TEORÍA DE MODELOS

J. CLIMENT VIDAL

Abstract. En este capítulo definimos las nociones de signatura de primer orden homogénea y de morfismo entre ellas, el concepto de estructura algebraico-relacional homogénea sobre un conjunto, los sistemas algebraicos homogéneos y los homomorfismos entre ellos. También definimos las nociones de subsistema algebraico de un sistema algebraico y congruencia sobre un sistema algebraico y estudiamos las propiedades de los conjuntos de todos los subsistemas algebraicos y congruencias de un sistema algebraico y demostramos los teoremas de Noether. Por otra parte, demostramos la existencia y establecemos las propiedades de los productos, igualadores, coigualadores, límites proyectivos, límites inductivos, productos reducidos y ultraproductos de los sistemas algebraicos y homomorfismos entre ellos. Por último, una vez definidos los términos y las fórmulas de la lógica de predicados homogénea y la relación de satisfacción entre sistemas algebraicos, fórmulas y valoraciones, establecemos las nociones de modelo de un conjunto de fórmulas y de teoría de un conjunto de sistemas algebraicos; a continuación, exponemos la conexión de Galois contravariante (inducida por la relación de satisfacción) entre los retículos completos de los sistemas algebraicos (de una signatura dada) y de las fórmulas, definimos y estudiamos los conceptos de encajamiento elemental y equivalencia elemental, y demostramos el teorema de completud de Gödel-Mal'cev, previa presentación de un sistema deductivo, que afirma la identidad entre la relación de consecuencia sintáctica y la relación de consecuencia semántica.

Contents

Date: February 24, 2008.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary:

La teoría de modelos es la rama de la lógica matemática que estudia la conexión que existe entre los conjuntos de fórmulas, relativas a cierto lenguaje formal, y conjuntos de sistemas algebraicos, adecuados al mismo lenguaje formal, inducida por la relación de satisfacibilidad de Tarski. También podría decirse, en tanto que ampliación del Programa de Erlangen de Klein, que la teoría de modelos se ocupa del estudio de los invariantes de los sistemas algebraicos, i.e., del estudio de las propiedades de los sistemas algebraicos que son preservadas bajo equivalencias elementales. Para ciertos autores, e.g., Chang & Keisler, la teoría de modelos es simplemente la "suma" del álgebra universal y de la lógica matemática.

El teorema de Löwenheim-Skolem, según el cual cualquier sentencia de la lógica de predicados de primer orden (abreviado como FOPL) que sea verdadera en un sistema algebraico lo es en uno que sea a lo sumo infinito-numerable, es el primer resultado de la FOPL que puede ser considerado como perteneciente a la teoría de modelos. Sin embargo, el primer resultado que establece un vínculo entre la noción de demostrabilidad y la de verdad es el teorema de completud de Gödel, según el cual una sentencia de FOPL es verdadera exactamente si es demostrable, estableciendo asi la identidad, para la FOPL, entre las relaciones de consecuencia sintáctica y semántica.

Cabe señalar también que Tarski, en su trabajo "The concept of truth in formalized languages", realizó un profundo análisis de la interpretación de las sentencias de un lenguaje formal en sistemas algebraicos adecuados al mismo. Además, Skolem, en la misma época, demostró la existencia de modelos no-standard de la aritmética, haciendo uso del método de los ultraproductos.

Estos desarrollos autónomos de la teoría de modelos, tuvieron su continuación con los trabajos de Mal'cev sobre el teorema de compacidad, según el cual una condición suficiente para que un conjunto de sentencias de FOPL tenga un modelo es que cada subconjunto finito del mismo tenga un modelo, y su aplicación a la demostración de teoremas de la teoría de grupos infinitos. Además, el teorema de compacidad proporciona un medio para demostrar teoremas de encajamiento en álgebra, e.g., si cualquier subanillo finito-generado de un anillo no conmutativo se puede encajar en un anillo con división, entonces el anillo se puede encajar en un anillo con división. También en esta línea algebraica, A. Robinson estudió a los conjuntos de modelos de conjuntos de sentencias de la FOPL en el mismo sentido que en la geometría algebraica se estudian los conjuntos de los ceros de ideales generados por polinomios y obtuvo resultados aplicables a la teoría de cuerpos.

Otro tipo de aplicación está relacionado con la completud, e.g., hay resultados acerca del cuerpo de los números reales que se pueden formular en FOPL pero que han sido demostrados usando métodos topológicos. Un resultado de Tarski demuestra que tales resultados son verdaderos en todos los cuerpos reales cerrados independientemente de sus propiedades topológicas. Un método relacionado ha sido usado por A. Robinson para dar una nueva demostración de un teorema de Artin relativo a un problema de Hilbert. El mismo A. Robinson, haciendo uso del método de los ultraproductos, aplicó la teoría de modelos para obtener nuevos resultados en el análisis matemático. También han sido obtenidos resultados acerca de la independencia y consistencia relativa, por parte de Cohen, mediante la construcción de modelos adecuados.

Además, los métodos de la teoría de modelos permiten obtener caracterizaciones de ciertas clases de sentencias mediante el estudio de las propiedades de clausura de los conjuntos de modelos de las mismas, asi e.g., como vimos en el capítulo anterior, las clases ecuacionalmente definibles son exactamente las clases de álgebra universales cerradas bajo imágenes homomorfas, subálgebras y productos.

1. Sistemas algebraicos homogéneos

En esta sección definimos en primer lugar las nociones de signatura de primer orden

1.1. **Signaturas y sistemas algebraicos.**

Definition 1. Una *signatura de primer orden* es un par $((\Sigma, \mathrm{ar}), (\Pi, \mathrm{rk}))$, abreviado como $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$ en el que Σ, el conjunto de los *símbolos de operación*, es un conjunto, ar, la *ariedad*, una aplicación de Σ en N, Π, el conjunto de los *símbolos de relación*, es un conjunto, rk, el *rango*, una aplicación de Π en $\mathrm{N} - 1$. Si $\sigma \in \Sigma$ y $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, entonces decimos que σ es un símbolo de operación n-ario, y, para cada $n \in \mathrm{N}$, denotamos por Σ_n el conjunto de todos los símbolos de operación n-arios. Del mismo modo, si $\pi \in \Pi$ y $\mathrm{rk}(\pi) = n$, entonces decimos que π es un símbolo de relación n-ario, y, para cada $n \in \mathrm{N} - 1$, denotamos por Π_n el conjunto de todos los símbolos de relación n-arios.

La ariedad de un símbolo de operación σ, indica el número de los argumentos que tendrá cualquier realización de σ como una operación sobre un conjunto. Por otra parte, el rango de un símbolo de relación π, indica el número de los argumentos que tendrá cualquier realización de π como una relación sobre un conjunto.

Definition 2. Sea $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$ una signatura de primer orden y A un conjunto. Una $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-*estructura* sobre el conjunto A es un par (F, R) en el que F es una aplicación de Σ en $\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \mathrm{Hom}(A^{\mathrm{ar}(\sigma)}, A)$ tal que, para cada $\sigma \in \Sigma$, $F_\sigma \in \mathrm{Hom}(A^{\mathrm{ar}(\sigma)}, A)$ y R una aplicación de Π en $\bigcup_{\pi \in \Pi} \mathrm{Sub}(A^{\mathrm{rk}(\pi)})$ tal que, para cada $\pi \in \Pi$, $R_\pi \in \mathrm{Sub}(A^{\mathrm{rk}(\pi)})$.

En algunos casos, para evitar equivocaciones, denotaremos la $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-estructura que estemos considerando sobre un conjunto A por $(F^{\underline{A}}, R^{\underline{A}})$, a las operaciones que la componen por $F^{\underline{A}}_\sigma$, con $\sigma \in \Sigma$ y a las relaciones por $R^{\underline{A}}_\pi$. Además, cuando $\mathrm{ar}(\sigma) = 0$, denotaremos por $\sigma^{\underline{A}}$ el valor de $F^{\underline{A}}_\sigma \colon 1 \longrightarrow A$ en el único miembro de 1.

Un $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-*sistema algebraico* o, para abreviar, un *sistema algebraico* es un triplo ordenado $\underline{A} = (A, F, R)$, en el que A es un conjunto y (F, R) una $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-estructura sobre A.

Si $\Sigma = \varnothing$, entonces a los $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-sistemas algebraicos los denominamos $\underline{\Pi}$-*sistemas relacionales*. Además, si $\underline{A} = (A, F, R)$ es un $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-sistema algebraico, el par (A, F) es la $\underline{\Sigma}$-álgebra subyacente del mismo y, del mismo modo, el par (A, R), el $\underline{\Pi}$-sistema relacional subyacente de dicho sistema algebraico.

1.2. **Homomorfismos de sistemas algebraicos.** Una vez definido el concepto de $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-sistema algebraico, definimos los homomorfismos entre los mismos, la composición de los homomorfismos y establecemos las propiedades básicas de la composición.

Definition 3. Sean $\underline{A} = (A, F, R)$ y $\underline{B} = (B, G, T)$ dos $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-sistemas algebraicos. Un $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-*homomorfismo* o, simplemente, un *homomorfismo* de $\underline{A}$ en $\underline{B}$ es un triplo ordenado $(\underline{A}, f, \underline{B})$, abreviado como f y denotado por $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$, en el que f es una aplicación de A en B, tal que:

(1) Para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r, "f^n"] \arrow[d, "F_\sigma"'] & B^n \arrow[d, "G_\sigma"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta, i.e., para cada $x \in A^n$, $f(F_\sigma(x)) = G_\sigma(f^n(x))$.

(2) Para cada $\pi \in \Pi$, con $\mathrm{rk}(\pi) = n$, $f^n[R_\pi] \subseteq T_\pi$ i.e., para cada $x \in A^n$, si $x \in R_\pi$ $f^n(x) \in T_\pi$.

Proposition 1. *Sean* $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$, $g\colon \underline{B} \longrightarrow \underline{C}$ *y* $h\colon \underline{C} \longrightarrow \underline{D}$ *tres homomorfismos. Entonces:*

(1) *Siendo* $\mathrm{id}_{\underline{A}} = (\underline{A}, id_A, \underline{A})$, *se cumple que* $\mathrm{id}_{\underline{A}}\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{A}$, *el* $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-*homomorfismo* identidad *de* $\underline{A}$, *es un endomorfismo de* $\underline{A}$.

(2) *Siendo* $g \circ f = (\underline{A}, g \circ f, \underline{C})$, *se cumple que* $g \circ f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$, *el* $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-*homomorfismo* composición *de* f *y* g, *es un* $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-*homomorfismo de* $\underline{A}$ *en* $\underline{C}$.

(3) (Asociatividad). *El diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \underline{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] \arrow[drr, bend left=60, "(h \circ g) \circ f"] \arrow[drr, bend right=60, "h \circ (g \circ f)"'] & \underline{B} \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h \circ g"] & \\ & \underline{C} \arrow[r, "h"'] & \underline{D} \end{tikzcd}$$

conmuta.

(4) (Neutros). *Los diagramas:*

$$\begin{tikzcd} \underline{A} \arrow[r, "id_{\underline{A}}"] \arrow[dr, "f"'] & \underline{A} \arrow[d, "f"] \\ & \underline{B} \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} \underline{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & \underline{B} \arrow[d, "id_{\underline{B}}"] \\ & \underline{B} \end{tikzcd}$$

conmutan.

Proof. □

Las propiedades que acabamos de establecer acerca de los homomorfismos, nos permiten afirmar que los $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-sistemas algebraicos cuyos conjuntos subyacentes pertenezcan a un universo de Grothendieck, U, arbitrario pero fijo, junto con los homomorfismos entre tales $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-sistemas algebraicos, constituyen una categoría.

Proposition 2. *Sea U un universo de Grothendieck. Entonces los $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-sistemas algebraicos $\underline{A}$ tales que $A \in U$, junto con los homomorfismos entre ellos constituyen una categoría:* $\mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$.

Proof. □

Antes de proseguir con el estudio de los conceptos de subsistema algebraico y cociente de un sistema algebraico y debido a que nos será de utilidad cuando definamos los conceptos de encajamiento y de homomorfismo fuerte, demostramos que podemos inducir familias de relaciones, de manera optimal, sobre el dominio común de una familia de aplicaciones cuando los codominios de las mismas estén dotados de familias de relaciones, y, dualmente, que podemos inducir familias de relaciones, de manera cooptimal, sobre el codominio común de una familia de aplicaciones cuando los dominios de las mismas estén dotados de familias de relaciones.

Lemma 1. *Sea (A, F) una $\underline{\Sigma}$-álgebra, $(\underline{B}_i \mid i \in I)$ una familia de $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-sistemas algebraicos, siendo, para cada $i \in I$, $\underline{B}_i = (B_i, G^i, T^i)$ y $f = (f_i \mid i \in I)$ una familia de $\underline{\Sigma}$-homomorfismos, en la que, para cada $i \in I$, $f_i \colon (A, F) \longrightarrow (B_i, G^i)$. Entonces hay una única familia de relaciones $R = (R_\pi \mid \pi \in \Pi)$ en A, en la que, para cada $\pi \in \Pi$, con $\mathrm{rk}(\pi) = n$, $R_\pi \subseteq A^n$, a la que denotamos por $L^f(\underline{B}_i \mid i \in I)$, y denominamos el* levantamiento optimal de $(\underline{B}_i \mid i \in I)$ a través de f, *tal que:*

(1) *Para cada $i \in I$, $f_i \colon (A, F, L^f(\underline{B}_i \mid i \in I)) \longrightarrow \underline{B}_i$.*
(2) *Para cada $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-sistema algebraico $\underline{C} = (C, H, U)$ y cada $\underline{\Sigma}$-homomorfismo $g \colon (C, H) \longrightarrow (A, F)$, si, para cada $i \in I$, $f_i \circ g \colon \underline{C} \longrightarrow \underline{B}_i$, entonces $g \colon \underline{C} \longrightarrow (A, F, L^f(\underline{B}_i \mid i \in I))$.*

Además, se cumple que:

(1) *Para cada familia de relaciones $R = (R_\pi \mid \pi \in \Pi)$ en A:*
$$L^{\mathrm{id}_A}(A, F, R) = R.$$
(2) *Si, para cada $i \in I$, $(\underline{C}_{i,j} \mid j \in J_i)$ es una familia de $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-sistemas algebraicos, $g_i = (g_{i,j} \mid j \in J_i)$ una familia de $\underline{\Sigma}$-homomorfismos, en la que, para cada $j \in J_i$, $g_{i,j} \colon (B_i, G^i) \longrightarrow (C_{i,j}, H^{i,j})$ y $T^i = L^{g_i}(\underline{C}_{i,j} \mid j \in J_i)$, entonces*
$$L^{(g_i \circ f \mid i \in I)}(\underline{C}_{i,j} \mid (i,j) \in \coprod_{i \in I} J_i) = L^f((B_i, L^{g_i}(\underline{C}_{i,j} \mid j \in J_i)) \mid i \in I).$$

Proof. Es suficiente que tomemos la familia $R = (R_\pi \mid \pi \in \Pi)$ en A, en la que, para cada $\pi \in \Pi$, R_π es la relación definida como:
$$R_\pi = \bigcap_{i \in I} (f_i^n)^{-1}[T_\pi^i]$$
□

Demuéstrese que dada una $\underline{\Sigma}$-álgebra (A, F), el levantamiento optimal de $(\underline{B}_i \mid i \in \varnothing)$ a través de $f = (f_i \mid i \in \varnothing)$ es $(A^{\mathrm{rk}(\pi)} \mid \pi \in \Pi)$.

Definition 4. Sea $f \colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ un homomorfismo de $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-sistemas algebraicos. Decimos que f es un homomorfismo *optimal* si, para cada $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-sistema algebraico $\underline{C} = (C, H, U)$ y cada $\underline{\Sigma}$-homomorfismo $g \colon (C, H) \longrightarrow (A, F)$, si $f \circ g \colon \underline{C} \longrightarrow \underline{B}$, entonces $g \colon \underline{C} \longrightarrow \underline{A}$.

Proposition 3. *Sea $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ un homomorfismo de $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-sistemas algebraicos. Una condición necesaria y suficiente para que f sea un homomorfismo optimal es que $R = L^f(\underline{B})$.*

Proof. $\square$

Proposition 4. *Si $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ y $g\colon \underline{B} \longrightarrow \underline{C}$ son homomorfismos optimales, entonces $g \circ f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ es un homomorfismo optimal. Además, si $g \circ f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ es un homomorfismo optimal, entonces $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ es optimal.*

Proof. $\square$

Proposition 5. *Sea (A, F) una $\underline{\Sigma}$-álgebra. Entonces el sistema algebraico $(A, F, (A^{\mathrm{rk}(\pi)} \mid \pi \in \Pi))$ es tal que, para cada sistema algebraico $\underline{B}$ y cada homomorfismo de $\underline{\Sigma}$-álgebras f de $(B, F^{\underline{B}})$ en (A, F), hay un único homomorfismo de sistemas algebraicos g de $\underline{B}$ en $(A, F, (A^{\mathrm{rk}(\pi)} \mid \pi \in \Pi))$ tal que $\mathrm{id}_{(A,F)} \circ g = f$.*

Proof. $\square$

Lemma 2. *Sea (A, F) una $\underline{\Sigma}$-álgebra, $(\underline{B}_i \mid i \in I)$ una familia de $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-sistemas algebraicos, siendo, para cada $i \in I$, $\underline{B}_i = (B_i, G^i, T^i)$ y $f = (f_i \mid i \in I)$ una familia de $\underline{\Sigma}$-homomorfismos, en la que, para cada $i \in I$, $f_i\colon (B_i, G^i) \longrightarrow (A, F)$. Entonces hay una única familia de relaciones $(R_\pi \mid \pi \in \Pi)$ en A, en la que, para cada $\pi \in \Pi$, con $\mathrm{rk}(\pi) = n$, $R_\pi \subseteq A^n$, a la que denotamos por $L_f(\underline{B}_i \mid i \in I)$, y denominamos el* levantamiento cooptimal de $(\underline{B}_i \mid i \in I)$ a través de f, *tal que:*

(1) *Para cada $i \in I$, $f_i\colon \underline{B}_i \longrightarrow (A, F, L_f(\underline{B}_i \mid i \in I))$.*
(2) *Para cada $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-sistema algebraico $\underline{C} = (C, H, U)$ y cada $\underline{\Sigma}$-homomorfismo $g\colon (A, F) \longrightarrow (C, H)$, si, para cada $i \in I$, $g \circ f_i\colon \underline{B}_i \longrightarrow \underline{C}$, entonces $g\colon (A, F, L_f(\underline{B}_i \mid i \in I)) \longrightarrow \underline{C}$.*

Además, se cumple que:

(1) *Para cada familia de relaciones $R = (R_\pi \mid \pi \in \Pi)$ en A:*

$$L_{\mathrm{id}_A}(A, F, R) = R.$$

(2) *Si, para cada $i \in I$, $(\underline{C}_{i,j} \mid j \in J_i)$ es una familia de $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-sistemas algebraicos, $g_i = (g_{i,j} \mid j \in J_i)$ una familia de $\underline{\Sigma}$-homomorfismos, en la que, para cada $j \in J_i$, $g_{i,j}\colon (C_{i,j}, H^{i,j}) \longrightarrow (B_i, G^i)$ y $T^i = L_{g_i}(\underline{C}_{i,j} \mid j \in J_i)$, entonces*

$$L_{(f \circ g_i \mid i \in I)}(\underline{C}_{i,j} \mid (i,j) \in \coprod_{i \in I} J_i) = L_f((B_i, L_{g_i}(\underline{C}_{i,j} \mid j \in J_i)) \mid i \in I).$$

Proof. Es suficiente que tomemos la familia $R = (R_\pi \mid \pi \in \Pi)$ en A, en la que, para cada $\pi \in \Pi$, R_π es la relación definida como:

$$R_\pi = \bigcup_{i \in I} f_i^n[T_\pi^i]$$

$\square$

Demuéstrese que dada una $\underline{\Sigma}$-álgebra (A, F), el levantamiento cooptimal de $(\underline{B}_i \mid i \in \varnothing)$ a través de $f = (f_i \mid i \in \varnothing)$ es $(\varnothing \mid \pi \in \Pi)$.

Definition 5. Sea $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ un homomorfismo de $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-sistemas algebraicos. Decimos que f es un homomorfismo *cooptimal* si, para cada $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-sistema algebraico $\underline{C} = (C, H, U)$ y cada $\underline{\Sigma}$-homomorfismo $g\colon (B, G) \longrightarrow (C, H)$, si $g \circ f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$, entonces $g\colon \underline{B} \longrightarrow \underline{C}$.

Proposition 6. *Sea* $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ *un homomorfismo de* $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$*-sistemas algebraicos. Una condición necesaria y suficiente para que* f *sea un homomorfismo cooptimal es que* $T = \mathrm{L}_f(\underline{A})$.

Proof. □

Proposition 7. *Si* $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ *y* $g\colon \underline{B} \longrightarrow \underline{C}$ *son homomorfismos cooptimales, entonces* $g \circ f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ *es un homomorfismo cooptimal. Además, si* $g \circ f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ *es un homomorfismo optimal, entonces* $g\colon \underline{B} \longrightarrow \underline{C}$ *es cooptimal.*

Proof. □

Proposition 8. *Sea* (A, F) *una* $\underline{\Sigma}$*-álgebra. Entonces el sistema algebraico* $(A, F, (\varnothing \mid \pi \in \Pi))$ *es tal que, para cada sistema algebraico* $\underline{B}$ *y cada homomorfismo de* $\underline{\Sigma}$*-álgebras* f *de* (A, F) *en* $(B, F^{\underline{B}})$*, hay un único homomorfismo de sistemas algebraicos* g *de* $(A, F, (\varnothing \mid \pi \in \Pi))$ *en* $\underline{B}$ *tal que* $g \circ \mathrm{id}_{(A,F)} = f$.

Proof. □

Definition 6. Sean $\underline{A} = (A, F, R)$ y $\underline{B} = (B, G, T)$ dos $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-sistemas algebraicos.

(1) Un *encajamiento* de $\underline{A}$ en $\underline{B}$ es un homomorfismo optimal inyectivo f de $\underline{A}$ en $\underline{B}$, i.e., un homomorfismo inyectivo tal que $R = \mathrm{L}^f(\underline{B})$.
(2) Un *homomorfismo fuerte* de $\underline{A}$ en $\underline{B}$ es un homomorfismo cooptimal sobreyectivo f de $\underline{A}$ en $\underline{B}$, i.e., un homomorfismo sobreyectivo tal que $T = \mathrm{L}_f(\underline{A})$.

Proposition 9. *Si* $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ *es un homomorfismo optimal sobreyectivo, entonces es un homomorfismo fuerte.*

Proof. □

Proposition 10. *Si* $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ *y* $g\colon \underline{B} \longrightarrow \underline{C}$ *son encajamientos, resp., homomorfismos fuertes, entonces* $g \circ f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ *es un encajamiento, resp., un homomorfismo fuerte.*

Proof. □

Proposition 11. *Si* $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ *y* $g\colon \underline{B} \longrightarrow \underline{C}$ *son homomorfismos y* $g \circ f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ *es un encajamiento, entonces* f *es un encajamiento.*

Proof. □

Proposition 12. *Si* $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ *y* $g\colon \underline{B} \longrightarrow \underline{C}$ *son homomorfismos y* $g \circ f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ *es un homomorfismo fuerte, entonces* g *es un homomorfismo fuerte.*

Proof. □

Proposition 13. *Sea* $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ *un homomorfismo. Una condición necesaria y suficiente para que* f *sea un isomorfismo es que sea un homomorfismo fuerte inyectivo.*

Proof. □

Demuéstrese que una condición necesaria y suficiente para que un homomorfismo $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ sea un isomorfismo es que sea un homomorfismo optimal biyectivo, o que sea un homomorfismo cooptimal biyectivo.

1.3. **Subsistemas algebraicos.**

Definition 7. Sean $\underline{A} = (A, F, R)$ y $\underline{B} = (B, G, T)$ dos $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-sistemas algebraicos y X un subconjunto de A.

(1) Si $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, decimos que X está *cerrado bajo la operación* $F_\sigma\colon A^n \longrightarrow A$ si, para cada $a \in X^n$, $F_\sigma(a) \in X$, i.e., si $F_\sigma[X^n] \subseteq X$.
(2) Decimos que X es un *cerrado* de $\underline{A}$ si, para cada $\sigma \in \Sigma$ con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, y cada $a \in X^n$, $F_\sigma(a) \in X$, i.e., si X está cerrado bajo cada una de las operaciones estructurales de $\underline{A}$. Al conjunto de los cerrados de $\underline{A}$ lo denotamos por $\mathrm{S}(\underline{A})$.
(3) Decimos que $\underline{B}$ es un *subsistema algebraico* de $\underline{A}$, y lo denotamos por $\underline{B} \leq \underline{A}$, si $B \subseteq A$ y si la inclusión canónica, $\mathrm{in}_{\underline{B}} = (\underline{B}, \mathrm{in}_B, \underline{A})$, de $\underline{B}$ en $\underline{A}$ es un encajamiento de $\underline{B}$ en $\underline{A}$. Si además $B \neq A$, decimos que $\underline{B}$ es un *subsistema algebraico estricto* de A. Denotamos por $\mathrm{Sub}(\underline{A})$ el conjunto de los subsistemas algebraicos de A.

Si $\underline{B} = (B, G, T)$ es un subsistema algebraico de $\underline{A} = (A, F, R)$, entonces se cumple que $G = F{\restriction}B$ y que, para cada $\pi \in \Pi$, con $\mathrm{rk}(\pi) = n$, $T_\pi = R_\pi \cap B^n$.

Proposition 14. *Sea $\underline{A}$ un $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-sistema algebraico. Entonces existe una biyección, natural, entre el conjunto $S(\underline{A})$, de los cerrados de $\underline{A}$ y el conjunto* $\mathrm{Sub}(\underline{A})$*, de los subsistemas algebraicos de $\underline{A}$. Además, esa biyección se extiende hasta un isomorfismo, cuando los conjuntos $S(\underline{A})$ y* $\mathrm{Sub}(\underline{A})$ *se consideran ordenados por la inclusión.*

Proof. □

Proposition 15. *Sea $\underline{A}$ un sistema algebraico y X un cerrado de $\underline{A}$. Entonces hay un sistema algebraico $\underline{X}$, el* subsistema algebraico de $\underline{A}$ asociado a X, *y un encajamiento* $\mathrm{in}_{\underline{X}}\colon \underline{X} \longrightarrow \underline{A}$, *la* inclusión canónica *de $\underline{X}$ en $\underline{A}$, tal que:*

(1) $\mathrm{Im}(\mathrm{in}_{\underline{X}}) = X$.
(2) (Propiedad universal) *Para cada sistema algebraico $\underline{B}$ y cada homomorfismo $f\colon \underline{B} \longrightarrow \underline{A}$, si* $\mathrm{Im}(f) \subseteq X$*, entonces existe un único homomorfismo g de $\underline{B}$ en $\underline{X}$ tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
& \underline{B} \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "f"] \\
\underline{X} \arrow[r, "\mathrm{in}_{\underline{X}}"'] & \underline{A}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Proof. □

La proposición que sigue afirma que todo homomorfismo entre sistemas algebraicos admite una (epi, regular mono)-factorización.

Proposition 16. *Sean $\underline{A}$ y $\underline{B}$ dos $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-sistemas algebraicos y $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ un homomorfismo. Entonces: El diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\underline{A} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f^{\mathrm{s}}"'] & & \underline{B} \\
& (\mathrm{Im}(f), G{\restriction}\mathrm{Im}(f), \mathrm{L}^{\mathrm{in}_{\underline{\mathrm{Im}}(f)}}(\underline{B})) \arrow[ur, "\mathrm{in}_{\underline{\mathrm{Im}}(f)}"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta, y es una (epi,regular mono)-factorización de f.

Proof. $\square$

Proposition 17. *Sea $\underline{A}$ un sistema algebraico. Entonces el conjunto de los cerrados de $\underline{A}$, $S(\underline{A})$, es un sistema de clausura algebraico sobre A, i.e., tiene las siguientes propiedades:*

1. *$A \in S(\underline{A})$.*
2. *Si $\mathcal{C} \subseteq S(\underline{A})$ y $\mathcal{C} \neq \varnothing$, entonces $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C \in S(\underline{A})$.*
3. *Si $\mathcal{C} \subseteq S(\underline{A})$, $\mathcal{C} \neq \varnothing$ y si dados $X, Y \in \mathcal{C}$, hay un $Z \in \mathcal{C}$ tal que $X \cup Y \subseteq Z$, entonces $\bigcup_{C\in\mathcal{C}} C \in S(\underline{A})$.*

Proof. $\square$

Corollary 1. *Sea $\underline{A}$ un sistema algebraico. Entonces la endoaplicación $Sg_{\underline{A}}$ del conjunto $Sub(A)$, definida como:*

$$Sg_{\underline{A}} \begin{cases} Sub(A) \longrightarrow Sub(A) \\ \quad X \quad \longmapsto \bigcap\{\, C \in S(\underline{A}) \mid X \subseteq C \,\} \end{cases}$$

tiene las siguientes propiedades:

1. *$Im(Sg_{\underline{A}}) \subseteq S(\underline{A})$.*
2. *$\{\, X \in Sub(A) \mid X = Sg_{\underline{A}}(X) \,\} = S(\underline{A})$.*
3. *$Sg_{\underline{A}}$ es extensiva o inflacionaria, i.e., para cada $X \in Sub(A)$,*
$$X \subseteq Sg_{\underline{A}}(X).$$
4. *$Sg_{\underline{A}}$ es isótona, i.e., para cada $X, Y \in Sub(A)$, si $X \subseteq Y$, entonces*
$$Sg_{\underline{A}}(X) \subseteq Sg_{\underline{A}}(Y).$$
5. *$Sg_{\underline{A}}$ es idempotente, i.e., para cada $X \in Sub(A)$,*
$$Sg_{\underline{A}}(X) = Sg_{\underline{A}}(Sg_{\underline{A}}(X)).$$
6. *$Sg_{\underline{A}}$ es algebraica, i.e., para cada $\mathcal{X} \subseteq Sub(A)$, si $\mathcal{X} \neq \varnothing$ y para cada $X, Y \in \mathcal{X}$, existe un $Z \in \mathcal{X}$ tal que $X \cup Y \subseteq Z$, entonces*
$$Sg_{\underline{A}}(\bigcup \mathcal{X}) = \bigcup_{X\in\mathcal{X}} Sg_{\underline{A}}(X).$$

Por consiguiente, para cada $X \subseteq A$, $Sg_{\underline{A}}(X)$ es el mínimo cerrado de $\underline{A}$ que contiene a X, y lo denominamos el cerrado de $\underline{A}$ generado *por X. Además, al subsistema algebraico de $\underline{A}$ canónicamente asociado a $Sg_{\underline{A}}(X)$, lo denotamos por $\underline{Sg}_{\underline{A}}(X)$ y lo denominamos, también, el subsistema algebraico de $\underline{A}$ generado por X.*

Proof. $\square$

A continuación, introducimos unas nociones que nos permitirán obtener una descripción más *constructiva* del subsistema algebraico generado por un conjunto.

