 podríamos dividir entre e y quedarnos con un polinomio menor).

Sea p un primo tal que $p > n$ y $p > |c_0|$. Sea

$$\phi(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}((x-1)(x-2)\cdots(x-n))^p.$$

Por el teorema 2:

$$0 = \sum_{t=0}^{n} c_t e^t \phi(h) = \sum_{t=0}^{n} c_t \phi(t+h) + \sum_{t=0}^{n} c_t \psi(t) e^t = S_1 + S_2.$$

Tomando $m = p$, el teorema 3 nos da que $\phi(h) \in \mathbb{Z}$ y

$$\phi(h) \equiv (-1)^{pn}(n!)^p \pmod{p}.$$

Si $1 \leq t \leq n$, entonces

$$\phi(t+x) = \frac{(x+t)^{p-1}}{(p-1)!}((x+t-1)(x+t-2)\cdots x \cdots (x+t-n))^p,$$

y sacando el factor x queda

$$\phi(t+h) = \frac{x^p}{(p-1)!} f(x),$$

con $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Por el teorema 3 tenemos que $\phi(t+h) \in \mathbb{Z}$ y es un múltiplo de p. Ahora,

$$S_1 = \sum_{t=0}^{n} c_t \phi(t+h) \equiv c_0 \phi(h) \equiv c_0 (-1)^{pn} (n!)^p \not\equiv 0 \pmod{p},$$

ya que $c_0 \neq 0$ y $p > n, |c_0|$. Así pues, $S_1 \in \mathbb{Z}$ y $S_1 \neq 0$, luego $|S_1| \geq 1$. Como $S_1 + S_2 = 0$, lo mismo vale para S_2, es decir, $|S_2| \geq 1$. Por otro lado, sea $\phi(x) = \sum\limits_{r=0}^{s} a_r x^r$. Entonces

$$|\psi(t)| = \left| \sum_{r=0}^{s} a_r \epsilon_r(t) t^r \right| \leq \sum_{r=0}^{s} |a_r| \, |\epsilon_r(t)| t^r \leq \sum_{r=0}^{s} |a_r| t^r.$$

Observemos que $|a_r|$ es el coeficiente de grado r del polinomio

$$\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}((x+1)\cdots(x+n))^p.$$

Basta ver que si b_i es el coeficiente de grado i de $((x-1)\cdots(x-n))^p$, entonces $|b_i|$ es el coeficiente de grado i de $((x+1)\cdots(x+n))^p$, pero

$$\begin{aligned} |b_i| &= |(-1)^{pn-i} e_{np-i}(1,\ldots,n,\ldots,1,\ldots,n)| \\ &= (-1)^{pn-i} e_{np-i}(-1,\ldots,-n,\ldots,-1,\ldots,-n). \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos concluir:

$$|\psi(t)| \leq \sum_{r=0}^{s} |a_r|t^r = \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}((t+1)(t+2)\cdots(t+n))^p,$$

y en definitiva:

$$|\psi(t)| \leq (t+1)(t+2)\cdots(t+n)\frac{(t(t+1)\cdots(t+n))^{p-1}}{(p-1)!}.$$

Pero esta expresión tiende a 0 cuando p tiende a infinito (por la convergencia de la serie de la función exponencial). En consecuencia, tomando p suficientemente grande podemos exigir que $S_2 = \sum_{t=0}^{n} c_t\psi(t)e^t$ cumpla $|S_2| < 1$, cuando hemos demostrado lo contrario para todo p. Esto prueba que e es trascendente. ∎

La trascendencia de π es algo más complicada de probar. Además de los teoremas 2 y 3 necesitaremos otro resultado auxiliar:

Teorema 5 *Sea* $p(x) = dx^m + d_1x^{m-1} + \cdots + d_{m-1}x + d_m \in \mathbb{Z}[x]$, *sean* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ *sus raíces en* $\mathbb{C}$ *y sea* $q(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m]$ *un polinomio simétrico. Entonces* $q(d\alpha_1, \ldots, d\alpha_m) \in \mathbb{Z}$.

Demostración: Claramente

$$d^{m-1}p(x) = (dx)^m + d_1(dx)^{m-1} + dd_2(dx)^{m-2} + \cdots + d^{m-2}d_{m-1}(dx) + d^{m-1}d_m.$$

O sea, $d^{m-1}p(x) = r(dx)$, donde

$$r(x) = x^m + d_1x^{m-1} + dd_2x^{m-2} + \cdots + d^{m-2}d_{m-1}x + d^{m-1}d_m \in \mathbb{Z}[x]$$

es un polinomio mónico y sus raíces son obviamente $d\alpha_1, \ldots, d\alpha_m$. Consecuentemente, $r(x) = (x - d\alpha_1)\cdots(x - d\alpha_m)$ y los coeficientes de $r(x)$ son $(-1)^i e_i(d\alpha_1, \ldots, d\alpha_m)$ para $i = 0, \ldots m$. Así pues, $e_i(d\alpha_1, \ldots, d\alpha_m) \in \mathbb{Z}$ para $i = 1, \ldots, m$.

