EL TEOREMA DE CANTOR-BERNSTEIN Y LA COMPARABILIDAD PARA LOS CONJUNTOS BIEN ORDENADOS

J. CLIMENT VIDAL

Resumen. Una vez definidas las nociones y establecidas las proposiciones necesarias de la teoría de conjuntos bien ordenados, demostramos el teorema de Cantor-Bernstein para los conjuntos bien ordenados. Además, usando el lema de Zorn-Kuratowski, demostramos el teorema de comparabilidad para los conjuntos bien ordenados. Por último, demostramos que del lema de Zorn-Kuratowski se deduce el teorema de buena ordenación de Zermelo, que de este último se deduce la existencia de funciones de elección para cualquier conjunto, y, por fin que de este se deduce, a su vez, el lema de Zorn-Kuratowski.

Índice

1. Conjuntos bien ordenados.

En esta sección presentamos aquellas nociones y proposiciones de la teoría de conjuntos bien ordenados que son imprescindibles para demostrar el teorema de Cantor-Bernstein.

Definition 1. Una *buena ordenación*, o un *buen orden*, sobre un conjunto A es una relación binaria $\leq$ sobre A que cumple las siguientes condiciones:

1. $\forall x \in A\ (x \leq x)$ (Reflexividad);
2. $\forall x, y \in A\ ((x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y)$ (Antisimetría);
3. $\forall x, y, z \in A\ ((x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z)$ (Transitividad).
4. $\forall X \subseteq A\ (X \neq \varnothing \rightarrow \exists \min(X))$.

Un *conjunto bien ordenado* es un par $(A, \leq)$ en el que A es un conjunto y $\leq$ una buena ordenación sobre A.

Proposition 1. *Si* $\mathbf{A} = (A, \leq)$ *es un conjunto bien ordenado no vacío, entonces* $\mathbf{A}$ *tiene un primer elemento. Además, si* $a \in A$ *no es el máximo de* $\mathbf{A}$*, entonces* a *tiene un sucesor inmediato, i.e., existe un* $b \in A$ *tal que* $a < b$*, pero no hay ningún* $c \in A$ *tal que* $a < c < b$*.*

Proposition 2. *Si* $\mathbf{A} = (A, \leq)$ *es un conjunto bien ordenado no vacío, entonces* $\mathbf{A}$ *está linealmente ordenado.*

Date: 24 de febrero de 2008.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary: ; Secondary: .

Proposition 3. *Si* $\mathbf{A} = (A, \leq)$ *es un conjunto bien ordenado, entonces en* $\mathbf{A}$ *se cumple el* principio de la demostración por inducción transfinita*, i.e., se tiene que*

$$\forall X \subseteq A \, ((\forall a \in A \, (\downarrow_< a \subseteq X \rightarrow a \in X)) \rightarrow X = A).$$

De modo que una condición suficiente para que una parte X *de* A *coincida con* A*, es que un elemento arbitrario* a *de* A *pertenezca a* X *cuando todos los predecesores estrictos de* a *pertenezcan a* X*.*

Demostración. Sea X una parte de A tal que, para cada $a \in A$, se cumpla que si $\downarrow_< a \subseteq X$, entonces $a \in X$. Si $X \neq A$, entonces la parte $A - X$ de A no sería vacía, luego, por ser $\mathbf{A}$ un conjunto bien ordenado, tal parte de A tendría un mínimo a. Pero entonces se cumpliría que $\downarrow_< a \subseteq X$, ya que si no fuera ese el caso, i.e., si existiera un $b \in \downarrow_< a$ tal que $b \notin X$, a no sería el mínimo de $A - X$. Por lo tanto, $a \in X$, que contradice el que $a \in A - X$. Así que $X = A$. □

Proposition 4. *Si* $\mathbf{A} = (A, \leq)$ *es un conjunto bien ordenado no vacío, entonces las secciones iniciales de* $\mathbf{A}$ *son* A *y las de la forma* $\downarrow_< a$*, para cada* $a \in A$*.*

Demostración. Si X es una sección inicial de $\mathbf{A}$ distinta de A, entonces se cumple que $X = \downarrow_< a$, siendo a el mínimo de $A - X$. □

Proposition 5. *Sea* $\mathbf{A}$ *un conjunto bien ordenado y* f *una endoaplicación isótona e inyectiva de* $\mathbf{A}$*. Entonces* f *es extensiva, i.e., para cada* $x \in A$*, se cumple que* $x \leq f(x)$*.*

Demostración. Supongamos que f no sea extensiva, i.e., que el subconjunto

$$T = \{ \, x \in A \mid x > f(x) \, \}$$

de A no sea vacío. Entonces T tiene un mínimo a, i.e., hay un $a \in A$ tal que

1. $a > f(a)$.
2. Para cada $x \in A$, si $x > f(x)$, entonces $a \leq x$.

Por cumplirse que $a > f(a)$ y ser f isótona e inyectiva, tenemos que $f(a) > f(f(a))$, luego $f(a) \in T$, por lo tanto, ya que a es el mínimo de T, $a \leq f(a)$, que entra en contradicción con que $a > f(a)$. Así que f es extensiva. □

Corollary 1. *Sea* $\mathbf{A}$ *un conjunto bien ordenado. Entonces el grupo de los automorfismos de* $\mathbf{A}$ *es trivial, i.e., se reduce al automorfismo identidad de* $\mathbf{A}$*.*

Corollary 2. *Si* $f, g \colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *son dos isomorfismos entre dos conjuntos bien ordenados, entonces* $f = g$*.*

Corollary 3. *Un conjunto bien ordenado* $\mathbf{A}$ *no es isomorfo a ninguna de sus secciones iniciales propias, i.e., para cada* $a \in A$*, no hay ningún isomorfismo entre* $\mathbf{A}$ *y* $(\downarrow_< a, <)$

Definition 2. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}'$ dos conjuntos bien ordenados. Decimos que $\mathbf{A}$ *precede ordinalmente* a $\mathbf{A}'$, y lo denotamos por $\mathbf{A} \preccurlyeq \mathbf{A}'$, si hay una aplicación estrictamente isótona de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{A}'$ cuya imagen es una sección inicial de $\mathbf{A}'$, i.e., si $\mathbf{A}$ es isomorfo a una sección inicial de $\mathbf{A}'$. Además, decimos que $\mathbf{A}$ es *ordinalmente equivalente* a $\mathbf{A}'$, y lo denotamos por $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}'$ si hay una aplicación estrictamente isótona de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{A}'$ cuya imagen es A'. En este último caso también decimos que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}'$ son *ordinalmente similares* o, simplemente, que son *similares*.