Definition 8. Sea $\underline{A} = (A, F, R)$ un sistema algebraico. Entonces:

1. Denotamos por $\mathrm{E}_{\underline{A}}$ el operador sobre $\mathrm{Sub}(A)$, definido como:
$$\mathrm{E}_{\underline{A}} \begin{cases} \mathrm{Sub}(A) \longrightarrow \mathrm{Sub}(A) \\ \quad X \quad \longmapsto X \cup \Big(\bigcup_{\sigma\in\Sigma} F_\sigma[X^{\mathrm{ar}(\sigma)}] \Big). \end{cases}$$
2. Si $X \subseteq A$, entonces denotamos por $(\mathrm{E}^n_{\underline{A}}(X) \mid n \in \mathrm{N})$ la familia en $\mathrm{Sub}(A)$ definida por recursión como:
$$\mathrm{E}^0_{\underline{A}}(X) = X,$$
$$\mathrm{E}^{n+1}_{\underline{A}}(X) = \mathrm{E}_{\underline{A}}(\mathrm{E}^n_{\underline{A}}(X)),\ n \geq 0.$$

Además, convenimos que:

$$\mathrm{E}^{\omega}_{\underline{A}}(X) = \bigcup(\mathrm{E}^{n}_{\underline{A}}(X) \mid n \in \mathrm{N})$$

Proposition 18. *Si $\underline{A}$ es un sistema algebraico y $X \subseteq A$, entonces $\mathrm{Sg}_{\underline{A}}(X) = \mathrm{E}^{\omega}_{\underline{A}}(X)$.*

Proof. □

Definition 9. Sea $\underline{A}$ un sistema algebraico y $X \subseteq A$. Decimos que X es un *conjunto de generadores* de $\underline{A}$, o que X *genera* $\underline{A}$, si $\mathrm{Sg}_{\underline{A}}(X) = A$. Si $\mathfrak{m}$ es un cardinal, decimos que $\underline{A}$ está $\mathfrak{m}$-*generado* si hay un subconjunto X de A tal que $\mathrm{card}(X) = \mathfrak{m}$ y $\mathrm{Sg}_{\underline{A}}(X) = A$. Además, diremos que $\underline{A}$ está *finitamente generado*, o que es de *generación finita*, si hay un subconjunto X de A tal que $\mathrm{card}\, X < \aleph_0$ y X genera $\underline{A}$.

Proposition 19. *Si $\underline{A}$ es un sistema algebraico que está finitamente generado, entonces cualquier conjunto de generadores de $\underline{A}$ contiene un subconjunto finito que también genera $\underline{A}$*

Proof. □

Proposition 20. *Si $\underline{A}$ es un sistema algebraico, entonces una condición necesaria y suficiente para que toda ω-cadena ascendente de subsistemas algebraicos de $\underline{A}$ sea estacionaria es que todo subsistema algebraico de $\underline{A}$ esté finitamente generado.*

Proof. □

Proposition 21. *Si $\underline{A}$ es un sistema algebraico que está finitamente generado e Y es un subsistema algebraico de $\underline{A}$ tal que $Y \neq A$, entonces hay un subsistema algebraico de $\underline{A}$ distinto de A que contiene a Y y es maximal con esas propiedades.*

Proof. □

Proposition 22. *Sean $f, g\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ dos homomorfismos y X un subconjunto de A. Si f y g coinciden en X, entonces también coinciden en $\mathrm{Sg}_{\underline{A}}(X)$.*

Proof. □

Sean $\underline{A}$ y $\underline{B}$ dos sistemas algebraicos. Demuéstrese que hay a lo sumo un homomorfismo de $\underline{\mathrm{Sg}_{\underline{A}}}(\varnothing)$ en $\underline{B}$. Además, si tal homomorfismo existe, demuéstrese que tiene como imagen el subsistema algebraico de $\underline{B}$ generado por $\varnothing$.

Proposition 23. *Sea f una biyección de un conjunto de generadores X de un sistema algebraico $\underline{A}$ en un conjunto de generadores Y de otro sistema algebraico $\underline{B}$. Si g y h son extensiones homomorfas de f y de la inversa f^{-1} hasta $\underline{A}$ y $\underline{B}$, resp., entonces g es un isomorfismo de $\underline{A}$ en $\underline{B}$, cuyo inverso es h.*

Proof. □

Proposition 24. *Sea $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ un homomorfismo de sistemas algebraicos, $X \in \mathrm{S}(\underline{A})$ e $Y \in \mathrm{S}(\underline{B})$. Entonces $f[X] \in \mathrm{S}(\underline{B})$ y $f^{-1}[Y] \in \mathrm{S}(\underline{A})$. En particular, $\mathrm{Im}(f) \in \mathrm{S}(\underline{B})$*

Proof. □

Proposition 25. *Sea $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ un homomorfismo de sistemas algebraicos y $X \subseteq A$. Entonces $f[\mathrm{Sg}_{\underline{A}}(X)] = \mathrm{Sg}_{\underline{B}}(f[X])$.*

Proof. □

Proposition 26. *Sea* $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ *un homomorfismo de sistemas algebraicos y* X *un subconjunto de* A *tal que* $\mathrm{Sg}_{\underline{A}}(X) = A$. *Entonces* f *es un homomorfismo sobreyectivo precisamente si* $f[X]$ *es un conjunto de generadores de* $\underline{B}$

Proof. □

1.4. **Congruencias sobre los sistemas algebraicos.**

Definition 10. Sea $\underline{A}$ un sistema algebraico y Φ una ralación binaria en A. Decimos que Φ es una *congruencia* sobre $\underline{A}$ si Φ es una relación de equivalencia sobre A y si, para cada $n \in \mathrm{N} - 1$, cada $\sigma \in \Sigma_n$, y cada $(x_i \mid i \in n)$, $(y_i \mid i \in n) \in A^n$, si, para cada $i \in n$, $x_i \equiv y_i \pmod{\Phi}$, entonces $F_\sigma(x_i \mid i \in n) \equiv F_\sigma(y_i \mid i \in n) \pmod{\Phi}$.

Denotamos por $\mathrm{Cgr}(\underline{A})$ el conjunto de las congruencias sobre la $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$.

Proposition 27. *Sea* $\underline{A}$ *un sistema algebraico. Entonces el conjunto de las congruencias sobre* $\underline{A}$, $\mathrm{Cgr}(\underline{A})$, *es un sistema de clausura algebraico sobre* $A \times A$, *i.e., tiene las siguientes propiedades:*

1. $A \times A \in \mathrm{Cgr}(\underline{A})$.
2. *Si* $(\Phi_i \mid i \in I)$ *es una familia no vacía en* $\mathrm{Cgr}(\underline{A})$, *entonces* $\bigcap_{i\in I} \Phi_i$ *es una congruencia sobre* $\underline{A}$.
3. *Si* $(\Phi_i \mid i \in I)$ *es una familia no vacía en* $\mathrm{Cgr}(\underline{A})$ *y si dados* $i, j \in I$, *hay un* $k \in I$ *tal que* $\Phi_i \cup \Phi_j \subseteq \Phi_k$, *entonces* $\bigcup_{i\in I} \Phi_i$ *es una congruencia sobre* $\underline{A}$.

Proof. □

Corollary 2. *Sea* $\underline{A}$ *un sistema algebraico. Entonces la endoaplicación* $\mathrm{Cg}_{\underline{A}}$ *del conjunto* $\mathit{Sub}(A \times A)$, *definida como:*

$$\mathrm{Cg}_{\underline{A}} \begin{cases} \mathit{Sub}(A\times A) & \longrightarrow \mathit{Sub}(A \times A) \\ \Phi & \longmapsto \bigcap\{\, \Psi \in \mathrm{Cgr}(\underline{A}) \mid \Phi \subseteq \Psi \,\} \end{cases}$$

tiene las siguientes propiedades:

1. $\mathrm{Im}(\mathrm{Cg}_{\underline{A}}) \subseteq \mathrm{Cgr}(\underline{A})$.
2. $\{\, \Phi \in \mathit{Sub}(A \times A) \mid \Phi = \mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\Phi) \,\} = \mathrm{Cgr}(\underline{A})$.
3. $\mathrm{Cg}_{\underline{A}}$ *es extensiva o inflacionaria, i.e., para cada* $\Phi \in \mathit{Sub}(A \times A)$,
$$\Phi \subseteq \mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\Phi).$$
4. $\mathrm{Cg}_{\underline{A}}$ *es isótona, i.e., para cada* $\Phi, \Psi \in \mathit{Sub}(A \times A)$, *si* $\Phi \subseteq \Psi$, *entonces*
$$\mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\Psi) \subseteq \mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\Psi).$$
5. $\mathrm{Cg}_{\underline{A}}$ *es idempotente, i.e., para cada* $\Phi \in \mathit{Sub}(A \times A)$,
$$\mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\Phi) = \mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\Phi)).$$
6. $\mathrm{Cg}_{\underline{A}}$ *es algebraica, i.e., para cada familia no vacía dirigida superiormente* $(\Phi_i \mid i \in I)$ *en* $\mathrm{Cgr}(\underline{A})$ *se cumple que*
$$\mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\bigcup_{i\in I} \Phi_i) = \bigcup_{i\in I} \mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\Phi_i).$$

Por consiguiente, para cada $\Phi \subseteq A \times A$, $\mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\Phi)$ *es la mínima congruencia sobre* $\underline{A}$ *que contiene a* Φ, *y la denominamos la congruencia sobre* $\underline{A}$ generada *por* Φ.

Proof. □

Proposition 28. *Sea* $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ *un homomorfismo de sistemas algebraicos. Entonces el* núcleo *de* f, *i.e.,* $\mathrm{Ker}(f) = \{\, (x, y) \in A \times A \mid f(x) = f(y) \,\}$, *es una congruencia sobre* $\underline{A}$.

Proof. □

Proposition 29. *Sea* $\underline{A}$ *un sistema algebraico y* $\Phi \in \mathrm{Cg}_{\underline{A}}$. *Entonces hay un sistema algebraico* $\underline{A}/\Phi$, *el sistema algebraico* cociente de $\underline{A}$ entre Φ, *y un homomorfismo fuerte* $\mathrm{pr}_\Phi \colon \underline{A} \longrightarrow \underline{A}/\Phi$, *la* proyección canónica *de* $\underline{A}$ *en* $\underline{A}/\Phi$, *tal que:*

(1) $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}_\Phi) = \Phi$.
(2) (Propiedad universal) *Para cada sistema algebraico* $\underline{B}$ *y cada homomorfismo* $f \colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$, *si* $\Phi \subseteq \mathrm{Ker}(f)$, *entonces hay un único homomorfismo* $g \colon \underline{A}/\Phi \longrightarrow \underline{B}$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\underline{A} \arrow[r, "\mathrm{pr}_\Phi"] \arrow[dr, "f"'] & \underline{A}/\Phi \arrow[d, "g"] \\
& \underline{B}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Proof. □

La siguiente proposición establece que toda imagen homomorfa fuerte es isomorfa a un cociente.

Proposition 30. *Sea* $f \colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ *un homomorfismo fuerte de sistemas algebraicos. Entonces* $\underline{A}/\mathrm{Ker}(f)$ *es isomorfa a* $\underline{B}$.

Proof. □

De hecho, determinar, salvo isomorfismo, todas las imágenes homomorfas fuertes de un sistema algebraico $\underline{A}$ equivale a determinar todas las congruencias sobre $\underline{A}$. Además, determinar, salvo isomorfismo, todos los homomorfismos optimales sobreyectivos desde un sistema algebraico $\underline{A}$ equivale a determinar todas las equivalencias Φ sobre A que cumplen las siguientes propiedades:

(1) Para cada $n \in \mathrm{N} - 1$, cada $\sigma \in \Sigma_n$, y cada $(x_i \mid i \in n)$, $(y_i \mid i \in n) \in A^n$, si, para cada $i \in n$, $x_i \equiv y_i \pmod{\Phi}$, entonces $F_\sigma(x_i \mid i \in n) \equiv F_\sigma(y_i \mid i \in n) \pmod{\Phi}$.
(2) Para cada $n \in \mathrm{N} - 1$, cada $\pi \in \Pi_n$, y cada $(x_i \mid i \in n)$, $(y_i \mid i \in n) \in A^n$, si, para cada $i \in n$, $x_i \equiv y_i \pmod{\Phi}$ y $(x_i \mid i \in n) \in R_\pi$, entonces $(y_i \mid i \in n) \in R_\pi$

Este último tipo de equivalencias lo usaremos cuando consideremos los productos reducidos de sistemas algebraicos.

La proposición que sigue afirma que todo homomorfismo entre sistemas algebraicos admite una (regular epi, mono)-factorización.

Proposition 31. *Sean* $\underline{A}$ *y* $\underline{B}$ *dos* $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$*-sistemas algebraicos y* $f \colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ *un homomorfismo. Entonces el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\underline{A} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{\mathrm{Ker}(f)}"'] & & \underline{B} \\
& (A/\mathrm{Ker}\,(f), F/\mathrm{Ker}\,(f), \mathrm{L}_{\mathrm{pr}_{\mathrm{Ker}(f)}}(\underline{A})) \arrow[ur, "f^{\mathrm{i}}"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta, y es una (regular epi, mono)-factorización de f.

Proof. □

En la proposición que sigue demostramos que un homomorfismo factoriza a traves de su núcleo y de su imagen.

Proposition 32. *Sean* $\underline{A}$ *y* $\underline{B}$ *dos sistemas algebraicos y* $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ *un homomorfismo. Entonces el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\underline{A} \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{\mathrm{Ker}(f)}"'] & & \underline{B} \\
\underline{A}/\operatorname{Ker}(f) \arrow[r, "f^{\mathrm{b}}"'] & \underline{\mathrm{Im}}(f) \arrow[ur, "\mathrm{in}_{\underline{\mathrm{Im}}(f)}"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta. Además, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\underline{A} \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathrm{Ker}(f)}"] \arrow[d, "f^{\mathrm{s}}"'] & \underline{A}/\operatorname{Ker}(f) \arrow[d, "f^{\mathrm{i}}"] \arrow[dl, "f^{\mathrm{b}}"'] \\
\underline{\mathrm{Im}}(f) \arrow[r, "\mathrm{in}_{\underline{\mathrm{Im}}(f)}"'] & \underline{B}
\end{tikzcd}$$

El homomorfismo biyectivo f^{b}*, en general, no es un isomorfismo.*

Proposition 33. *Sean* $\Phi, \Psi \in \mathrm{Cgr}(\underline{A})$ *y* $\Phi \subseteq \Psi$*. Entonces se cumple:*

(1) Ψ/Φ *es una congruencia sobre* $\underline{A}/\Phi$.
(2) *Existe un único homomorfismo* $\mathrm{p}_{\Phi,\Psi}$ *de* $\underline{A}/\Phi$ *en* $\underline{A}/\Psi$ *tal que* $\mathrm{p}_{\Phi,\Psi} \circ \mathrm{pr}_{\Phi} = \mathrm{pr}_{\Psi}$*, i.e., el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{A} \arrow[dl, "\mathrm{pr}_{\Phi}"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{\Psi}"] & \\
\underline{A}/\Phi \arrow[rr, "\mathrm{p}_{\Phi,\Psi}"'] & & \underline{A}/\Psi
\end{tikzcd}$$

conmuta. Además, $\mathrm{p}_{\Phi,\Psi}$ *es un homomorfismo fuerte.*
(3) $(\underline{A}/\Phi)/(\Psi/\Phi)$ *es isomorfo a* $\underline{A}/\Psi$.
(4) $\Psi/\Phi = \mathrm{Ker}(\mathrm{p}_{\Phi,\Psi})$.

Proof. □

Proposition 34. *Sea* $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ *un homomorfismo de sistemas algebraicos. Si* $\Phi \in \mathrm{Cgr}(\underline{B})$ *entonces la imagen inversa de* Φ *mediante* f^2 *es una congruencia sobre* $\underline{A}$*, i.e.,* $(f^2)^{-1}[\Phi] \in \mathrm{Cgr}(\underline{A})$.

Proposition 35. *Sea* $\underline{A}$ *un sistema algebraico,* $X \in \mathrm{Sub}(\underline{A})$ *y* $\Phi \in \mathrm{Cgr}(\underline{A})$*. Entonces se cumple que:*

(1) $\mathrm{Sat}_{\Phi}(X) \in \mathrm{Sub}(\underline{A})$.
(2) $\Phi \upharpoonright \mathrm{Sat}_{\Phi}(X)$ *es una congruencia sobre* $\underline{\mathrm{Sat}_{\Phi}}(X)$.
(3) $\underline{X}/(\Phi{\upharpoonright}\underline{X})$ *y* $\underline{\mathrm{Sat}_{\Phi}}(X)/(\Phi{\upharpoonright}\underline{\mathrm{Sat}_{\Phi}}(X))$ *son isomorfos.*

Proof. □

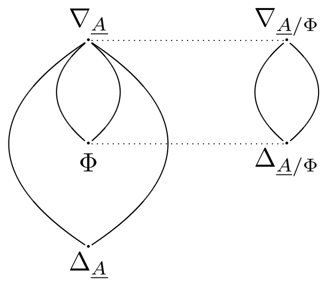
Proposition 36. *Sea* $\underline{A}$ *un sistema algebraico y* $\Phi \in \mathrm{Cgr}(\underline{A})$*. Entonces se cumple que los retículos* $(\Uparrow \Phi, \subseteq)$ *y* $\underline{\mathrm{Cgr}}(\underline{A}/\Phi)$ *son isomorfos.*

Proof. El isomorfismo viene dado por la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \Uparrow \Phi & \longrightarrow & \mathrm{Cgr}(\underline{A}/\Phi) \\ \Psi & \longmapsto & \Psi/\Phi \end{array}$$

□

La proposición anterior se puede ilustrar con la siguiente figura:



Proposition 37. *Sea* $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ *un homomorfismo fuerte de sistemas algebraicos. Si* $\Phi \subseteq A^2$*, entonces*

$$f^2[\mathrm{Ker}(f) \vee \mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\Phi)] = \mathrm{Cg}_{\underline{B}}(f^2[\Phi]).$$

Proof. $(f^2)^{-1}[\mathrm{Cg}_{\underline{B}}(f^2[\Phi])]$ es una congruencia sobre $\underline{A}$ que contiene a $\Phi \cup \mathrm{Ker}(f)$, luego contiene a $\mathrm{Ker}(f) \vee \mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\Phi)$, asi que, por ser f sobreyectiva, $\mathrm{Cg}_{\underline{B}}(f^2[\Phi])$ contiene a $f^2[\mathrm{Ker}(f) \vee \mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\Phi)]$.

Por otra parte, al ser f un homomorfismo fuerte, hay un isomorfismo entre los conjuntos ordenados $(\Uparrow \mathrm{Ker}(f), \subseteq)$ y $\underline{\mathrm{Cgr}}(\underline{B})$. Pero $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(f) \vee \mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\Phi)$ así que corresponde a una congruencia $f^2[\mathrm{Ker}(f) \vee \mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\Phi)]$ que contiene a $f^2[\Phi]$, luego $f^2[\mathrm{Ker}(f) \vee \mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\Phi)]$ contiene a $\mathrm{Cg}_{\underline{B}}(f^2[\Phi])$. □

2. Límites proyectivos de los sistemas algebraicos

Nos ocupamos, en primer lugar, de demostrar tanto la existencia de productos de familias de $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-sistemas algebraicos, como la de productos de familias de homomorfismos entre familias de $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-sistemas algebraicos, así como, en segundo lugar, de estudiar la conducta del operador de formación de productos, respecto de las identidades y de la composición de familias de homomorfismos entre familias de $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-sistemas algebraicos.

En lo que sigue, salvo indicación expresa de lo contrario, suponemos elegida una signatura de primer orden $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$ y que todos los sistemas algebraicos son $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-sistemas algebraicos.

2.1. **Productos de sistemas algebraicos.**

Proposition 38. *Sea* $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ *una familia de sistemas algebraicos. Entonces hay un par ordenado* $\left(\prod(\underline{A}_i \mid i \in I), (pr_i \mid i \in I)\right)$*, también denotado por* $\left(\prod_{i\in I} \underline{A}_i, (pr_i \mid i \in I)\right)$*, en el que* $\prod(\underline{A}_i \mid i \in I)$*, el* producto *de* $(\underline{A}_i \mid i \in I)$*, es un sistema algebraico y, para cada* $i \in I$*,* pr_i*, la* proyección canónica i-ésima *del producto, un homomorfismo de* $\prod(\underline{A}_i \mid i \in I)$ *en* $\underline{A}_i$*, que tiene la siguiente* propiedad universal*:*

Para cada par ordenado $(\underline{A}, (f_i \mid i \in I))$*, en el que* $\underline{A}$ *es un sistema algebraico y, para cada* $i \in I$*,* $f_i\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{A}_i$ *un homomorfismo de sistemas algebraicos, hay un único homomorfismo* $\langle f_i \mid i \in I \rangle : \underline{A} \longrightarrow \prod(\underline{A}_i \mid i \in I)$ *tal que, para cada* $i \in I$*, el* *diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \underline{A} \arrow[d, "\langle f_i \mid i\in I\rangle"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\ \prod(\underline{A}_i \mid i\in I) \arrow[r, "\mathrm{pr}_i"'] & \underline{A}_i \end{tikzcd}$$

conmuta.

Proof. Sea $\prod(\underline{A}_i \mid i \in I)$ el sistema algebraico cuya $\underline{\Sigma}$-álgebra subyacente es $\prod((A_i, F^i) \mid i \in I)$, el producto cartesiano de la familia de $\underline{\Sigma}$-álgebras $((A_i, F^i) \mid i \in I)$, y para el que la familia de relaciones subyacente $(R_\pi \mid \pi \in \Pi)$ es $\mathrm{L}^{(\mathrm{pr}_i | i\in I)}(\underline{A}_i \mid i \in I)$, el levantamiento optimal de $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ a través de $(\mathrm{pr}_i \mid i \in I)$, siendo, para cada $i \in I$, pr_i el homomorfismo de $\underline{\Sigma}$-álgebras de $\prod((A_i, F^i) \mid i \in I)$ en (A_i, F^i). Entonces se cumple que, para cada $\pi \in \Pi$, con $\mathrm{rk}(\pi) = n$, $\mathrm{pr}_i^n[R_\pi] \subseteq R_\pi^i$, i.e., en definitiva, que pr_i es un homomorfismo de $\prod(\underline{A}_i \mid i \in I)$ en $\underline{A}_i$.

Por otra parte, dado un par ordenado $(\underline{A}, (f_i \mid i \in I))$, en el que $\underline{A}$ es un sistema algebraico y, para cada $i \in I$, $f_i \colon \underline{A} \longrightarrow \underline{A}_i$ un homomorfismo, sea $\langle f_i \mid i \in I\rangle$ la aplicación de A en $\prod(A_i \mid i \in I)$ definida como:

$$\langle f_i \mid i \in I\rangle \begin{cases} A \longrightarrow \prod(A_i \mid i \in I) \\ a \longmapsto (f_i(a) \mid i \in I) \end{cases}.$$

Es evidente que, para cada $i \in I$, $\mathrm{pr}_i \circ \langle f_i \mid i \in I\rangle = f_i$ y que $\langle f_i \mid i \in I\rangle$ es un homomorfismo de $\underline{A}$ en $\prod(\underline{A}_i \mid i \in I)$. Con ello queda demostrada la existencia de al menos un homomorfismo de $\underline{A}$ en $\prod(\underline{A}_i \mid i \in I)$ con la propiedad indicada. Dejamos, como ejercicio, la demostración de la unicidad. □

Podemos resumir el proceso seguido en la demostración de la proposición anterior en los siguientes términos:

- En primer lugar, nos olvidamos de la estructura relacional de la familia de sistemas algebraicos dados $(\underline{A}_i \mid i \in I)$, y consideramos la familia de $\underline{\Sigma}$-álgebras $((A_i, F^i) \mid i \in I)$.
- A continuacion, consideramos el producto cartesiano de la familia de $\underline{\Sigma}$-álgebras $((A_i, F^i) \mid i \in I)$.
- Por último, dotamos a la $\underline{\Sigma}$-álgebra $\prod((A_i, F^i) \mid i \in I)$ de la familia de relaciones que se obtiene considerando el levantamiento optimal de $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ a través de $(\mathrm{pr}_i \mid i \in I)$, y comprobamos que el resultado cumple las condiciones de la proposición.

En la proposición anterior se ha demostrado, para una familia de sistemas algebraicos, la existencia de al menos un par ordenado, formado por un sistema algebraico y una familia de homomorfismos desde el sistema algebraico hasta cada uno de los sistemas algebraicos de la familia dada, sujeto a cumplir una cierta propiedad universal; pero, ni hemos afirmado que tal par sea absolutamente único, ni que el producto de la familia sea no vacío, ni que las proyecciones canónicas sean necesariamente sobreyectivas.

Demostraremos en lo que sigue, entre otras cosas, que:

- El par ordenado de la proposición anterior, es único salvo (un único) isomorfismo.
- Una condición necesaria y suficiente para que una proyección canónica sea un epimorfismo, es que desde el codominio de tal proyección hasta cualquier otro sistema algebraico de la familia exista al menos un homomorfismo.

Proposition 39. *Sea $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ una familia de sistemas algebraicos. Entonces:*

(1) *Para cualesquiera homomorfismos* $f, g\colon \underline{A} \longrightarrow \prod_{i\in I} \underline{A}_i$*, si, para cada* $i \in I$*, el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
\underline{A} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{pr}_i \circ f"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{pr}_i \circ g"'] & \prod(\underline{A}_i \mid i \in I) \arrow[r, "\mathrm{pr}_i"] & \underline{A}_i
\end{tikzcd}
$$

conmuta, entonces $f = g$*, i.e., la familia* $(\mathrm{pr}_i \mid i \in I)$ *es* colectivamente monomórfica.

(2) *Para cada par ordenado* $(\underline{A}, (f_i \mid i \in I))$*, en el que* $\underline{A}$ *sea un sistema algebraico y, para cada* $i \in I$*,* $f_i\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{A}_i$ *un homomorfismo, y para cada epimorfismo* $t\colon \prod(\underline{A}_i \mid i \in I) \twoheadrightarrow \underline{A}$*, si, para cada* $i \in I$*, el digrama:*

$$
\begin{tikzcd}
\prod(\underline{A}_i \mid i \in I) \arrow[rr, "\mathrm{pr}_i"] \arrow[dr, twoheadrightarrow, "t"'] & & \underline{A}_i \\
& \underline{A} \arrow[ur, "f_i"'] &
\end{tikzcd}
$$

conmuta, entonces t *es un isomorfismo, i.e., la familia* $(\mathrm{pr}_i \mid i \in I)$ *es* extremal.

Proof. □

Corollary 3. *Sea* $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ *una familia de sistemas algebraicos. Si un par ordenado* $(\underline{P}, (p_i \mid i \in I))$*, en el que* $\underline{P}$ *es un sistema algebraico y, para cada* $i \in I$*,* $p_i\colon \underline{P} \longrightarrow \underline{A}_i$*, tiene la propiedad de que para cada par ordenado* $(\underline{A}, (f_i \mid i \in I))$*, en el que* $\underline{A}$ *es un sistema algebraico y, para cada* $i \in I$*,* $f_i\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{A}_i$ *un homomorfismo, hay un único homomorfismo* $h\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{P}$ *tal que, para cada* $i \in I$*, el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
\underline{A} \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\
\underline{P} \arrow[r, "p_i"'] & \underline{A}_i
\end{tikzcd}
$$

conmuta, entonces hay un único isomorfismo t *de* $\underline{P}$ *en* $\prod(\underline{A}_i \mid i \in I)$ *tal que, para cada* $i \in I$*, el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
\underline{P} \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, "p_i"] & \\
\prod(\underline{A}_i \mid i \in I) \arrow[r, "\mathrm{pr}_i"'] & \underline{A}_i
\end{tikzcd}
$$

conmuta.

Proof. □

Proposition 40. *Sea* $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ *una familia de sistemas algebraicos y* $j \in I$*. Entonces una condición necesaria y suficiente para que* pr_j *sea un epimorfismo,* *es que desde $\underline{A}_j$ hasta cualquier otro sistema algebraico $\underline{A}_i$ de la familia exista al menos un homomorfismo.*

Proof. □

Demuéstrese que no existe el producto de todos los sistemas algebraicos no vacíos.

Sea $\underline{A}$ un sistema algebraico y Φ una relación de equivalencia sobre A. Demuéstrese que Φ es una congruencia sobre $\underline{A}$ precisamente si Φ es un cerrado del sistema algebraico $\underline{A} \times \underline{A}$.

Sean $\underline{A}$ y $\underline{B}$ dos sistemas algebraicos y f una aplicación de A en B. Demuéstrese que f es un homomorfismo de $\underline{A}$ en $\underline{B}$ precisamente si f es un cerrado del sistema algebraico $\underline{A} \times \underline{B}$.

Definition 11. Un sistema algebraico $\underline{A}$ es *final* si, para cada sistema algebraico $\underline{B}$, hay un único homomorfismo de $\underline{B}$ en $\underline{A}$.

