EL TEOREMA DE CANTOR-BERNSTEIN Y LA COMPARABILIDAD DE LOS CONJUNTOS

J. CLIMENT VIDAL

Abstract. Una vez definidas las nociones necesarias de la teoría de conjuntos ordenados, demostramos el teorema de punto fijo de Tarski para los retículos completos, a partir del cual obtenemos el teorema de Cantor-Bernstein. Por último, usando el lema de Zorn-Kuratowski, demostramos el teorema de comparabilidad.

Contents

1. Conjuntos ordenados y retículos completos.

En esta sección presentamos aquellas nociones de la teoría de conjuntos ordenados que son imprescindibles para demostrar el teorema de Cantor-Bernstein.

Definition 1. Un *orden estricto* sobre un conjunto A es una relación binaria $<$ sobre A que cumple las siguientes condiciones:

(1) $\forall x \in A \; (x \not< x)$ (Irreflexividad);
(2) $\forall x, y, z \in A \; ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$ (Transitividad).

Un *conjunto estrictamente ordenado* es un par $\mathbf{A} = (A, <)$ en el que A es un conjunto y $<$ un orden estricto sobre A.

Definition 2. Un *orden* sobre un conjunto A es una relación binaria $\leq$ sobre A que cumple las siguientes condiciones:

(1) $\forall x \in A \; (x \leq x)$ (Reflexividad);
(2) $\forall x, y \in A \; ((x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y)$ (Antisimetría);
(3) $\forall x, y, z \in A \; ((x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z)$ (Transitividad).

Un *conjunto ordenado* es un par $\mathbf{A} = (A, \leq)$ en el que A es un conjunto y $\leq$ un orden sobre A.

Observemos que los conceptos acabados de definir son equivalentes, ya que si $<$ es un orden estricto sobre un conjunto A, entonces $< \cup \Delta_A$ es un orden sobre A y, recíprocamente, si $\leq$ es un orden sobre A, entonces $\leq - \Delta_A$ es un orden estricto sobre A.

Si $\mathbf{A} = (A, \leq)$ es un conjunto ordenado y X una parte de A, entonces el par ordenado $(X, \leq \cap (X \times X))$, denotado también como $\mathbf{X} = (X, \leq)$, es un conjunto ordenado.

Date: February 24, 2008.
1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary: ; Secondary: .

Definition 3. Un *orden lineal* sobre un conjunto A es una relación binaria $<$ sobre A que cumple las siguientes condiciones:

(1) $\forall x \in A\ (x \not< x)$ (Irreflexividad);
(2) $\forall x, y \in A\ (x \neq y \rightarrow (x < y \vee y < x))$ (Disyuntividad);
(3) $\forall x, y, z \in A\ ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$ (Transitividad)

Un *conjunto linealmente ordenado* es un par $\mathbf{A} = (A, <)$ en el que A es un conjunto y $<$ un orden lineal sobre A.

Un conjunto linealmente ordenado se puede definir alternativa, pero equivalentemente, como un par $(A, \leq)$ en el que A es un conjunto y $\leq$ una relación binaria sobre A que cumple las siguientes condiciones:

(1) $\forall x \in A\ (x \leq x)$ (Reflexividad);
(2) $\forall x, y \in A\ ((x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y)$ (Antisimetría);
(3) $\forall x, y, z \in A\ ((x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z)$ (Transitividad);
(4) $\forall x, y \in A\ (x \leq y \vee y \leq x)$ (Disyuntividad).

Debido a que en la demostración del teorema de comparabilidad de los conjuntos, hemos de hacer uso del axioma de elección, bajo la forma del lema de Zorn-Kuratowski, y en este último se mencionan las cadenas, o partes de un conjunto ordenado que están linealmente ordenadas, los supremos y los maximales, definimos a continuación tales conceptos.

Definition 4. Sea $\mathbf{A} = (A, \leq)$ un conjunto ordenado. Un elemento a de A es el *máximo* de $(A, \leq)$ precisamente si es posterior a todos los elementos de A, i.e., si para cada $x \in A$, $x \leq a$. El *mínimo* se define dualmente. Un elemento a de A es *maximal* en $(A, \leq)$ precisamente si, para cada $x \in A$, si $a \leq x$, entonces $a = x$. El concepto de *minimal* se define dualmente. Si X es una parte de A, una *cota superior* de X en $(A, \leq)$ es un $a \in A$ tal que, para cada $x \in X$, $x \leq a$, al conjunto de las cotas superiores de X en $(A, \leq)$ lo denotamos por $\mathrm{Ub}_{(A,\leq)}(X)$. El concepto de *cota inferior* se define dualmente. El *supremo* de una parte X de A es el mínimo del conjunto ordenado $(\mathrm{Ub}_{(A,\leq)}(X), \leq)$, siendo $\leq$ la restricción del orden sobre A a la parte $\mathrm{Ub}_{(A,\leq)}(X)$. El concepto de *ínfimo* se define dualmente. Por último, una cadena del conjunto ordenado $(A, \leq)$ es una parte C de A tal que $(C, \leq)$ es un conjunto linealmente ordenado, siendo $\leq$ la restricción del orden sobre A a la parte C.