Por otro lado sabemos que $q(x_1, \ldots, x_m) = r(e_1, \ldots, e_m)$ para cierto polinomio $r(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m]$, luego

$$q(d\alpha_1, \ldots, d\alpha_m) = r(e_1(d\alpha_1, \ldots, d\alpha_m), \ldots, e_m(d\alpha_1, \ldots, d\alpha_m)) \in \mathbb{Z}.$$

∎

Teorema 6 *El número π es trascendente.*

DEMOSTRACIÓN: Si π es algebraico también lo es $i\pi$. Sea

$$dx^m + d_1x^{m-1} + \cdots + d_{m-1}x + d_m \in \mathbb{Z}[x]$$

un polinomio tal que $d \neq 0$ y con raíz $i\pi$. Sean $\omega_1, \ldots, \omega_m$ sus raíces en $\mathbb{C}$. Como una de ellas es $i\pi$ y $e^{i\pi} + 1 = 0$, tenemos que $(1+e^{\omega_1}) \cdots (1+e^{\omega_m}) = 0$, o sea,

$$1 + \sum_{t=1}^{2^m-1} e^{\alpha_t} = 0,$$

donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2^m-1}$ son $\omega_1, \ldots, \omega_m, \omega_1 + \omega_2, \ldots, \omega_{m-1} + \omega_m, \ldots, \omega_1 + \cdots + \omega_m$.

Supongamos que $c - 1$ de ellos son nulos y $n = 2^m - 1 - (c - 1)$ no son nulos. Ordenémoslos como $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 0, \ldots, 0$. Así $c \geq 1$ y

$$c + \sum_{t=1}^{n} e^{\alpha_t} = 0. \tag{1}$$

Notemos lo siguiente:

$$e_i(x_1, \ldots, x_n) = e_i(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0),$$

donde e_i es a la izquierda el polinomio simétrico elemental de n variables y a la derecha el de $2^m - 1$ variables. Por lo tanto

$$e_i(d\alpha_1, \ldots, d\alpha_n) = e_i(d\alpha_1, \ldots, d\alpha_{2^m-1})$$

$$= e_i(d\omega_1, \ldots, d\omega_m, d\omega_1 + d\omega_2, \ldots, d\omega_{m-1} + d\omega_m, \ldots, d\omega_1 + \cdots + d\omega_m).$$

Sea $q_i(x_1, \ldots, x_m) = e_i(x_1, \ldots, x_m, x_1+x_2, \ldots, x_{m-1}+x_m, \ldots, x_1+\cdots+x_m)$.

Claramente se trata de polinomios simétricos con coeficientes enteros y

$$e_i(d\alpha_1, \ldots, d\alpha_n) = q_i(d\omega_1, \ldots, d\omega_m),$$

luego el teorema anterior nos permite afirmar que $e_i(d\alpha_1, \ldots, d\alpha_n) \in \mathbb{Z}$.

Si $s(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ es simétrico, entonces s depende polinómicamente de los e_i, luego $s(d\alpha_1, \ldots, d\alpha_n) \in \mathbb{Z}$. Sea p un primo tal que $p > |d|$, $p > c$, $p > |d^n\alpha_1 \cdots \alpha_n|$. Sea

$$\phi(x) = \frac{d^{np+p-1}x^{p-1}}{(p-1)!}((x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n))^p.$$

Multiplicamos (1) por $\phi(h)$ y aplicamos el teorema 2. Nos queda

$$c\phi(h) + \sum_{t=1}^{n} \phi(\alpha_t + h) + \sum_{t=1}^{n} \psi(\alpha_t) e^{|\alpha_t|} = S_0 + S_1 + S_2 = 0.$$

Ahora,

$$\phi(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} d^{p-1} ((dx - d\alpha_1) \cdots (dx - d\alpha_n))^p.$$

Los coeficientes de $(y - d\alpha_1) \cdots (y - d\alpha_n)$ son polinomios simétricos elementales sobre $d\alpha_1, \ldots, d\alpha_n$, luego son enteros, según hemos visto antes. De aquí se sigue que también son enteros los coeficientes de $(dx - d\alpha_1) \cdots (dx - d\alpha_n)$, con lo que

$$\phi(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \sum_{r=0}^{np} g_r x^r, \quad \text{donde cada } g_r \in \mathbb{Z}.$$

Por el teorema 3 tenemos que $\phi(h) \in \mathbb{Z}$ y $\phi(h) \equiv g_0 \pmod{p}$. Concretamente, $g_0 = (-1)^{pn} d^{p-1} (d\alpha_1 \cdots d\alpha_n)^p$, luego por la elección de p resulta que $p \nmid g_0$ (aquí es importante que $d\alpha_1 \cdots d\alpha_n \in \mathbb{Z}$ porque es el término independiente de $(y - d\alpha_1) \cdots (y - d\alpha_n)$. Como $p \nmid c$, resulta que $p \nmid S_0 = c\phi(h)$.