Proposition 41. *Una condición necesaria y suficiente para que un sistema algebraico $\underline{A} = (A, F, R)$ sea final es que $\mathrm{card}(A) = 1$ y que, para cada $\pi \in \Pi$, con $\mathrm{rk}(\pi) = n$, $R_\pi = A^n$.*

Proposition 42. *Sea $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ una familia de sistemas algebraicos. Entonces:*

(1) *Si $I = \varnothing$, entonces $\prod(\underline{A}_i \mid i \in I)$ es un sistema algebraico final.*

(2) *Si $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ es tal que, para cada $i, j \in I$, $\underline{A}_i = \underline{A}_j$, y $\underline{A}$ es el valor común, entonces denotamos por $\underline{A}^I$ el producto $\prod(\underline{A}_i \mid i \in I)$ de la familia de sistemas algebraicos $(\underline{A}_i \mid i \in I)$, y al único homomorfismo de $\underline{A}$ en $\underline{A}^I$, determinado por la familia de homomorfismos $(\mathrm{id}_{\underline{A}} \mid i \in I)$, lo denominamos el homomorfismo* diagonal *de $\underline{A}$ en $\underline{A}^I$ y lo denotamos por $\mathrm{dg}_{I,\underline{A}}$; además, $\mathrm{dg}_{I,\underline{A}}$ es un encajamiento. Así pués, para cada $i \in I$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \underline{A} \arrow[d, tail, "\mathrm{dg}_{I,\underline{A}}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\underline{A}}"] & \\ \underline{A}^I \arrow[r, "\mathrm{pr}_i"'] & \underline{A}_i \end{tikzcd}$$

conmuta.

(3) *Si I es un conjunto final y su único miembro es i, entonces*

$$\prod(\underline{A}_i \mid i \in I) = \underline{A}_i^{\{i\}}.$$

Por consiguiente, en este caso, $\prod(\underline{A}_i \mid i \in I)$ es isomorfo a $\underline{A}_i$.

(4) *Si I tiene exactamente dos miembros y éstos son i y j, entonces*

$$\prod(\underline{A}_i \mid i \in I) \cong \underline{A}_i \times \underline{A}_j \quad y \quad \prod(\underline{A}_i \mid i \in I) \cong \underline{A}_j \times \underline{A}_i$$

(5) *Si para cada $i \in I$, $\underline{A}_i$ es un sistema algebraico final, entonces $\prod(\underline{A}_i \mid i \in I)$ es un sistema algebraico final.*

Proof. □

Proposition 43 (Conmutatividad)**.** *Sea $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ una familia de sistemas algebraicos y ϕ un automorfismo de I, entonces*

$$\prod(\underline{A}_i \mid i \in I) \cong \prod(\underline{A}_{\phi(i)} \mid i \in I).$$

Proof. □

Para establecer la proposición que sigue, convenimos en denotar por $(\underline{A}_j \mid j \in J)$ la restricción de $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ a J, si $J \subseteq I$, que no es más que la composición de in_J y de $(\underline{A}_i \mid i \in I)$. Además, usaremos pr_j para denotar la proyección canónica j-ésima, del producto de cualquier familia de sistemas algebraicos para la cual se cumpla que j sea miembro del conjunto de índices de la misma.

Proposition 44. *Sea $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ una familia de sistemas algebraicos y $J, K, L \subseteq I$ tales que $K \subseteq J$ y $L \subseteq K$. Entonces:*

(1) *$pr_{J,J} = id_{\prod(\underline{A}_j \mid j \in J)}$, siendo $pr_{J,J}$ el único endomorfismo $\langle pr_j \mid j \in J \rangle$ del sistema algebraico $\prod(\underline{A}_j \mid j \in J)$ tal que, para cada $j \in J$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\prod(\underline{A}_j \mid j \in J) \arrow[d, "pr_{J,J}"'] \arrow[dr, "pr_j"] & \\
\prod(\underline{A}_j \mid j \in J) \arrow[r, "pr_j"'] & \underline{A}_j
\end{tikzcd}$$

conmuta.

(2) *$pr_{J,L} = pr_{K,L} \circ pr_{J,K}$, i.e., el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\prod(\underline{A}_j \mid j \in J) \arrow[d, "pr_{J,K}"'] \arrow[dr, "pr_{J,L}"] & \\
\prod(\underline{A}_k \mid k \in K) \arrow[r, "pr_{K,L}"'] & \prod(\underline{A}_l \mid l \in L)
\end{tikzcd}$$

conmuta; siendo, para $J, K \subseteq I$, con $K \subseteq J$, $pr_{J,K}$ el único homomorfismo del sistema algebraico $\prod(\underline{A}_j \mid j \in J)$ en el sistema algebraico $\prod(\underline{A}_k \mid k \in K)$ tal que, para cada $k \in K$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\prod(\underline{A}_j \mid j \in J) \arrow[d, "pr_{J,K}"'] \arrow[dr, "pr_k"] & \\
\prod(\underline{A}_k \mid k \in K) \arrow[r, "pr_k"'] & \underline{A}_k
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Proof. □

Proposition 45. *Sean $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ y $(\underline{B}_i \mid i \in I)$ dos familias de sistemas algebraicos. Entonces:*

(1) *Si, para cada $i \in I$, $\underline{A}_i \leq \underline{B}_i$, entonces $\prod(\underline{A}_i \mid i \in I) \leq \prod(\underline{B}_i \mid i \in I)$.*
(2) *Si, para cada $i \in I$, $\underline{A}_i \neq \varnothing$ y $\prod(\underline{A}_i \mid i \in I) \leq \prod(\underline{B}_i \mid i \in I)$, entonces, para cada $i \in I$, $\underline{A}_i \leq \underline{B}_i$.*

Proof. □

Proposition 46. *Sean $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ y $(\underline{B}_i \mid i \in I)$ dos familias de sistemas algebraicos y $(f_i \mid i \in I)$ una familia de homomorfismos en la que, para cada $i \in I$, $f_i \colon \underline{A}_i \longrightarrow \underline{B}_i$. Entonces hay un único homomorfismo, denotado por $\prod(f_i \mid i \in I)$ y denominado el* producto *de $(f_i \mid i \in I)$, del sistema algebraico $\prod(\underline{A}_i \mid i \in I)$ en* *el sistema algebraico* $\prod(\underline{B}_i \mid i \in I)$ *tal que, para cada* $i \in I$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \prod(\underline{A}_i \mid i \in I) \arrow[r, "pr_i"] \arrow[d, "\prod(f_i \mid i \in I)"'] & \underline{A}_i \arrow[d, "f_i"] \\ \prod(\underline{B}_i \mid i \in I) \arrow[r, "pr_i"'] & \underline{B}_i \end{tikzcd}$$

conmuta.

Proof. □

Proposition 47. *Sean* $(\underline{A}_i \mid i \in I)$, $(\underline{B}_i \mid i \in I)$ *y* $(\underline{C}_i \mid i \in I)$ *tres familias de sistemas algebraicos y* $(f_i \mid i \in I)$ *y* $(g_i \mid i \in I)$ *dos familias de homomorfismos tales que, para cada* $i \in I$, $f_i \colon \underline{A}_i \longrightarrow \underline{B}_i$ *y* $g_i \colon \underline{B}_i \longrightarrow \underline{C}_i$. *Entonces:*

(1) $\prod(id_{\underline{A}_i} \mid i \in I) = id_{\prod(\underline{A}_i \mid i \in I)}$.
(2) $\prod(g_i \mid i \in I) \circ \prod(f_i \mid i \in I) = \prod(g_i \circ f_i \mid i \in I)$.

Proof. □

Proposition 48. *Sean* $(\underline{A}_i \mid i \in I)$, $(\underline{B}_j \mid j \in J)$ *y* $(\underline{C}_k \mid k \in K)$ *tres familias de sistemas algebraicos y* $(f_j \mid j \in J)$ *y* $(g_k \mid k \in K)$ *dos familias de homomorfismos tales que, para cada* $j \in J$, $f_j \colon \prod(\underline{A}_i \mid i \in I) \longrightarrow \underline{B}_j$ *y, para cada* $k \in K$, $g_k \colon \prod(\underline{B}_j \mid j \in J) \longrightarrow \underline{C}_k$. *Entonces se cumple que el único homomorfismo* $\langle g_k \circ \langle f_j \mid j \in J \rangle \mid k \in K \rangle$ *del sistema algebraico* $\prod(\underline{A}_i \mid i \in I)$ *en el sistema algebraico* $\prod(\underline{C}_k \mid k \in K)$ *tal que, para cada* $k \in K$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \prod(\underline{A}_i \mid i \in I) \arrow[d, "\langle g_k \circ \langle f_j \mid j \in J \rangle \mid k \in K \rangle"'] \arrow[dr, "g_k \circ \langle f_j \mid j \in J \rangle"] & \\ \prod(\underline{C}_k \mid k \in K) \arrow[r, "pr_k"'] & \underline{C}_k \end{tikzcd}$$

conmuta, coincide con la composición del único homomorfismo $\langle f_j \mid j \in J \rangle$ *del sistema algebraico* $\prod(\underline{A}_i \mid i \in I)$ *en el sistema algebraico* $\prod(\underline{B}_j \mid j \in J)$ *y del único homomorfismo* $\langle g_k \mid k \in K \rangle$ *del sistema algebraico* $\prod(\underline{B}_j \mid j \in J)$ *en el sistema algebraico* $\prod(\underline{C}_k \mid k \in K)$ *tales que, resp., para cada* $j \in J$ *y cada* $k \in K$, *los dos triángulos del diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \prod(\underline{A}_i \mid i \in I) \arrow[d, "\langle f_j \mid j \in J \rangle"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\ \prod(\underline{B}_j \mid j \in J) \arrow[r, "pr_j"] \arrow[d, "\langle g_k \mid k \in K \rangle"'] \arrow[dr, "g_k"] & \underline{B}_j \\ \prod(\underline{C}_k \mid k \in K) \arrow[r, "pr_k"'] & \underline{C}_k \end{tikzcd}$$

conmutan. Así pués, se cumple que:

$$\langle g_k \mid k \in K \rangle \circ \langle f_j \mid j \in J \rangle = \langle g_k \circ \langle f_j \mid j \in J \rangle \mid k \in K \rangle$$

Proof. □

Proposition 49. *Sean $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ y $(\underline{B}_i \mid i \in I)$ dos familias de sistema algebraico y $(f_i \mid i \in I)$ una familia de homomorfismos en la que, para cada $i \in I$, $f_i\colon \underline{A}_i \longrightarrow \underline{B}_i$. Entonces:*

1. *Si para cada $i \in I$, f_i es una retracción, entonces $\prod(f_i \mid i \in I)$ es una retracción.*
2. *Si para cada $i \in I$, f_i es una sección, entonces $\prod(f_i \mid i \in I)$ es una sección.*
3. *Si para cada $i \in I$, f_i es un isomorfismo, entonces $\prod(f_i \mid i \in I)$ es un isomorfismo.*
4. *Si para cada $i \in I$, f_i es un monomorfismo, entonces $\prod(f_i \mid i \in I)$ es un monomorfismo.*
5. *Si para cada $i \in I$, f_i es constante, entonces $\prod(f_i \mid i \in I)$ es constante.*

Proof. □

Corollary 4. *Sea I un conjunto y $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ un homomorfismo. Si f es una retracción (resp. una sección, isomorfismo, monomorfismo, constante), entonces f^I, i.e., el producto de la familia $(f \mid i \in I)$, es una retracción (resp. una sección, isomorfismo, monomorfismo, constante) de $\underline{A}^I$ en $\underline{B}^I$.*

Proof. □

Proposition 50 (Asociatividad del producto)**.** *Sea $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ una familia de sistemas algebraicos y $(J_l \mid l \in L)$ una familia de subconjuntos de I tal que $\bigcup(J_l \mid l \in L) = I$ y, para cada $l, m \in L$, si $l \neq m$, entonces $J_l \cap J_m = \varnothing$. Entonces*

$$\prod(\underline{A}_i \mid i \in I) \cong \prod\left(\prod(\underline{A}_i \mid i \in J_l) \mid l \in L\right).$$

Proof. □

Proposition 51. *Sea $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ una familia no vacía de sistemas algebraicos, $\underline{B}$ un sistema algebraico y $(f_i \mid i \in I)$ una familia no vacía de homomorfismos en la que, para cada $i \in I$, $f_i\colon \underline{B} \longrightarrow \underline{A}_i$. Entonces $\mathrm{Ker}(\langle f_i \mid i \in I\rangle) = \bigcap(\mathrm{Ker}(f_i) \mid i \in I)$.*

Proof. □

2.2. **Igualadores de los homomorfismos.**

Proposition 52. *Sean $f, g\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ dos homomorfismos. Entonces existe un par ordenado $(\underline{\mathrm{Eq}}(f,g), \mathrm{eq}(f,g))$, el* igualador *de f y g, en el que $\underline{\mathrm{Eq}}(f,g)$ es un sistema algebraico y $\mathrm{eq}(f,g)$ un encajamiento de $\underline{\mathrm{Eq}}(f,g)$ en $\underline{A}$, que tiene las siguientes propiedades:*

1. *$f \circ \mathrm{eq}(f,g) = g \circ \mathrm{eq}(f,g)$.*
2. (Propiedad universal del igualador) *Para cualquier sistema algebraico $\underline{X}$ y cualquier homomorfismo $h\colon \underline{X} \longrightarrow \underline{A}$, si $f \circ h = g \circ h$, entonces hay un único homomorfismo $t\colon \underline{X} \longrightarrow \underline{\mathrm{Eq}}(f,g)$ tal que $\mathrm{eq}(f,g) \circ t = h$.*

La situación descrita por las condiciones anteriores la expresamos diagramáticamente como:

$$\begin{tikzcd}
\underline{X} \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
\underline{\mathrm{Eq}}(f,g) \arrow[r, "eq(f,g)"'] & \underline{A} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \underline{B}
\end{tikzcd}$$

Proof. Sea $\mathrm{Eq}(f,g)$ el subconjunto de A definido como:

$$\mathrm{Eq}(f,g) = \{\, a \in A \mid f(a) = g(a) \,\}.$$

Entonces se cumple que $\mathrm{Eq}(f,g)$ es un cerrado de $\underline{A}$. En efecto,

Además, siendo $\mathrm{eq}(f,g)$, la inclusión canónica de $\mathrm{Eq}(f,g)$ en A, tenemos que $\mathrm{eq}(f,g)$ es un homomorfismo de $\underline{\Sigma}$-álgebras de $(\mathrm{Eq}(f,g), F^{\underline{A}}{\restriction}\mathrm{Eq}(f,g))$ en $(A, F^{\underline{A}})$. Entonces el par $(\underline{\mathrm{Eq}}(f,g), \mathrm{eq}(f,g))$ en el que $\underline{\mathrm{Eq}}(f,g)$ es el sistema algebraico definido como:

$$\underline{\mathrm{Eq}}(f,g) = (\mathrm{Eq}(f,g), F^{\underline{A}}{\restriction}\mathrm{Eq}(f,g), \mathrm{L}^{\mathrm{eq}(f,g)}(\underline{A})),$$

cumple las condiciones de la proposición.

Es evidente que $\mathrm{eq}(f,g)$ es un encajamiento y que $f \circ \mathrm{eq}(f,g) = g \circ \mathrm{eq}(f,g)$. Además, si $\underline{X}$ es un sistema algebraico y $h\colon \underline{X} \longrightarrow \underline{A}$ un homomorfismo tal que $f \circ h = g \circ h$, entonces $\mathrm{Im}(h) \subseteq \mathrm{Eq}(f,g)$, luego, por la propiedad universal del subsistema algebraico, hay un único homomorfismo $t\colon \underline{X} \longrightarrow \underline{\mathrm{Eq}}(f,g)$ tal que $\mathrm{eq}(f,g) \circ t = h$.

□

Podemos resumir el proceso seguido en la demostración de la proposición anterior en los siguientes términos:

- En primer lugar, nos olvidamos de la estructura relacional de los sistemas algebraicos dados $\underline{A}$ y $\underline{B}$, y consideramos los homomorfismos de $\underline{\Sigma}$-álgebras $f, g\colon (A, F^{\underline{A}}) \longrightarrow (B, F^{\underline{B}})$.
- A continuacion, consideramos el igualador de los homomorfismos de $\underline{\Sigma}$-álgebras f y g.
- Por último, dotamos a la $\underline{\Sigma}$-álgebra $(\mathrm{Eq}(f,g), F^{\underline{A}}{\restriction}\mathrm{Eq}(f,g))$ de la familia de relaciones que se obtiene considerando el levantamiento optimal de $\underline{A}$ a través de $\mathrm{eq}(f,g)$, y comprobamos que el resultado cumple las condiciones de la proposición.

En la proposición anterior hemos demostrado, para un par de homomorfismos, ambos con el mismo dominio y codominio, la existencia de al menos un par ordenado, formado por un sistema algebraico y un homomorfismo desde el sistema algebraico hasta el dominio de los homomorfismos dados, sujeto a cumplir un par de condiciones; pero no hemos afirmado que tal par sea absolutamente único. Demostramos a continuación que el par ordenado de la proposición anterior, es único, sólo, salvo (un único) isomorfismo.

Proposition 53. *Sean $f, g\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ dos homomorfismos. Si un par ordenado $(\underline{E}, e)$, en el que $\underline{E}$ es un sistema algebraico y $e\colon \underline{E} \longrightarrow \underline{A}$ un homomorfismo, tiene las propiedades:*

(1) $f \circ e = g \circ e$.
(2) *Para cualquier sistema algebraico $\underline{X}$ y cada homomorfismo $h\colon \underline{X} \longrightarrow \underline{A}$, si $f \circ h = g \circ h$, entonces hay un único homomorfismo $u\colon \underline{X} \longrightarrow \underline{E}$ tal que $e \circ u = h$.*

Entonces hay un único isomorfismo $t\colon \underline{E} \longrightarrow \underline{\mathrm{Eq}}(f,g)$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\underline{E} \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, "e"] & \\
\underline{\mathrm{Eq}}(f,g) \arrow[r, "\mathrm{eq}(f,g)"'] & \underline{A}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Proof. □

Corollary 5. *Sean $f, g\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ dos homomorfismos. Una condición necesaria y suficiente para que f y g coincidan es que coincidan en un conjunto de generadores de $\underline{A}$.*

Proof. □

Corollary 6. *Sean $\underline{A}$ y $\underline{B}$ dos sistemas algebraicos, X un conjunto de generadores de $\underline{A}$ y $f\colon X \longrightarrow B$ una aplicación. Entonces hay a lo sumo un homomorfismo $g\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ tal que $g{\restriction}X = f$. En particular, cualquier homomorfismo está unívocamente determinado por su restricción a un conjunto de generadores de su dominio.*

Proof. □

Corollary 7. *Sea $\underline{A}$ un sistema algebraico y f un endomorfismo de $\underline{A}$. Entonces el conjunto de los puntos fijos de f es un subsistema algebraico de $\underline{A}$.*

Proof. □

Proposition 54. *Si el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\underline{A} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "u"'] & \underline{B} \arrow[d, "v"] \\
\underline{A}' \arrow[r, shift left, "f'"] \arrow[r, shift right, "g'"'] & \underline{B}'
\end{tikzcd}$$

conmuta serialmente, i.e., si $v \circ f = f' \circ u$ y $v \circ g = g' \circ u$, entonces hay un único homomorfismo $\mathrm{Eq}(u, v)\colon \underline{\mathrm{Eq}}(f, g) \longrightarrow \underline{\mathrm{Eq}}(f', g')$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Eq}}(f,g) \arrow[r, "\mathrm{eq}(f,g)"] \arrow[d, "\mathrm{Eq}(u,v)"'] & \underline{A} \arrow[d, "u"] \\
\underline{\mathrm{Eq}}(f',g') \arrow[r, "\mathrm{eq}(f',g')"'] & \underline{A}'
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Proof. □

Demuéstrese que:

(1) Para el diagrama, serialmente, conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\underline{A} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\underline{A}}"'] & \underline{B} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\underline{B}}"] \\
\underline{A} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \underline{B}
\end{tikzcd}$$

se cumple que

$$\mathrm{Eq}(\mathrm{id}_{\underline{A}}, \mathrm{id}_{\underline{B}}) = \mathrm{id}_{\underline{\mathrm{Eq}}(f,g)}.$$

(2) Si los diagramas:

$$\begin{tikzcd} \underline{A} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "u"'] & \underline{B} \arrow[d, "v"] \\ \underline{A}' \arrow[r, shift left, "f'"] \arrow[r, shift right, "g'"'] & \underline{B}' \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} \underline{A}' \arrow[r, shift left, "f'"] \arrow[r, shift right, "g'"'] \arrow[d, "u'"'] & \underline{B}' \arrow[d, "v'"] \\ \underline{A}'' \arrow[r, shift left, "f''"] \arrow[r, shift right, "g''"'] & \underline{B}'' \end{tikzcd}$$

son, serialmente, conmutativos, entonces se cumple que

$$\mathrm{Eq}(u', v') \circ \mathrm{Eq}(u, v) = \mathrm{Eq}(u' \circ u, v' \circ v).$$

Definition 12. Un homomorfismo $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ es un *monomorfismo regular* si existen dos homomorfismos $u, v\colon \underline{B} \longrightarrow \underline{C}$ tales que el par ordenado $(\underline{A}, f)$ es un igualador de u y v.

Proposition 55. *Un homomorfismo $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ es un monomorfismo regular precisamente si es un encajamiento.*

Proof. □

Ahora que disponemos de los conceptos de producto y de igualador, demostramos, apoyándonos en ellos, la existencia de un nuevo tipo de límite proyectivo, el de *producto fibrado* de dos homomorfismos con el mismo codominio.

2.3. **Productos fibrados de homomorfismos.**

Proposition 56. *Sean $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ y $g\colon \underline{B} \longrightarrow \underline{C}$ dos homomorfismos con el mismo codominio. Entonces existe un par ordenado $(\underline{A} \times_{\underline{C}} \underline{B}, (p_0, p_1))$, el* producto fibrado de $\underline{A}$ y $\underline{B}$ sobre $\underline{C}$ relativo a f y g, *en el que $\underline{A} \times_{\underline{C}} \underline{B}$ es un sistema algebraico, p_0 un homomorfismo de $\underline{A} \times_{\underline{C}} \underline{B}$ en $\underline{A}$ y p_1 un homomorfismo de $\underline{A} \times_{\underline{C}} \underline{B}$ en $\underline{B}$, que tiene las siguientes propiedades:*

(1) *El diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \underline{A} \times_{\underline{C}} \underline{B} \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_0"'] & \underline{B} \arrow[d, "g"] \\ \underline{A} \arrow[r, "f"'] & \underline{C} \end{tikzcd}$$

conmuta.

(2) (Propiedad universal del producto fibrado) *Para cada sistema algebraico $\underline{X}$ y cualesquiera homomorfismos $u\colon \underline{X} \longrightarrow \underline{A}$ y $v\colon \underline{X} \longrightarrow \underline{B}$ si el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \underline{X} \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & \underline{B} \arrow[d, "g"] \\ \underline{A} \arrow[r, "f"'] & \underline{C} \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces hay un único homomorfismo $t\colon \underline{X} \longrightarrow \underline{A} \times_{\underline{C}} \underline{B}$ *tal que los dos triángulos del diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
\underline{X} \arrow[dr, "t"] \arrow[drr, bend left, "v"] \arrow[ddr, bend right, "u"'] & & \\
& \underline{A} \times_{\underline{C}} \underline{B} \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_0"'] & \underline{B} \\
& \underline{A} &
\end{tikzcd}
$$

conmutan.

La situación descrita por las condiciones anteriores la expresamos diagramáticamente como:

$$
\begin{tikzcd}
\underline{X} \arrow[dr, "t"] \arrow[drr, bend left, "v"] \arrow[ddr, bend right, "u"'] & & \\
& \underline{A} \times_{\underline{C}} \underline{B} \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_0"'] & \underline{B} \arrow[d, "g"] \\
& \underline{A} \arrow[r, "f"'] & \underline{C}
\end{tikzcd}
$$

Proof. Sea $A \times_C B$ el subconjunto de $A \times B$ definido como:

$$A \times_C B = \{\, (a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b) \,\}.$$

Entonces se cumple que $A \times_C B$ es un cerrado del sistema algebraico $\underline{A} \times \underline{B}$. En efecto,

Además, siendo $p_0 = \mathrm{pr}_0 \restriction A \times_C B$ y $p_1 = \mathrm{pr}_1 \restriction A \times_C B$, tenemos que p_0 y p_1 son homomorfismos de $\underline{\Sigma}$-álgebras de $(A \times_C B, F^{\underline{A} \times \underline{B}} {\restriction} A \times_C B)$ en $\underline{A}$ y en $\underline{B}$, respectivamente. Entonces el par $(\underline{A} \times_{\underline{C}} \underline{B}, (p_0, p_1))$ en el que $\underline{A} \times_{\underline{C}} \underline{B}$ es el sistema algebraico definido como:

$$\underline{A} \times_{\underline{C}} \underline{B} = (A \times_C B, F^{\underline{A} \times \underline{B}} {\restriction} A \times_C B, \mathrm{L}^{(p_0, p_1)}(\underline{A}, \underline{B})),$$

cumple las condiciones de la proposición.

Es evidente que entonces el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\underline{A} \times_{\underline{C}} \underline{B} \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_0"'] & \underline{B} \arrow[d, "g"] \\
\underline{A} \arrow[r, "f"'] & \underline{C}
\end{tikzcd}
$$

conmuta.

Además, si $\underline{X}$ es un sistema algebraico y $u\colon \underline{X} \longrightarrow \underline{A}$, $v\colon \underline{X} \longrightarrow \underline{B}$ dos homomorfismoss tales que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\underline{X} \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & \underline{B} \arrow[d, "g"] \\
\underline{A} \arrow[r, "f"'] & \underline{C}
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces, por la propiedad universal del producto, hay un único homomorfismo $\langle u, v\rangle : \underline{X} \longrightarrow \underline{A} \prod \underline{B}$ tal que $\mathrm{pr}_{\underline{A}} \circ \langle u, v\rangle = u$ y $\mathrm{pr}_{\underline{B}} \circ \langle u, v\rangle = v$ y, por cumplirse que $f \circ u = g \circ v$, tenemos que $\mathrm{Im}(\langle u, v\rangle) \subseteq A \times_C B$, luego, por la propiedad universal del subsistema algebraico, hay un único homomorfismo t de $\underline{X}$ en $\underline{A} \times_{\underline{C}} \underline{B}$ tal que $\mathrm{in}_{\underline{A} \times_{\underline{C}} \underline{B}} \circ t = \langle u, v\rangle$. Para el homomorfismo t se cumple que los dos triángulos del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\underline{X} \arrow[dr, "t"] \arrow[drr, bend left, "v"] \arrow[ddr, bend right, "u"'] & & \\
& \underline{A} \times_{\underline{C}} \underline{B} \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_0"] & \underline{B} \\
& \underline{A} &
\end{tikzcd}$$

conmutan. Dejamos, como ejercicio, la demostración de que t es el único homomorfismo de $\underline{X}$ en $\underline{A} \times_{\underline{C}} \underline{B}$ con las propiedades indicadas. □

Podemos resumir el proceso seguido en la demostración de la proposición anterior en los siguientes términos:

- En primer lugar, nos olvidamos de la estructura relacional de los sistemas algebraicos dados $\underline{A}$ y $\underline{B}$ y $\underline{C}$, y consideramos los homomorfismos de $\underline{\Sigma}$-álgebras $f\colon (A, F^{\underline{A}}) \longrightarrow (C, F^{\underline{C}})$ y $g\colon (B, F^{\underline{B}}) \longrightarrow (C, F^{\underline{C}})$.
- A continuacion, consideramos el producto fibrado de los homomorfismos de $\underline{\Sigma}$-álgebras f y g.
- Por último, dotamos a la $\underline{\Sigma}$-álgebra $(A \times_C B, F^{\underline{A} \times \underline{B}} \upharpoonright A \times_C B)$ de la familia de relaciones que se obtiene considerando el levantamiento optimal de $(\underline{A}, \underline{B})$ a través de (p_0, p_1), y comprobamos que el resultado cumple las condiciones de la proposición.

Cuando digamos de un diagrama de la forma:

$$\begin{tikzcd}
\underline{X} \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & \underline{B} \arrow[d, "g"] \\
\underline{A} \arrow[r, "f"'] & \underline{C}
\end{tikzcd}$$

que es un *cuadrado cartesiano*, ello significará que el sistema algebraico $\underline{X}$ es un producto fibrado de $\underline{A}$ y $\underline{B}$ sobre $\underline{C}$ relativo a f y g, y que u y v son los homomorfismos estructurales.

En la proposición anterior hemos demostrado, para un par de homomorfismos, ambos con el mismo codominio, la existencia de al menos un par ordenado, formado por un sistema algebraico y dos homomorfismos desde el sistema algebraico hasta los dominios de los homomorfismos dados, sujeto a cumplir un par de condiciones; pero no hemos afirmado que tal par sea absolutamente único. Demostramos a continuación que el par ordenado de la proposición anterior, es único, sólo, salvo (un único) isomorfismo.

Proposition 57. *Sean* $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ *y* $g\colon \underline{B} \longrightarrow \underline{C}$ *dos homomorfismos con el mismo codominio. Si un par ordenado* $(\underline{E}, (p, q))$*, en el que* $\underline{E}$ *es un sistema algebraico,* $p\colon \underline{E} \longrightarrow \underline{A}$ *y* $q\colon \underline{E} \longrightarrow \underline{B}$ *tiene las propiedades:*

(1) *El diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \underline{E} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & \underline{B} \arrow[d, "g"] \\ \underline{A} \arrow[r, "f"'] & \underline{C} \end{tikzcd}$$

conmuta.

(2) *Para cada sistema algebraico* $\underline{X}$ *y cualesquiera homomorfismos* $u\colon \underline{X} \longrightarrow \underline{A}$ *y* $v\colon \underline{X} \longrightarrow \underline{B}$ *si el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \underline{X} \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & \underline{B} \arrow[d, "g"] \\ \underline{A} \arrow[r, "f"'] & \underline{C} \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces hay un único homomorfismo $t\colon \underline{X} \longrightarrow \underline{E}$ *tal que los dos triángulos del diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \underline{X} \arrow[dr, "t"] \arrow[drr, bend left, "v"] \arrow[ddr, bend right, "u"'] & & \\ & \underline{E} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & \underline{B} \\ & \underline{A} & \end{tikzcd}$$

conmutan.