También se entiende por cadena de un conjunto ordenado $(A, \leq)$ cualquier familia $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ en A tal que el subconjunto $\mathrm{Im}((x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) = \{\, a \in A \mid \exists \lambda \in \Lambda\, (a = x_\lambda) \,\}$ de A sea una cadena del conjunto ordenado $(A, \leq)$. De modo que la familia $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ en A es una cadena si y sólo si, para cada $\lambda, \mu \in \Lambda$, $x_\lambda \leq x_\mu$ o $x_\mu \leq x_\lambda$.

Si a es el máximo del conjunto ordenado $(A, \leq)$, entonces a es el único elemento maximal de $(A, \leq)$. Ahora bien, un conjunto ordenado $(A, \leq)$ puede tener un único maximal, pero no tener ningún máximo. Lo mismo se puede decir del mínimo y de los minimales.

Observemos que un $a \in A$ es maximal en $(A, \leq)$ si y sólo si no existe un $x \in A$ tal que $a < x$, i.e., tal que $a \leq x$ pero $a \neq x$.

Lema de Zorn-Kuratowski. *Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado. Si $A \neq \varnothing$ y toda cadena no vacía de $(A, \leq)$ tiene un supremo en $(A, \leq)$, entonces $(A, \leq)$ tiene un maximal.*

Definimos a continuación las aplicaciones isótonas y los isomorfismos entre los conjuntos ordenados. Recordemos que una vez definidos los objetos de interés, en este caso los conjuntos ordenados, se deben definir los morfismos entre tales objetos, ya que lo que sea una entidad matemática viene dado por su interacción con las demás entidades matemáticas.

Definition 5. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos conjuntos ordenados. Una *aplicación isótona* de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ es un triplo ordenado $(\mathbf{A}, \varphi, \mathbf{B})$, abreviado como φ y denotado por $\varphi\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, en el que φ es una aplicación de A en B tal que

$$\forall x, y \in A\,(\, x \leq y \to \varphi(x) \leq \varphi(y)\,).$$

Un *isomorfismo* de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ es un triplo ordenado $(\mathbf{A}, \varphi, \mathbf{B})$, abreviado como φ y denotado por $\varphi\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, en el que φ es una aplicación biyectiva de A en B tal que

$$\forall x, y \in A\,(\, x \leq y \leftrightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)\,).$$

Definition 6. Sea $\mathbf{A}$ un conjunto ordenado. Decimos que $\mathbf{A}$ es un conjunto *reticulado completo*, o un *retículo completo*, si tiene máximo, mínimo y para cada subconjunto no vacío X de A existe tanto el supremo de X, denotado por $\bigvee X$, como el ínfimo de X, denotado por $\bigwedge X$.

Proposition 1. *Sea* $\mathbf{A}$ *un conjunto ordenado no vacío. Entonces son equivalentes:*

(1) $\mathbf{A}$ *es un retículo completo.*
(2) $\mathbf{A}$ *tiene un máximo y todo subconjunto no vacío de A tiene un ínfimo en* $\mathbf{A}$.
(3) $\mathbf{A}$ *tiene un mínimo y todo subconjunto no vacío de A tiene un supremo en* $\mathbf{A}$.

Proof. Nos limitamos a demostrar la equivalencia entre 1 y 2, ya que la demostración de la equivalencia entre 1 y 3 es idéntica. Es evidente que si se cumple 1, entonces se cumple 2. Recíprocamente, supongamos 2. Entonces dado un subconjunto no vacío X de A, el supremo de X en $\mathbf{A}$ es:

$$\bigvee X = \bigwedge \{\, a \in A \mid \forall x \in X\,(x \leq a)\,\}.$$

Además, el mínimo es el ínfimo de A. □

Si A es un conjunto, entonces $\mathbf{Sub}(A) = (\mathrm{Sub}(A), \subseteq)$ es un retículo completo.