Proposition 6. *Sean* $\mathbf{A}$*,* $\mathbf{A}'$ *y* $\mathbf{A}''$ *tres conjuntos bien ordenados. Entonces tenemos que:*

1. $\mathbf{A} \preccurlyeq \mathbf{A}$.
2. *Si* $\mathbf{A} \preccurlyeq \mathbf{A}'$ *y* $\mathbf{A}' \preccurlyeq \mathbf{A}''$*, entonces* $\mathbf{A} \preccurlyeq \mathbf{A}''$*.*
3. $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}$.

4. *Si* $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}'$*, entonces* $\mathbf{A}' \equiv \mathbf{A}$.
5. *Si* $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}'$ *y* $\mathbf{A}' \equiv \mathbf{A}''$*, entonces* $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}''$.

Por lo tanto la clase relacional $\preccurlyeq$ *preordena a la clase de todos los conjuntos bien ordenados, mientras que la clase relacional* $\equiv$ *es una equivalencia sobre la misma clase.*

2. El teorema de Cantor-Bernstein para los conjuntos bien ordenados.

Recordemos que para dos conjuntos amorfos, i.e., dos conjuntos desestructurados, demostramos que una condición suficiente para que fueran isomorfos, era la de que uno dominara al otro y el otro al uno, en el sentido de que existieran aplicaciones inyectivas de uno en el otro y del otro en el uno. En esta sección demostramos que el teorema de Cantor-Bernstein también se cumple para los conjuntos que están dotados de una estructura de buena ordenación, y respecto de la comparación ordinal definida en la sección previa.

Proposition 7. *Sean* $(A, \leq)$ *y* $(B, \leq)$ *dos conjuntos bien ordenados para los que se cumpla que* $(A, \leq)$ *sea isomorfo a una sección inicial de* $(B, \leq)$ *(con el orden inducido) y* $(B, \leq)$ *sea isomorfo a una sección inicial de* $(A, \leq)$ *(con el orden inducido). Entonces* $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$

Demostración. Sea $f\colon (A, \leq) \longrightarrow (B_0, \leq)$ un isomorfismo de $(A, \leq)$ en $(B_0, \leq)$, siendo B_0 una sección inicial de $(B, \leq)$, y $g\colon (B, \leq) \longrightarrow (A_0, \leq)$ un isomorfismo de $(B, \leq)$ en $(A_0, \leq)$, siendo A_0 una sección inicial de $(A, \leq)$.

Ahora consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "f"] & \mathbf{B}_0 \arrow[r, "g|_{\mathbf{B}_0}^{g[\mathbf{B}_0]}"] \arrow[d, "\mathrm{in}_{\mathbf{B}_0,\mathbf{B}}"'] & g[\mathbf{B}_0] \arrow[d, "\mathrm{in}_{g[\mathbf{B}_0],\mathbf{A}_0}"] \\
 & \mathbf{B} \arrow[r, "g"'] & \mathbf{A}_0
\end{tikzcd}$$

Se cumple que $g[B_0]$ es una sección inicial de $(A, \leq)$ y que la composición de los isomorfismos f y $g|_{\mathbf{B}_0}^{g[\mathbf{B}_0]}$ es un isomorfismo de $\mathbf{A}$ en $g[\mathbf{B}_0]$. Por lo tanto $g[B_0] = A$, luego $g[B] = A$, así que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son isomorfos.

□

3. El teorema de comparabilidad para los conjuntos bien ordenados.

Demostramos en esta sección que dos conjuntos bien ordenados cualesquiera siempre son comparables.

Theorem 1. *Si* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *son dos conjuntos bien ordenados, entonces existe un isomorfismo de* $\mathbf{A}$ *en una sección inicial de* $\mathbf{B}$ *o existe un isomorfismo de* $\mathbf{B}$ *en una sección inicial de* $\mathbf{A}$.

Demostración. Sobre el conjunto $\bigcup_{\substack{X \in \mathrm{Sec}_<(A),\\ Y \in \mathrm{Sec}_<(B)}} \mathrm{Iso}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, de los isomorfismos entre secciones iniciales de $\mathbf{A}$ y de $\mathbf{B}$ consideremos la relación binaria $\leq$ que consta de los pares (f, f'), con $f \in \mathrm{Iso}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ y $f' \in \mathrm{Iso}(\mathbf{X}', \mathbf{Y}')$, para algunas secciones iniciales X, X' de $\mathbf{A}$ y algunas secciones iniciales Y, Y' de $\mathbf{B}$, tales que:

1. $X \subseteq X'$.
2. $Y \subseteq Y'$.

3. El diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{in}_{\mathbf{X},\mathbf{X}'}"'] & \mathbf{Y} \arrow[d, "\mathrm{in}_{\mathbf{Y},\mathbf{Y}'}"] \\ \mathbf{X}' \arrow[r, "f'"'] & \mathbf{Y}' \end{tikzcd}$$

conmuta.

