Labyrinth of Thought. J. Ferreirós

Comentarios. J. Climent.

Chapter III, §1.2. (pág. 85)

"Dedekind himself stressed that, in his 1856–58 lectures, he had presented group theory "in such a way that it could be applied to groups Π of arbitrary elements π"[Dedekind 1894, 484 note]. In fact his ..., are noteworthy because they essentially constitute an axiomatization of group theory. "

Comentario. Constituyen esencialmente una axiomatización, como dices en la pág. 86, "of *finite* group theory".

Chapter III, §1.3. (pág. 89)

"Dedekind assumes a given correspondence between the objects of a group M and those of a "complex" M_1, such that the image of a product of elements in M is the product of their images. He shows that M_1 is then a group ..., and therefore that a homomorphism is not an injective mapping. All of this is further confirmation that by 1858 at most he was employing the notion of mapping.
A text written in 1879 is further evidence that his "substitutions" of the 1850s are simply what we now call maps."

Comentario. Pudiera ser conveniente especificar que se trata en estos casos de "aplicaciones *sobreyectivas*".

Chapter III, §2. (pág. 92–93)

"As Dugac [1976, 29] emphasized, ... It incorporates all crucial ideas related to the notions of set and map as used in algebra, ..., and "least common multiple" the union, in the sense of the smallest field containing two given fields."

Comentario. Aunque al hablar de la "unión" (de cuerpos) especificas que se trata de "the smallest field containing two given fields", y por lo tanto no hay dudas al respecto, sin embargo, ello pudiera prestarse a confusión con lo afirmado antes relativo a "It incorporates all crucial ideas related to the notions of set and map as used in algebra, ...". Podrías decir, simplemente el "supremo" (de los dos cuerpos) para evitar cualquier equívoco.

Chapter III, §2. (pág. 93)

"Dedekind's treatment of "substitutions" is equally a model. The fact that he is considering non-injective morphisms is indicated by his comment that not all of the images should be zero, i.e., that the trivial case of a unitary field is discarded."

Comentario. Desde luego Dedekind no considera cuerpos finitos, porque dice, en la pág 92, tal como recoges, que "By a *field* we shall understand every set of *infinitely many* ... ". Por otra parte, al decir Dedekind que "(if not all of them are zero) ", lo que con ello significa es que $\mathrm{Ker}(\varphi)$, el núcleo de φ, es diferente de A, o, lo que es equivalente, que φ no es un morfismo nulo, lo cual tiene como consecuencia que φ sea necesariamente *inyectiva.*

Chapter III, §2. (pág. 93)

"Cantor used the terminology of divisor and multiple ... , thus revealing that he, for one, understood very well the set-theoretical underpinnings of Dedekind's idela theory."

Comentario. Puesto que la "unión"no es la conjuntista, en el caso algebraico, sino la reticular (i.e., el supremo), sería conveniente afinar lo aseverado.

Chapter IV, §2. (pág. 129–130)

En la pág. 129: "... namely by means of fundamental sequences of elements of A and B [*op. cit.,* 95]."
En la pág. 130, nota a pie de página: "As a matter of fact, Cantor did not normally employ sets whose elements are in turn sets in his work, ... His tendency to work with sets whose elements are (intuitively considered) simple, ..."

Comentario. En su trabajo de 1872, Cantor, en el §1, dice: "... ahora B mismo, junto con A, produce análogamente un nuevo dominio C.
Si está dada, de hecho, una sucesión infinita

$$b_1, b_2, ..., b_n, ...$$

de magnitudes numéricas de los dominios A y B, *pero no todos de* A, ..."; y, en el §2 del mismo trabajo, dice: "... el *dominio de todos los conjuntos de puntos de especie determinada* constituye un género particular dentro del *dominio de todos los conjuntos de puntos pensables*, y los *conjuntos de puntos de la* ν*-ésima especie considerados constituyen una especie particular de este género*."

De modo que, por una parte, al construir Cantor el dominio C (y dominios sucesivos) mezcla números racionales, elementos de A, con números reales, elementos de B, que no son precisamente del mismo tipo, y, por otra parte, sí emplea conjuntos formados por otros conjuntos.

Lo dicho en este comentario es también aplicable a lo que dices en el Chapter VIII, §2. (pág. 264): "... Cantor never considered sets having elements of unequal kinds ... required the elements of a set to be homogeneous and to be apparent individuals ...."

Chapter VII, §3.2. (pág. 236)

"§8 is devoted ..., *greater* number...."

Comentario. Debe decir: "§8 is devoted ..., *greatest* number...."

Chapter VII, §5.3. (pág. 247)

"... By contrast, Dedekind 'discovered'that a continuous number-domain could be *defined* starting with the natural numbers, and that the natural numbers, in turn, could be *defined* through sets and mappings."

Comentario. Dedekind *demostró* que existe un cuerpo contínuo a partir del *cuerpo de los números racionales*; y *demostró* que existe un conjunto simplemente infinito a partir de la "demostración"de la existencia de un conjunto infinito. Naturalmente, haciendo uso de las nociones conjuntistas apropiadas.

Chapter VIII, §3.2. (pág. 269)

"We have seen (§§VII. 1 and 3)that Dedekind ... He defined the natural numbers as the elements of an ordered set of a special kind ...."