Estudiamos a continuación los conceptos de sección inicial y final de un conjunto dotado de una relación binaria. Demostraremos que el conjunto de las secciones iniciales de un tal conjunto, ordenado por la inclusión, es un retículo completo.

Definition 7. Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Decimos que un subconjunto X de A es una *R-sección inicial* de A, si junto a un $x \in X$ contiene al conjunto $\downarrow_R x = \{\, y \in A \mid (y, x) \in R\,\}$ de todos los *R-predecesores* de x, i.e., si

$$\forall x \in X\,(\, \downarrow_R x \subseteq X\,),$$

o, lo que es equivalente, ya que $R^{-1}[X] = \bigcup_{x \in X} \downarrow_R x$, si

$$R^{-1}[X] \subseteq X.$$

Denotamos por $\mathrm{Sec}_R(A)$ el conjunto de todas las R-secciones iniciales de A.

Proposition 2. *El conjunto* $\mathrm{Sec}_R(A)$*, de todas las R-secciones iniciales de A, es un sistema de clausura completamente aditivo sobre A, i.e., tiene las siguientes propiedades:*

(1) $A \in \mathrm{Sec}_R(A)$.
(2) $\forall \mathcal{X} \subseteq \mathrm{Sec}_R(A)\,(\, \mathcal{X} \neq \varnothing \to \bigcap \mathcal{X} \in \mathrm{Sec}_R(A)\,)$.
(3) $\forall \mathcal{X} \subseteq \mathrm{Sec}_R(A)\,(\, \bigcup \mathcal{X} \in \mathrm{Sec}_R(A)\,)$.

Proof. □

Corollary 1. *Sea A un conjunto, R una relación binaria en A y $X \subseteq A$. Entonces hay una mínima R-sección inicial de A que contiene a X.*

Proof. Es suficiente considerar la intersección del conjunto

$$\{\, Y \in \mathrm{Sec}_R(A) \mid X \subseteq Y \,\}.$$

□

Definition 8. Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Entonces denotamos por C_R el operador clausura sobre A, canónicamente asociado al sistema de clausura completamente aditivo $\mathrm{Sec}_R(A)$, que asigna a cada subconjunto X de A, $\mathrm{C}_R(X)$, la mínima R-sección inicial de A que contiene a X, a la que denominamos el *cierre inicial* de X relativo a R. En particular, cuando $X = \{x\}$, con $x \in A$, al cierre inicial de $\{x\}$ lo denotamos, para abreviar, por $\mathrm{C}_R(x)$, y lo denominamos también, la R-sección inicial *principal* determinada por x.

Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Demuéstrese que el operador C_R, definido como:

$$\mathrm{C}_R \begin{cases} \mathrm{Sub}(A) & \longrightarrow \mathrm{Sub}(A) \\ X & \longmapsto \bigcap\{\, Y \in \mathrm{Sec}_R(A) \mid X \subseteq Y \,\} \end{cases}$$

tiene las siguientes propiedades:

1. (1) $\mathrm{Im}(\mathrm{C}_R) \subseteq \mathrm{Sec}_R(A)$.
2. (2) $\{\, X \in \mathrm{Sub}(A) \mid X = \mathrm{C}_R(X) \,\} = \mathrm{Sec}_R(A)$.
3. (3) C_R es extensivo o inflacionario, i.e., para cada $X \in \mathrm{Sub}(A)$, $X \subseteq \mathrm{C}_R(X)$.
4. (4) C_R es isótono, i.e., para cada $X, Y \in \mathrm{Sub}(A)$, si $X \subseteq Y$, entonces se cumple que $\mathrm{C}_R(X) \subseteq \mathrm{C}_R(Y)$.
5. (5) C_R es idempotente, i.e., para cada $X \in \mathrm{Sub}(A)$, $\mathrm{C}_R(X) = \mathrm{C}_R^2(X)$.
6. (6) C_R es completamente aditivo, i.e., para cada $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Sub}(A)$, se cumple que $\mathrm{C}_R(\bigcup \mathcal{X}) = \bigcup_{X \in \mathcal{X}} \mathrm{C}_R(X)$.

Proposition 3. *Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Entonces, para cada $x \in A$, $\mathrm{C}_R(x) = \{x\} \cup \bigcup_{y \in \downarrow_R x} \mathrm{C}_R(y)$.*

Proof. □

Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Demuéstrese que si R es transitiva, entonces, para cada $x \in A$, se cumple que

$$\mathrm{C}_R(x) = \Downarrow_R x,$$

siendo $\Downarrow_R x = \{\, a \in A \mid (a, x) \in R \vee a = x \,\}$.