Entonces $(\bigcup_{\substack{X\in \mathrm{Sec}_<(A),\\ Y\in\mathrm{Sec}_<(B)}} \mathrm{Iso}(\mathbf{X},\mathbf{Y}), \leq)$ es un conjunto ordenado. Se cumple que no es vacío porque $\mathrm{Iso}(\varnothing,\varnothing) \neq \varnothing$, siendo $\varnothing$ el conjunto bien ordenado $(\varnothing,\varnothing)$. Además, toda cadena no vacía del conjunto ordenado $(\bigcup_{\substack{X\in \mathrm{Sec}_<(A),\\ Y\in\mathrm{Sec}_<(B)}} \mathrm{Iso}(\mathbf{X},\mathbf{Y}), \leq)$ tiene un supremo.

Sea Λ un conjunto no vacío y $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una familia en $\bigcup_{\substack{X\in \mathrm{Sec}_<(A),\\ Y\in\mathrm{Sec}_<(B)}} \mathrm{Iso}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ tal que

1. Para cada $\lambda\in\Lambda$, $f_\lambda\colon \mathbf{X}_\lambda \longrightarrow \mathbf{Y}_\lambda$.
2. Para cada $\lambda,\mu\in\Lambda$, $f_\lambda \leq f_\mu$ o $f_\mu \leq f_\lambda$.

Entonces el triplo

$$f = (\textstyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathbf{X}_\lambda, F, \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathbf{Y}_\lambda)$$

en el que F es

$$F = \{\, (x,y) \in (\textstyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda) \times (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda) \mid \exists\lambda\in\Lambda\,((x,y)\in F_\lambda)\,\}$$

o, lo que es equivalente, para cada $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, $f(x) = f_\lambda(x)$, siendo λ cualquier índice en Λ para el que $x \in X_\lambda$, es un isomorfismo y es el supremo de $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Porque, por una parte, la unión de una familia de secciones iniciales es una sección inicial, y, por otra parte, se cumple que F es una función porque si (x,y) y $(x,z) \in F$, entonces, por la definición de F, existirían $\lambda,\mu\in\Lambda$ tales que $(x,y)\in F_\lambda$ y $(x,z)\in F_\mu$, pero al ser $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una cadena, tendríamos que $f_\lambda \leq f_\mu$ o $f_\mu \leq f_\lambda$, luego $(x,y),(x,z)\in F_\mu$ o $(x,y),(x,z)\in F_\lambda$, por lo tanto $y = z$. Luego podemos afirmar que f es una aplicación. Dejamos como ejercicio la demostración de que f es biyectiva así como que, para cada $x,x' \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, se cumple que $x \leq x'$ si y sólo si $f(x) \leq f(x')$. Es evidente que f es el supremo de la familia $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Puesto que se cumplen las hipótesis del lema de Zorn-Kuratowski, podemos afirmar que existe un maximal en el conjunto ordenado $(\bigcup_{\substack{X\in \mathrm{Sec}_<(A),\\ Y\in\mathrm{Sec}_<(B)}} \mathrm{Iso}(\mathbf{X},\mathbf{Y}), \leq)$. Sea $h\colon \mathbf{X}\longrightarrow\mathbf{Y}$ un maximal. Para h tenemos que $X = A$ o $Y = B$, ya que si $X \neq A$ e $Y \neq B$, entonces, tomando el mínimo a_0 de $A - X$ y el mínimo b_0 de $B - Y$, tendríamos que para la aplicación h_{a_0,b_0} definida desde $X\cup\{a_0\}$ hasta $Y\cup\{b_0\}$ y con función subyacente H_{a_0,b_0} la definida como

$$H_{a_0,b_0} = H \cup \{\,(a_0,b_0)\,\}$$

se cumpliría que h_{a_0,b_0} es biyectiva que, para cada $x,x' \in X\cup\{a_0\}$, se cumple que $x \leq x'$ si y sólo si $h_{a_0,b_0}(x) \leq h_{a_0,b_0}(x')$, y que $h < h_{a_0,b_0}$, luego h no sería maximal, contradicción. Por lo tanto $X = A$ o $Y = B$. Si ocurre lo primero, entonces $\mathrm{in}_{\mathbf{Y},\mathbf{B}}\circ h$ es un isomorfismo de $\mathbf{A}$ en una sección inicial de $\mathbf{B}$, mientras que si ocurre lo segundo, $\mathrm{in}_{\mathbf{X},\mathbf{A}}\circ h^{-1}$ es un isomorfismo de $\mathbf{B}$ en una sección inicial de $\mathbf{A}$. $\square$

4. El lema de Zorn-Kuratowski, la buena ordenación y el axioma de elección.

En esta sección demostramos que del lema de Zorn-Kuratowski se deduce que sobre todo conjunto hay una buena ordenación, que de suponer esto último deducimos que sobre todo conjunto existe una función de elección, y, en último lugar, que de suponer que sobre todo conjunto existe una función de elección, se deduce el lema de Zorn-Kuratowski.

Proposition 8 (Principio de la buena ordenación de Cantor)**.** *Cualquier conjunto tiene, al menos, una buena ordenación.*

Demostración. Si $A = \varnothing$, entonces $\varnothing \in \mathrm{WO}(A)$. Supongamos que $A \neq \varnothing$ y sea $\mathscr{W}(A)$ el conjunto formado por todos los conjuntos bien ordenados $\mathbf{X} = (X, <)$ tales que $X \subseteq A$. El conjunto $\mathscr{W}(A)$ no es vacío porque $\underline{\varnothing} = (\varnothing, \varnothing) \in \mathscr{W}(A)$. Sobre el conjunto $\mathscr{W}(A)$ consideramos la relación binaria $\leq$ definida como:

$$(X, <) \leq (X', <') \text{ si y sólo si } \begin{pmatrix} X \subseteq X', <= <' \cap (X \times X) \text{ y} \\ X \text{ es una sección inicial de } (X', <'). \end{pmatrix}$$

La relación así definida es un orden sobre $\mathscr{W}(A)$.