Entonces hay un único isomorfismo $t\colon \underline{E} \longrightarrow \underline{A} \times_{\underline{C}} \underline{B}$ *tal que los dos triángulos del diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \underline{E} \arrow[dr, "t"] \arrow[drr, bend left, "q"] \arrow[ddr, bend right, "p"'] & & \\ & \underline{A} \times_{\underline{C}} \underline{B} \arrow[r, "p_{\underline{B}}"] \arrow[d, "p_{\underline{A}}"] & \underline{B} \\ & \underline{A} & \end{tikzcd}$$

conmutan.

Proof. □

Proposition 58. *Si el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
 & & \underline{B} \arrow[dl, "g"'] \arrow[dd, "v"] \\
\underline{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dd, "u"'] & \underline{C} \arrow[dd, "w"'] & \\
 & & \underline{B'} \arrow[dl, "g'"] \\
\underline{A'} \arrow[r, "f'"'] & \underline{C'} &
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces hay un único homomorfismo $u \times_w v \colon \underline{A} \times_{\underline{C}} \underline{B} \longrightarrow \underline{A'} \times_{\underline{C'}} \underline{B'}$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{A} \times_{\underline{C}} \underline{B} \arrow[rr, "p_1"] \arrow[dl, "p_0"'] \arrow[dd, "u \times_w v"] & & \underline{B} \arrow[dl, "g"] \arrow[dd, "v"] \\
\underline{A} \arrow[rr, "f"'] \arrow[dd, "u"'] & & \underline{C} \arrow[dd, "w"'] & \\
 & \underline{A'} \times_{\underline{C'}} \underline{B'} \arrow[rr, "p'_1"] \arrow[dl, "p'_0"'] & & \underline{B'} \arrow[dl, "g'"] \\
\underline{A'} \arrow[rr, "f'"'] & & \underline{C'} &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demuéstrese que:

(1) Para el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & \underline{B} \arrow[dl, "g"'] \arrow[dd, "\mathrm{id}_{\underline{B}}"] \\
\underline{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dd, "\mathrm{id}_{\underline{A}}"'] & \underline{C} \arrow[dd, "\mathrm{id}_{\underline{C}}"'] & \\
 & & \underline{B} \arrow[dl, "g"] \\
\underline{A} \arrow[r, "f"'] & \underline{C} &
\end{tikzcd}$$

se cumple que

$$\mathrm{id}_{\underline{A}} \times_{\mathrm{id}_{\underline{C}}} \mathrm{id}_{\underline{B}} = \mathrm{id}_{\underline{A} \times_{\underline{C}} \underline{B}}.$$

(2) Si los diagramas:

$$
\begin{tikzcd}
& & \underline{B} \arrow[dl, "g"'] \arrow[dd, "v"] \\
\underline{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dd, "u"'] & \underline{C} \arrow[dd, "w"] & \\
& & \underline{B}' \arrow[dl, "g'"] \\
\underline{A}' \arrow[r, "f'"'] & \underline{C}' &
\end{tikzcd}
$$

y

$$
\begin{tikzcd}
& & \underline{B}' \arrow[dl, "g'"'] \arrow[dd, "v'"] \\
\underline{A}' \arrow[r, "f'"] \arrow[dd, "u'"'] & \underline{C}' \arrow[dd, "w'"] & \\
& & \underline{B}'' \arrow[dl, "g''"] \\
\underline{A}'' \arrow[r, "f''"'] & \underline{C}'' &
\end{tikzcd}
$$

conmutan, entonces se cumple que

$$(u' \times_{w'} v') \circ (u \times_w v) = (u' \circ u) \times_{w' \circ w} (v' \circ v).$$

Sean Φ y Ψ dos congruencias sobre un sistema algebraico $\underline{A}$. Demuéstrese que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\underline{A}/\Phi \cap \Psi \arrow[r, "\mathrm{p}_{\Phi\cap\Psi,\Psi}"] \arrow[d, "\mathrm{p}_{\Phi\cap\Psi,\Phi}"'] & \underline{A}/\Psi \arrow[d, "\mathrm{p}_{\Psi,\mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\Phi\cup\Psi)}"] \\
\underline{A}/\Phi \arrow[r, "\mathrm{p}_{\Phi,\mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\Phi\cup\Psi)}"'] & \underline{A}/\mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\Phi \cup \Psi)
\end{tikzcd}
$$

es conmutativo, pero que no es necesariamente un cuadrado cartesiano.

Proposition 59. *Sea $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ un homomorfismo. Entonces el producto fibrado de $\underline{A}$ y $\underline{A}$ sobre $\underline{B}$ relativo a f y f es, esencialmente, i.e., salvo isomorfismo, $(\mathrm{Ker}(f), (p_0, p_1))$, siendo p_0, la restricción de pr_0 a $\mathrm{Ker}(f)$ y p_1, la restricción de pr_1 a $\mathrm{Ker}(f)$.*

Proof. □

Proposition 60. *Sean A y B dos cerrados de $\underline{X}$. Entonces el producto fibrado de $\underline{A}$ y $\underline{B}$ sobre $\underline{X}$ relativo a $\mathrm{in}_{\underline{A}}$ e $\mathrm{in}_{\underline{B}}$ es, esencialmente, i.e., salvo isomorfismo, $(\underline{A} \cap \underline{B}, (\mathrm{in}_{\underline{A}\cap\underline{B},\underline{A}}, \mathrm{in}_{\underline{A}\cap\underline{B},\underline{B}}))$.*

Proof. □

Proposition 61. *Sea $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ un homomorfismo e Y un cerrado de $\underline{B}$. Entonces el producto fibrado de $\underline{A}$ e $\underline{Y}$ sobre $\underline{B}$ relativo a f y $\mathrm{in}_{\underline{Y}}$ es, esencialmente, i.e., salvo isomorfismo, $(f^{-1}(\underline{Y}), (\mathrm{in}_{f^{-1}(\underline{Y})}, f|^{Y}_{f^{-1}(\underline{Y})}))$.*

2.4. **Sistemas proyectivos de sistemas algebraicos.** A continuación consideramos los conceptos de sistema proyectivo de sistemas algebraicos y morfismo proyectivo entre sistemas proyectivos de sistemas algebraicos.

Definition 13. Un *sistema proyectivo de sistemas algebraicos* es un par ordenado $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ en el que $\underline{S}$ es un conjunto preordenado y $\underline{\mathcal{A}} = ((\underline{A}_s \mid s \in S), (a_{s',s} \mid (s,s') \in \preceq))$ tal que:

(1) Para cada $s \in S$, $\underline{A}_s$ es un sistema algebraico.
(2) Para cada $(s,s') \in \preceq$, $a_{s',s}\colon \underline{A}_{s'} \longrightarrow \underline{A}_s$ es un homomorfismo.
(3) Para cada $s \in S$, $a_{s,s} = \mathrm{id}_{\underline{A}_s}$.

(4) Para cada $s, s', s'' \in S$, si $(s,s') \in \preceq$ y $(s', s'') \in \preceq$, entonces el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}_{s''} \arrow[r, "a_{s'',s'}"] \arrow[dr, "a_{s'',s}"'] & \underline{A}_{s'} \arrow[d, "a_{s',s}"] \\
& \underline{A}_{s}.
\end{tikzcd}$$

A los homomorfismos $a_{s',s} \colon \underline{A}_{s'} \longrightarrow \underline{A}_s$ los denominamos los *homomorfismos de transición* del sistema proyectivo de sistemas algebraicos $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$.

Example. Sean S un conjunto y $(\underline{A}_s \mid s \in S)$ una familia de sistemas algebraicos indexada por S. Entonces

$$(\underline{\mathrm{Sub}}_f(S), ((\textstyle\prod(\underline{A}_s \mid s \in F) \mid F \in \mathrm{Sub}_f(S)), (\mathrm{pr}_{G,F} \mid F \subseteq G)))$$

es un sistema proyectivo de sistemas algebraicos.

Example. Sean S un conjunto no vacío, $\underline{A}$ un sistema algebraico y $(X_s \mid s \in S)$ una familia de subsistemas algebraicos de $\underline{A}$ tal que, para cualesquiera $s, s' \in S$ exista un $s'' \in S$ de modo que $X_{s''} \subseteq X_s \cap X_{s'}$. Entonces, considerando sobre S el preorden $\preceq$ definido como:

$$s \preceq s' \leftrightarrow X_{s'} \subseteq X_s,$$

tenemos que

$$(\underline{S}, ((\underline{X}_s \mid s \in S), (\mathrm{in}_{\underline{X}_{s'}, \underline{X}_s} \mid s \preceq s')))$$

es un sistema proyectivo de sistemas algebraicos.

2.5. **Límites proyectivos de los sistemas proyectivos.**

Proposition 62. *Sea* $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ *un sistema proyectivo de sistemas algebraicos. Entonces hay un par ordenado* $(\varprojlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}), (a_s \mid s \in S))$, *el* límite proyectivo *del sistema proyectivo* $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$, *en el que* $\varprojlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ *es un sistema algebraico y, para cada* $s \in S$, a_s, *la* proyección canónica *s-ésima, es un homomorfismo de* $\varprojlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ *en* $\underline{A}_s$, *tal que:*

(1) *Para cada* $(s, s') \in \preceq$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
& \varprojlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) \arrow[dl, "a_{s'}"'] \arrow[dr, "a_s"] & \\
\underline{A}_{s'} \arrow[rr, "a_{s',s}"'] & & \underline{A}_s
\end{tikzcd}$$

conmuta.

(2) (Propiedad universal.) *Para cada par ordenado* $(\underline{L}, (l_s \mid s \in S))$ *en el que, para cada* $s \in S$, $l_s \colon \underline{L} \longrightarrow \underline{A}_s$, *si, para cada* $(s, s') \in \preceq$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
& \underline{L} \arrow[dl, "l_{s'}"'] \arrow[dr, "l_s"] & \\
\underline{A}_{s'} \arrow[rr, "a_{s',s}"'] & & \underline{A}_s
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces hay un único homomorfismo $u\colon \underline{L} \longrightarrow \varprojlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ *tal que, para cada* $s \in S$*, el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
\underline{L} \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "l_s"] & \\
\varprojlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) \arrow[r, "a_s"'] & \underline{A}_s
\end{tikzcd}
$$

conmuta.

La situación descrita por las condiciones anteriores la expresamos diagramáticamente como:

$$
\begin{tikzcd}
 & \underline{L} \arrow[d, "u"] \arrow[ddl, bend right, "l_{s'}"'] \arrow[ddr, bend left, "l_s"] & \\
 & \varprojlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) \arrow[dl, "a_{s'}"'] \arrow[dr, "a_s"] & \\
\underline{A}_{s'} \arrow[rr, "a_{s',s}"'] & & \underline{A}_s
\end{tikzcd}
$$

Proof. Sea $\varprojlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ el sistema algebraico cuya $\underline{\Sigma}$-álgebra subyacente es $\varprojlim(\underline{S}, (((A_s, F^s) \mid s \in S), (a_{s',s} \mid (s, s') \in\leq)))$, el límite proyectivo del sistema proyectivo de $\underline{\Sigma}$-álgebras $(\underline{S}, (((A_s, F^s) \mid s \in S), (a_{s',s} \mid (s, s') \in\leq)))$ (que, recordemos, es $\underline{\mathrm{Eq}}(f, g)$, el igualador de los homomorfismos f, g de $\prod_{s\in S}(A_s, F^s)$ en $\prod_{(s,s')\in\leq}(A_s, F^s)$, siendo $f = \langle \mathrm{pr}_s \mid (s, s') \in\leq\rangle$ y $g = \langle a_{s',s} \circ \mathrm{pr}_{s'} \mid (s, s') \in\leq\rangle$ los únicos homomorfismos de $\prod_{s\in S}(A_s, F^s)$ en $\prod_{(s,s')\in\leq}(A_s, F^s)$ tales que, para cada $(s, s') \in\leq$, el cuadrado superior, resp., el cuadrado inferior, del diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
 & (A_s, F^s) \arrow[r, "\mathrm{id}_{(A_s,F^s)}"] & (A_s, F^s) \\
\underline{\mathrm{Eq}}(f, g) \arrow[r, "\mathrm{eq}(f,g)"] \arrow[d, "a_s"'] & \prod_{s\in S}(A_s, F^s) \arrow[u, "\mathrm{pr}_s"] \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{s'}"'] \arrow[dl, "\mathrm{pr}_s"] & \prod_{(s,s')\in\leq}(A_s, F^s) \arrow[u, "\mathrm{pr}_{s,s'}"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{s,s'}"] \\
(A_s, F^s) & (A_{s'}, F^{s'}) \arrow[r, "a_{s',s}"'] & (A_s, F^s)
\end{tikzcd}
$$

conmuta), y para el que la familia de relaciones subyacente es el levantamiento optimal de $(\underline{A}_s \mid s \in S)$ a través de $(a_s \mid s \in S)$, siendo, para cada $s \in S$, a_s la restricción de pr_s a $\varprojlim(\underline{S}, (((A_s, F^s) \mid s \in S), (a_{s',s} \mid (s, s') \in\leq)))$.

Entonces el par ordenado $(\varprojlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}), (a_s \mid s \in S))$ en el que $\varprojlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ es el sistema algebraico definido como:

$$
\varprojlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) = (\varprojlim(\underline{S}, (((A_s, F^s) \mid s \in S), (a_{s',s} \mid (s, s') \in\leq))), \mathrm{L}^{(a_s \mid s\in S)}(\underline{A}_s \mid s \in S))
$$

cumple las condiciones de la proposición.

En efecto, por una parte, es evidente, en virtud de las definiciones, que, para cada $(s, s') \in \preceq$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& \varprojlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) \arrow[dl, "a_{s'}"'] \arrow[dr, "a_s"] & \\
\underline{A}_{s'} \arrow[rr, "a_{s',s}"'] & & \underline{A}_s
\end{tikzcd}$$

conmuta. Por otra parte, si un par ordenado $(\underline{L}, (l_s \mid s \in S))$, arbitrario, pero fijo, en el que, para cada $s \in S$, $l_s \colon \underline{L} \longrightarrow \underline{A}_s$, es tal que, para cada $(s, s') \in \preceq$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& \underline{L} \arrow[dl, "l_{s'}"'] \arrow[dr, "l_s"] & \\
\underline{A}_{s'} \arrow[rr, "a_{s',s}"'] & & \underline{A}_s
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces, en virtud de la conmutatividad del diagrama anterior, se cumple que $\mathrm{Im}(\langle l_s \mid s \in S\rangle)$ es un subsistema algebraico de $\varprojlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$, luego, por la propiedad universal del subsistema algebraico, hay un único homomorfismo $u \colon \underline{L} \longrightarrow \varprojlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\underline{L} \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "\langle l_s \mid s \in S\rangle"] & \\
\varprojlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) \arrow[r, "\mathrm{in}_{\varprojlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})}"'] & \prod(\underline{A}_s \mid s \in S)
\end{tikzcd}$$

conmuta. Ahora bien, puesto que, para cada $s \in S$, en el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\underline{L} \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "\langle l_s \mid s \in S\rangle"] \arrow[drr, bend left, "l_s"] & & \\
\varprojlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) \arrow[r, "\mathrm{in}_{\varprojlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})}"'] \arrow[rr, bend right, "a_s"'] & \prod(\underline{A}_s \mid s \in S) \arrow[r, "\mathrm{pr}_s"'] & \underline{A}_s
\end{tikzcd}$$

el triángulo de la izquierda, el de la derecha y el inferior, conmutan, también, para cada $s \in S$, conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\underline{L} \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "l_s"] & \\
\varprojlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) \arrow[r, "a_s"'] & \underline{A}_s.
\end{tikzcd}$$

Por consiguiente hay al menos un homomorfismo u de $\underline{L}$ en $\varprojlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ tal que, para cada $s \in S$, $a_s \circ u = l_s$. Dejamos, como ejercicio, la demostración de que hay a lo sumo un homomorfismo u de $\underline{L}$ en $\varprojlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ tal que, para cada $s \in S$, $a_s \circ u = l_s$.

$\square$

Podemos resumir el proceso seguido en la demostración de la proposición anterior en los siguientes términos:

- En primer lugar, nos olvidamos de la estructura relacional del sistema proyectivo de sistemas algebraicos dado $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$, y consideramos el sistema proyectivo de $\underline{\Sigma}$-álgebras $(\underline{S}, (((A_s, F^s) \mid s \in S), (a_{s',s} \mid (s, s') \in \leq)))$.
- A continuacion, consideramos el límite proyectivo del sistema proyectivo de $\underline{\Sigma}$-álgebras $(\underline{S}, (((A_s, F^s) \mid s \in S), (a_{s',s} \mid (s, s') \in \leq)))$.
- Por último, dotamos a la $\underline{\Sigma}$-álgebra $(\varprojlim(\underline{S}, \mathcal{A}), F^{\prod(\underline{A}_s \mid s\in S)} \upharpoonright \varprojlim(\underline{S}, \mathcal{A}))$ de la familia de relaciones que se obtiene considerando el levantamiento optimal de $(\underline{A}_s \mid s \in S)$ a través de $(a_s \mid s \in S)$, y comprobamos que el resultado cumple las condiciones de la proposición.

En la proposición anterior se ha demostrado, para un sistema proyectivo de sistemas algebraicos, la existencia de al menos un par ordenado, formado por un sistema algebraico y una familia de homomorfismos desde el sistema algebraico hasta cada uno de los sistemas algebraicos de la familia de sistemas algebraicos subyacente a la segunda coordenada del sistema proyectivo, sujeto a cumplir, por una parte, una condición de compatibilidad respecto de los homomorfismos subyacentes a la segunda coordenada del sistema proyectivo, y, por otra, una cierta propiedad universal; pero, ni hemos afirmado que tal par sea absolutamente único, ni que el límite proyectivo de un sistema proyectivo de sistemas algebraicos sea no vacío, ni que las proyecciones canónicas sean necesariamente inyectivas o biyectivas.

Demostraremos en lo que sigue, entre otras cosas, que:

- El par ordenado de la proposición anterior, es único salvo isomorfismo.
- Una condición suficiente para que una proyección canónica sea inyectiva, resp., biyectiva, es que el conjunto preordenado, subyacente al sistema proyectivo, esté dirigido superiormente y que los homomorfismos de transición sean inyectivos, resp., biyectivos.

Proposition 63. *Sea $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ un sistema proyectivo de sistemas algebraicos. Entonces:*

(1) *Para cada par de homomorfismos $f, g\colon \underline{X} \longrightarrow \varprojlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$, si, para cada $s \in S$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\underline{X} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[rr, bend left=40, "a_s \circ f"] \arrow[rr, bend right=40, "a_s \circ g"'] & \varprojlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) \arrow[r, "a_s"] & \underline{A}_s
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces $f = g$, i.e., la familia $(a_s \mid s \in S)$ es colectivamente monomórfica.

(2) *Para cada par ordenado $(\underline{L}, (l_s \mid s \in S))$, en el que $\underline{L}$ sea un sistema algebraico y, para cada $s \in S$, $l_s\colon \underline{L} \longrightarrow \underline{A}_s$, si para cada $(s, s') \in \preceq$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
& \underline{L} \arrow[dl, "l_{s'}"'] \arrow[dr, "l_s"] & \\
\underline{A}_{s'} \arrow[rr, "a_{s',s}"'] & & \underline{A}_s
\end{tikzcd}$$

conmuta, y para cada epimorfismo $t\colon \varprojlim(\underline{S},\underline{\mathcal{A}}) \twoheadrightarrow \underline{L}$*, si, para cada* $s \in S$*, el digrama:*

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim(\underline{S},\underline{\mathcal{A}}) \arrow[rr, "a_s"] \arrow[dr, two heads, "t"'] & & \underline{A}_s \\
& \underline{L} \arrow[ur, "l_s"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces t *es un isomorfismo, i.e., la familia* $(a_s \mid s \in S)$ *es* extremal.

Proof. □

Corollary 8. *Sea* $(\underline{S},\underline{\mathcal{A}})$ *un sistema proyectivo de sistemas algebraicos. Si un par ordenado* $(\underline{P},(p_s \mid s \in S))$*, en el que* $\underline{P}$ *es un sistema algebraico y, para cada* $s \in S$*,* $p_s\colon \underline{P} \longrightarrow \underline{A}_s$ *cumple que:*

(1) *Para cada* $(s,s') \in \preceq$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
& \underline{P} \arrow[dl, "p_{s'}"'] \arrow[dr, "p_s"] & \\
\underline{A}_{s'} \arrow[rr, "a_{s',s}"'] & & \underline{A}_s
\end{tikzcd}$$

conmuta.

(2) *Para cada par ordenado* $(\underline{L},(l_s \mid s \in S))$*, en el que* $\underline{L}$ *es un sistema algebraico y, para cada* $s \in S$*,* $l_s\colon L \longrightarrow A_s$*, si, para cada* $(s,s') \in \preceq$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
& \underline{L} \arrow[dl, "l_{s'}"'] \arrow[dr, "l_s"] & \\
\underline{A}_{s'} \arrow[rr, "a_{s',s}"'] & & \underline{A}_s
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces hay un único homomorfismo $u\colon \underline{L} \longrightarrow \underline{P}$ *tal que, para cada* $s \in S$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\underline{L} \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "l_s"] & \\
\underline{P} \arrow[r, "p_s"'] & \underline{A}_s
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Entonces hay un único isomorfismo t *de* $\underline{P}$ *en* $\varprojlim(\underline{S},\underline{\mathcal{A}})$ *tal que, para cada* $s \in S$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\underline{P} \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, "p_s"] & \\
\varprojlim(\underline{S},\underline{\mathcal{A}}) \arrow[r, "a_s"'] & \underline{A}_s
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Proof. □

Demuéstrese que el límite proyectivo del sistema proyectivo del ejemplo 2.4 es isomorfo a $\prod(\underline{A}_s \mid s \in S)$.

Demuéstrese que el límite proyectivo del sistema proyectivo del ejemplo 2.4 es isomorfo a $\bigcap(\underline{X}_s \mid s \in S)$.

Proposition 64. *Sea $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ un sistema proyectivo de sistemas algebraicos y $(\underline{L}, (l_s \mid s \in S))$ tal que, para cada $s \in S$, $l_s\colon \underline{L} \longrightarrow \underline{A}_s$ y para cada $(s, s') \in \preceq$, el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
 & \underline{L} \arrow[dl, "l_{s'}"'] \arrow[dr, "l_s"] & \\
\underline{A}_{s'} \arrow[rr, "a_{s',s}"'] & & \underline{A}_s
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Entonces, el único homomorfismo $u\colon \underline{L} \longrightarrow \varprojlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ es inyectivo precisamente si la familia de homomorfismos $(l_s \mid s \in S)$ separa puntos *de L, i.e., si es tal que, para cada $x, y \in L$, si $x \neq y$, entonces hay un $s \in S$ tal que $l_s(x) \neq l_s(y)$.*

Proof. La condición es necesaria. En efecto, si $u\colon \underline{L} \longrightarrow \varprojlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ es inyectivo y $x, y \in L$ son tales que $x \neq y$, entonces $u(x) \neq u(y)$, pero $u(x), u(y) \in \varprojlim(\underline{S}, \mathcal{A})$ y, por ser este conjunto subconjunto de $\prod(A_s \mid s \in S)$, $u(x), u(y)$ son funciones de elección distintas, luego hay un $s \in S$ tal que $u(x)_s \neq u(y)_s$. Sea $s \in S$ uno de ellos, arbitrario, pero fijo. Ahora bien, por la definición de u, $u(x) = (l_s(x) \mid s \in S)$ y $u(y) = (l_s(y) \mid s \in S)$, luego $l_s(x) \neq l_s(y)$.

La condición es suficiente. En efecto, si la familia de homomorfismos $(l_s \mid s \in S)$ separa puntos de L y $x, y \in L$ son tales que $x \neq y$, entonces hay un $s \in S$ tal que $l_s(x) \neq l_s(y)$. Ahora bien, $u(x) = (l_s(x) \mid s \in S)$ y $u(y) = (l_s(y) \mid s \in S)$, luego $u(x) \neq u(y)$.

□

Proposition 65. *Sea $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ un sistema proyectivo de sistemas algebraicos. Si $\underline{S}$ está dirigido superiormente y, para cada $(s, s') \in \preceq$, $a_{s',s}\colon \underline{A}_{s'} \longrightarrow \underline{A}_s$, es un homomorfismo inyectivo, resp., un isomorfismo, entonces, para cada $s \in S$, $a_s\colon \varprojlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) \longrightarrow \underline{A}_s$, es un homomorfismo inyectivo, resp., un isomorfismo.*

Proof. □

2.6. Morfismos proyectivos entre sistemas proyectivos.

Definition 14. Si $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ y $(\underline{T}, \underline{\mathcal{B}})$ son dos sistemas proyectivos de sistemas algebraicos, un *morfismo proyectivo* de $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ en $(\underline{T}, \underline{\mathcal{B}})$ es un triplo ordenado $((\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}), \Phi, (\underline{T}, \underline{\mathcal{B}}))$, abreviado como Φ y denotado por

$$\Phi\colon (\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) \longrightarrow (\underline{T}, \underline{\mathcal{B}}),$$

en el que $\Phi = (\phi, f)$, con $\phi\colon \underline{T} \longrightarrow \underline{S}$ y $f = (f_t \mid t \in T)$, siendo, para cada $t \in T$, $f_t\colon \underline{A}_{\phi(t)} \longrightarrow \underline{B}_t$, i.e.,

$$(f_t \mid t \in T) \in \prod(\mathrm{Hom}(\underline{A}_{\phi(t)}, \underline{B}_t) \mid t \in T),$$

tal que, para cada $(t,t') \in \preceq$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \underline{A}_{\phi(t')} \arrow[r, "f_{t'}"] \arrow[d, "a_{\phi(t'),\phi(t)}"'] & \underline{B}_{t'} \arrow[d, "b_{t',t}"] \\ \underline{A}_{\phi(t)} \arrow[r, "f_t"'] & \underline{B}_t \end{tikzcd}$$

conmuta. Además, $(\underline{T}, \underline{\mathcal{A}}_\phi)$ es el sistema proyectivo de sistemas algebraicos para el que la coordenada t-ésima de la primera componente de $\underline{\mathcal{A}}_\phi$ es $\underline{A}_{\phi(t)}$, para cada $t \in T$, y la coordenada (t,t')-ésima de la segunda componente de $\underline{\mathcal{A}}_\phi$ es $a_{\phi(t'),\phi(t)}$, para cada $(t,t') \in \preceq$.

Proposition 66.

(1) *Si $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ es un sistema proyectivo de sistemas algebraicos, entonces*

$$id_{(\underline{S},\underline{\mathcal{A}})} = (id_{\underline{S}}, id_{\underline{\mathcal{A}}}),$$

es un endomorfismo proyectivo de $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$, el morfismo proyectivo identidad *de $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$.*

(2) *Si $\Phi = (\phi, f)\colon (\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) \longrightarrow (\underline{T}, \underline{\mathcal{B}})$ y $\Psi = (\psi, g)\colon (\underline{T}, \underline{\mathcal{B}}) \longrightarrow (\underline{U}, \underline{\mathcal{C}})$ son dos morfismos proyectivos, entonces*

$$\Psi \circ \Phi = (\phi \circ \psi, g \circ f_\psi),$$

siendo f_ψ la familia indexada por U, cuya coordenada u-ésima es:

$$f_{\psi(u)}\colon \underline{A}_{\phi(\psi(u))} \longrightarrow \underline{B}_{\psi(u)},$$

y, por lo tanto, siendo $g \circ f_\psi$ la familia de homomorfismos, indexada por U, cuya coordenada u-ésima es:

$$\underline{A}_{\phi(\psi(u))} \xrightarrow{f_{\psi(u)}} \underline{B}_{\psi(u)} \xrightarrow{g_u} \underline{C}_u$$

es un morfismo proyectivo de $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ en $(\underline{U}, \underline{\mathcal{C}})$, el morfismo proyectivo composición *de ambos.*

Proof. Puesto que la primera parte es obvia, nos limitamos a demostrar la segunda.

Por ser $\Phi = (\phi, f)$ y $\Psi = (\psi, g)$ morfismos proyectivos, los diagramas:

$$\begin{tikzcd} \underline{A}_{\phi(t')} \arrow[r, "f_{t'}"] \arrow[d, "a_{\phi(t'),\phi(t)}"'] & \underline{B}_{t'} \arrow[d, "b_{t',t}"] \\ \underline{A}_{\phi(t)} \arrow[r, "f_t"'] & \underline{B}_t \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} \underline{B}_{\psi(u')} \arrow[r, "g_{u'}"] \arrow[d, "b_{\psi(u'),\psi(u)}"'] & \underline{C}_{u'} \arrow[d, "c_{u',u}"] \\ \underline{B}_{\psi(u)} \arrow[r, "g_u"'] & \underline{C}_u \end{tikzcd}$$

conmutan. Por consiguiente el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \underline{A}_{\phi(\psi(u'))} \arrow[r, "g_{u'} \circ f_{\psi(u')}"] \arrow[d, "a_{\phi(\psi(u')),\phi(\psi(u))}"'] & \underline{C}_{u'} \arrow[d, "c_{u',u}"] \\ \underline{A}_{\phi(\psi(u))} \arrow[r, "g_u \circ f_{\psi(u)}"'] & \underline{C}_u \end{tikzcd}$$

también conmuta. □

Proposition 67. *Sea* Φ *un morfismo proyectivo de* $(\underline{S},\underline{\mathcal{A}})$ *en* $(\underline{T},\underline{\mathcal{B}})$, Ψ *uno de* $(\underline{T},\underline{\mathcal{B}})$ *en* $(\underline{U},\underline{\mathcal{C}})$ *y* Ξ *uno de* $(\underline{U},\underline{\mathcal{C}})$ *en* $(\underline{V},\underline{\mathcal{D}})$. *Entonces se cumple que:*

(1) (Asociatividad). *El diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
(\underline{S},\underline{\mathcal{A}}) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\Psi\circ\Phi"'] \arrow[drr, bend left=60, "(\Xi\circ\Psi)\circ\Phi"] \arrow[drr, bend right=60, "\Xi\circ(\Psi\circ\Phi)"'] & (\underline{T},\underline{\mathcal{B}}) \arrow[d, "\Psi"'] \arrow[dr, "\Xi\circ\Psi"] & \\
 & (\underline{U},\underline{\mathcal{C}}) \arrow[r, "\Xi"'] & (\underline{V},\underline{\mathcal{D}})
\end{tikzcd}$$

conmuta.