Naturalmente, considerando la relación R^{-1}, obtenemos la noción dual de la de R-sección inicial de A, que es la de R-sección final de A.

Definition 9. Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Decimos de un subconjunto X de A que es una *R-sección final* de A, si junto a un $x \in X$ contiene al conjunto $\uparrow_R x = \{\, y \in A \mid (x, y) \in R \,\}$ de todos los *R-sucesores* de x, i.e., si

$$\forall x \in X \,(\, \uparrow_R x \subseteq X \,),$$

o, lo que es equivalente, ya que $R[X] = \bigcup_{x \in X} \uparrow_R x$, si

$$R[X] \subseteq X.$$

Denotamos por $\mathrm{Sec}_{R^{-1}}(A)$ el conjunto de todas las R-secciones finales de A.

Proposition 4. *El conjunto $\mathrm{Sec}_{R^{-1}}(A)$, de todas las R-secciones finales de A, es un sistema de clausura completamente aditivo sobre A, i.e., tiene las siguientes propiedades:*

1. (1) $A \in \mathrm{Sec}_{R^{-1}}(A)$.
2. (2) $\forall \mathcal{X} \subseteq \mathrm{Sec}_{R^{-1}}(A) \,(\, \mathcal{X} \neq \varnothing \to \bigcap \mathcal{X} \in \mathrm{Sec}_{R^{-1}}(A) \,)$.
3. (3) $\forall \mathcal{X} \subseteq \mathrm{Sec}_{R^{-1}}(A) \,(\, \bigcup \mathcal{X} \in \mathrm{Sec}_{R^{-1}}(A) \,)$.

Proof. □

Corollary 2. *Sea A un conjunto, R una relación binaria en A y $X \subseteq A$. Entonces hay una mínima R-sección final de A que contiene a X.*

Proof. Es suficiente considerar la intersección del conjunto

$$\{\, Y \in \mathrm{Sec}_{R^{-1}}(A) \mid X \subseteq Y \,\}.$$

□

Definition 10. Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Entonces denotamos por $\mathrm{C}_{R^{-1}}$ el operador clausura sobre A, canónicamente asociado al sistema de clausura completamente aditivo, $\mathrm{Sec}_{R^{-1}}(A)$, que asigna a cada subconjunto X de A, $\mathrm{C}_{R^{-1}}(X)$, la mínima R-sección final de A que contiene a X, a la que denominamos el *cierre final* de X relativo a R. En particular, cuando $X = \{x\}$, con $x \in A$, al cierre final de $\{x\}$ lo denotamos, para abreviar, por $\mathrm{C}_{R^{-1}}(x)$, y lo denominamos también, la R-sección final *principal* determinada por x.

Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Demuéstrese que el operador $\mathrm{C}_{R^{-1}}$, definido como:

$$\mathrm{C}_{R^{-1}} \begin{cases} \mathrm{Sub}(A) \longrightarrow \mathrm{Sub}(A) \\ \quad X \quad\ \longmapsto \bigcap\{\, Y \in \mathrm{Sec}_{R^{-1}}(A) \mid X \subseteq Y \,\} \end{cases}$$

tiene las siguientes propiedades:

(1) $\mathrm{Im}(\mathrm{C}_{R^{-1}}) \subseteq \mathrm{Sec}_{R^{-1}}(A)$.
(2) $\{\, X \in \mathrm{Sub}(A) \mid X = \mathrm{C}_{R^{-1}}(X) \,\} = \mathrm{Sec}_{R^{-1}}(A)$.
(3) $\mathrm{C}_{R^{-1}}$ es extensivo o inflacionario, i.e., para cada $X \in \mathrm{Sub}(A)$, $X \subseteq \mathrm{C}_{R^{-1}}(X)$.
(4) $\mathrm{C}_{R^{-1}}$ es isótono, i.e., para cada $X, Y \in \mathrm{Sub}(A)$, si $X \subseteq Y$, entonces se cumple que $\mathrm{C}_{R^{-1}}(X) \subseteq \mathrm{C}_{R^{-1}}(Y)$.
(5) $\mathrm{C}_{R^{-1}}$ es idempotente, i.e., para cada $X \in \mathrm{Sub}(A)$, $\mathrm{C}_{R^{-1}}(X) = \mathrm{C}^2_{R^{-1}}(X)$.
(6) $\mathrm{C}_{R^{-1}}$ es completamente aditivo, i.e., para cada $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Sub}(A)$, se cumple que $\mathrm{C}_{R^{-1}}(\bigcup \mathcal{X}) = \bigcup_{X \in \mathcal{X}} \mathrm{C}_{R^{-1}}(X)$.