A continuación demostramos que cada cadena no vacía en $\mathscr{W}(A) = (\mathscr{W}(A), \leq)$ está acotada superiormente. Sea $(\underline{X}_i)_{i \in I}$ una cadena no vacía en $\mathscr{W}(A)$. Entonces $(X, <) = (\bigcup_{i \in I} X_i, \bigcup_{i \in I} <_i)$ es un conjunto linealmente ordenado.

Sea Y un subconjunto no vacío de X. Entonces, para un $i \in I$, tenemos que $Y \cap X_i \neq \varnothing$. Ahora bien, puesto que $\underline{X}_i$ es un conjunto bien ordenado y $Y \cap X_i$ es una parte no vacía de X_i, sea $x_{Y,i}$ el primer elemento de $Y \cap X_i$, respecto del buen orden $<_i$ sobre X_i. Entonces $x_{Y,i}$ es el primer elemento de $Y \cap X_i$, respecto de orden $<$ sobre X y por lo tanto es el primer elemento de Y respecto del orden $<$ sobre X, esto último se cumple porque no puede existir un $y \in Y$ tal que $y < x_{Y,i}$, ya que si tal fuera el caso, entonces $y \in X_j$, para algún $j \in I$. Si $(X_i, <) \leq (X_j, <)$, entonces de $y < x_{Y,i} \in X_i$, obtenemos que $y \in X_i$, y si $(X_j, <) \leq (X_i, <)$, también $y \in X_i$, luego $x_{Y,i}$ no es el primer elemento de $Y \cap X_i$, que entra en contradicción con lo anterior. Por lo tanto $x_{Y,i}$ es el primer elemento de Y respecto del orden $<$ sobre X.

Con esto queda demostrado que $(X, <)$ es un conjunto bien ordenado. Es evidente que $(X, <) \in \mathscr{W}(A)$ y que es una cota superior de $(\underline{X}_i)_{i \in I}$ en $\mathscr{W}(A)$, que además es mínima, i.e., $(X, <)$ es el supremo de de $(\underline{X}_i)_{i \in I}$ en $\mathscr{W}(A)$. Por lo tanto, en virtud del lema de Zorn-Kuratowski, en el conjunto ordenado $\mathscr{W}(A)$ existe un maximal $\underline{B} = (B, <)$.

Se cumple que $B = A$, porque si $A - B \neq \varnothing$, entonces, eligiendo un $a \in A - B$, para el conjunto $B_a = B \cup \{a\}$ y la relación $<_a = < \cup \{\, (b, a) \mid b \in B \,\}$, obtendríamos un conjunto bien ordenado $\mathbf{B}_a = (B_a, <_a)$, tal que $\mathbf{B} < \mathbf{B}_a$, lo cual contradice el caracter maximal de $\underline{B}$. Por consiguiente $A = B$ y $\mathrm{WO}(A) \neq \varnothing$. □

Puesto que sobre todo conjunto existe una buena ordenación, como caso particular, sobre el conjunto de los números reales hay al menos una, que no coincide precisamente con el orden lineal usual sobre tal conjunto (por ejemplo, el subconjunto $]0, 1[$ no tiene primer elemento).

Pero no malgastes tu tiempo intentando definir explícitamente una buena ordenación sobre $\mathbb{R}$, porque nadie ha podido, ni podrá jamás, construir un buen orden sobre tal conjunto. La razón de ello estriba en que Feferman demostró que incluso si se asume, además de los axiomas de Zermelo-Frenkel-Skolem y el axioma de elección, la hipótesis generalizada del contínuo, no se podrá llegar a establecer ninguna definición explícita de un buen orden del conjunto de los números reales, i.e., demostró que es consistente con los axiomas de Zermelo-Frenkel-Skolem, junto con el axioma de elección y la hipótesis generalizada del contínuo, que no hay ningún buen orden que sea definible sobre el contínuo.

Lo anterior pone de manifiesto la diferencia radical que hay entre dos modos de concebir la existencia de los objetos matemáticos, por una parte la Hilbertiana, que sostiene que un objeto matemático, que cumpla alguna condición, existe si, de la admisión de su existencia, no obtenemos una contradicción (existir puramente formal), y, por otra, la Brouweriana, según la cual, un objeto matemático, dotado de cierta propiedad, existe si, cuanto menos, tenemos la posibilidad de la construcción, en principio, de tal objeto matemático, con la propiedad en cuestión (existir algorítmico).

Proposition 9. *Si para cada conjunto A se cumple que* $\mathrm{WO}(A)$*, el conjunto de las buenas ordenaciones sobre A, no es vacío, entonces, para cada conjunto A,* $\mathrm{ChFnc}(A)$*, el conjunto de las funciones de elección para A, i.e., el conjunto de las funciones $F\colon \mathrm{Sub}(A) - \{\varnothing\} \longrightarrow A$ tales que, para cada $X \in \mathrm{Sub}(A) - \{\varnothing\}$, $F(X) \in X$, no es vacío.*

Demostración. Sea A un conjunto y $\leq$ una buena ordenación sobre A. Entonces la función $F\colon \mathrm{Sub}(A) - \{\varnothing\} \longrightarrow A$, que a un $X \in \mathrm{Sub}(A) - \{\varnothing\}$ le asigna $F(X) = \min(X)$, es una función de elección para A. □

Ante de proceder a la demostración de que del axioma de elección se deduce el lema de Zorn-Kuratowski, y siguiendo la exposición de R. Douady y A. Douady en su libro: *Algèbre et théories galoisiennes*, vol. I, definimos el concepto de cadena relativa a una función de elección para el conjunto subyacente de un conjunto ordenado, y demostramos una serie de propiedades de las mismas, a partir de las cuales estableceremos lo enunciado.