(2) (Neutros). *Los diagramas:*

$$\begin{tikzcd}
(\underline{S},\underline{\mathcal{A}}) \arrow[r, "id_{(\underline{S},\underline{\mathcal{A}})}"] \arrow[dr, "\Phi"'] & (\underline{S},\underline{\mathcal{A}}) \arrow[d, "\Phi"] \\
 & (\underline{T},\underline{\mathcal{B}})
\end{tikzcd}
\quad y \quad
\begin{tikzcd}
(\underline{S},\underline{\mathcal{A}}) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\Phi"'] & (\underline{T},\underline{\mathcal{B}}) \arrow[d, "id_{(\underline{T},\underline{\mathcal{B}})}"] \\
 & (\underline{T},\underline{\mathcal{B}})
\end{tikzcd}$$

conmutan.

Proof. □

2.7. **Límites proyectivos de los morfismos proyectivos.**

Proposition 68. *Si* $\Phi\colon (\underline{S},\underline{\mathcal{A}}) \longrightarrow (\underline{T},\underline{\mathcal{B}})$ *es un morfismo proyectivo, entonces hay un único homomorfismo*

$$\varprojlim \Phi\colon \varprojlim(\underline{S},\underline{\mathcal{A}}) \longrightarrow \varprojlim(\underline{T},\underline{\mathcal{B}}),$$

denominada el límite proyectivo *de* Φ *tal que, para cada* $t \in T$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim(\underline{S},\underline{\mathcal{A}}) \arrow[r, "a_{\phi(t)}"] \arrow[d, "\varprojlim\Phi"'] & \underline{A}_{\phi(t)} \arrow[d, "f_t"] \\
\varprojlim(\underline{T},\underline{\mathcal{B}}) \arrow[r, "b_t"'] & \underline{B}_t
\end{tikzcd}$$

conmuta. Además, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim(\underline{S},\underline{\mathcal{A}}) \arrow[d, "p_\phi"'] \arrow[dr, "a_{\phi(t)}"] \arrow[dd, bend right=70, "\varprojlim\Phi"'] & \\
\varprojlim(\underline{T},\underline{\mathcal{A}}_\phi) \arrow[r, "a_{\phi(t)}"'] \arrow[d, "\prod f"'] & \underline{A}_{\phi(t)} \arrow[d, "f_t"] \\
\varprojlim(\underline{T},\underline{\mathcal{B}}) \arrow[r, "b_t"'] & \underline{B}_t
\end{tikzcd}$$

conmuta, siendo p_ϕ el único homomorfismo de $\varprojlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ en $\varprojlim(\underline{T}, \underline{\mathcal{A}}_\phi)$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) \arrow[r, "in_{\varprojlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})}"] \arrow[d, "p_\phi"'] & \prod(\underline{A}_s \mid s \in S) \arrow[d, "pr_\phi"] \\
\varprojlim(\underline{T}, \underline{\mathcal{A}}_\phi) \arrow[r, "in_{\varprojlim(\underline{T}, \underline{\mathcal{A}}_\phi)}"'] & \prod(\underline{A}_{\phi(t)} \mid t \in T)
\end{tikzcd}$$

conmuta, y, denotándolo por el mismo símbolo, $\prod f$ el único homomorfismo de $\varprojlim(\underline{T}, \underline{\mathcal{A}}_\phi)$ en $\varprojlim(\underline{T}, \underline{\mathcal{B}})$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim(\underline{T}, \underline{\mathcal{A}}_\phi) \arrow[r, "in_{\varprojlim(\underline{T}, \underline{\mathcal{A}}_\phi)}"] \arrow[d, "\prod f"'] & \prod(\underline{A}_{\phi(t)} \mid t \in T) \arrow[d, "\prod f"] \\
\varprojlim(\underline{T}, \underline{\mathcal{B}}) \arrow[r, "in_{\varprojlim(\underline{T}, \underline{\mathcal{B}})}"'] & \prod(\underline{B}_t \mid t \in T)
\end{tikzcd}$$

conmuta. Así que

$$\varprojlim \Phi = \prod f \circ p_\phi.$$

Proof. □

Proposition 69. *Sean $\Phi\colon (\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) \longrightarrow (\underline{T}, \underline{\mathcal{B}})$ y $\Psi\colon (\underline{T}, \underline{\mathcal{B}}) \longrightarrow (\underline{U}, \underline{\mathcal{C}})$ dos morfismos proyectivos. Entonces:*

(1) $\varprojlim id_{(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})} = id_{\varprojlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})}$.
(2) $\varprojlim(\Psi \circ \Phi) = \varprojlim \Psi \circ \varprojlim \Phi$.

Además, si $\Phi = (\phi, f)$ y $\Psi = (\psi, g)$, entonces el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) \arrow[rrr, "\varprojlim \Phi"] \arrow[drr, "p_\phi"'] \arrow[rrrrrr, bend left, "\varprojlim \Psi \circ \Phi"] \arrow[ddrrr, bend right, "p_{\phi\circ\psi}"'] & & & \varprojlim(\underline{T}, \underline{\mathcal{B}}) \arrow[rrr, "\varprojlim \Psi"] \arrow[dr, "p_\psi"] & & & \varprojlim(\underline{U}, \underline{\mathcal{C}}) \\
& & \varprojlim(\underline{T}, \underline{\mathcal{A}}_\phi) \arrow[ur, "\prod f"'] \arrow[rr, "\varprojlim(\psi, f_\psi)"] \arrow[dr, "p_\psi"'] & & \varprojlim(\underline{U}, \underline{\mathcal{B}}_\psi) \arrow[urr, "\prod g"'] & & \\
& & & \varprojlim(\underline{U}, \underline{\mathcal{A}}_{\phi\circ\psi}) \arrow[ur, "\prod f_\psi"'] \arrow[uurrr, bend right, "\prod(g \circ f_\psi)"'] & & &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Proof. □

Proposition 70. *Sea $\Phi\colon (\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) \longrightarrow (\underline{T}, \underline{\mathcal{B}})$ un morfismo proyectivo.Entonces:*

(1) *Si, para cada $t \in T$, $f_t\colon \underline{A}_{\phi(t)} \longrightarrow \underline{B}_t$ es un encajamiento, entonces $\varprojlim \Phi$ es un encajamiento.*
(2) *Si, para cada $t \in T$, $f_t\colon \underline{A}_{\phi(t)} \longrightarrow \underline{B}_t$ es un isomorfismo, entonces $\varprojlim \Phi$ es un isomorfismo.*

Proposition 71. *Sea* $\Phi\colon (\underline{S},\underline{\mathcal{A}}) \longrightarrow (\underline{T},\underline{\mathcal{B}})$ *un morfismo proyectivo. Si* $\underline{S}$ *y* $\underline{T}$ *están dirigidos superiormente y hay un subconjunto* T' *de* T *que es cofinal en* $\underline{T}$*,* $\phi[T']$ *es cofinal en* $\underline{S}$ *y, para cada* $t' \in T'$*,* $f_{t'} : \underline{A}_{\phi(t')} \longrightarrow \underline{B}_{t'}$ *es un isomorfismo, entonces* $\varprojlim \Phi$ *es un isomorfismo.*

Proof. □

Antes de enunciar un corolario de la proposición anterior, convenimos que si $(\underline{S},\underline{\mathcal{A}})$ es un sistema proyectivo de sistemas algebraicos y S' un subconjunto de S, y siendo $\underline{S'}$ el par ordenado $(S', \preceq \cap (S' \times S'))$, que es, a su vez, un conjunto preordenado, entonces $(\underline{S},\underline{\mathcal{A}})\restriction S'$, la *restricción de* $(\underline{S},\underline{\mathcal{A}})$ *a* $\underline{S'}$, denota el sistema proyectivo de sistemas algebraicos cuya primera coordenada es $(S', \preceq \cap (S' \times S'))$ y cuya segunda coordenada tiene como primera componente la restricción de $(\underline{A}_s \mid s \in S)$ a S' y como segunda componente la restricción de $(a_{s',s} \mid (s,s') \in \preceq)$ a $\preceq \cap (S' \times S')$.

Corollary 9. *Si* $(\underline{S},\underline{\mathcal{A}})$ *es un sistema proyectivo de sistemas algebraicos tal que* $\underline{S}$ *está dirigido superiormente y* S' *es un subconjunto cofinal de* $\underline{S}$*, entonces para el morfismo proyectivo canónico* $\Phi = (in_{\underline{S'}}, (id_{\underline{A}_{s'}} \mid s' \in S'))$ *de* $(\underline{S},\underline{\mathcal{A}})$ *en* $(\underline{S},\underline{\mathcal{A}})\restriction S'$ *se cumple que* $\varprojlim \Phi$ *es un isomorfismo.*

Proof. □

Corollary 10. *Si* $(\underline{S},\underline{\mathcal{A}})$ *es un sistema proyectivo de sistemas algebraicos tal que* $\underline{S}$ *está dirigido superiormente y* S' *es un subconjunto cofinal de* $\underline{S}$*, entonces una condición necesaria y suficiente para que dos miembros de* $\varprojlim(\underline{S},\mathcal{A})$ *coincidan es que coincidan sus restricciones a* S'*.*

Proof. □

2.8. **Algunos límites y colímites de familias de sistemas proyectivos.** Del mismo modo que para el universo de conjuntos y aplicaciones, demostramos la existencia de productos y coproductos de familias de conjuntos así como la de coigualadores de pares de aplicaciones con el mismo dominio y codominio, ahora, para el universo de discurso formado por los sistemas proyectivos de sistemas algebraicos y los morfismos entre ellos, demostramos la existencia de productos y coproductos de familias de sistemas proyectivos de sistemas algebraicos, así como la de coigualadores de pares de morfismos con el mismo dominio y codominio.

Proposition 72. *Sea* $((\underline{S}^i,\underline{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I)$ *una familia de sistemas proyectivos de sistemas algebraicos. Entonces hay un par ordenado* $\big(\prod((\underline{S}^i,\underline{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I), (pr^i \mid i \in I)\big)$*, también denotado por* $\big(\prod_{i\in I}(\underline{S}^i,\underline{\mathcal{A}}^i), (pr^i \mid i \in I)\big)$*, en el que* $\prod((\underline{S}^i,\underline{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I)$*, el* producto *de* $((\underline{S}^i,\underline{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I)$*, es un sistema proyectivo de* $\underline{\Sigma}$*-álgebras y, para cada* $i \in I$*,* pr^i*, la* proyección canónica i-ésima *del producto, es un morfismo proyectivo de* $\prod((\underline{S}^i,\underline{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I)$ *en* $(\underline{S}^i,\underline{\mathcal{A}}^i)$*, que tiene la siguiente* propiedad universal*:*

Para cada par ordenado $((\underline{T},\underline{\mathcal{B}}), (\Psi^i \mid i \in I))$*, en el que* $(\underline{T},\underline{\mathcal{B}})$ *es un sistema proyectivo de* $\underline{\Sigma}$*-álgebras y, para cada* $i \in I$*,* $\Psi^i\colon (\underline{T},\underline{\mathcal{B}}) \longrightarrow (\underline{S}^i,\mathcal{A}^i)$*, hay un único morfismo proyectivo* $\langle \Psi^i \mid i \in I \rangle : (\underline{T},\underline{\mathcal{B}}) \longrightarrow \prod((\underline{S}^i,\underline{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I)$ *tal que, para cada* $i \in I$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
(\underline{T},\underline{\mathcal{B}}) \arrow[d, "\langle \Psi^i \mid i \in I \rangle"'] \arrow[dr, "\Psi^i"] & \\
\prod((\underline{S}^i,\underline{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I) \arrow[r, "pr^i"'] & (\underline{S}^i,\underline{\mathcal{A}}^i)
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Proof. Es suficiente tomar como primera coordenada de $\prod((\underline{S}^i, \underline{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I)$ el coproducto de la familia de conjuntos preordenados $(\underline{S}^i \mid i \in I)$, que es $(\coprod(S^i \mid i \in I), \preceq)$, siendo $\preceq$ el preorden sobre $\coprod(S^i \mid i \in I)$ definido como:

$$(s,i) \preceq (s',j) \text{ si y sólo si } i = j \text{ y } s \preceq^i s',$$

y, como segunda coordenada, el par ordenado cuya primera componente es

$$(\underline{A}^i_s \mid (s,i) \in \coprod(S^i \mid i \in I))$$

y cuya segunda componente es

$$(a^i_{s',s} \mid ((s,i),(s',i)) \in \preceq);$$

y, por otra parte, para cada $i \in I$, como primera coordenada de pr^i, in_i, la inclusión canónica de $\underline{S}^i$ en $\coprod(\underline{S}^i \mid i \in I)$, y, como segunda coordenada $(\mathrm{id}_{\underline{A}^i_s} \mid (s,i) \in \coprod(S^i \mid i \in I))$

$\square$

Proposition 73. *Sea* $((\underline{S}^i, \underline{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I)$ *una familia de sistemas proyectivos de* $\underline{\Sigma}$-*álgebras. Entonces hay un par ordenado* $\big(\coprod((\underline{S}^i, \underline{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I), (in^i \mid i \in I)\big)$, *también denotado por* $\big(\coprod_{i\in I}(\underline{S}^i, \underline{\mathcal{A}}^i), (in^i \mid i \in I)\big)$, *en el que* $\coprod((\underline{S}^i, \underline{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I)$, *el* coproducto *de* $((\underline{S}^i, \underline{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I)$, *es un sistema proyectivo de* $\underline{\Sigma}$-*álgebras y, para cada* $i \in I$, in^i, *la* inclusión canónica i-ésima *del coproducto, es un morfismo proyectivo de* $(\underline{S}^i, \underline{\mathcal{A}}^i)$ *en* $\coprod((\underline{S}^i, \underline{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I)$, *que tiene la siguiente* propiedad universal*:*

Para cada par ordenado $((\underline{T}, \underline{\mathcal{B}}), (\Psi^i \mid i \in I))$, *en el que* $(\underline{T}, \underline{\mathcal{B}})$ *es un sistema proyectivo de* $\underline{\Sigma}$-*álgebras y, para cada* $i \in I$, $\Psi_i \colon (\underline{S}^i, \underline{\mathcal{A}}^i) \longrightarrow (\underline{T}, \underline{\mathcal{B}})$, *hay un único morfismo proyectivo* $\big[\Psi^i \mid i \in I\big] \colon \coprod((\underline{S}^i, \underline{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I) \longrightarrow (\underline{T}, \underline{\mathcal{B}})$ *tal que, para cada* $i \in I$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
(\underline{S}^i, \underline{\mathcal{A}}^i) \arrow[r, "in^i"] \arrow[dr, "\Psi^i"'] & \coprod((\underline{S}^i, \underline{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I) \arrow[d, "{[f_i \mid i \in I]}"] \\
 & (\underline{T}, \underline{\mathcal{B}})
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Proof. Es suficiente tomar como primera coordenada de $\coprod((\underline{S}^i, \underline{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I)$ el producto de la familia de conjuntos preordenados $(\underline{S}^i \mid i \in I)$, que es $(\prod(S^i \mid i \in I), \preceq)$, siendo $\preceq$ el preorden sobre $\prod(S^i \mid i \in I)$ definido como:

$$(s_i \mid i \in I) \preceq (s'_i \mid i \in I) \text{ si y sólo si } \forall i \in I\,(s_i \preceq^i s'_i),$$

y, como segunda coordenada, el par ordenado cuya primera componente es

$$\Big(\coprod(\underline{A}^i_{s_i} \mid i \in I) \mid (s_i \mid i \in I) \in \prod(S^i \mid i \in I)\Big)$$

y cuya segunda componente es

$$\Big(\coprod(a^i_{s'_i, s_i} \mid i \in I) \mid ((s_i \mid i \in I), (s'_i \mid i \in I)) \in \preceq\Big);$$

y, por otra parte, para cada $i \in I$, como primera coordenada de in^i, pr_i, la proyección canónica de $\prod(\underline{S}^i \mid i \in I)$ en $\underline{S}^i$, y, como segunda coordenada, $(\mathrm{in}_{\underline{A}^i_{s_i}} \mid (s_i \mid i \in I) \in \prod(S^i \mid i \in I))$

$\square$

Proposition 74. *Sean* $\Phi, \Psi\colon (\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) \longrightarrow (\underline{T}, \underline{\mathcal{B}})$ *dos morfismos proyectivos, con* $\Phi = (\phi, f)$ *y* $\Psi = (\psi, g)$. *Entonces existe un par ordenado* $(\underline{\mathrm{Ceq}}(\Phi, \Psi), ceq(\Phi, \Psi))$, *el* coigualador *de* Φ *y* Ψ, *en el que* $\underline{\mathrm{Ceq}}(\Phi, \Psi)$ *es un sistema proyectivo de* $\underline{\Sigma}$*-álgebras y* $ceq(\Phi, \Psi)$ *un morfismo proyectivo de* $(\underline{T}, \underline{\mathcal{B}})$ *en* $\underline{\mathrm{Ceq}}(\Phi, \Psi)$, *que tiene las siguientes propiedades:*

1. $ceq(\Phi, \Psi) \circ \Phi = ceq(\Phi, \Psi) \circ \Psi$.
2. (Propiedad universal del coigualador) *Para cualquier sistema proyectivo de* $\underline{\Sigma}$*-álgebras* $(\underline{U}, \underline{\mathcal{C}})$ *y cada morfismo proyectivo* $\Xi\colon (\underline{T}, \underline{\mathcal{B}}) \longrightarrow (\underline{U}, \underline{\mathcal{C}})$, *si* $\Xi \circ \Phi = \Xi \circ \Psi$, *entonces hay un único morfismo proyectivo* $\Gamma\colon \underline{\mathrm{Ceq}}(\Phi, \Psi) \longrightarrow (\underline{U}, \underline{\mathcal{C}})$ *tal que* $\Gamma \circ ceq(\Phi, \Psi) = \Xi$.

Proof. Es suficiente tomar como primera coordenada de $\underline{\mathrm{Ceq}}(\Phi, \Psi)$, el conjunto preordenado $\underline{\mathrm{Eq}}(\phi, \psi)$, formado por el igualador de $\phi, \psi\colon T \longrightarrow S$ y la restricción del preorden de $\underline{T}$ a ésa parte, y como segunda coordenada, $\underline{\mathcal{E}}$, el par cuya primera componente, $\underline{E}_t$, para cada $t \in \mathrm{Eq}(\phi, \psi)$, es $\underline{\mathrm{Ceq}}(f_t, g_t)$, y cuya segunda componente, $e_{t',t}$, para cada $t, t' \in \mathrm{Eq}(\phi, \psi)$, tal que $t \preceq t'$, es el único homomorfismode $\underline{\mathrm{Ceq}}(f_{t'}, g_{t'})$ en $\underline{\mathrm{Ceq}}(f_t, g_t)$ tal que $\mathrm{ceq}(f_t, g_t) \circ b_{t',t} = e_{t',t} \circ \mathrm{ceq}(f_t, g_t)$; y, por otra parte, como primera coordenada de $\mathrm{ceq}(\Phi, \Psi)$, $\mathrm{eq}(\phi, \psi)$, la aplicación isótona canónica de $\underline{\mathrm{Eq}}(\phi, \psi)$ en $\underline{T}$, y, como segunda coordenada, $(\mathrm{ceq}(f_t, g_t) \mid t \in \mathrm{eq}(\phi, \psi))$. □

3. Límites inductivos de los sistemas algebraicos

Nos ocupamos, en primer lugar, de demostrar tanto la existencia de coproductos de familias de $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-sistemas algebraicos, como la de coproductos de familias de homomorfismos entre familias de $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-sistemas algebraicos, así como, en segundo lugar, de estudiar la conducta del operador de formación de coproductos, respecto de las identidades y de la composición de familias de homomorfismos entre familias de $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-sistemas algebraicos.

En lo que sigue, salvo indicación expresa de lo contrario, suponemos elegida una signatura de primer orden $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$ y que todos los sistemas algebraicos son $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-sistemas algebraicos.

3.1. Coproductos de sistemas algebraicos.

Proposition 75. *Sea* $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ *una familia de sistemas algebraicos. Entonces hay un par* $(\coprod(\underline{A}_i \mid i \in I), (in_i \mid i \in I))$, *también denotado por* $\left(\coprod_{i\in I} \underline{A}_i, (in_i \mid i \in I)\right)$, *en el que* $\coprod(\underline{A}_i \mid i \in I)$, *el* coproducto *de* $(\underline{A}_i \mid i \in I)$, *es un sistema algebraico y, para cada* $i \in I$, in_i, *la* inclusión canónica i-ésima *del coproducto, es un homomorfismo de* $\underline{A}_i$ *en* $\coprod(\underline{A}_i \mid i \in I)$, *que tiene la siguiente* propiedad universal*:*

Para cada par ordenado $(\underline{A}, (f_i \mid i \in I))$, *en el que* $\underline{A}$ *es un sistema algebraico y, para cada* $i \in I$, $f_i\colon \underline{A}_i \longrightarrow \underline{A}$, *hay un único homomorfismo* $[f_i \mid i \in I]^\flat : \coprod(\underline{A}_i \mid i \in I) \longrightarrow \underline{A}$ *tal que, para cada* $i \in I$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}_i \arrow[r, "in_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & \coprod(\underline{A}_i \mid i \in I) \arrow[d, "{[f_i \mid i \in I]^\flat}"] \\
& \underline{A}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Proof. Sea $\coprod(\underline{A}_i \mid i \in I)$ el sistema algebraico cuya $\underline{\Sigma}$-álgebra subyacente es $\coprod((A_i, F^i) \mid i \in I)$, el coproducto de la familia de $\underline{\Sigma}$-álgebras $((A_i, F^i) \mid i \in I)$ (que, recordemos, es $\underline{\mathrm{Fr}_{\Sigma}}\big(\coprod_{i\in I} A_i\big)/\mathrm{C}_{((A_i,F^i)|i\in I)}$, siendo $\mathrm{C}_{((A_i,F^i)|i\in I)}$ la congruencia sobre $\underline{\mathrm{Fr}_{\Sigma}}\big(\coprod_{i\in I} A_i\big)$ generada por la relación binaria $\mathrm{R}_{((A_i,F^i)|i\in I)}$ en $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}\big(\coprod_{i\in I} A_i\big)$ que consta de los pares ordenados

$$((F_\sigma(a_0,\ldots,a_{n-1}),i),\sigma((a_0,i),\ldots,(a_{n-1},i))),$$

con $i\in I$, $n\in \mathrm{N}$, $\sigma\in\Sigma_n$ y $(a_0,\ldots,a_{n-1})\in A_i^n$), y para el que la familia de relaciones subyacente $(R_\pi \mid \pi\in\Pi)$ es $\mathrm{L}_{(\mathrm{in}_i|i\in I)}(\underline{A_i}\mid i\in I)$, el levantamiento cooptimal de $(\underline{A_i}\mid i\in I)$ a través de $(\mathrm{in}_i\mid i\in I)$, siendo, para cada $i\in I$, in_i el homomorfismo de $\underline{\Sigma}$-álgebras de (A_i,F^i) en $\coprod((A_i,F^i)\mid i\in I)$ obtenido componiendo la inclusión de A_i en $\coprod_{i\in I}A_i$, la inclusión de $\coprod_{i\in I}A_i$ en $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}\big(\coprod_{i\in I} A_i\big)$ y la proyección de $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}\big(\coprod_{i\in I} A_i\big)$ en $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}\big(\coprod_{i\in I} A_i\big)/\mathrm{C}_{((A_i,F^i)|i\in I)}$. Entonces se cumple que, para cada $\pi\in\Pi$, con $\mathrm{rk}(\pi)=n$, $\mathrm{in}_i^n[R_\pi^i]\subseteq R_\pi$, i.e., en definitiva, que in_i es un homomorfismo de $\underline{A_i}$ en $\coprod(\underline{A_i}\mid i\in I)$.

Por otra parte, dado un par ordenado $(\underline{A},(f_i\mid i\in I))$, en el que $\underline{A}$ es un sistema algebraico y, para cada $i\in I$, $f_i\colon \underline{A_i}\longrightarrow \underline{A}$ un homomorfismo, sea $[f_i\mid i\in I]^\sharp$ el único homomorfismo de $\underline{\mathrm{Fr}_{\Sigma}}\big(\coprod_{i\in I} A_i\big)$ en (A,F) tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I}A_i \arrow[r, "\eta_{\coprod_{i\in I}A_i}"] \arrow[dr, "{[f_i\mid i\in I]}"'] & \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}\big(\coprod_{i\in I} A_i\big) \arrow[d, "{[f_i\mid i\in I]^\sharp}"] \\
 & A
\end{tikzcd}$$

conmuta. Puesto que $\mathrm{Ker}([f_i\mid i\in I]^\sharp)$ contiene a todos los pares ordenados que generan a la congruencia $\mathrm{C}_{((A_i,F^i)|i\in I)}$, entonces existe un único homomorfismo $[f_i\mid i\in I]^\flat$ de $\coprod_{i\in I}(A_i,F^i)$ en (A,F) tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Fr}_{\Sigma}}\big(\coprod_{i\in I} A_i\big) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathrm{C}_{((A_i,F^i)|i\in I)}}"] \arrow[dr, "{[f_i\mid i\in I]^\sharp}"'] & \coprod((A_i,F^i)\mid i\in I) \arrow[d, "{[f_i\mid i\in I]^\flat}"] \\
 & (A,F)
\end{tikzcd}$$

conmuta. Luego hay un homomorfismo $[f_i\mid i\in I]^\flat : \coprod((A_i,F^i)\mid i\in I)\longrightarrow (A,F)$ tal que, para cada $i\in I$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(A_i,F^i) \arrow[r, "\mathrm{in}_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & \coprod((A_i,F^i)\mid i\in I) \arrow[d, "{[f_i\mid i\in I]^\flat}"] \\
 & (A,F)
\end{tikzcd}$$

conmuta. Es evidente que $[f_i\mid i\in I]^\flat$ es un homomorfismo de $\coprod(\underline{A_i}\mid i\in I)$ en $\underline{A}$. Con ello queda demostrada la existencia de al menos un homomorfismo de $\coprod(\underline{A_i}\mid i\in I)$ en $\underline{A}$ con la propiedad indicada. Dejamos, como ejercicio, la demostración de la unicidad. $\square$

Podemos resumir el proceso seguido en la demostración de la proposición anterior en los siguientes términos:

- En primer lugar, nos olvidamos de la estructura relacional de la familia de sistemas algebraicos dados $(\underline{A_i}\mid i\in I)$, y consideramos la familia de $\underline{\Sigma}$-álgebras $((A_i,F^i)\mid i\in I)$.

- A continuacion, consideramos el coproducto de la familia de $\underline{\Sigma}$-álgebras $((A_i, F^i) \mid i \in I)$.
- Por último, dotamos a la $\underline{\Sigma}$-álgebra $\coprod((A_i, F^i) \mid i \in I)$ de la familia de relaciones que se obtiene considerando el levantamiento cooptimal de $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ a través de $(\mathrm{in}_i \mid i \in I)$, y comprobamos que el resultado cumple las condiciones de la proposición.

En la Proposición 75 hemos demostrado, para una familia de sistemas algebraicos, la existencia de al menos un par ordenado, formado por un sistema algebraico y una familia de homomorfismos desde cada uno de los sistemas algebraicos de la familia dada hasta el sistema algebraico, sujeto a cumplir una cierta propiedad universal; pero, no hemos afirmado que tal par sea absolutamente único.

Demostraremos en lo que sigue, entre otras cosas, que el par ordenado de la proposición anterior, es único salvo (un único) isomorfismo.

Proposition 76. *Sea $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ una familia de sistemas algebraicos. Entonces:*

(1) *Para cualesquiera homomorfismos $f, g\colon \coprod_{i\in I} \underline{A}_i \longrightarrow \underline{A}$, si, para cada $i \in I$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}_i \arrow[r, "in_i"] \arrow[rr, bend left, "f \circ in_i"] \arrow[rr, bend right, "g \circ in_i"'] & \coprod(\underline{A}_i \mid i \in I) \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \underline{A}
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces $f = g$, i.e., la familia $(in_i \mid i \in I)$ es colectivamente epimórfica.

(2) *Para cada par ordenado $(\underline{A}, (f_i \mid i \in I))$, en el que $\underline{A}$ sea un sistema algebraico y, para cada $i \in I$, $f_i\colon \underline{A}_i \longrightarrow \underline{A}$, y para cada monomorfismo $t\colon \underline{A} \rightarrowtail \coprod(\underline{A}_i \mid i \in I)$, si, para cada $i \in I$, el digrama:*

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}_i \arrow[rr, "in_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & & \coprod(\underline{A}_i \mid i \in I) \\
& \underline{A} \arrow[ur, tail, "t"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces t es un isomorfismo, i.e., la familia $(in_i \mid i \in I)$ es extremal.

Proof. □

Corollary 11. *Sea $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ una familia de sistemas algebraicos. Si un par ordenado $(\underline{C}, (q_i \mid i \in I))$, en el que $\underline{C}$ es un sistema algebraico y, para cada $i \in I$, $q_i\colon \underline{A}_i \longrightarrow \underline{C}$, tiene la propiedad de que para cada par ordenado $(\underline{A}, (f_i \mid i \in I))$, en el que $\underline{A}$ es un sistema algebraico y, para cada $i \in I$, $f_i\colon \underline{A}_i \longrightarrow \underline{A}$ un homomorfismo, hay un único homomorfismo $h\colon \underline{C} \longrightarrow \underline{A}$ tal que, para cada $i \in I$,* *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \underline{A}_i \arrow[r, "q_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & \underline{C} \arrow[d, "h"] \\ & \underline{A} \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces hay un único isomorfismo t de $\coprod(\underline{A}_i \mid i \in I)$ en $\underline{C}$ tal que, para cada $i \in I$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \underline{A}_i \arrow[r, "in_i"] \arrow[dr, "q_i"'] & \coprod(\underline{A}_i \mid i \in I) \arrow[d, "t"] \\ & \underline{C} \end{tikzcd}$$

conmuta.