Proposition 5. *Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Entonces, para cada $x \in A$, $\mathrm{C}_{R^{-1}}(x) = \{x\} \cup \bigcup_{y \in \uparrow_R x} \mathrm{C}_{R^{-1}}(y)$.*

Proof. □

Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Demuéstrese que si R es transitiva, entonces, para cada $x \in A$, se cumple que

$$\mathrm{C}_{R^{-1}}(x) = \Uparrow_R x,$$

siendo $\Uparrow_R x = \{\, a \in A \mid (x, a) \in R \vee a = x \,\}$.

Proposition 6. *Si $\mathbf{A} = (A \leq)$ es un conjunto ordenado, entonces los conjuntos ordenados $\mathrm{Sec}_{\leq}(A)$ y $\mathrm{Sec}_{\geq}(A)$ son retículos completos. Además, $\mathbf{A}$ se puede encajar en el reticulo completo $\mathrm{Sec}_{\leq}(A)$, mediante la aplicación isótona inyectiva que asigna a un $x \in A$, $\Downarrow_{\leq} x$. Por último, la formación del complementario respecto de A es una involución, anti-isomorfismo de cuadrado identidad, del retículo completo $\mathrm{Sec}_{\leq}(A)$ en el retículo completo $\mathrm{Sec}_{\geq}(A)$.*

Proof. □

2. El teorema de Cantor-Bernstein.

Theorem 1 (Tarski). *Si* $\mathbf{A}$ *es un retículo completo, entonces todo endomorfismo de* $\mathbf{A}$ *tiene un punto fijo.*

Proof. Sea $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ un endomorfismo del retículo completo $\mathbf{A}$. Queremos demostrar que f tiene al menos un punto fijo, i.e., que existe un $a \in A$ tal que $f(a) = a$.

Sea $A_f = \{\, x \in A \mid x \leq f(x) \,\}$. Se cumple que A_f no es vacío, porque, denotando por 0 el mínimo de $\mathbf{A}$, tenemos que $0 \leq f(0)$, i.e., $0 \in A_f$. Sea $a = \bigvee A_f$ el supremo de A_f. Vamos a demostrar que $f(a) = a$, para lo cual es suficiente que demostremos que $a \leq f(a)$ y que $f(a) \leq a$.

Se cumple que $a \leq f(a)$. Para demostrarlo, ya que a es el supremo de A_f, es suficiente que demostremos que $f(a)$ es una cota superior de A_f, i.e., que, para cada $x \in A_f$, $x \leq f(a)$. Sea $x \in A_f$, entonces $x \leq a$, porque a es cota superior de A_f, luego, por ser f isótona, $f(x) \leq f(a)$, pero, ya que $x \in A_f$, $x \leq f(x)$, por lo tanto, por transitividad, $x \leq f(a)$, así que $a \leq f(a)$.

Se cumple que $f(a) \leq a$. Para demostrarlo es suficiente que demostremos que $f(a) \in A_f$, i.e., que $f(a) \leq f(f(a))$. Ahora bien, $a \leq f(a)$, luego, por ser f isótona, $f(a) \leq f(f(a))$, así que $f(a) \in A_f$, de donde, por ser a cota superior de A_f, $f(a) \leq a$.

Podemos pués afirmar que $a = f(a)$. □

Proposition 7 (Cohn). *Sean* $(A, \leq)$ *y* $(B, \leq)$ *dos conjuntos ordenados tales que* $(A, \leq)$ *sea isomorfo a una sección inicial de* $(B, \leq)$ *(con el orden inducido) y* $(B, \leq)$ *sea isomorfo a una sección final de* $(A, \leq)$ *(con el orden inducido). Entonces hay una biyección* $f\colon A \longrightarrow B$ *tal que, para cada* $x, y \in A$*, si* $x < y$*, entonces no ocurre que* $f(y) \leq f(x)$*.*