Comentario. Dedekind define los números naturales como los elementos de un sistema simplemente infinito, y ocurre que la aplicación estructural φ del mismo es ordenadora, pero en el sentido de que ella induce, en tanto que conjunto de pares ordenados, diríamos hoy, un orden sobre el sistema N, considerando el cierre transitivo de tal conjunto de pares ordenados.

Chapter VIII, §4. (pág. 275)

"(if a_α precedes a_β then ...)."

Comentario. Debe decir: "(if α precedes β then ...)."

Chapter VIII, §4.2. (pág. 278)

"Late in 1883, Cantor proved that perfect sets have the power ... His key idea was to establish a one-to-one correspondence between the complement of a perfect set S, i.e., a set of intervals $\{(a_n, b_n\})$, and the set of rational numbers $\mathbb{Q}_{[0,1]}$."

Comentario. El complementario de un conjunto perfecto S en $\mathbb{R}$ se puede representar, unívocamente, como la unión de una familia infinita numerable de intervalos abiertos $(]a_n, b_n[)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que, para cada $m, n \in \mathbb{N}$, si $m \neq n$, entonces los intervalos abiertos $]a_m, b_m[$ y $]a_n, b_n[$ son disjuntos y no contiguos (significando esto último que no tengan un extremo común).

Chapter IX, §4.1. (pág. 318)

"The Axiom of Choice implies that, for *each* set M, there exists a choice function, an arbitrary (*non-injective*) mapping $\Theta\colon \wp(M) \longrightarrow M$, such that $\Theta(S) \in S$ for non-empty subsets S of M."

Comentario. El axioma de elección, tal como lo propone Zermelo, al principio de su trabajo de 1904 en (2), dice que, para cada conjunto M hay una aplicación $\gamma\colon \wp(M) - \{\varnothing\} \longrightarrow M$, tal que $\gamma(M_1) \in M_1$ para cada subconjunto no vacío M_1 of M.

Tal como enuncias el axioma de elección, si $M = \varnothing$, entonces no hay ninguna aplicación de $\wp(M) = \{\varnothing\}$ en $M = \varnothing$. Por otra parte, hablar de la "no inyectividad" de Θ está de más, porque no existe ninguna aplicación inyectiva del conjunto de las partes de un conjunto M en el conjunto M, si existiera, entonces la cardinalidad de $\wp(M)$ sería menor o igual que la cardinalidad de M, lo cual entraría en contradicción con uno de los teoremas de Cantor.

Chapter IX, §4.1. (pág. 319)

"... by using the following definition [Zermelo 1908a, 184–85]. A subset K of $\wp(M)$ ... is a "Θ-chain" if and only if ...."

Después de citar a Zermelo, en nota a pie de página, dices que "I introduce a minor modification in Zermelo's definition to make it strictly parallel to Dedekind's ...".

Comentario. Observo que hablas de "Θ-chain", siendo, para tí, Θ la función de elección dada. Pero Zermelo dice, siendo φ su función de elección dada: "... un subconjunto Θ de $\wp(M)$ que tiene las propiedades

1. $M \in \Theta$.
2. Para cada $\mathcal{L} \subseteq \Theta$, si $\mathcal{L} \neq \varnothing$, entonces $\bigcap \mathcal{L} = \bigcap_{L \in \mathcal{L}} L \in \Theta$.
3. $\{K - \{\varphi(K)\} \mid K \in \Theta\} \subseteq \Theta$.

se llama una Θ-cadena."

A partir de la función de elección $\varphi\colon \wp(M) - \{\varnothing\} \longrightarrow M$ se obtiene la endoaplicación $\widehat{\varphi}$ de $\wp(M)$ que asigna al vacío el vacío, y, si X es una parte no vacía de M, entonces $\widehat{\varphi}(X) = X - \{\varphi(X)\}$. Luego, para el par $(\wp(M), \widehat{\varphi})$, se puede considerar el concepto de $\widehat{\varphi}$-cadena, como diría Dedekind. De modo que una parte Θ de $\wp(M)$ es una $\widehat{\varphi}$-cadena, en el sentido de Dedekind, si se cumple precisamente que $\widehat{\varphi}[\Theta] = \{K - \{\varphi(K)\} \mid K \in \Theta\} \subseteq \Theta$.

Por lo tanto un subconjunto Θ de $\wp(M)$ es una Θ-cadena, en el sentido de Zermelo, si es una $\widehat{\varphi}$-cadena, en el sentido de Dedekind, y, además, Θ es un sistema de clausura, en el sentido de Moore, sobre M, i.e., cumple las dos primeras condiciones anteriormente enumeradas.

Chapter XI, §6. (pág. 389)

"It seems that the blow dealt to Hilbert's program by Gödel's results finally convinced him [von Neumann] that mathematicians should devote themselves to topics in areas of mathematics closer to applications."

Comentario. No se si le convencieron o no, pero lo cierto es que entre 1935 y 1937 trabajó sobre *Continuous Geometry*, y junto con G. Birkhoff, en 1936, sobre *The Logic of Quantum Mechanics*, que caen, supongo, bajo la consideración de estudios sobre fundamentos, y no sé hasta que punto ambos trabajos puedan estar próximos a las aplicaciones prácticas.