Definition 3. Sea $\mathbf{A}$ un conjunto ordenado, F una función de elección para A y X una parte de A. Decimos que X es una F-cadena si, para cada sección inicial C de $(X, \leq)$, distinta de X, se cumple que el conjunto $X - C$ tiene un primer elemento y que tal elemento es precisamente $F(\mathrm{Ub}^*_{\mathbf{A}}(C))$, siendo $\mathrm{Ub}^*_{\mathbf{A}}(C)$ el conjunto de las cotas superiores de C en $\mathbf{A}$ que no pertenecen a C, así que

$$\mathrm{Ub}^*_{\mathbf{A}}(C) = \mathrm{Ub}_{\mathbf{A}}(C) - C.$$

Observemos que si $\mathbf{A}$ es un conjunto ordenado no vacío y que F sea una función de elección para A, entonces el subconjunto $\{\, F(A) \,\}$ de A es una F-cadena.

Sea F una función de elección para el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Entonces el conjunto $X = \{\, a_n \mid n \in \mathrm{N} \,\}$, imagen de la única aplicación $(a_n)_{n\in\mathrm{N}}$ de N en $\mathbb{R}$ para la que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{N} \arrow[d, "(a_n)_{n\in\mathrm{N}}"'] & \mathrm{N} \arrow[l, "\mathrm{sc}"'] \arrow[d, "(a_n)_{n\in\mathrm{N}}"] \\
1 \arrow[ur, "\kappa_0"] \arrow[dr, "\kappa_{a_0}"'] & & \\
 & \mathbb{R} & \mathbb{R} \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd}$$

en el que κ_0 es la aplicación que al único miembro de 1 le asigna 0, κ_{a_0} la aplicación que al único miembro de 1 le asigna $a_0 = F(\mathbb{R})$, y f la endoaplicación de $\mathbb{R}$ que a un número real r le asigna

$$f(r) = F\,(]r, \to[) \ \ (\in]r, \to[),$$

de modo que:

1. $a_0 = F(\mathbb{R})$ y
2. $\forall n \in \mathrm{N}\ (a_{n+1} = F\,(]a_n, \rightarrow [))$,

es una F-cadena.

Proposition 10. *Sea* $\mathbf{A}$ *un conjunto ordenado y* F *una función de elección para* A*. Entonces toda* F*-cadena de* $\mathbf{A}$ *está bien ordenada.*

Demostración. Sea X una F-cadena. Entonces considerando sobre X la restricción del orden sobre A, se cumple que $\mathbf{X} = (X, \leq)$ es un conjunto ordenado. Demostramos a continuación que toda parte no vacía de X tiene un primer elemento. Sea Y un subconjunto no vacío de X. Sea C el conjunto de las cotas inferiores de Y en $\mathbf{X}$ que no pertenecen a Y, de manera que

$$C = \mathrm{Lb}_{\mathbf{X}}(Y) - Y = \mathrm{Lb}_{\mathbf{X}}(Y) \cap \complement_X Y.$$

Es evidente que C es una sección inicial de $\mathbf{X}$. Ahora demostramos que C es distinto de X. Pero se cumple que

$$X - C = Y \cup (X - \mathrm{Lb}_{\mathbf{X}}(Y)),$$

por lo tanto $Y \subseteq X - C$, y como $Y \neq \varnothing$, $X - C \neq \varnothing$, luego $C \neq X$. Entonces, por ser X una F-cadena y C una sección inicial de $\mathbf{X}$ y distinta de X, el conjunto $X - C$ tiene un mínimo x_0, que, además, coincide con $F(\mathrm{Ub}^*_{\mathbf{A}}(C))$. Puesto que $Y \subseteq X - C$ y $x_0 = \min(X - C)$, x_0 es una cota inferior de Y en $\mathbf{X}$. Además, se cumple que $x_0 \in Y$, ya que si $x_0 \notin Y$, entonces x_0 sería una cota inferior estricta de Y en $\mathbf{X}$, i.e., $x_0 \in C$, pero $x_0 \in X - C$, de donde la contradicción, por lo tanto $x_0 \in Y$ y x_0 es el mínimo de Y en $\mathbf{X}$. □

Proposition 11. *Sea* $\mathbf{A}$ *un conjunto ordenado,* F *una función de elección para* A *y* X*,* X' *dos* F*-cadenas de* $\mathbf{A}$*. Entonces, o bien* X *es una sección inicial de* $\mathbf{X}'$*, o bien* X' *es una sección inicial de* $\mathbf{X}$*.*

Demostración. Sea C la reunión de todas las secciones iniciales comunes a los conjuntos bien ordenados $\mathbf{X}$ y $\mathbf{X}'$. Supongamos que $C \neq X$ y que $C \neq X'$. Entonces, por ser X y X' F-cadenas de $\mathbf{A}$, se cumple que

$$\min(X - C) = \min(X' - C) = F(\mathrm{Ub}^*_{\mathbf{A}}(C)).$$

Pero entonces $C \cup \{\, F(\mathrm{Ub}^*_{\mathbf{A}}(C))\,\}$ es una sección inicial común a $\mathbf{X}$ y $\mathbf{X}'$ que contiene estrictamente a C, que entra en contradicción con que C sea la máxima sección inicial común a $\mathbf{X}$ y $\mathbf{X}'$. Por lo tanto $C = X$ o $C = X'$. □

Proposition 12. *Sea* $\mathbf{A}$ *un conjunto ordenado y* F *una función de elección para* A*. Entonces se cumple que*

1. *La unión,* X_F*, de todas las* F*-cadenas de* $\mathbf{A}$ *es una* F*-cadena.*
2. *La máxima* F*-cadena,* X_F*, de* $\mathbf{A}$ *no tiene ninguna cota superior estricta en* $\mathbf{A}$*.*

Demostración. Sea C una sección inicial de $\mathbf{X}_F$ distinta de X_F. Vamos a demostrar que $X_F - C$ tiene un mínimo y que tal mínimo coincide con $F(\mathrm{Ub}^*_{\mathbf{A}}(C))$. Para ello establecemos que si $x \in X_F - C$ y X es una F-cadena de $\mathbf{A}$ tal que $x \in X$, entonces C es una sección inicial de $\mathbf{X}$ distinta de X, porque en tal caso se cumple que existe el mínimo de $X - C$ y coincide con $F(\mathrm{Ub}^*_{\mathbf{A}}(C))$, de donde podemos concluir que tal mínimo es también el mínimo de $X_F - C$.