Proof. Sea $g\colon (A, \leq) \longrightarrow (B_0, \leq)$ un isomorfismo de $(A, \leq)$ en $(B_0, \leq)$, siendo B_0 una sección inicial de $(B, \leq)$, y $h\colon (B, \leq) \longrightarrow (A_0, \leq)$ un isomorfismo de $(B, \leq)$ en $(A_0, \leq)$, siendo A_0 una sección final de $(A, \leq)$. Definimos una endoaplicación $\theta_{g,h}$ del conjunto $\mathrm{Sec}_{\leq}(A)$ de las secciones iniciales del conjunto ordenado $(A, \leq)$ como:

$$\theta_{g,h} \begin{cases} \mathrm{Sec}_{\leq}(A) & \longrightarrow \mathrm{Sec}_{\leq}(A) \\ \quad X & \longmapsto \complement_A h[\complement_B g[X]] \end{cases}$$

Se cumple que, para cada sección inicial X de $(A, \leq)$, $\theta_{g,h}(X)$ es una sección inicial de $(A, \leq)$. Para demostrarlo hemos de llevar a cabo las siguientes tareas:

(1) Demostrar que $g[X]$, que es parte de $B_0 \in \mathrm{Sec}_{\leq}(B)$, es una sección inicial de $(B, \leq)$.
(2) Demostrar que $\complement_B g[X]$ es una sección final de $(B, \leq)$.
(3) Demostrar que $h[\complement_B g[X]]$, que es parte de $A_0 \in \mathrm{Sec}_{\geq}(A)$, es una sección final de $(A, \leq)$.
(4) Demostrar que $\complement_A h[\complement_B g[X]]$ es una sección inicial de $(A, \leq)$.

Pero es suficiente que realizemos las dos primeras.

Se cumple que $g[X]$ es una sección inicial de $(B, \leq)$, porque dado un $x \in X$ y un $b \in B$ tales que $b \leq g(x)$, ya que $g[X]$ es parte de B_0 y B_0 sección inicial de $(B, \leq)$, $b \in B_0$, luego, por ser g sobreyectiva, hay un $a \in A$ tal que $b = g(a)$, de modo que $g(a) \leq g(x)$, por lo tanto, por ser g isomorfismo, $a \leq x$, así que $a \in X$, por ser X sección inicial de $(A, \leq)$, de donde $g(a) = b \in g[X]$. Es evidente que el complementario de una sección inicial es una sección final, luego $\complement_B g[X]$ es una sección final de $(B, \leq)$.

Podemos por lo tanto asegurar que $\theta_{g,h}$ está bien definida. Además, $\theta_{g,h}$ es isótona. Así que, en virtud del teorema de Tarski, el endomorfismo $\theta_{g,h}$ tiene un punto fijo, i.e., existe una sección inicial A_1 de $(A, \leq)$ tal que

$$\theta_{g,h}(A_1) = \complement_A h[\complement_B g[A_1]] = A_1.$$

Convenimos que $B_1 = g[A_1]$, con lo que $\complement_A A_1 = h[\complement_B B_1]$. Observemos que $B_1 = g[A_1] \subseteq B_0$ y que es una sección inicial de $(B, \leq)$, y que $\complement_A A_1 = h[\complement_B B_1] \subseteq A_0$ y que es una sección final de $(A, \leq)$

Sea ahora $f\colon A \longrightarrow B$ la aplicación definida como:

$$f \begin{cases} A \longrightarrow B \\ a \longmapsto f(a) = \begin{cases} g(a), & \text{si } a \in A_1; \\ h^{-1}(a), & \text{si } a \in \complement_A A_1. \end{cases} \end{cases}$$

La aplicación f es sobreyectiva porque

$$\begin{aligned} f[A] &= f[A_1 \cup \complement_A A_1] \\ &= g[A_1] \cup h^{-1}[\complement_A A_1] \\ &= g[A_1] \cup h^{-1}[h[\complement_B B_1]] \\ &= B_1 \cup \complement_B B_1 \\ &= B \end{aligned}$$

La aplicación f es inyectiva porque si $x, y \in A$ son tales que $f(x) = f(y)$, entonces, o bien $x, y \in A_1$ o bien $x, y \in \complement_A A_1$, pero ni puede ocurrir que $x \in A_1$ e $y \in \complement_A A_1$, ni tampoco que $y \in A_1$ y $x \in \complement_A A_1$. En efecto, si $x \in A_1$ e $y \in \complement_A A_1$, entonces

$$f(x) = g(x) \in g[A_1] = B_1 \quad \text{y} \quad f(y) = h^{-1}(y),$$

pero $y \in \complement_A A_1 = h[\complement_B B_1]$, así que $y = h(b)$, para un $b \in \complement_B B_1$, luego

$$f(y) = h^{-1}(y) = h^{-1}(h(b)) = b \in \complement_B B_1,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto no puede ocurrir que $x \in A_1$ e $y \in \complement_A A_1$. Del mismo modo se demuestra que tampoco puede ocurrir que $y \in A_1$ y $x \in \complement_A A_1$. Ahora bien, si $x, y \in A_1$, entonces $x = y$, porque g es inyectiva, y si $x, y \in \complement_A A_1$, entonces $x = y$, porque h^{-1} es inyectiva.