Proof. □

Sea $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ una familia de sistemas algebraicos. Demuéstrese que si $I = \varnothing$, entonces

$$\coprod(\underline{A}_i \mid i \in I) = (\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\varnothing), F, (\varnothing \mid \pi \in \Pi)),$$

siendo F la estructura de $\underline{\Sigma}$-álgebra sobre $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\varnothing)$, i.e., el coproducto de la familia vacía de sistemas algebraicos es el sistema algebraico inicial.

Sea $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ una familia de sistemas algebraicos. Demuéstrese que si I es un conjunto final y su único miembro es i, entonces

$$\coprod(\underline{A}_i \mid i \in I) \cong \underline{A}_i.$$

Proposition 77 (Conmutatividad)**.** *Sea $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ una familia de sistemas algebraicos y ϕ un automorfismo de I, entonces*

$$\coprod(\underline{A}_i \mid i \in I) \cong \coprod(\underline{A}_{\phi(i)} \mid i \in I).$$

Proof. □

Para establecer la proposición que sigue, convenimos en denotar por $(\underline{A}_j \mid j \in J)$ la restricción de $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ a J, si $J \subseteq I$, que no es más que la composición de in_J y de $(\underline{A}_i \mid i \in I)$. Además, usaremos in_j para denotar la inyección canónica j-ésima, del coproducto de cualquier familia de sistemas algebraicos para la cual se cumpla que j sea miembro del conjunto de índices de la misma.

Proposition 78. *Sea $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ una familia de sistemas algebraicos y $J, K, L \subseteq I$ tales que $K \subseteq J$ y $L \subseteq K$. Entonces:*

(1) *$in_{J,J} = id_{\coprod(\underline{A}_j \mid j \in J)}$, siendo $in_{J,J}$ el único endomorfismo $[in_j \mid j \in J]^\flat$ del sistema algebraico $\coprod(\underline{A}_j \mid j \in J)$ tal que, para cada $j \in J$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \underline{A}_j \arrow[r, "in_j"] \arrow[dr, "in_j"'] & \coprod(\underline{A}_j \mid j \in J) \arrow[d, "in_{J,J}"] \\ & \coprod(\underline{A}_j \mid j \in J) \end{tikzcd}$$

conmuta.

(2) $in_{L,J} = in_{K,J} \circ in_{L,K}$, *i.e., el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\coprod(\underline{A}_l \mid l \in L) \arrow[r, "in_{L,K}"] \arrow[dr, "in_{L,J}"'] & \coprod(\underline{A}_k \mid k \in K) \arrow[d, "in_{K,J}"] \\
& \coprod(\underline{A}_j \mid j \in J)
\end{tikzcd}$$

conmuta; siendo, para $J, K \subseteq I$, *con* $K \subseteq J$, $in_{K,J}$ *el único homomorfismo del sistema algebraico* $\coprod(\underline{A}_k \mid k \in K)$ *en el sistema algebraico* $\coprod(\underline{A}_j \mid j \in J)$ *tal que, para cada* $k \in K$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}_k \arrow[r, "in_k"] \arrow[dr, "in_k"'] & \coprod(\underline{A}_k \mid k \in K) \arrow[d, "in_{K,J}"] \\
& \coprod(\underline{A}_j \mid j \in J)
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Proof. □

Proposition 79. *Sean* $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ *y* $(\underline{B}_i \mid i \in I)$ *dos familias de sistemas algebraicos y* $(f_i \mid i \in I)$ *una familia de homomorfismos en la que, para cada* $i \in I$, $f_i\colon \underline{A}_i \longrightarrow \underline{B}_i$. *Entonces hay un único homomorfismo, denotado por* $\coprod(f_i \mid i \in I)$ *y denominado el* coproducto *de* $(f_i \mid i \in I)$, *del sistema algebraico* $\coprod(\underline{A}_i \mid i \in I)$ *en el sistema algebraico* $\coprod(\underline{B}_i \mid i \in I)$ *tal que, para cada* $i \in I$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}_i \arrow[r, "in_i"] \arrow[d, "f_i"'] & \coprod(\underline{A}_i \mid i \in I) \arrow[d, "\coprod(f_i \mid i \in I)"] \\
\underline{B}_i \arrow[r, "in_i"'] & \coprod(\underline{B}_i \mid i \in I)
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Proof. □

Proposition 80. *Sean* $(\underline{A}_i \mid i \in I)$, $(\underline{B}_i \mid i \in I)$ *y* $(\underline{C}_i \mid i \in I)$ *tres familias de sistemas algebraicos y* $(f_i \mid i \in I)$ *y* $(g_i \mid i \in I)$ *dos familias de homomorfismos tales que, para cada* $i \in I$, $f_i\colon \underline{A}_i \longrightarrow \underline{B}_i$ *y* $g_i\colon \underline{B}_i \longrightarrow \underline{C}_i$. *Entonces:*

(1) $\coprod(id_{\underline{A}_i} \mid i \in I) = id_{\coprod(\underline{A}_i \mid i \in I)}$.
(2) $\coprod(g_i \mid i \in I) \circ \coprod(f_i \mid i \in I) = \coprod(g_i \circ f_i \mid i \in I)$.

Proof. □

Proposition 81. *Sean* $(\underline{A}_i \mid i \in I)$, $(\underline{B}_j \mid j \in J)$ *y* $(\underline{C}_k \mid k \in K)$ *tres familias de sistemas algebraicos y* $(f_j \mid j \in J)$ *y* $(g_k \mid k \in K)$ *dos familias de homomorfismos tales que, para cada* $j \in J$, $f_j\colon \underline{B}_j \longrightarrow \coprod(\underline{A}_i \mid i \in I)$ *y, para cada* $k \in K$, $g_k\colon \underline{C}_k \longrightarrow \coprod(\underline{B}_j \mid j \in J)$. *Entonces el único homomorfismo* $\Big[[f_j \mid j \in J]^\flat \circ g_k \mid k \in K\Big]^\flat$ *del sistema algebraico* $\coprod(\underline{C}_k \mid k \in K)$ *en el sistema* *algebraico* $\coprod(\underline{A}_i \mid i \in I)$ *tal que, para cada* $k \in K$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \underline{C}_k \arrow[r, "in_k"] \arrow[dr, "{[f_j \mid j \in J]^\flat \circ g_k}"'] & \coprod(\underline{C}_k \mid k \in K) \arrow[d, "{\left[[f_j \mid j \in J]^\flat \circ g_k \mid k \in K\right]^\flat}"] \\ & \coprod(\underline{A}_i \mid i \in I) \end{tikzcd}$$

conmuta, coincide con la composición del único homomorfismo $[g_k \mid k \in K]^\flat$ *del sistema algebraico* $\coprod(\underline{C}_k \mid k \in K)$ *en el sistema algebraico* $\coprod(\underline{B}_j \mid j \in J)$ *y del único homomorfismo* $[f_j \mid j \in J]^\flat$ *del sistema algebraico* $\coprod(\underline{B}_j \mid j \in J)$ *en el sistema algebraico* $\coprod(\underline{A}_i \mid i \in I)$ *tales que, resp., para cada* $k \in K$ *y cada* $j \in J$, *los dos triángulos del diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \underline{C}_k \arrow[r, "in_k"] \arrow[dr, "g_k"'] & \coprod(\underline{C}_k \mid k \in K) \arrow[d, "{[g_k \mid k \in K]^\flat}"] \\ \underline{B}_j \arrow[r, "in_j"] \arrow[dr, "f_j"'] & \coprod(\underline{B}_j \mid j \in J) \arrow[d, "{[f_j \mid j \in J]^\flat}"] \\ & \coprod(\underline{A}_i \mid i \in I) \end{tikzcd}$$

conmutan. Así pués, se cumple que:

$$[f_j \mid j \in J]^\flat \circ [g_k \mid k \in K]^\flat = \left[[f_j \mid j \in J]^\flat \circ g_k \mid k \in K\right]^\flat$$

Proof. □

Proposition 82. *Sean* $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ *y* $(\underline{B}_i \mid i \in I)$ *dos familias de sistemas algebraicos y* $(f_i \mid i \in I)$ *una familia de homomorfismos en la que, para cada* $i \in I$, $f_i \colon \underline{A}_i \longrightarrow \underline{B}_i$. *Entonces:*

(1) *Si para cada* $i \in I$, f_i *es una retracción, entonces* $\coprod(f_i \mid i \in I)$ *es una retracción.*
(2) *Si para cada* $i \in I$, f_i *es una sección, entonces* $\coprod(f_i \mid i \in I)$ *es una sección.*
(3) *Si para cada* $i \in I$, f_i *es un isomorfismo, entonces* $\coprod(f_i \mid i \in I)$ *es un isomorfismo.*
(4) *Si para cada* $i \in I$, f_i *es un monomorfismo, entonces* $\coprod(f_i \mid i \in I)$ *es un monomorfismo.*
(5) *Si para cada* $i \in I$, f_i *es coconstante, entonces* $\coprod(f_i \mid i \in I)$ *es coconstante.*

Proof. □

Proposition 83 (Asociatividad del coproducto)**.** *Sea* $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ *una familia de sistemas algebraicos y* $(J_l \mid l \in L)$ *una familia de subconjuntos de* I *tal que* $\bigcup(J_l \mid l \in L) = I$ *y, para cada* $l, m \in L$, *si* $l \neq m$, *entonces* $J_l \cap J_m = \varnothing$. *Entonces*

$$\coprod(\underline{A}_i \mid i \in I) \cong \coprod\left(\coprod(\underline{A}_i \mid i \in J_l) \mid l \in L\right).$$

Proof. □

3.2. **Coigualadores.**

Proposition 84. *Sean* $f, g\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ *dos homomorfismos. Entonces existe un par ordenado* $(\underline{\mathrm{Ceq}}(f,g), \mathrm{ceq}(f,g))$*, el* coigualador *de* f *y* g*, en el que* $\underline{\mathrm{Ceq}}(f,g)$ *es un sistema algebraico y* $\mathrm{ceq}(f,g)$ *un homomorfismo de* $\underline{B}$ *en* $\underline{\mathrm{Ceq}}(f,g)$*, que tiene las siguientes propiedades:*

(1) $\mathrm{ceq}(f,g) \circ f = \mathrm{ceq}(f,g) \circ g$.
(2) (Propiedad universal del coigualador) *Para cada sistema algebraico* $\underline{Y}$ *y cada homomorfismo* $h\colon \underline{B} \longrightarrow \underline{Y}$*, si* $h \circ f = h \circ g$*, entonces hay un único homomorfismo* $t\colon \underline{\mathrm{Ceq}}(f,g) \longrightarrow \underline{Y}$ *tal que* $t \circ \mathrm{ceq}(f,g) = h$.

La situación descrita por las condiciones anteriores la expresamos diagramáticamente como:

$$\begin{tikzcd} \underline{A} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \underline{B} \arrow[r, "\mathrm{ceq}(f,g)"] \arrow[dr, "h"'] & \underline{\mathrm{Ceq}}(f,g) \arrow[d, "t"] \\ & & \underline{Y} \end{tikzcd}$$

Proof. Sea $(\mathrm{Ceq}(f,g), F^{\underline{B}}/\mathrm{C}_{f,g})$ la $\underline{\Sigma}$-álgebra cociente de $(B, F^{\underline{B}})$ entre la congruencia $\mathrm{C}_{f,g}$, generada por la relación

$$\mathrm{R}_{f,g} = \{\, (f(a), g(a)) \mid a \in A \,\},$$

en B. Además, siendo $\mathrm{ceq}(f,g)$ la proyección canónica de B en $\mathrm{Ceq}(f,g)$, tenemos que $\mathrm{ceq}(f,g)$ es un homomorfismo de $\underline{\Sigma}$-álgebras de $(B, F^{\underline{B}})$ en $(\mathrm{Ceq}(f,g), F^{\underline{B}}/\mathrm{C}_{f,g})$. Entonces el par $(\underline{\mathrm{Ceq}}(f,g), \mathrm{ceq}(f,g))$ en el que $\underline{\mathrm{Ceq}}(f,g)$ es el sistema algebraico definido como:

$$\underline{\mathrm{Ceq}}(f,g) = (\mathrm{Ceq}(f,g), F^{\underline{B}}/\mathrm{C}_{f,g}, \mathrm{L}_{\mathrm{ceq}(f,g)}(\underline{B})),$$

cumple las condiciones de la proposición.

Es evidente que $\mathrm{ceq}(f,g)$ es un homomorfismo fuerte y que $\mathrm{ceq}(f,g) \circ f = \mathrm{ceq}(f,g) \circ g$. Además, si $\underline{Y}$ es un sistema algebraico y $h\colon \underline{B} \longrightarrow \underline{Y}$ un homomorfismo tal que $h \circ f = h \circ g$, entonces $\mathrm{C}_{f,g} \subseteq \mathrm{Ker}(h)$, porque $\mathrm{R}_{f,g} \subseteq \mathrm{Ker}(h)$, $\mathrm{Ker}(h)$ es una congruencia sobre $(B, F^{\underline{B}}$ y $\mathrm{C}_{f,g}$ es la mínima congruencia sobre $(B, F^{\underline{B}}$ que contiene a $\mathrm{R}_{f,g}$, luego, por la propiedad universal del cociente, hay un único homomorfismo $t\colon \underline{\mathrm{Ceq}}(f,g) \longrightarrow \underline{Y}$ tal que $t \circ \mathrm{ceq}(f,g) = h$. □

Podemos resumir el proceso seguido en la demostración de la proposición anterior en los siguientes términos:

- En primer lugar, nos olvidamos de la estructura relacional de los sistemas algebraicos dados $\underline{A}$ y $\underline{B}$, y consideramos los homomorfismos de $\underline{\Sigma}$-álgebras $f, g\colon (A, F^{\underline{A}}) \longrightarrow (B, F^{\underline{B}})$.
- A continuacion, consideramos el coigualador de los homomorfismos de $\underline{\Sigma}$-álgebras f y g.
- Por último, dotamos a la $\underline{\Sigma}$-álgebra $(\mathrm{Ceq}(f,g), F^{\underline{B}}/\mathrm{C}_{f,g})$ de la familia de relaciones que se obtiene considerando el levantamiento cooptimal de $\underline{B}$ a través de $\mathrm{ceq}(f,g)$, y comprobamos que el resultado cumple las condiciones de la proposición.

En la proposición anterior hemos demostrado, para un par de homomorfismos, ambos con el mismo dominio y codominio, la existencia de al menos un par ordenado, formado por un sistema algebraico y un homomorfismo desde el codominio de los homomorfismos dados hasta el sistema algebraico, sujeto a cumplir un par de condiciones; pero no hemos afirmado que tal par sea absolutamente único.

Demostramos a continuación que el par ordenado de la proposición anterior, es único, sólo, salvo isomorfismo.

Proposition 85. *Sean* $f, g\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ *dos homomorfismos. Si un par ordenado* $(\underline{C}, c)$*, en el que* $\underline{C}$ *es un sistema algebraico y* $c\colon \underline{B} \longrightarrow \underline{C}$*, tiene las propiedades:*

(1) $c \circ f = c \circ g$.
(2) *Para cualquier sistema algebraico* $\underline{Y}$ *y cada homomorfismo* $h\colon \underline{B} \longrightarrow \underline{Y}$*, si* $h \circ f = h \circ g$*, entonces hay un único homomorfismo* $u\colon \underline{C} \longrightarrow \underline{Y}$ *tal que* $u \circ c = h$.

Entonces hay un único isomorfismo $t\colon \underline{\mathrm{Ceq}}(f, g) \longrightarrow \underline{C}$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\underline{B} \arrow[r, "ceq(f,g)"] \arrow[dr, "c"'] & \underline{\mathrm{Ceq}}(f,g) \arrow[d, "t"] \\
& \underline{C}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Proof. □

Proposition 86. *Si el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\underline{A} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "u"'] & \underline{B} \arrow[d, "v"] \\
\underline{A}' \arrow[r, shift left, "f'"] \arrow[r, shift right, "g'"'] & \underline{B}'
\end{tikzcd}$$

conmuta serialmente, i.e., si $v \circ f = f' \circ u$ *y* $v \circ g = g' \circ u$*, entonces hay un único homomorfismo* $\mathrm{Ceq}(u, v)\colon \underline{\mathrm{Ceq}}(f, g) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ceq}}(f', g')$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\underline{B} \arrow[r, "ceq(f,g)"] \arrow[d, "v"'] & \underline{\mathrm{Ceq}}(f,g) \arrow[d, "\mathrm{Ceq}(u,v)"] \\
\underline{B}' \arrow[r, "ceq(f',g')"'] & \underline{\mathrm{Ceq}}(f',g')
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Proof. □

Demuéstrese que:

(1) Para el diagrama, serialmente, conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\underline{A} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\underline{A}}"'] & \underline{B} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\underline{B}}"] \\
\underline{A} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \underline{B}
\end{tikzcd}$$

se cumple que

$$\mathrm{Ceq}(\mathrm{id}_{\underline{A}}, \mathrm{id}_{\underline{B}}) = \mathrm{id}_{\underline{\mathrm{Ceq}(f,g)}}.$$

(2) Si los diagramas:

$$\begin{tikzcd} \underline{A} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "u"'] & \underline{B} \arrow[d, "v"] \\ \underline{A}' \arrow[r, shift left, "f'"] \arrow[r, shift right, "g'"'] & \underline{B}' \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} \underline{A}' \arrow[r, shift left, "f'"] \arrow[r, shift right, "g'"'] \arrow[d, "u'"'] & \underline{B}' \arrow[d, "v'"] \\ \underline{A}'' \arrow[r, shift left, "f''"] \arrow[r, shift right, "g''"'] & \underline{B}'' \end{tikzcd}$$

son, serialmente, conmutativos, entonces se cumple que

$$\mathrm{Ceq}(u', v') \circ \mathrm{Ceq}(u, v) = \mathrm{Ceq}(u' \circ u, v' \circ v).$$

Definition 15. Un homomorfismo $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ es un *epimorfismo regular* si existen dos homomorfismos $u, v\colon \underline{C} \longrightarrow \underline{A}$ tales que el par ordenado $(\underline{B}, f)$ es un coigualador de u y v.

Proposition 87. *Un homomorfismo $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ es un epimorfismo regular precisamente si es un homomorfismo fuerte.*

Proof. □

3.3. **Sumas amalgamadas.** Ahora que disponemos de los conceptos de coproducto y de coigualador, demostramos, apoyándonos en ellos, la existencia de un nuevo tipo de límite inductivo, el de *suma amalgamada* de dos homomorfismos con el mismo dominio.

Proposition 88. *Sean $f\colon \underline{C} \longrightarrow \underline{A}$ y $g\colon \underline{C} \longrightarrow \underline{B}$ dos homomorfismos con el mismo dominio. Entonces existe un par ordenado $(\underline{A} \amalg_{\underline{C}} \underline{B}, (i_0, i_1))$, la* suma amalgamada de $\underline{A}$ y $\underline{B}$ bajo $\underline{C}$ relativa a f y g, *en el que $\underline{A} \amalg_{\underline{C}} \underline{B}$ es un sistema algebraico, i_0 un homomorfismo de $\underline{A}$ en $\underline{A} \amalg_{\underline{C}} \underline{B}$ e i_1 un homomorfismo de $\underline{B}$ en $\underline{A} \amalg_{\underline{C}} \underline{B}$, que tiene las siguientes propiedades:*

(1) *El diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \underline{C} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & \underline{B} \arrow[d, "i_1"] \\ \underline{A} \arrow[r, "i_0"'] & \underline{A} \amalg_{\underline{C}} \underline{B} \end{tikzcd}$$

conmuta.

(2) (Propiedad universal de la suma amalgamada) *Para cada sistema algebraico $\underline{Y}$ y cualesquiera homomorfismos $u\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{Y}$ y $v\colon \underline{B} \longrightarrow \underline{Y}$ si el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \underline{C} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & \underline{B} \arrow[d, "v"] \\ \underline{A} \arrow[r, "u"'] & \underline{Y} \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces hay un único homomorfismo $t\colon \underline{A}\amalg_{\underline{C}}\underline{B} \longrightarrow \underline{Y}$ *tal que los dos triángulos del diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
& \underline{B} \arrow[d, "i_1"] \arrow[ddr, bend left, "v"] & \\
\underline{A} \arrow[r, "i_0"'] \arrow[drr, bend right, "u"'] & \underline{A}\amalg_{\underline{C}}\underline{B} \arrow[dr, "t"] & \\
& & \underline{Y}
\end{tikzcd}$$

conmutan.

La situación descrita por las condiciones anteriores la expresamos diagramáticamente como:

$$\begin{tikzcd}
\underline{C} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & \underline{B} \arrow[d, "i_1"] \arrow[ddr, bend left, "v"] & \\
\underline{A} \arrow[r, "i_0"'] \arrow[drr, bend right, "u"'] & \underline{A}\amalg_{\underline{C}}\underline{B} \arrow[dr, "t"] & \\
& & \underline{Y}
\end{tikzcd}$$

Proof. Sea $(A, F^{\underline{A}})\amalg_{(C,F^{\underline{C}})}(B, F^{\underline{B}})$ la suma amalgamada de $(A, F^{\underline{A}})$ y $(B, F^{\underline{B}})$ bajo $(C, F^{\underline{C}})$ relativa a f y g (que, recordemos, es $(\mathrm{Ceq}(\mathrm{in}_0{\circ}f, \mathrm{in}_1{\circ}g), F^{\underline{A}\amalg\underline{B}}/\mathrm{C}_{\mathrm{in}_0\circ f,\mathrm{in}_1\circ g})$, la $\underline{\Sigma}$-álgebra cociente de $(A, F^{\underline{A}})\coprod(B, F^{\underline{B}})$ entre la congruencia $\mathrm{C}_{\mathrm{in}_0\circ f,\mathrm{in}_1\circ g}$, generada por la relación

$$\mathrm{R}_{\mathrm{in}_0\circ f,\mathrm{in}_1\circ g} = \{\, (\mathrm{in}_0(f(a)), \mathrm{in}_1(g(a))) \mid a \in A \,\}).$$

Además, siendo i_0 la composición de la inclusión de $(A, F^{\underline{A}})$ en $(A, F^{\underline{A}})\coprod(B, F^{\underline{B}})$ y de la proyección de esta última en $(A, F^{\underline{A}})\amalg_{(C,F^{\underline{C}})}(B, F^{\underline{B}})$ e i_1 la composición de la inclusión de $(B, G^{\underline{B}})$ en $(A, F^{\underline{A}})\coprod(B, F^{\underline{B}})$ y de la proyección de esta última en $(A, F^{\underline{A}})\amalg_{(C,F^{\underline{C}})}(B, F^{\underline{B}})$, tenemos que i_0 e i_1 son homomorfismos de $\underline{\Sigma}$-álgebras de $(A, F^{\underline{A}})$ y $(B, F^{\underline{A}})$, respectivamente, en $(A, F^{\underline{A}})\amalg_{(C,F^{\underline{C}})}(B, F^{\underline{B}})$. Entonces el par $(\underline{A}\amalg_{\underline{C}}\underline{B}, (i_0, i_1))$ en el que $\underline{A}\amalg_{\underline{C}}\underline{B}$ es el sistema algebraico definido como:

$$\underline{A}\amalg_{\underline{C}}\underline{B} = (\mathrm{Ceq}(\mathrm{in}_0 \circ f, \mathrm{in}_1 \circ g), F^{\underline{A}\amalg\underline{B}}/\mathrm{C}_{\mathrm{in}_0\circ f,\mathrm{in}_1\circ g}, \mathrm{L}_{(i_0,i_1)}(\underline{A}, \underline{B})),$$

cumple las condiciones de la proposición. Es evidente que entonces el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\underline{C} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & \underline{B} \arrow[d, "i_1"] \\
\underline{A} \arrow[r, "i_0"'] & \underline{A}\amalg_{\underline{C}}\underline{B}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Además, si $\underline{Y}$ es un sistema algebraico y $u\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{Y}$, $v\colon \underline{B} \longrightarrow \underline{Y}$ dos homomorfismos tales que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\underline{C} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & \underline{B} \arrow[d, "v"] \\
\underline{A} \arrow[r, "u"'] & \underline{Y}
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces, por la propiedad universal del coproducto, hay un único homomorfismo $[u,v]^{\flat} : \underline{A} \coprod \underline{B} \longrightarrow \underline{Y}$ tal que $[u,v]^{\flat} \circ \mathrm{in}_0 = u$ y $[u,v]^{\flat} \circ \mathrm{in}_1 = v$ y, por cumplirse que $u \circ f = v \circ g$, tenemos que $\mathrm{Ker}([u,v]^{\flat})$ contiene a la congruencia $\mathrm{C}_{\mathrm{in}_0 \circ f, \mathrm{in}_1 \circ g}$ en $\underline{A} \coprod \underline{B}$, luego, por la propiedad universal del sistema algebraico cociente, hay un único homomorfismo t de $\underline{A} \amalg_{\underline{C}} \underline{B}$ en $\underline{X}$ tal que $t \circ \mathrm{pr}_{\mathrm{C}_{\mathrm{in}_0 \circ f, \mathrm{in}_1 \circ g}} = [u,v]^{\flat}$. Para el homomorfismo t se cumple que los dos triángulos del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& \underline{B} \arrow[d, "i_1"] \arrow[ddr, bend left, "v"] & \\
\underline{A} \arrow[r, "i_0"'] \arrow[drr, bend right, "u"'] & \underline{A} \amalg_{\underline{C}} \underline{B} \arrow[dr, "t"] & \\
& & \underline{Y}
\end{tikzcd}$$

conmutan. Dejamos, como ejercicio, la demostración de que t es el único homomorfismo de $\underline{A} \amalg_{\underline{C}} \underline{B}$ en $\underline{X}$ con las propiedades indicadas. □

Podemos resumir el proceso seguido en la demostración de la proposición anterior en los siguientes términos:

- En primer lugar, nos olvidamos de la estructura relacional de los sistemas algebraicos dados $\underline{A}$ y $\underline{B}$ y $\underline{C}$, y consideramos los homomorfismos de $\underline{\Sigma}$-álgebras $f\colon (C, F^{\underline{C}}) \longrightarrow (A, F^{\underline{A}})$ y $g\colon (C, F^{\underline{C}}) \longrightarrow (B, F^{\underline{B}})$.
- A continuacion, consideramos la suma amalgamada de los homomorfismos de $\underline{\Sigma}$-álgebras f y g.
- Por último, dotamos a la $\underline{\Sigma}$-álgebra $(A, F^{\underline{A}}) \amalg_{(C, F^{\underline{C}})} (B, F^{\underline{B}})$ de la familia de relaciones que se obtiene considerando el levantamiento cooptimal de $(\underline{A}, \underline{B})$ a través de (i_0, i_1), y comprobamos que el resultado cumple las condiciones de la proposición.

Cuando digamos de un diagrama de la forma:

$$\begin{tikzcd}
\underline{C} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & \underline{B} \arrow[d, "v"] \\
\underline{A} \arrow[r, "u"'] & \underline{Y}
\end{tikzcd}$$

que es un *cuadrado cocartesiano*, ello significará que la $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{Y}$ es una suma amalgamada de $\underline{A}$ y $\underline{B}$ bajo $\underline{C}$ relativa a f y g, y que u y v son las aplicaciones estructurales.

En la proposición anterior hemos demostrado, para un par de homomorfismos, ambos con el mismo dominio, la existencia de al menos un par ordenado, formado por una $\underline{\Sigma}$-álgebra y dos homomorfismos desde los codominios de los homomorfismos dadas hasta la $\underline{\Sigma}$-álgebra, sujeto a cumplir un par de condiciones; pero no hemos afirmado que tal par sea absolutamente único. Demostramos a continuación que el par ordenado de la proposición anterior, es único, sólo, salvo isomorfismo.

Proposition 89. *Sean* $f\colon \underline{C} \longrightarrow \underline{A}$ *y* $g\colon \underline{C} \longrightarrow \underline{B}$ *dos homomorfismos con el mismo dominio. Si un par ordenado* $(\underline{E}, (p, q))$*, en el que* $\underline{E}$ *es un sistema algebraico,* $p\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{E}$ *y* $q\colon \underline{B} \longrightarrow \underline{E}$ *tiene las propiedades:*

(1) *El diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \underline{C} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & \underline{B} \arrow[d, "q"] \\ \underline{A} \arrow[r, "p"'] & \underline{E} \end{tikzcd}$$

conmuta.

(2) *Para cada sistema algebraico* $\underline{Y}$ *y cualesquiera homomorfismos* $u\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{Y}$ *y* $v\colon \underline{B} \longrightarrow \underline{Y}$ *si el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \underline{C} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & \underline{B} \arrow[d, "v"] \\ \underline{A} \arrow[r, "u"'] & \underline{Y} \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces hay un único homomorfismo $t\colon \underline{E} \longrightarrow \underline{Y}$ *tal que los dos triángulos del diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & \underline{B} \arrow[d, "i_{\underline{B}}"] \arrow[ddr, bend left, "v"] & \\ \underline{A} \arrow[r, "i_{\underline{A}}"'] \arrow[drr, bend right, "u"'] & \underline{E} \arrow[dr, "t"] & \\ & & \underline{Y} \end{tikzcd}$$

conmutan,

entonces hay un único isomorfismo $t\colon \underline{A} \amalg_{\underline{C}} \underline{B} \longrightarrow \underline{E}$ *tal que los dos triángulos del diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{B} \arrow[d, "i_{\underline{B}}"] \arrow[ddr, bend left, "q"] & \\
\underline{A} \arrow[r, "i_{\underline{A}}"'] \arrow[drr, bend right, "p"'] & \underline{A} \amalg_{\underline{C}} \underline{B} \arrow[dr, "t"] & \\
 & & \underline{E}
\end{tikzcd}$$

conmutan.