Ahora bien, puesto que $x \in X - C$, se cumple que C es distinto de X. Sólo falta demostrar que C es una sección inicial de $\mathbf{X}$, pero, por ser C es una sección inicial de $\mathbf{X}_F$, para ello es suficiente que demostremos que $C \subseteq X$. Sea $y \in C$, entonces, por ser C parte de X_F, existe una F-cadena Y tal que $y \in Y$. Ahora bien, por la proposición anterior, Y es una sección inicial de $\mathbf{X}$, en cuyo caso $y \in X$, o X es una sección inicial de $\mathbf{Y}$, y entonces $x, y \in Y$, luego, por ser $\mathbf{Y}$ un conjunto bien ordenado, está linealmente ordenado, así que $x < y$, o $x = y$ o $y < x$. Pero $x \notin C$ e $y \in C$, luego no puede ocurrir ni que $x = y$ ni que $x < y$, así que $y < x$. Por lo tanto $y \in X$.

Supongamos que X_F tenga una cota superior estricta. Entonces añadiendo $F(\mathrm{Ub}^*_{\mathbf{A}}(X_F))$ a X_F, obtenemos una F-cadena de $\mathbf{A}$ que contiene estrictamente a X_F, lo cual entra en contradicción con que X_F sea la máxima F-cadena de $\mathbf{A}$ □

Proposition 13. *Si para cada conjunto A,* $\mathrm{ChFnc}(A) \neq \varnothing$*, entonces se cumple el lema de Zorn-Kuratowski.*

Demostración. Sea $\mathbf{A}$ un conjunto ordenado no vacío tal que cualquier cadena no vacía de $\mathbf{A}$ tenga una cota superior en $\mathbf{A}$. Sea F una función de elección para A. El conjunto X_F, i.e., la reunión de todas las F-cadenas de $\mathbf{A}$ tiene las siguientes propiedades:

1. X_F no es una parte no vacía de A, porque $\{ F(A) \}$ es una F-cadena y está incluida en X_F.
2. X_F es una cadena en $\mathbf{A}$, porque toda F-cadena está bien ordenada y por lo tanto está linealmente ordenada.

Por lo tanto X_F tiene una cota superior a en $\mathbf{A}$. Si a no fuera maximal, existiría un $b \in A$ tal que $a < b$, luego b sería una cota superior estricta de la F-cadena X_F, que entraría en contradicción con la segunda parte de la proposición anterior. Por lo tanto a es un maximal de $\mathbf{A}$. □

Resumimos en un diagrama las diferentes formulaciones del axioma de elección, pero antes recordamos que

1. El **Axioma de elección de Baer** afirma que:
$$\forall R\,(\,\mathrm{Rel}(R) \rightarrow \exists F\,(\,\mathrm{Fnc}(F) \wedge F \subseteq R \wedge \mathrm{Dom}(F) = \mathrm{Dom}(R)\,))$$
2. El **Axioma de elección de Zermelo** afirma que:
$$\forall \mathscr{X}\,((\,\varnothing \notin \mathscr{X} \wedge \mathrm{Disj}(\mathscr{X})\,) \rightarrow \exists F\colon \mathscr{X} \longrightarrow \bigcup \mathscr{X}\,(\,\forall X \in \mathscr{X}\,(F(X) \in X\,))).$$
3. El **Axioma de elección de Russell-Zermelo** afirma que:
$$\forall \mathscr{X}\,((\,\varnothing \notin \mathscr{X} \wedge \mathrm{Disj}(\mathscr{X})\,) \rightarrow \exists T \subseteq \bigcup \mathscr{X}\,(\,\forall X \in \mathscr{X}\; \exists! x\,(\,x \in T \cap X\,))).$$
4. El **Principio general de elección de Zermelo** afirma que:
$$\forall \mathscr{X}\,(\,\varnothing \notin \mathscr{X} \rightarrow \exists F\colon \mathscr{X} \rightarrow \bigcup \mathscr{X}\,(\,\forall X \in \mathscr{X}\,(\,F(X) \in X\,))).$$
5. El **Axioma de elección multiplicativo** afirma que:
$$\forall I\, \forall (X_i)_{i \in I}\,((\forall i \in I\,(X_i \neq \varnothing)) \rightarrow \textstyle\prod_{i \in I} X_i \neq \varnothing).$$
6. El **Axioma de elección** afirma que:
$$\forall A\, \exists F\colon \mathrm{Sub}(A) - \{\varnothing\} \longrightarrow A\,(\forall X \in \mathrm{Sub}(A) - \{\varnothing\}\,(F(X) \in X)).$$
7. El **Lema de Tukey-Teichmüller** afirma que:

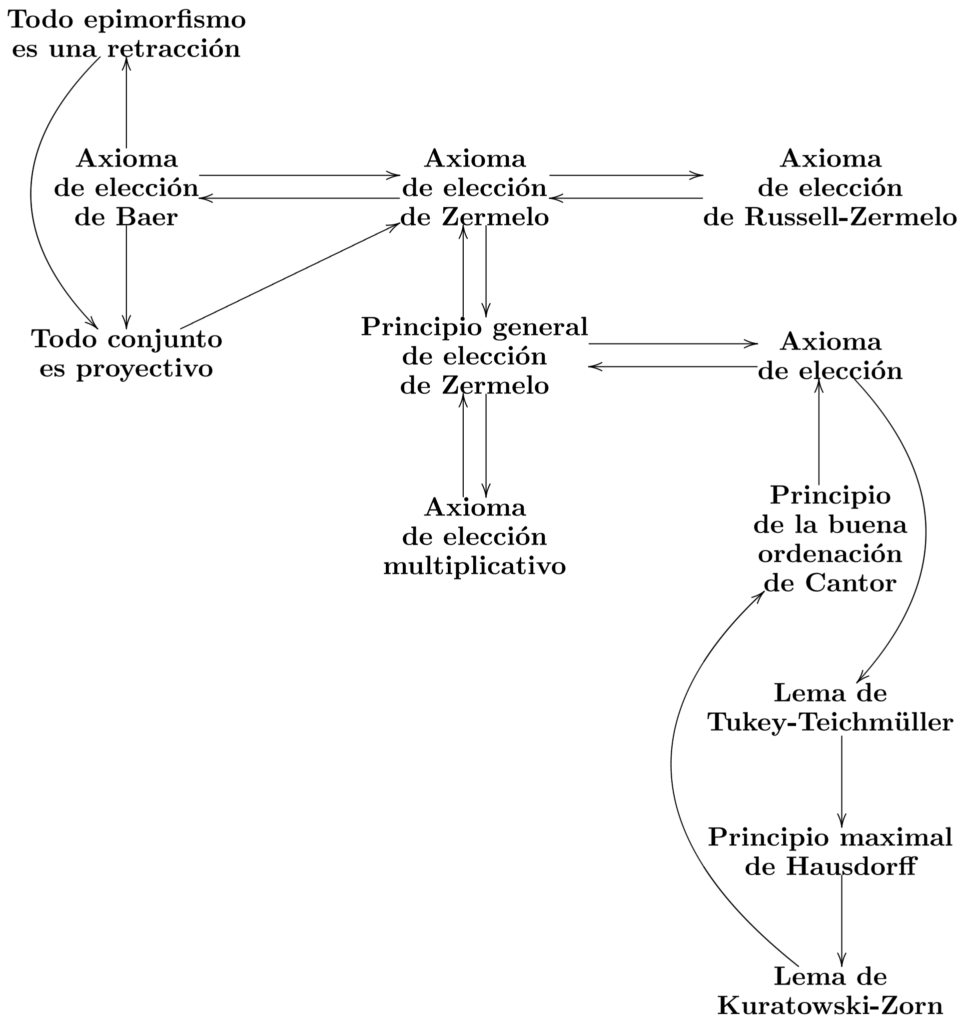
   Todo conjunto no vacío $\mathscr{F}$ de carácter finito tiene un $\subseteq$-maximal.
8. El **Principio maximal de Hausdorff** afirma que:

   Todo conjunto ordenado no vacío tiene una cadena $\subseteq$-maximal.
9. El **Lema de Kuratowski-Zorn** afirma que:

   Si $\mathbf{A} = (A, \leq)$ es un conjunto ordenado no vacío y toda cadena no vacía de $\mathbf{A}$ tiene un supremo en $\mathbf{A}$, entonces $\mathbf{A}$ tiene al menos un maximal.

10. El **Principio de la buena ordenación de Cantor** afirma que:

$$\forall A\,(\mathrm{WO}(A) \neq \varnothing).$$



Veamos que del lema de Tukey-Teichmüller se deduce el principio maximal de Hausdorff. Sea $\mathbf{A}$ un conjunto ordenado no vacío. Entonces el conjunto $\mathrm{Chain}(\mathbf{A})$, de todas las cadenas de $\mathbf{A}$, no es vacío y es de carácter finito. Esto último es cierto debido a que, para cada conjunto C, se cumple que $C \in \mathrm{Chain}(\mathbf{A})$ si y sólo si, para cada subconjunto finito K de C, tenemos que $K \in \mathrm{Chain}(\mathbf{A})$. Por lo tanto, en virtud del lema de Tukey-Teichmüller, existe, en $\mathrm{Chain}(\mathbf{A})$ un $\subseteq$-maximal, i.e., una cadena $\subseteq$-maximal.

Ahora demostramos que del principio maximal de Hausdorff se deduce el lema de Kuratowski-Zorn. Sea $\mathbf{A} = (A, \leq)$ un conjunto ordenado no vacío y tal que toda cadena no vacía de $\mathbf{A}$ tenga un supremo en $\mathbf{A}$. Entonces, en virtud del principio maximal de Hausdorff, existe una cadena $\subseteq$-maximal no vacía de $\mathbf{A}$. Sea M una de tales cadenas. Se cumple que $a = \sup_{\mathbf{A}}(M)$, el supremo de M en $\mathbf{A}$, es un maximal de $\mathbf{A}$. Porque si tal no fuera el caso, entonces tendríamos que existiría un $x \in A$ tal que $x > a$, luego $M \cup \{x\}$, que es una cadena en $\mathbf{A}$, contendría estrictamente a M. Pero eso contradice el que M sea $\subseteq$-maximal. Por consiguiente a es un maximal de $\mathbf{A}$.