Demostramos por último que para cada $x, y \in A$, si $x < y$, entonces no ocurre que $f(y) \leq f(x)$, i.e., ni $f(y) < f(x)$ ni $f(y) = f(x)$. Sean $x, y \in A$ tales que $x < y$, entonces $f(y) \neq f(x)$, ya que si $f(y) = f(x)$, tendríamos que $x = y$, por ser f inyectiva, que entra en contradicción con que $x < y$. Falta demostrar que, para cada $x, y \in A$, si $x < y$, entonces no ocurre que $f(y) < f(x)$.

Supongamos que existan $x, y \in A$ tales que $x < y$ pero que $f(y) < f(x)$.

(1) Si $y \in A_1$, entonces $x \in A_1$ y $f(x) = g(x) < g(y) = f(y)$, que entra en contradicción con que $f(y) < f(x)$.
(2) Si $x \in \complement_A A_1$, entonces $y \in \complement_A A_1$, luego de $f(y) < f(x)$ obtenemos que $h(f(y)) < h(f(x))$, pero, en este caso, $f(y) = h^{-1}(y)$ y $f(x) = h^{-1}(x)$, luego $h(h^{-1}(y)) < h(h^{-1}(x))$, i.e., $y < x$, que entra en contradicción con que $x < y$.
(3) Por último, si $x \in A_1$ e $y \in \complement_A A_1$, entonces $f(x) \in B_1$ y $f(y) \in \complement_B B_1$, pero al ser $\complement_B B_1$ una sección final de $(B, \leq)$ y cumplirse que $f(y) < f(x)$, $f(x) \in \complement_B B_1$, que entra en contradicción con que $f(x) \in B_1$.

El caso en que $x \in \complement_A A_1$ e $y \in A_1$, no puede darse. □

A partir de la última proposición obtenemos el teorema de Cantor-Bernstein.

Theorem 2. *Si $A \leq B$ y $B \leq A$, entonces $A \cong B$.*

Proof. Se cumple que (A, Δ_A) y (B, Δ_B) son conjuntos ordenados. Además, las secciones iniciales y finales de (A, Δ_A) coinciden con los subconjuntos de A y las secciones iniciales y finales de (B, Δ_B) con los subconjuntos de B, luego (A, Δ_A) es isomorfo a una sección inicial de (B, Δ_B) y (B, Δ_B) lo es a una sección final de (A, Δ_A). Por lo tanto hay una biyección de A en B. □

3. El teorema de comparabilidad.

Demostramos en esta sección que dos conjuntos cualesquiera siempre son comparables mediante la relación de dominación.

Theorem 3. *Si A y B son dos conjuntos, entonces A está dominado por B o B está dominado por A, i.e., existe una aplicación inyectiva de A en B o existe una aplicación inyectiva de B en A.*

Proof. Sobre el conjunto $\bigcup_{\substack{X \subseteq A,\\ Y \subseteq B}} \mathrm{Iso}(X, Y)$, de los isomorfismos entre partes de A y de B consideremos la relación binaria $\leq$ que consta de los pares (f, f'), con $f \in \mathrm{Iso}(X, Y)$ y $f' \in \mathrm{Iso}(X', Y')$, para algunos subconjuntos X, X' de A y algunos subconjuntos Y, Y' de B, tales que:

(1) $X \subseteq X'$.
(2) $Y \subseteq Y'$.
(3) El diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{in}_{X,X'}"'] & Y \arrow[d, "\mathrm{in}_{Y,Y'}"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \end{tikzcd}$$

conmuta.

Entonces $(\bigcup_{\substack{X \subseteq A,\\ Y \subseteq B}} \mathrm{Iso}(X, Y), \leq)$ es un conjunto ordenado. Se cumple que no es vacío porque $\mathrm{Iso}(\varnothing, \varnothing) \neq \varnothing$. Además, toda cadena no vacía del conjunto ordenado $(\bigcup_{\substack{X \subseteq A,\\ Y \subseteq B}} \mathrm{Iso}(X, Y), \leq)$ tiene un supremo. Sea Λ un conjunto no vacío y $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una familia en $\bigcup_{\substack{X \subseteq A,\\ Y \subseteq B}} \mathrm{Iso}(X, Y)$ tal que

(1) Para cada $\lambda \in \Lambda$, $f_\lambda \colon X_\lambda \longrightarrow Y_\lambda$.
(2) Para cada $\lambda, \mu \in \Lambda$, $f_\lambda \leq f_\mu$ o $f_\mu \leq f_\lambda$.