Proof. □

Proposition 90. *Si el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{C} \arrow[rr, "g"] \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd, "w"] & & \underline{B} \arrow[dd, "v"] \\
\underline{A} \arrow[dd, "u"'] & & & \\
 & \underline{C}' \arrow[rr, "g'"] \arrow[dl, "f'"'] & & \underline{B}' \\
\underline{A}' & & &
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces hay un único homomorfismo $u \amalg_w v\colon \underline{A} \amalg_{\underline{C}} \underline{B} \longrightarrow \underline{A}' \amalg_{\underline{C}'} \underline{B}'$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{C} \arrow[rr, "g"] \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd, "w"] & & \underline{B} \arrow[dl, "i_{\underline{B}}"] \arrow[dd, "v"] \\
\underline{A} \arrow[rr, "i_{\underline{A}}"'] \arrow[dd, "u"'] & & \underline{A} \amalg_{\underline{C}} \underline{B} \arrow[dd, "u \amalg_w v"] & \\
 & \underline{C}' \arrow[rr, "g'"] \arrow[dl, "f'"'] & & \underline{B}' \arrow[dl, "i_{\underline{B}'}"] \\
\underline{A}' \arrow[rr, "i_{\underline{A}'}"'] & & \underline{A}' \amalg_{\underline{C}'} \underline{B}' &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Proof. □

Demuéstrese que:

(1) Para el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& \underline{C} \arrow[r, "g"] \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd, "\mathrm{id}_{\underline{C}}"] & \underline{B} \arrow[dd, "\mathrm{id}_{\underline{B}}"] \\
\underline{A} \arrow[dd, "\mathrm{id}_{\underline{A}}"'] & & \\
& \underline{C} \arrow[r, "g"] \arrow[dl, "f"'] & \underline{B} \\
\underline{A} & &
\end{tikzcd}$$

se cumple que

$$\mathrm{id}_{\underline{A}} \amalg_{\mathrm{id}_{\underline{C}}} \mathrm{id}_{\underline{B}} = \mathrm{id}_{\underline{A}\amalg_{\underline{C}}\underline{B}}.$$

(2) Si los diagramas:

$$\begin{tikzcd}
& \underline{C} \arrow[r, "g"] \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd, "w"] & \underline{B} \arrow[dd, "v"] \\
\underline{A} \arrow[dd, "u"'] & & \\
& \underline{C}' \arrow[r, "g'"] \arrow[dl, "f'"'] & \underline{B}' \\
\underline{A}' & &
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
& \underline{C}' \arrow[r, "g'"] \arrow[dl, "f'"'] \arrow[dd, "w'"] & \underline{B}' \arrow[dd, "v'"] \\
\underline{A}' \arrow[dd, "u'"'] & & \\
& \underline{C}'' \arrow[r, "g''"] \arrow[dl, "f''"'] & \underline{B}'' \\
\underline{A}'' & &
\end{tikzcd}$$

conmutan, entonces se cumple que

$$(u' \amalg_{w'} v') \circ (u \amalg_w v) = (u' \circ u) \amalg_{w' \circ w} (v' \circ v).$$

Sean Φ y Ψ dos congruencias sobre un sistema algebraico $\underline{A}$. Demuéstrese que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}/\Phi \cap \Psi \arrow[r, "\mathrm{p}_{\Phi\cap\Psi,\Psi}"] \arrow[d, "\mathrm{p}_{\Phi\cap\Psi,\Phi}"'] & \underline{A}/\Psi \arrow[d, "\mathrm{p}_{\Psi,\mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\Phi\cup\Psi)}"] \\
\underline{A}/\Phi \arrow[r, "\mathrm{p}_{\Phi,\mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\Phi\cup\Psi)}"'] & \underline{A}/\mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\Phi \cup \Psi)
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, pero que no es necesariamente un cuadrado cocartesiano.

3.4. **Sistemas inductivos de $\underline{\Sigma}$-álgebras.** A continuación consideramos los conceptos de sistema inductivo de sistemas algebraicos y morfismo inductivo entre sistemas inductivos de sistemas algebraicos, nociones debidas, en casos particulares, a Pontrjagin y que son de gran importancia para la topología algebraica y el álgebra homológica.

Definition 16. Un *sistema inductivo de sistemas algebraicos* es un par ordenado $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ en el que $\underline{S}$ es un conjunto preordenado y $\underline{\mathcal{A}} = ((\underline{A}_s \mid s \in S), (a_{s,s'} \mid (s,s') \in \preceq))$ tal que:

(1) Para cada $s \in S$, $\underline{A}_s$ es un sistema algebraico.
(2) Para cada $(s,s') \in \preceq$, $a_{s,s'} \colon \underline{A}_s \longrightarrow \underline{A}_{s'}$ es un homomorfismo.
(3) Para cada $s \in S$, $a_{s,s} = \mathrm{id}_{\underline{A}_s}$.

(4) Para cada $s, s', s'' \in S$, si $(s, s') \in \preceq$ y $(s', s'') \in \preceq$, entonces el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \underline{A}_s \arrow[r, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "a_{s,s''}"'] & \underline{A}_{s'} \arrow[d, "a_{s',s''}"] \\ & \underline{A}_{s''}, \end{tikzcd}$$

conmuta.

A los homomorfismos $a_{s,s'} \colon \underline{A}_s \longrightarrow \underline{A}_{s'}$ los denominamos los *homomorfismos de transición* del sistema inductivo de sistemas algebraicos $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$.

Example. Sea A un conjunto, $\underline{B}$ un sistema algebraico y $V, W \subseteq A$ tales que $W \subseteq V$. Entonces tenemos el homomorfismo

$$\mathrm{H}(\mathrm{in}_{W,V}, \mathrm{id}_{\underline{B}}) \colon \mathrm{Hom}(V, \underline{B}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(W, \underline{B}),$$

que a un $g \colon V \longrightarrow B$ le asigna $g \restriction W$.

Sea $\underline{S}$ un conjunto preordenado dirigido superiormente y $(V_s \mid s \in S)$ una aplicación isótona de $\underline{S}$ en $(\mathrm{Sub}(A), \subseteq^{-1})$; así que, para cada $(s, s') \in \preceq$, $V_{s'} \subseteq V_s$. Entonces

$$(\underline{S}, ((\mathrm{Hom}(V_s, \underline{B}) \mid s \in S), (a_{s,s'} \mid (s, s') \in \preceq))),$$

en el que, para cada $(s, s') \in \preceq$, $a_{s,s'}$ es el homomorfismo $\mathrm{H}(\mathrm{in}_{V_{s'},V_s}, \mathrm{id}_{\underline{B}})$ de $\mathrm{Hom}(V_s, \underline{B})$ en $\mathrm{Hom}(V_{s'}, \underline{B})$ que a un $g \colon V_s \longrightarrow B$ le asigna $g \restriction V_{s'}$, es un sistema inductivo de sistemas algebraicos.

Example. Sean I un conjunto y $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ una familia de sistemas algebraicos indexada por I. Entonces $(\underline{\mathrm{Sub}}_f(I), ((\coprod(\underline{A}_i \mid i \in J) \mid J \in \mathrm{Sub}_f(I)), (\mathrm{in}_{K,J} \mid K \subseteq J)))$ es un sistema inductivo de sistemas algebraicos.

Example. Sean S un conjunto, $\underline{A}$ un sistema algebraico y $(X_s \mid s \in S)$ una familia de cerrados de $\underline{A}$ tal que, para cualesquiera $s, s' \in S$ exista un $s'' \in S$ de modo que $X_s \cup X_{s'} \subseteq X_{s''}$. Entonces, considerando sobre S el preorden $\preceq$ definido como:

$$s \preceq s' \leftrightarrow X_s \subseteq X_{s'},$$

tenemos que $(\underline{S}, ((\underline{X}_s \mid s \in S), (\mathrm{in}_{\underline{X}_s, \underline{X}_{s'}} \mid s \preceq s')))$ es un sistema inductivo de sistemas algebraicos.

3.5. **Límites inductivos de los sistemas inductivos.**

Proposition 91. *Sea $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ un sistema inductivo de sistemas algebraicos. Entonces hay un par ordenado $(\varinjlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}), (a_s \mid s \in S))$, el* límite inductivo *del sistema inductivo $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$, en el que $\varinjlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ es un sistema algebraico y, para cada $s \in S$, a_s, la* inclusión canónica *s-ésima, es un homomorfismo de $\underline{A}_s$ en $\varinjlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$, tal que:*

(1) *Para cada $(s, s') \in \preceq$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \underline{A}_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "a_s"'] & & \underline{A}_{s'} \arrow[dl, "a_{s'}"] \\ & \varinjlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) & \end{tikzcd}$$

conmuta.

(2) *Para cada par ordenado* $(\underline{L}, (l_s \mid s \in S))$ *en el que, para cada* $s \in S$, $l_s\colon \underline{A}_s \longrightarrow \underline{L}$, *si, para cada* $(s, s') \in \preceq$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "l_s"'] & & \underline{A}_{s'} \arrow[dl, "l_{s'}"] \\
& \underline{L} &
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces hay un único homomorfismo $u\colon \varinjlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) \longrightarrow \underline{L}$ *tal que, para cada* $s \in S$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}_s \arrow[r, "a_s"] \arrow[dr, "l_s"'] & \varinjlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) \arrow[d, "u"] \\
& \underline{L}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

La situación descrita por las condiciones anteriores la expresamos diagramáticamente como:

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "a_s"] \arrow[ddr, bend right, "l_s"'] & & \underline{A}_{s'} \arrow[dl, "a_{s'}"'] \arrow[ddl, bend left, "l_{s'}"] \\
& \varinjlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) \arrow[d, "u"] & \\
& \underline{L} &
\end{tikzcd}$$

Proof. Sea $\varinjlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ el sistema algebraico cuya $\underline{\Sigma}$-álgebra subyacente es $\varinjlim(\underline{S}, (((A_s, F^s) \mid s \in S), (a_{s,s'} \mid (s, s') \in \leq)))$, el límite inductivo del sistema inductivo de $\underline{\Sigma}$-álgebras $(\underline{S}, (((A_s, F^s) \mid s \in S), (a_{s,s'} \mid (s, s') \in \leq)))$ (que, recordemos, es $\underline{\mathrm{Ceq}}(f, g)$, el coigualador de los homomorfismos f, g de $\coprod_{(s,s') \in \leq}(A_s, F^s)$ en $\coprod_{s \in S}(A_s, F^s)$, siendo $f = [\mathrm{in}_s \mid (s, s') \in \leq]^\flat$ y $g = [\mathrm{in}_{s'} \circ a_{s,s'} \mid (s, s') \in \leq]^\flat$ los únicos homomorfismos de $\coprod_{(s,s') \in \leq}(A_s, F^s)$ en $\coprod_{s \in S}(A_s, F^s)$ tales que, para cada $(s, s') \in \leq$, el cuadrado superior, resp., el cuadrado inferior, del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(A_s, F^s) \arrow[r, "\mathrm{id}_{(A_s, F^s)}"] \arrow[d, "\mathrm{in}_{s,s'}"'] & (A_s, F^s) \arrow[d, "\mathrm{in}_s"] & (A_s, F^s) \arrow[dl, "\mathrm{in}_s"'] \arrow[d, "a_s"] \\
\coprod_{(s,s') \in \leq}(A_s, F^s) \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \coprod_{s \in S}(A_s, F^s) \arrow[r, "\mathrm{ceq}(f, g)"] & \underline{\mathrm{Ceq}}(f, g) \\
(A_s, F^s) \arrow[r, "a_{s,s'}"'] \arrow[u, "\mathrm{in}_{s,s'}"] & (A_{s'}, F^{s'}) \arrow[u, "\mathrm{in}_{s'}"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta), y para el que la familia de relaciones subyacente es el levantamiento cooptimal de $(\underline{A}_s \mid s \in S)$ a través de $(a_s \mid s \in S)$, siendo, para cada $s \in S$, a_s

el homomorfismo de $\underline{\Sigma}$-álgebras obtenido componiendo los homomorfismos in_s y $\mathrm{ceq}(f,g)$.

Entonces el par ordenado $(\varinjlim(\underline{S},\underline{\mathcal{A}}),(a_s \mid s \in S))$ en el que $\varinjlim(\underline{S},\underline{\mathcal{A}})$ es el sistema algebraico definido como:

$$\varinjlim(\underline{S},\underline{\mathcal{A}}) = (\varinjlim(\underline{S},(((A_s,F^s) \mid s \in S),(a_{s,s'} \mid (s,s') \in \leq))), \mathrm{L}_{(a_s \mid s\in S)}(\underline{A}_s \mid s \in S))$$

cumple las condiciones de la proposición.

En efecto, por una parte, para cada $(s,s') \in \preceq$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
a_{s'} \circ a_{s,s'} &= \mathrm{pr}_{\mathrm{C}_{(\underline{S},\underline{\mathcal{A}})}} \circ \mathrm{in}_{s'} \circ a_{s,s'} && (\text{porque } a_{s'} = \mathrm{ceq}(f,g)\circ \mathrm{in}_{s'})\\
&= \mathrm{pr}_{\mathrm{C}_{(\underline{S},\underline{\mathcal{A}})}} \circ g \circ \mathrm{in}_{s,s'} \\
&= \mathrm{pr}_{\mathrm{C}_{(\underline{S},\underline{\mathcal{A}})}} \circ f \circ \mathrm{in}_{s,s'} && (\text{porque } \mathrm{ceq}(f,g) \text{ coiguala a } f \text{ y } g)\\
&= \mathrm{pr}_{\mathrm{C}_{(\underline{S},\underline{\mathcal{A}})}} \circ \mathrm{in}_{s} \\
&= a_s && (\text{porque } a_s = \mathrm{ceq}(f,g)\circ \mathrm{in}_s),
\end{aligned}$$

i.e., que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "a_s"'] & & \underline{A}_{s'} \arrow[dl, "a_{s'}"] \\
& \varinjlim(\underline{S},\underline{\mathcal{A}}) &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Por otra parte, si un par ordenado $(\underline{L},(l_s \mid s \in S))$, arbitrario, pero fijo, en el que, para cada $s \in S$, $l_s\colon \underline{A}_s \longrightarrow \underline{L}$, es tal que, para cada $(s,s') \in \preceq$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "l_s"'] & & \underline{A}_{s'} \arrow[dl, "l_{s'}"] \\
& \underline{L} &
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces, en virtud de la propiedad universal del coproducto, hay un único homomorfismo $[l_s \mid s \in S]^\flat : \coprod(\underline{A}_s \mid s \in S) \longrightarrow \underline{L}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}_s \arrow[r, "\mathrm{in}_{\underline{A}_s}"] \arrow[dr, "l_s"'] & \coprod(\underline{A}_s \mid s \in S) \arrow[d, "{[l_s \mid s \in S]^\flat}"] \\
& \underline{L}
\end{tikzcd}$$

conmuta. Además, para cada $(s,s') \in \leq$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
[l_s \mid s \in S]^\flat \circ f \circ \mathrm{in}_{s,s'} &= [l_s \mid s \in S]^\flat \circ \mathrm{in}_s \\
&= l_s \\
&= l_{s'} \circ a_{s,s'} \\
&= [l_s \mid s \in S]^\flat \circ \mathrm{in}_{s'} \circ a_{s,s'} \\
&= [l_s \mid s \in S]^\flat \circ g \circ \mathrm{in}_{s,s'}.
\end{aligned}$$

Luego $[l_s \mid s \in S]^\flat \circ f = [l_s \mid s \in S]^\flat \circ g$, por lo tanto, en virtud de la propiedad universal del coigualador, podemos afirmar que existe un único homomorfismo

$u\colon \varinjlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) \longrightarrow \underline{L}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\coprod(\underline{A}_s \mid s \in S) \arrow[r, "\mathrm{ceq}(f,g)"] \arrow[dr, "{[l_s \mid s \in S]^\flat}"'] & \varinjlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) \arrow[d, "u"] \\
 & \underline{L}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Ahora bien, puesto que, para cada $s \in S$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}_s \arrow[r, "\mathrm{in}_s"] \arrow[dr, "l_s"'] & \coprod(\underline{A}_s \mid s \in S) \arrow[d, "{[l_s \mid s \in S]^\flat}"] \\
 & \underline{L}
\end{tikzcd}$$

conmuta, también, para cada $s \in S$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}_s \arrow[r, "\mathrm{in}_s"] \arrow[rr, bend left, "a_s"] \arrow[dr, "l_s"'] & \coprod(\underline{A}_s \mid s \in S) \arrow[r, "\mathrm{ceq}(f,g)"] \arrow[d, "{[l_s \mid s \in S]^\flat}"] & \varinjlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) \arrow[dl, bend left, "u"] \\
 & \underline{L} &
\end{tikzcd}$$

conmuta. Por consiguiente hay al menos un homomorfismo u de $\varinjlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ en $\underline{L}$ tal que, para cada $s \in S$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}_s \arrow[r, "a_s"] \arrow[dr, "l_s"'] & \varinjlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) \arrow[d, "u"] \\
 & \underline{L}
\end{tikzcd}$$

conmuta. Dejamos, como ejercicio, la demostración de que hay a lo sumo un homomorfismo u de $\varinjlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ en $\underline{L}$ tal que, para cada $s \in S$, $u \circ a_s = l_s$.

□

Podemos resumir el proceso seguido en la demostración de la proposición anterior en los siguientes términos:

- En primer lugar, nos olvidamos de la estructura relacional del sistema inductivo de sistemas algebraicos dado $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$, y consideramos el sistema inductivo de $\underline{\Sigma}$-álgebras $(\underline{S}, (((A_s, F^s) \mid s \in S), (a_{s,s'} \mid (s,s') \in \leq)))$.
- A continuacion, consideramos el límite inductivo del sistema proyectivo de $\underline{\Sigma}$-álgebras $(\underline{S}, (((A_s, F^s) \mid s \in S), (a_{s,s'} \mid (s,s') \in \leq)))$.
- Por último, dotamos a la $\underline{\Sigma}$-álgebra $(\varinjlim(\underline{S}, (((A_s, F^s) \mid s \in S), (a_{s,s'} \mid (s,s') \in \leq)))$ de la familia de relaciones que se obtiene considerando el levantamiento cooptimal de $(\underline{A}_s \mid s \in S)$ a través de $(a_s \mid s \in S)$, y comprobamos que el resultado cumple las condiciones de la proposición.

En la proposición anterior se ha demostrado, para un sistema inductivo de sistemas algebraicos, la existencia de al menos un par ordenado, formado por un sistema algebraico y una familia de homomorfismos desde cada uno de las sistemas algebraicos de la familia de sistemas algebraicos subyacente a la segunda coordenada del sistema inductivo, hasta el sistema algebraico, sujeto a cumplir, por una parte, una condición de compatibilidad respecto de los homomorfismos subyacentes a la segunda coordenada del sistema inductivo, y, por otra, una cierta propiedad universal; pero, ni hemos afirmado que tal par sea absolutamente único, ni que las inclusiones canónicas sean necesariamente inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.

Demostraremos en lo que sigue, entre otras cosas, que:

- El par ordenado de la proposición anterior, es único salvo isomorfismo.
- Una condición suficiente para que una inclusión canónica sea inyectiva, sobreyectiva o biyectiva, es que los homomorfismos de transición sean inyectivos, sobreyectivos o biyectivos.

Proposition 92. *Sea $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ un sistema inductivo de sistemas algebraicos. Entonces:*

(1) *Para cada par de homomorfismos $f, g\colon \varinjlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) \longrightarrow \underline{Y}$, si, para cada $s \in S$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) \arrow[r, "a_s"] \arrow[rr, bend left, "f \circ a_s"] \arrow[rr, bend right, "g \circ a_s"'] & \underline{A}_s \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \underline{Y}
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces $f = g$, i.e., la familia $(a_s \mid s \in S)$ es colectivamente epimórfica.

(2) *Para cada par ordenado $(\underline{L}, (l_s \mid s \in S))$, en el que $\underline{L}$ sea un sistema algebraico y, para cada $s \in S$, $l_s\colon \underline{A}_s \longrightarrow \underline{L}$ un homomorfismo, si para cada $(s, s') \in \preceq$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "l_s"'] & & \underline{A}_{s'} \arrow[dl, "l_{s'}"] \\
& \underline{L} &
\end{tikzcd}$$

conmuta, y para cada monomorfismo $t\colon \underline{L} \rightarrowtail \varinjlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$, si, para cada $s \in S$, el digrama:

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}_s \arrow[rr, "a_s"] \arrow[dr, "l_s"'] & & \varinjlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) \\
& \underline{L} \arrow[ur, tail, "t"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces t es un isomorfismo, i.e., la familia $(a_s \mid s \in S)$ es extremal.

Proof. □

Corollary 12. *Sea $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ un sistema inductivo de sistemas algebraicos. Si un par ordenado $(\underline{Q}, (q_s \mid s \in S))$, en el que $\underline{Q}$ es un sistema algebraico y, para cada $s \in S$, $q_s \colon \underline{A}_s \longrightarrow \underline{Q}$ un homomorfismo, cumple que:*

(1) *Para cada $(s, s') \in \preceq$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \underline{A}_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "q_s"'] & & \underline{A}_{s'} \arrow[dl, "q_{s'}"] \\ & \underline{Q} & \end{tikzcd}$$

conmuta.

(2) *Para cada par ordenado $(\underline{L}, (l_s \mid s \in S))$, en el que $\underline{L}$ es un sistema algebraico y, para cada $s \in S$, $l_s \colon \underline{A}_s \longrightarrow \underline{L}$ un homomorfismo, si, para cada $(s, s') \in \preceq$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \underline{A}_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "l_s"'] & & \underline{A}_{s'} \arrow[dl, "l_{s'}"] \\ & \underline{L} & \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces hay un único homomorfismo $u \colon \underline{Q} \longrightarrow \underline{L}$ tal que, para cada $s \in S$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \underline{A}_s \arrow[r, "q_s"] \arrow[dr, "l_s"'] & \underline{Q} \arrow[d, "u"] \\ & \underline{L} \end{tikzcd}$$

conmuta.

Entonces hay un único isomorfismo t de $\varinjlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ en $\underline{Q}$ tal que, para cada $s \in S$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \underline{A}_s \arrow[r, "a_s"] \arrow[dr, "q_s"'] & \varinjlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) \arrow[d, "u"] \\ & \underline{Q} \end{tikzcd}$$

conmuta.

Proof. □

Si un sistema inductivo de sistemas algebraicos $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ es tal que el conjunto preordenado $\underline{S}$ está dirigido superiormente, entonces la construcción de $\varinjlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ se simplifica, porque en este caso es suficiente que consideremos el sistema algebraico, también denotada por $\varinjlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$, cuyo conjunto subyacente es el cociente $\coprod(A_s \mid s \in S)/\mathrm{R}_{(\underline{S},\mathcal{A})}$, del coproducto de la familia de conjuntos $(A_s \mid s \in S)$, entre $\mathrm{R}_{(\underline{S},\mathcal{A})}$, que es la mínima relación de equivalencia sobre $\coprod(A_s \mid s \in S)$ que contiene a todos los pares ordenados de $\coprod(A_s \mid s \in S)$ de la forma $((x, s), (a_{s,s'}(x), s'))$, con $x \in A_s$ y $(s, s') \in \preceq$, i.e., por definición:

$$\mathrm{R}_{(\underline{S},\mathcal{A})} = \mathrm{Eg}\big(\bigcup\nolimits_{(s,s') \in \preceq} \{\, ((x, s), (a_{s,s'}(x), s')) \in \big(\coprod_{s \in S} A_s\big)^2 \mid x \in A_s \,\}\big)$$

y cuya estructura de sistema algebraico viene dada asociando, por una parte, a cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, la operación n-aria F_σ de $(\coprod(A_s \mid s \in S)/\mathrm{R}_{(\underline{S},\underline{\mathcal{A}})})^n$ en $\coprod(A_s \mid s \in S)/\mathrm{R}_{(\underline{S},\underline{\mathcal{A}})}$ que a un $([(x_\alpha, s_\alpha)] \mid \alpha \in n)$ del primero le asigna $[F^t_\sigma(a_{s_\alpha,t}(x_\alpha) \mid \alpha \in n), t)]$, siendo t una cota superior de $(s_\alpha \mid \alpha \in n)$ en $\underline{S}$ y F^t_σ la operación estructural de $\underline{A}_t$ correspondiente a σ, y asociando, por otra parte, a cada $\pi \in \Pi$, con $\mathrm{rk}(\pi) = n$, la relación n-aria R_π en $(\coprod(A_s \mid s \in S)/\mathrm{R}_{(\underline{S},\underline{\mathcal{A}})})^n$ que consta de aquellos $([(x_\alpha, s_\alpha)] \mid \alpha \in n)$ para los que hay un $t \in S$ tal que, para cada $\alpha \in n$, $s_\alpha \leq t$, y hay una familia $(a_\alpha \mid \alpha \in n) \in A^n_t$ tal que, para cada $\alpha \in n$, $a_{s_\alpha,t}(a_\alpha) = [(x_\alpha, s_\alpha)]$ y $(a_\alpha \mid \alpha \in n) \in R^t_\pi$, siendo R^t_π la relación estructural de $\underline{A}_t$ correspondiente a π.

Demuéstrese que una condición necesaria y suficiente para que $((x, s), (y, t)) \in \mathrm{R}_{(\underline{S},\underline{\mathcal{A}})}$ es que exista un $u \in S$ tal que $s, t \leq u$ y $a_{s,u}(x) = a_{t,u}(y)$.

Proposition 93. *Sea* $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ *un sistema inductivo de sistemas algebraicos tal que* $\underline{S}$ *esté dirigido superiormente. Entonces el par ordenado* $(\varinjlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}), (a_s \mid s \in S))$ *en el que* $\varinjlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ *es el sistema algebraico* $(\coprod(A_s \mid s \in S)/\mathrm{R}_{(\underline{S},\underline{\mathcal{A}})}, (F_\sigma \mid \sigma \in \Sigma), (R_\pi \mid \pi \in \Pi))$ *y, para cada* $s \in S$, a_s *la composición de* in_s *y de* $\mathrm{pr}_{R_{(\underline{S},\underline{\mathcal{A}})}}$ *(de manera que, para cada* $s \in S$, a_s *asigna a un* $x \in A_s$ *la clase de equivalencia* $[(x, s)]$*), es un* límite inductivo *del sistema inductivo* $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$

Proof. Las operaciones F_σ están bien definidas. En efecto, si $u \in S$ fuera tal que, para cada $i \in n$, $s_\alpha \leq u$, entonces

$$[F^t_\sigma(a_{s_\alpha,t}(x_\alpha) \mid \alpha \in n), t)] = [F^u_\sigma(a_{s_\alpha,u}(x_\alpha) \mid \alpha \in n), u)],$$

porque, por estar el conjunto preordenado $\underline{S}$ dirigido superiormente, existiría un $v \in S$ tal que $t, u \leq v$, luego, por ser $a_{t,v}$ y $a_{u,v}$ homomorfismos se cumpliría que

$$a_{t,v}(F^t_\sigma(a_{s_\alpha,t}(x_\alpha) \mid \alpha \in n)) = a_{u,v}(F^u_\sigma(a_{s_\alpha,u}(x_\alpha) \mid \alpha \in n)).$$

Las relaciones R_π están bien definidas.Además, para cada $s \in S$, $a_s = \mathrm{pr}_{R_{(\underline{S},\underline{\mathcal{A}})}} \circ \mathrm{in}_s$ es un homomorfismo de $\underline{A}_s$ en $\varinjlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$. En efecto, dado un $s \in S$, un $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar} = n$ y una familia $(x_\alpha \mid \alpha \in n)$ en A_s, se cumple que

$$\begin{aligned} a_s(F^s_\sigma(x_\alpha \mid \alpha \in n)) &= [(F^s_\sigma(x_\alpha \mid \alpha \in n), s)] \\ &= F_\sigma([(x_\alpha, s)] \mid \alpha \in n). \end{aligned}$$

Por último, el par ordenado $(\varinjlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}), (a_s \mid s \in S))$ cumple las condiciones de la proposición. En efecto, por una parte, para cada $(s, s') \in \preceq$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \underline{A}_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "a_s"'] & & \underline{A}_{s'} \arrow[dl, "a_{s'}"] \\ & \varinjlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) & \end{tikzcd}$$

conmuta, i.e., para cada $x \in A_s$, se cumple que $[(x, s)] = [(a_{s,s'}(x), s')]$, por definición de $R_{(\underline{S},\underline{\mathcal{A}})}$

Por otra parte, si un par ordenado $(\underline{L}, (l_s \mid s \in S))$, arbitrario, pero fijo, en el que, para cada $s \in S$, $l_s \colon \underline{A}_s \longrightarrow \underline{L}$ es un homomorfismo, es tal que, para cada $(s, s') \in \preceq$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \underline{A}_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "l_s"'] & & \underline{A}_{s'} \arrow[dl, "l_{s'}"] \\ & \underline{L} & \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces, en virtud de la propiedad universal del coproducto de familias de conjuntos, hay una única aplicación $[l_s \mid s \in S] : \coprod(A_s \mid s \in S) \longrightarrow L$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A_s \arrow[r, "\mathrm{in}_{A_s}"] \arrow[dr, "l_s"'] & \coprod(A_s \mid s \in S) \arrow[d, "{[l_s \mid s \in S]}"] \\
& L
\end{tikzcd}$$

conmuta. Además, $R_{(\underline{S},\mathcal{A})} \subseteq \mathrm{Ker}([l_s \mid s \in S])$, porque $R_{(\underline{S},\mathcal{A})}$ es la mínima congruencia sobre $\coprod(A_s \mid s \in S)$ que contiene a $\bigcup_{(s,s')\in\preceq}\{\, ((x,s),(a_{s,s'}(x),s')) \in \left(\coprod_{s\in S} A_s\right)^2 \mid x \in A_s \,\}$ y porque $\mathrm{Ker}([l_s \mid s \in S])$ es una relación de equivalencia sobre $\coprod(A_s \mid s \in S)$ que contiene a $\bigcup_{(s,s')\in\preceq}\{\, ((x,s),(a_{s,s'}(x),s')) \in \left(\coprod_{s\in S} A_s\right)^2 \mid x \in A_s \,\}$. Entonces, en virtud de la propiedad universal del conjunto cociente, podemos afirmar que existe una única aplicación $u\colon \varinjlim(\underline{S},\mathcal{A}) \longrightarrow L$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\coprod(A_s \mid s \in S) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\Phi_{(\underline{S},\mathcal{A})}}"] \arrow[dr, "{[l_s \mid s \in S]}"'] & \varinjlim(\underline{S},\mathcal{A}) \arrow[d, "u"] \\
& L
\end{tikzcd}$$

conmuta. Además, u es un homomorfismo de $\varinjlim(\underline{S},\underline{\mathcal{A}})$ en $\underline{L}$.