Demostramos a continuación que del lema de Kuratowski-Zorn se deduce el principio de la buena ordenación de Cantor. Sea A un conjunto y

$$\mathscr{B} = \bigcup_{B \subseteq A} (\{B\} \times \mathrm{WO}(B)),$$

de modo que el conjunto $\mathscr{B}$ está formado por todos los pares ordenados (B, G) en los que $B \subseteq A$ y $G \in \mathrm{WO}(B)$. Ahora definimos la relación binaria $\preceq$ en el conjunto $\mathscr{B}$ como:

$$(B, G) \preceq (B', G') \text{ si y sólo si } B \subseteq B', G \subseteq G' \text{ y }, \forall b \in B, \forall b' \in B' - B, (b, b') \in G'.$$

Se cumple que $(\mathscr{B}, \preceq)$ es un conjunto ordenado no vacío en el que toda cadena no vacía tiene un supremo. En efecto, es evidente que no es vacío porque el par ordenado $(\varnothing, \varnothing) \in \mathscr{B}$. También es evidente que la relación binaria $\preceq$ es reflexiva y antisimétrica. Demostremos que $\preceq$ es transitiva. Sean (B, G), (B', G'), y $(B'', G'') \in \mathscr{B}$ tales que $(B, G) \preceq (B', G')$ y $(B', G') \preceq (B'', G'')$, queremos demostrar que $(B, G) \preceq (B'', G'')$. Ahora bien, de $B \subseteq B'$ y $B' \subseteq B''$ obtenemos que $B \subseteq B''$, y de $G \subseteq G'$ y $G' \subseteq G''$ que $G \subseteq G''$. Nos falta demostrar que, para cada $b \in B$ y cada $b'' \in B'' - B$, se cumple que $(b, b'') \in G''$. Pero $B' - B \subseteq B'' - B$, luego para $b'' \in B'' - B$ puede ocurrir que $b'' \in B' - B$ o que $b'' \notin B' - B$. Si $b'' \in B' - B$, entonces, ya que $b \in B$ y $(B, G) \preceq (B', G')$, $(b, b'') \in G'$, pero $G' \subseteq G''$, luego $(b, b'') \in G''$. Si $b'' \notin B' - B$, entonces, puesto que $b \in B$ y $B \subseteq B'$, tenemos que $b \in B'$ y ($b'' \notin B'$ o $b'' \in B$), i.e., que ($b \in B'$ y $b'' \notin B'$) o ($b \in B'$ y $b'' \in B$). Si lo primero, entonces $(b, b'') \in G'$, pero $G' \subseteq G''$, luego $(b, b'') \in G''$. Mientras que lo segundo es imposible, ya que $b'' \notin B$.

Sea I un conjunto no vacío y $(B_i, G_i)_{i \in I}$ una cadena en $(\mathscr{B}, \preceq)$. Entonces

$$(B, G) = (\bigcup_{i \in I} B_i, \bigcup_{i \in I} G_i)$$

es el supremo en $(\mathscr{B}, \preceq)$ de la cadena no vacía $(B_i, G_i)_{i \in I}$. Es evidente que (B, G) es un conjunto ordenado. Falta demostrar que toda parte no vacía de B tiene un mínimo en (B, G). Sea D una parte no vacía de B. Entonces hay un $i_0 \in I$ tal que $D \cap B_{i_0} \neq \varnothing$. Puesto que $D \cap B_{i_0} \subseteq B_{i_0}$ y (B_{i_0}, G_{i_0}) es un conjunto bien ordenado, hay un mínimo b de $D \cap B_{i_0}$ en (B_{i_0}, G_{i_0}). Veamos que b es, de hecho, el mínimo de D en B, G, i.e., que, para cada $x \in D$, $(b, x) \in G$. Sea $x \in D$. Entonces, o bien $x \in B_{i_0}$, o bien $x \notin B_{i_0}$. Si lo primero, entonces $(b, x) \in G_{i_0}$, luego $(b, x) \in G$. Si lo segundo, entonces $x \in B_j$, para un $j \in I - \{i_0\}$. Se cumple que $B_j \nsubseteq B_{i_0}$, luego no puede ocurrir que $(B_j, G_j) \preceq (B_{i_0}, G_{i_0})$, así que $(B_{i_0}, G_{i_0}) \preceq (B_j, G_j)$, por lo tanto $(b, x) \in G_j$, ya que $b \in B_{i_0}$ y $x \in B_j - B_{i_0}$, pero $G_j \subseteq G$, de modo que $(b, x) \in G$.

Es evidente que (B, G) es el supremo en $(\mathscr{B}, \preceq)$ de la cadena no vacía $(B_i, G_i)_{i \in I}$. Entonces, en virtud del lema de Kuratowski-Zorn, existe un maximal en $(\mathscr{B}, \preceq)$. Sea (B, G) un tal maximal. Se cumple que $B = A$, ya que si $B \neq A$, entonces tomando un $a_0 \in A - B$, tendríamos que $(B \cup \{a_0\}, G \cup \{(b, a_0) \mid b \in B\})$ sería un conjunto bien ordenado perteneciente a $\mathscr{B}$ y que contendría estrictamente a (B, G). Pero eso es imposible, porque (B, G) es maximal. De donde hemos de concluir que $B = A$ y, por lo tanto, que A es tal que $\mathrm{WO}(A) \neq \varnothing$.

Del principio de la buena ordenación se deduce el axioma de elección. Sea A un conjunto. Entonces la función F de $\mathrm{Sub}(A) - \{\varnothing\}$ en A que a un subconjunto no vacío X de A le asigna

$$F(X) = \text{mín}_{(A, \leq)}(X),$$

siendo $\leq \in \mathrm{WO}(A)$, arbitraria, pero fija, es una función de elección para A.

Referencias

[Cohn81] P. Cohn, *Universal algebra*, D. Reidel, 1981.
[Doua77] R. et A. Douady *Algèbre et théories galoisiennes*, Fernand Nathan, 1977.

Universidad de Valencia, Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia, Apt. 22.109 E-46071 Valencia, Spain
E-mail address: Juan.B.Climent@uv.es