Entonces el triplo

$$f = (\textstyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, F, \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda)$$

en el que F es

$$F = \{\, (x, y) \in (\textstyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda) \times (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda) \mid \exists \lambda \in \Lambda\, ((x, y) \in F_\lambda) \,\}$$

o, lo que es equivalente, para cada $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, $f(x) = f_\lambda(x)$, siendo λ cualquier índice en Λ para el que $x \in X_\lambda$, es una aplicación biyectiva y es el supremo de $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Se cumple que F es una función porque si $(x, y), (x, z) \in F$, entonces, por la definición de F, existirían $\lambda, \mu \in \Lambda$ tales que $(x, y) \in F_\lambda$ y $(x, z) \in F_\mu$, pero al ser $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una cadena, tendríamos que $f_\lambda \leq f_\mu$ o $f_\mu \leq f_\lambda$, luego $(x, y), (x, z) \in F_\mu$ o $(x, y), (x, z) \in F_\lambda$, por lo tanto $y = z$. Así que podemos afirmar que f es una aplicación. Dejamos como ejercicio la demostración de que f es biyectiva. Es evidente que f es una cota superior de la familia $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Puesto que se cumplen las hipótesis del Lema de Zorn-Kuratowski, podemos afirmar que existe un maximal en el conjunto ordenado $(\bigcup_{\substack{X \subseteq A,\\ Y \subseteq B}} \mathrm{Iso}(X, Y), \leq)$. Sea

$h\colon X \longrightarrow Y$ un maximal. Para h se cumple que $X = A$ o $Y = B$, ya que si $X \neq A$ e $Y \neq B$, entonces, tomando un $a_0 \in A - X$ y un $b_0 \in B - Y$, tendríamos que para la aplicación h_{a_0,b_0} definida desde $X \cup \{a_0\}$ hasta $Y \cup \{b_0\}$ y con función subyacente H_{a_0,b_0} la definida como

$$H_{a_0,b_0} = H \cup \{\, (a_0, b_0) \,\}$$

se cumpliría que $h < h_{a_0,b_0}$, luego h no sería maximal, contradicción. Por lo tanto $X = A$ o $Y = B$. Si ocurre lo primero, entonces $\mathrm{in}_{Y,B} \circ h$ es una aplicación inyectiva de A en B, mientras que si ocurre lo segundo, $\mathrm{in}_{X,A} \circ h^{-1}$ es una aplicación inyectiva de B en A. □

Respecto del teorema de comparabilidad hemos de decir que Hartogs demostró la equivalencia del mismo con el axioma de elección.

Sabemos que la clase relacional de dominación entre conjuntos, $\leq$, que no es un conjunto, tiene, entre otras, las propiedades reflexiva y transitiva, luego la conjunción de ella y de su inversa, que coincide con la clase relacional de isomorfía $\cong$, tiene las propiedades de una eqivalencia, i.e., es reflexiva, simétrica y transitiva. Ello puede inducir a pensar, como lo hicieron Frege y Russell, que una definición de lo que sea la cardinalidad de un conjunto, i.e., aquello que, según Cantor, se obtiene al hacer abstracción del orden y naturaleza de los elementos de un conjunto, pudiera consistir en definirla, para un conjunto A, como:

$$[A]_{\cong} = \{\, B \mid B \cong A \,\}.$$

Ahora bien, para $A = \varnothing$, tenemos que $[\varnothing]_{\cong} = \{\, \varnothing \,\}$ es un conjunto, sin embargo, para un conjunto no vacío A, si admitimos que $[A]_{\cong}$ es un conjunto, entonces, para cada conjunto x, se cumple que $x \in \bigcup [A]_{\cong}$, que en la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel-Skolem no existe. De modo que la definición de la cardinalidad de un conjunto ha de ir por otros derroteros, por ejemplo, por la vía de considerar que los cardinales son ordinales iniciales, involucrando de este modo el concepto de buena ordenación y el esquema axiomático de reemplazo.

References

[Cohn81] P. Cohn, *Universal algebra*, D. Reidel, 1981.

Universidad de Valencia, Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia, Apt. 22.109 E-46071 Valencia, Spain

E-mail address: Juan.B.Climent@uv.es