Nos ocupamos ahora de S_1. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\phi(\alpha_t + x) &= \frac{d^{np+p-1} (\alpha_t + x)^{p-1}}{(p-1)!} ((x + \alpha_t - \alpha_1) \cdots (x + \alpha_t - \alpha_{t-1}) \\
&\qquad x (x + \alpha_t - \alpha_{t+1}) \cdots (x + \alpha_t - \alpha_n))^p \\
&= \frac{x^p}{(p-1)!} d^p (d\alpha_t + dx)^{p-1} ((dx + d\alpha_t - d\alpha_1) \cdots (dx + d\alpha_t - d\alpha_{t-1}) \\
&\qquad (dx + d\alpha_t - d\alpha_{t+1}) \cdots (dx + d\alpha_t - d\alpha_n))^p \\
&= \frac{x^p}{(p-1)!} \sum_{r=0}^{np-1} f_{rt} x^r,
\end{aligned}$$

donde $f_{rt} = f_r(d\alpha_t, d\alpha_1, \ldots, d\alpha_{t-1}, d\alpha_{t+1}, \ldots, d\alpha_n)$ y f_r es un polinomio simétrico respecto a todas las variables excepto la primera, con coeficientes enteros y que no depende de t. En efecto, consideramos el polinomio

$$(y - (-x_1))^{p-1} \Big((y - (x_2 - x_1)) \cdots ((y - (x_n - x_1)) \Big)^p.$$

Sus coeficientes son los polinomios simétricos elementales actuando sobre $-x_1$ ($p-1$ veces) y sobre $x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_1$ (p veces cada uno), luego son polinomios simétricos en $x_2, \ldots, x_n$. Digamos que el polinomio es

$$\sum_{r=0}^{np-1} s_r(x_1, \ldots, x_n) y^r.$$

Entonces

$$\phi(\alpha_t + x) = \frac{x^p}{(p-1)!} \sum_{r=0}^{np-1} d^p s_r(d\alpha_t, d\alpha_1, \ldots, d\alpha_{t-1}, d\alpha_{t+1}, \ldots, d\alpha_n) d^r x^r,$$

es decir, $f_r = d^{r+p} s_r(x_1, \ldots, x_n)$. Por lo tanto,

$$\sum_{t=1}^{n} \phi(\alpha_t + x) = \frac{x^p}{(p-1)!} \sum_{r=0}^{np-1} \left(\sum_{t=1}^{n} f_{rt} \right) x^r,$$

pero

$$\sum_{t=1}^{n} f_{rt} = \sum_{t=1}^{n} f_r(d\alpha_t, d\alpha_1, \ldots, d\alpha_{t-1}, d\alpha_{t+1}, \ldots, d\alpha_n),$$

y el polinomio $\sum\limits_{t=1}^{n} f_r(x_t, x_1, \ldots, x_{t-1}, x_{t+1}, \ldots x_n)$ es simétrico (respecto a todas las variables), luego $F_r = \sum\limits_{t=1}^{n} f_{rt}$ depende simétricamente de $d\alpha_1, \ldots, d\alpha_n$ y por lo tanto es un entero. Así pues,

$$\sum_{t=1}^{n} \phi(\alpha_t + x) = \frac{x^p}{(p-1)!} \sum_{r=0}^{np-1} F_r x^r,$$

y por el teorema 3 concluimos que $S_1 = \sum\limits_{t=1}^{n} \phi(\alpha_t + h) \in \mathbb{Z}$ y es múltiplo de p (aquí hemos usado que $(\phi_1 + \phi_2)(h) = \phi_1(h) + \phi_2(h)$, lo cual es evidente).

Esto nos da que $S_0 + S_1 \in \mathbb{Z}$ y no es un múltiplo de p. En particular $|S_0 + S_1| \geq 1$ y, por la ecuación $S_0 + S_1 + S_2 = 0$ resulta que también $S_2 \in \mathbb{Z}$ y $|S_2| \geq 1$. Como en el caso de e, ahora probaremos lo contrario.

Sea $\psi(x) = \sum\limits_{r=0}^{np+p-1} c_r \epsilon_r(x) x^r$. Entonces

$$\begin{aligned} |\psi(x)| &= \left| \sum_{r=0}^{np+p-1} c_r \epsilon_r(x) x^r \right| \leq \sum_{r=0}^{np+p-1} |c_r| \, |x^r| \\ &\leq \frac{|d|^{np+p-1} |x|^{p-1}}{(p-1)!} ((|x| + |\alpha_1|) \cdots (|x| + |\alpha_n|))^p \end{aligned}$$

(por el mismo razonamiento que en la prueba de la trascendencia de e) y así

$$|\psi(x)| \leq \frac{M^{2np+2p-2}}{(p-1)!},$$

donde M es una cota que no depende de p.

Como $M^{2np+2p-2} \leq M^{2np+2p} = M^{(2n+2)p} = K^p = KK^{p-1}$, tenemos que

$$|\psi(x)| \leq K\,\frac{K^{p-1}}{(p-1)!}$$

y la sucesión converge a 0 cuanto p tiende a infinito, pues la serie converge a Ke^K. Esto para cada x fijo. Tomando un primo p suficientemente grande podemos exigir que $|S_2| \leq \sum_{t=1}^{n} |\psi(\alpha_t)|e^{|\alpha_t|} < 1$, con lo que llegamos a una contradicción. ∎