Ahora bien, puesto que, para cada $s \in S$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A_s \arrow[r, "\mathrm{in}_s"] \arrow[dr, "l_s"'] & \coprod(A_s \mid s \in S) \arrow[d, "{[l_s \mid s \in S]}"] \\
& L
\end{tikzcd}$$

conmuta, también, para cada $s \in S$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A_s \arrow[r, "\mathrm{in}_s"] \arrow[rr, bend left, "a_s"] \arrow[dr, "l_s"'] & \coprod(A_s \mid s \in S) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\Phi_{(\underline{S},\mathcal{A})}}"] \arrow[d, "{[l_s \mid s \in S]}"] & \varinjlim(\underline{S},\mathcal{A}) \arrow[dl, bend left, "u"] \\
& L &
\end{tikzcd}$$

conmuta. Por consiguiente hay al menos un homomorfismo u de $\varinjlim(\underline{S},\underline{\mathcal{A}})$ en $\underline{L}$ tal que, para cada $s \in S$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}_s \arrow[r, "a_s"] \arrow[dr, "l_s"'] & \varinjlim(\underline{S},\underline{\mathcal{A}}) \arrow[d, "u"] \\
& \underline{L}
\end{tikzcd}$$

conmuta. Dejamos, como ejercicio, la demostración de que hay a lo sumo un homomorfismo u de $\varinjlim(\underline{S},\underline{\mathcal{A}})$ en $\underline{L}$ tal que, para cada $s \in S$, $u \circ a_s = l_s$.

□

En el ejemplo 3.4, para el sistema inductivo

$$(\underline{S}, ((\mathrm{Hom}(V_s, B) \mid s \in S), (a_{s,s'} \mid (s, s') \in \preceq))),$$

su límite inductivo está formado, por una parte, por las clases de equivalencia, o *gérmenes de aplicaciones*, $[(f, s)]$, con $(f, s) \in \coprod(\mathrm{Hom}(V_s, B) \mid s \in S)$, y siendo dos pares ordenados (f, s) y (g, s') equivalentes precisamente cuando exista un $s'' \in S$ tal que $V_{s''} \subseteq V_s \cap, V_{s'}$ y $f \restriction V_{s''} = g \restriction V_{s''}$, y, por otra, por la familia de aplicaciones $(a_s \mid (s, s') \in \preceq)$, en la que, para cada $s \in S$ y para cada $f \in \mathrm{Hom}(V_s, B)$, $a_s(f) = [(f, s)]$

Demuéstrese que el límite inductivo del sistema inductivo del ejemplo 3.4 es isomorfo a $\coprod(\underline{A}_s \mid s \in S)$.

Demuéstrese que el límite inductivo del sistema inductivo del ejemplo 3.4 es isomorfo a $\bigcup(\underline{X}_s \mid s \in S)$.

Proposition 94. *Sea $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ un sistema inductivo de sistemas algebraicos, con $\underline{S}$ dirigido superiormente y $(\underline{L}, (l_s \mid s \in S))$ tal que, para cada $s \in S$, $l_s \colon \underline{A}_s \longrightarrow \underline{L}$ sea un homomorfismo y, para cada $(s, s') \in \preceq$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \underline{A}_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "l_s"'] & & \underline{A}_{s'} \arrow[dl, "l_{s'}"] \\ & \underline{L} & \end{tikzcd}$$

conmute. Entonces para el único homomorfismo $u \colon \varinjlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) \longrightarrow \underline{L}$ tal que, para cada $s \in S$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \underline{A}_s \arrow[r, "a_s"] \arrow[dr, "l_s"'] & \varinjlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) \arrow[d, "u"] \\ & \underline{L} \end{tikzcd}$$

conmuta, se cumple que:

(1) *Una condición necesaria y suficiente para que u sea sobreyectivo es que $L = \bigcup_{s \in S} Im(l_s)$.*
(2) *Una condición necesaria y suficiente para que u sea inyectivo es que, para cada $s \in S$ y para cada $x, y \in A_s$, si $l_s(x) = l_s(y)$, entonces exista un $s' \in S$ tal que $s \preceq s'$ y $a_{s,s'}(x) = a_{s,s'}(y)$.*

Proof. 1. Puesto que un homomorfismo es sobreyectivo si y sólo si su imagen coincide con su codominio, u será sobreyectivo precisamente si $u_*(\varinjlim(\underline{S}, \mathcal{A})) = L$. Ahora bien, $\varinjlim(\underline{S}, \mathcal{A}) = \bigcup_{s \in S} \mathrm{Im}(a_s)$, luego u será sobreyectivo precisamente si $u_*(\bigcup_{s \in S} \mathrm{Im}(a_s)) = L$, i.e., si y sólo si $\bigcup_{s \in S} \mathrm{Im}(u \circ a_s) = L$, pero, para cada $s \in S$, $u \circ a_s = l_s$, luego u será sobreyectivo cuando y sólo cuando $\bigcup_{s \in S} \mathrm{Im}(l_s) = L$.

2. *La condición es necesaria.* Supongamos que $u \colon \varinjlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) \longrightarrow \underline{L}$ sea inyectivo y sean $s \in S$ y $x, y \in A_s$ tales que $l_s(x) = l_s(y)$. Entonces, ya que, para cada $s \in S$, $u \circ a_s = l_s$, $u(a_s(x)) = u(a_s(y))$, luego, por ser u inyectivo, $a_s(x) = a_s(y)$. Por consiguiente, en virtud del lema **??**, hay un $s' \in S$ tal que $s \preceq s'$ y $a_{s,s'}(x) = a_{s,s'}(y)$.

La condición es suficiente. Supongamos que para cada $s \in S$ y para cada $x, y \in A_s$, si $l_s(x) = l_s(y)$, entonces exista un $s' \in S$ tal que $s \preceq s'$ y $a_{s,s'}(x) = a_{s,s'}(y)$. Sean $X, Y \in \varinjlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ tales que $u(X) = u(Y)$. Entonces, en virtud del lema **??**, hay un $s \in S$ y $x, y \in A_s$ tales que $a_s(x) = X$ y $a_{s'}(y) = Y$. luego $u(a_s(x)) = u(a_s(y))$, pero $u \circ a_s = l_s$, así que $l_s(x) = l_s(y)$. Por lo tanto, en virtud de la hipótesis, existe un $s' \in S$ tal que $s \preceq s'$ y $a_{s,s'}(x) = a_{s,s'}(y)$; pero esto último significa precisamente que $X = Y$, ya que $X = [(x,s)]$, $Y = [(y,s)]$ y $X = Y$ si y sólo si existe un $s' \in S$ tal que $s \preceq s'$ y $a_{s,s'}(x) = a_{s,s'}(y)$

□

Proposition 95. *Sea $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ un sistema inductivo de sistemas algebraicos, con $\underline{S}$ dirigido superiormente. Una condición suficiente para que $a_s \colon \underline{A}_s \longrightarrow \varinjlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ sea inyectivo, sea cual sea $s \in S$, es que, para cada $(s,s') \in \preceq$, $a_{s,s'} \colon \underline{A}_s \longrightarrow \underline{A}_{s'}$ sea inyectivo.*

Proof. □

Proposition 96. *Sea $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ un sistema inductivo de sistemas algebraicos, con $\underline{S}$ dirigido superiormente. Una condición suficiente para que $a_s \colon \underline{A}_s \longrightarrow \varinjlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ sea sobreyectivo, sea cual sea $s \in S$, es que, para cada $(s,s') \in \preceq$, $a_{s,s'} \colon \underline{A}_s \longrightarrow \underline{A}_{s'}$ sea sobreyectivo.*

Proof. □

Corollary 13. *Sea $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ un sistema inductivo de sistemas algebraicos, con $\underline{S}$ dirigido superiormente. Una condición suficiente para que $a_s \colon \underline{A}_s \longrightarrow \varinjlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ sea un isomorfismo, sea cual sea $s \in S$, es que, para cada $(s,s') \in \preceq$, $a_{s,s'} \colon \underline{A}_s \longrightarrow \underline{A}_{s'}$ lo sea.*

Proof. □

Como una aplicación del concepto de límite inductivo de un sistema inductivo de sistemas algebraicos, consideramos a continuación los conceptos de producto reducido y ultraproducto de una familia de sistemas algebraicos relativo a un filtro, resp., un ultrafiltro, sobre el conjunto de índices de la familia en cuestión.

Proposition 97. *Sea I un conjunto, $\mathcal{F}$ un filtro sobre I, $\leq = \{ (J,K) \in \mathcal{F}^2 \mid K \subseteq J \}$ y $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ una familia de sistemas algebraicos. Entonces el par ordenado*

$$\big((\prod_{j \in J} \underline{A}_j \mid J \in \mathcal{F}), (\mathrm{p}_{J,K} \mid (J,K) \in \leq) \big),$$

*es un sistema inductivo de sistemas algebraicos. Al límite inductivo de tal sistema inductivo de sistemas algebraicos lo denominamos el*producto reducido *de $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ relativo al filtro $\mathcal{F}$ sobre I, al sistema algebraico subyacente lo denotamos por $\prod_{i \in I} \underline{A}_i / \mathcal{F}$ y, para cada $J \in \mathcal{F}$, a los homomorfismos estructurales de $\prod_{j \in J} \underline{A}_j$ en $\prod_{\mathcal{F}} (\underline{A}_i \mid i \in I)$, por $\mathrm{p}_{\mathcal{F},J}$. En particular, si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro sobre I, al límite inductivo anterior lo denominamos el* ultraproducto *de $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ relativo al ultrafiltro $\mathcal{F}$ sobre I. Si, para cada $i \in I$, $\underline{A}_i = \underline{A}$, entonces al límite inductivo del sistema inductivo*

$$((\underline{A}^J \mid J \in \mathcal{F}), (\mathrm{p}_{J,K} \mid (J,K) \in \leq)),$$

lo denominamos la potencia reducida *de $(\underline{A} \mid i \in I)$ relativa al filtro $\mathcal{F}$ sobre I y al sistema algebraico subyacente lo denotamos por $\underline{A}^I / \mathcal{F}$; si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro sobre I, al límite inductivo anterior lo denominamos la* ultrapotencia *de $(\underline{A} \mid i \in I)$ relativa al ultrafiltro $\mathcal{F}$ sobre I.*

Además, $\prod_{i \in I} \underline{A}_i / \mathcal{F}$ es isomorfo al sistema algebraico $(\prod_{i \in I} A_i, F, R) / \equiv_{\mathcal{F}}$, en el que, para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, la operación estructural F_σ, correspondiente a σ, es la aplicación de $\left(\prod_{i \in I} A_i\right)^n$ en $\prod_{i \in I} A_i$ definida como:

$$F_\sigma \left\{ \begin{array}{ccc} \left(\prod_{i \in I} A_i\right)^n & \longrightarrow & \prod_{i \in I} A_i \\ (x_\alpha \mid \alpha \in n) & \longmapsto & (F^i_\sigma(x_\alpha(i) \mid \alpha \in n) \mid i \in I), \end{array} \right.$$

siendo F^i_σ *la operación estructural de* $\underline{A}_i$ *correspondiente a* σ*, para cada* $\pi \in \Pi$*, con* $\mathrm{rk}(\pi) = n$*, la relación estructural* R_π*, correspondiente a* π*, es la definida como:*

$$R_\pi = \{\, (x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \big(\prod_{i\in I} A_i\big)^n \mid \{\, i \in I \mid (x_0(i), \ldots, x_{n-1}(i)) \in R^i_\pi \,\} \in \mathcal{F} \,\},$$

y siendo $\equiv_{\mathcal{F}}$ *la congruencia sobre* $(\prod_{i\in I} A_i, F, R)$ *definida como:*

$$\equiv_{\mathcal{F}} = \{\, (x, y) \in \big(\prod_{i\in I} A_i\big)^2 \mid \mathrm{Eq}(x, y) \in \mathcal{F} \,\}.$$

Proposition 98. *Sea* I *un conjunto y* $\mathcal{F}$ *un ultrafiltro sobre* I*. Entonces*

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})^I & \xrightarrow{\mathrm{Upr}_{I,\mathcal{F}}} & \mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi}) \\ (\underline{A}_i \mid i \in I) & & \prod_{i\in I} \underline{A}_i/\mathcal{F} \\ (f_i \mid i \in I)\Big\downarrow & \longmapsto & \Big\downarrow \prod_{i\in I} f_i/\mathcal{F} \\ (\underline{B}_i \mid i \in I) & & \prod_{i\in I} \underline{B}_i/\mathcal{F}, \end{array}$$

es un functor, el functor de formación de ultraproductos de sistemas algebraicos, para el par $(I, \mathcal{F})$*. Si, para cada* $i \in I$*,* f_i *es un homomorfismo inyectivo o un encajamiento, entonces* $\prod_{i\in I} f_i/\mathcal{F}$ *también lo es.*

Del mismo modo se define el functor de formación de ultrapotencias de sistemas algebraicos, para el par $(I, \mathcal{F})$

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi}) & \xrightarrow{\mathrm{Upw}_{I,\mathcal{F}}} & \mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi}) \\ \underline{A} & & \underline{A}^I/\mathcal{F} \\ f\Big\downarrow & \longmapsto & \Big\downarrow f^I/\mathcal{F} \\ \underline{B} & & \underline{B}^I/\mathcal{F}. \end{array}$$

Si f *es un homomorfismo inyectivo o un encajamiento, entonces* $f^I/\mathcal{F}$ *también lo es.*

Además, hay una transformación natural $\delta^{I,\mathcal{F}}$ *del functor identidad de* $\mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$ *en el functor de formación de ultrapotencias* $\mathrm{Upw}_{I,\mathcal{F}}$*:*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi}) \arrow[r, bend left, "\mathrm{Id}_{\mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})}"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{Upw}_{I,\mathcal{F}}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \delta^{I,\mathcal{F}}"] & \mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi}) \end{tikzcd}$$

Proof. □

Lemma 3. *Sea* I *un conjunto,* $K \subseteq J \subseteq I$ *y* $\mathcal{F}$ *un ultrafiltro sobre* I*. Si* $J \in \mathcal{F}$*, entonces*

$$\mathcal{F}{\restriction}J = \{\, J \cap F \mid F \in \mathcal{F} \,\},$$

es un ultrafiltro sobre J*. Además,* $\mathcal{F}{\restriction}J \subseteq \mathcal{F}$ *y si* $K \in \mathcal{F}$*, entonces* $K \in \mathcal{F}{\restriction}J$ *y*

$$(\mathcal{F}{\restriction}J){\restriction}K = \mathcal{F}{\restriction}K.$$

Proof. □

Proposition 99. *Sea I un conjunto, $K \subseteq J \subseteq I$, $\mathcal{F}$ un ultrafiltro sobre I y supongamos que $K, J \in \mathcal{F}$. Entonces dada una familia de sistemas algebraicos $(\underline{A}_i \mid i \in I)$, hay tres homomorfismos, unívocamente determinados, $u_J\colon \prod_{i\in I}\underline{A}_i/\mathcal{F} \longrightarrow \prod_{i\in I}\underline{A}_i/\mathcal{F}{\restriction}J$, $u_K\colon \prod_{i\in I}\underline{A}_i/\mathcal{F} \longrightarrow \prod_{i\in I}\underline{A}_i/\mathcal{F}{\restriction}K$ y $u_{J,K}\colon \prod_{i\in I}\underline{A}_i/\mathcal{F}{\restriction}J \longrightarrow \prod_{i\in I}\underline{A}_i/\mathcal{F}{\restriction}K$ tales que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I}\underline{A}_i \arrow[r, "pr_{\mathcal{F}}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{I,J}"'] \arrow[dd, bend right=60, "\mathrm{pr}_{I,K}"'] & \prod_{i\in I}\underline{A}_i/\mathcal{F} \arrow[d, "u_J"] \arrow[dd, bend left=60, "u_K"] \\
\prod_{j\in J}\underline{A}_j \arrow[r, "pr_{\mathcal{F}\restriction J}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{J,K}"'] & \prod_{j\in J}\underline{A}_j/\mathcal{F}{\restriction}J \arrow[d, "u_{J,K}"] \\
\prod_{k\in K}\underline{A}_k \arrow[r, "pr_{\mathcal{F}\restriction K}"] & \prod_{k\in K}\underline{A}_k/\mathcal{F}{\restriction}K
\end{tikzcd}$$

conmuta. Además, los tres homomorfismos son isomorfismos.

3.6. **Morfismos inductivos entre sistemas inductivos.**

Definition 17. Si $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ y $(\underline{T}, \underline{\mathcal{B}})$ son dos sistemas inductivos de sistemas algebraicos, un *morfismo inductivo* de $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ en $(\underline{T}, \underline{\mathcal{B}})$ es un triplo ordenado $((\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}), \Phi, (\underline{T}, \underline{\mathcal{B}}))$, abreviado como Φ y denotado por

$$\Phi\colon (\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) \longrightarrow (\underline{T}, \underline{\mathcal{B}}),$$

en el que $\Phi = (\phi, f)$, con $\phi\colon \underline{S} \longrightarrow \underline{T}$ y $f = (f_s \mid s \in S)$, siendo, para cada $s \in S$, $f_s\colon \underline{A}_s \longrightarrow \underline{B}_{\phi(s)}$, i.e.,

$$(f_s \mid s \in S) \in \prod(\mathrm{Hom}(\underline{A}_s, \underline{B}_{\phi(s)}) \mid s \in S),$$

tal que, para cada $(s, s') \in \preceq$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}_s \arrow[r, "f_s"] \arrow[d, "a_{s,s'}"'] & \underline{B}_{\phi(s)} \arrow[d, "b_{\phi(s),\phi(s')}"] \\
\underline{A}_{s'} \arrow[r, "f_{s'}"'] & \underline{B}_{\phi(s')}
\end{tikzcd}$$

conmuta. Además, $(\underline{S}, \underline{\mathcal{B}}_\phi)$ es el sistema inductivo de sistemas algebraicos para el que la coordenada s-ésima de la primera componente de $\underline{\mathcal{B}}_\phi$ es $\underline{B}_{\phi(s)}$, para cada $s \in S$, y la coordenada (s, s')-ésima de la segunda componente de $\underline{\mathcal{B}}_\phi$ es $b_{\phi(s),\phi(s')}$, para cada $(s, s') \in \preceq$.

Proposition 100.

(1) *Si $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ es un sistema inductivo de sistemas algebraicos, entonces*

$$id_{(\underline{S},\underline{\mathcal{A}})} = (id_{\underline{S}}, id_{\underline{\mathcal{A}}}),$$

siendo $id_{\underline{\mathcal{A}}} = (id_{\underline{A}_s} \mid s \in S)$, es un endomorfismo inductivo de $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$, el morfismo inductivo identidad *de $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$.*

(2) *Si $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$, $(\underline{T}, \underline{\mathcal{B}})$ y $(\underline{U}, \underline{\mathcal{C}})$ son tres sistemas inductivos de sistemas algebraicos, $\Phi = (\phi, f)$ un morfismo inductivo del primero en el segundo y $\Psi = (\psi, g)$ uno del segundo en el tercero, entonces*

$$\Psi \circ \Phi = (\psi \circ \phi, g_\phi \circ f),$$

siendo g_ϕ la familia indexada por S, cuya coordenada s-ésima es:

$$g_{\phi(s)} : B_{\phi(s)} \longrightarrow C_{\psi(\phi(s))},$$

y, por lo tanto, siendo $g_\phi \circ f$ la familia de homomorfismos, indexada por S, cuya coordenada s-ésima es:

$$\underline{A}_s \xrightarrow{\ f_s\ } \underline{B}_{\phi(s)} \xrightarrow{\ g_{\phi(s)}\ } \underline{C}_{\psi(\phi(s))},$$

es un morfismo inductivo de $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ en $(\underline{U}, \underline{\mathcal{C}})$, el morfismo inductivo composición *de ambos.*

Proof. Puesto que la primera parte es sencilla de demostrar, nos limitamos a demostrar la segunda.

Por ser $\Phi = (\phi, f)$ y $\Psi = (\psi, g)$ morfismos inductivos, los diagramas:

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}_s \arrow[r, "f_s"] \arrow[d, "a_{s,s'}"'] & \underline{B}_{\phi(s)} \arrow[d, "b_{\phi(s),\phi(s')}"] \\
\underline{A}_{s'} \arrow[r, "f_{s'}"'] & \underline{B}_{\phi(s')}
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
\underline{B}_t \arrow[r, "g_t"] \arrow[d, "b_{t,t'}"'] & \underline{C}_{\psi(t)} \arrow[d, "c_{\psi(t),\psi(t')}"] \\
\underline{B}_{t'} \arrow[r, "g_{t'}"'] & \underline{C}_{\psi(t')}
\end{tikzcd}$$

conmutan. Por consiguiente el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}_s \arrow[r, "g_{\phi(s)} \circ f_s"] \arrow[d, "a_{s,s'}"'] & \underline{C}_{\psi(\phi(s))} \arrow[d, "c_{\psi(\phi(s)),\psi(\phi(s'))}"] \\
\underline{A}_{s'} \arrow[r, "g_{\phi(s')} \circ f_{s'}"'] & \underline{C}_{\psi(\phi(s'))}
\end{tikzcd}$$

también conmuta. $\square$

Proposition 101. *Sea Φ un morfismo inductivo de $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ en $(\underline{T}, \underline{\mathcal{B}})$, Ψ uno de $(\underline{T}, \underline{\mathcal{B}})$ en $(\underline{U}, \underline{\mathcal{C}})$ y Ξ uno de $(\underline{U}, \underline{\mathcal{C}})$ en $(\underline{V}, \underline{\mathcal{D}})$. Entonces:*

(1) (Asociatividad). *El diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\Psi \circ \Phi"'] \arrow[drr, bend left=60, "(\Xi \circ \Psi) \circ \Phi"] \arrow[drr, bend right=60, "\Xi \circ (\Psi \circ \Phi)"'] & (\underline{T}, \underline{\mathcal{B}}) \arrow[d, "\Psi"'] \arrow[dr, "\Xi \circ \Psi"] & \\
& (\underline{U}, \underline{\mathcal{C}}) \arrow[r, "\Xi"'] & (\underline{V}, \underline{\mathcal{D}})
\end{tikzcd}$$

conmuta.

(2) (Neutros). *Los diagramas:*

$$\begin{tikzcd} (\underline{S},\underline{\mathcal{A}}) \arrow[r, "id_{(\underline{S},\underline{\mathcal{A}})}"] \arrow[dr, "\Phi"'] & (\underline{S},\underline{\mathcal{A}}) \arrow[d, "\Phi"] \\ & (\underline{T},\underline{\mathcal{B}}) \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} (\underline{S},\underline{\mathcal{A}}) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\Phi"'] & (\underline{T},\underline{\mathcal{B}}) \arrow[d, "id_{(\underline{T},\underline{\mathcal{B}})}"] \\ & (\underline{T},\underline{\mathcal{B}}) \end{tikzcd}$$

conmutan.

Proof. □

3.7. **Límites inductivos de los morfismos inductivos.**

Proposition 102. *Si* $\Phi\colon (\underline{S},\underline{\mathcal{A}}) \longrightarrow (\underline{T},\underline{\mathcal{B}})$ *es un morfismo inductivo, entonces hay un único homomorfismo*

$$\varinjlim \Phi\colon \varinjlim(\underline{S},\underline{\mathcal{A}}) \longrightarrow \varinjlim(\underline{T},\underline{\mathcal{B}}),$$

denominada el límite inductivo *de* Φ *tal que, para cada* $s \in S$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \underline{A}_s \arrow[r, "a_s"] \arrow[d, "f_s"'] & \varinjlim(\underline{S},\underline{\mathcal{A}}) \arrow[d, "\varinjlim \Phi"] \\ \underline{B}_{\phi(s)} \arrow[r, "b_{\phi(s)}"'] & \varinjlim(\underline{T},\underline{\mathcal{B}}) \end{tikzcd}$$

conmuta. Además, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \underline{A}_s \arrow[r, "a_s"] \arrow[d, "f_s"'] & \varinjlim(\underline{S},\underline{\mathcal{A}}) \arrow[d, "\coprod f"] \arrow[dd, bend left=60, "\varinjlim \Phi"] \\ \underline{B}_{\phi(s)} \arrow[r, "b_{\phi(s)}"'] \arrow[dr, "b_{\phi(s)}"'] & \varinjlim(\underline{S},\underline{\mathcal{B}}_\phi) \arrow[d, "i_\phi"] \\ & \varinjlim(\underline{T},\underline{\mathcal{B}}) \end{tikzcd}$$

conmuta, siendo i_ϕ *el único homomorfismo de* $\varinjlim(\underline{S},\underline{\mathcal{B}}_\phi)$ *en* $\varinjlim(\underline{T},\underline{\mathcal{B}})$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \coprod(\underline{B}_{\phi(s)} \mid s \in S) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathrm{C}_{(\underline{S},\underline{\mathcal{B}}_\phi)}}"] \arrow[d, "in_\phi"'] & \varinjlim(\underline{S},\underline{\mathcal{B}}_\phi) \arrow[d, "i_\phi"] \\ \coprod(B_t \mid t \in T) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathrm{C}_{(\underline{T},\underline{\mathcal{B}})}}"'] & \varinjlim(\underline{T},\underline{\mathcal{B}}) \end{tikzcd}$$

conmuta, y, denotándola por el mismo símbolo, $\coprod f$ *el único homomorfismo de* $\varinjlim(\underline{S},\underline{\mathcal{A}})$ *en* $\varinjlim(\underline{S},\underline{\mathcal{B}}_\phi)$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\coprod(\underline{A}_s \mid s \in S) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathrm{C}_{(\underline{S},\underline{\mathcal{A}})}}"] \arrow[d, "\coprod f"'] & \varinjlim(\underline{S},\underline{\mathcal{A}}) \arrow[d, "\coprod f"] \\
\coprod(\underline{B}_{\phi(s)} \mid s \in S) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathrm{C}_{(\underline{S},\underline{\mathcal{B}}_\phi)}}"'] & \varinjlim(\underline{S},\underline{\mathcal{B}}_\phi)
\end{tikzcd}$$

conmuta. Así que

$$\varinjlim \Phi = i_\phi \circ \coprod f.$$

Proof. □

Proposition 103. *Sean* $\Phi\colon (\underline{S},\underline{\mathcal{A}}) \longrightarrow (\underline{T},\underline{\mathcal{B}})$ *y* $\Psi\colon (\underline{T},\underline{\mathcal{B}}) \longrightarrow (\underline{U},\underline{\mathcal{C}})$ *dos morfismos inductivos. Entonces:*

(1) $\varinjlim id_{(\underline{S},\underline{\mathcal{A}})} = id_{\varinjlim(\underline{S},\underline{\mathcal{A}})}$.
(2) $\varinjlim(\Psi \circ \Phi) = \varinjlim \Psi \circ \varinjlim \Phi$.

Además, si $\Phi = (\phi, f)$ *y* $\Psi = (\psi, g)$, *entonces el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim(\underline{S},\underline{\mathcal{A}}) \arrow[rrr, "\varinjlim \Phi"] \arrow[rrrrrr, bend left, "\varinjlim \Psi \circ \Phi"] \arrow[drr, "\coprod f"'] \arrow[ddrrr, bend right, "\coprod(g_\phi \circ f)"'] & & & \varinjlim(\underline{T},\underline{\mathcal{B}}) \arrow[rrr, "\varinjlim \Psi"] \arrow[dr, "\coprod g"] & & & \varinjlim(\underline{U},\underline{\mathcal{C}}) \\
& & \varinjlim(\underline{S},\underline{\mathcal{B}}_\phi) \arrow[ur, "i_\phi"'] \arrow[rr, "\varinjlim(\phi, g_\phi)"] \arrow[dr, "\coprod g_\phi"'] & & \varinjlim(\underline{T},\underline{\mathcal{C}}_\psi) \arrow[urr, "i_\psi"'] & & \\
& & & \varinjlim(\underline{S},\underline{\mathcal{C}}_{\psi\circ\phi}) \arrow[ur, "i_\phi"] \arrow[uurrr, bend right, "i_{\psi\circ\phi}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Proof. □

Proposition 104. *Sea* $\Phi\colon (\underline{S},\underline{\mathcal{A}}) \longrightarrow (\underline{T},\underline{\mathcal{B}})$ *un morfismo inductivo, con* $\underline{S}$ *y* $\underline{T}$ *dirigidos superiormente. Si hay un subconjunto* S' *de* S *que es cofinal en* $\underline{S}$, $\phi[S']$ *es cofinal en* $\underline{T}$ *y, para cada* $s' \in S'$, $f_{s'}\colon \underline{A}_{s'} \longrightarrow \underline{B}_{\phi(s')}$ *es un isomorfismo, entonces* $\varinjlim \Phi$ *es un isomorfismo.*

Proof. □

Antes de enunciar un corolario de la proposición anterior, convenimos que si $(\underline{S},\underline{\mathcal{A}})$ es un sistema inductivo de sistemas algebraicos, con $\underline{S}$ dirigido superiormente, y S' un subconjunto de S tal que, siendo $\underline{S'}$ el par ordenado $(S', \preceq \cap (S' \times S'))$, $\underline{S'}$ es, a su vez, un conjunto preordenado dirigido superiormente, entonces $(\underline{S},\underline{\mathcal{A}})\restriction S'$, la *restricción de* $(\underline{S},\underline{\mathcal{A}})$ *a* $\underline{S'}$, denota el sistema inductivo de sistemas algebraicos cuya primera coordenada es $(S', \preceq \cap (S' \times S'))$ y cuya segunda coordenada tiene como primera componente la restricción de $(\underline{A}_s \mid s \in S)$ a S' y como segunda componente la restricción de $(a_{s,s'} \mid (s,s') \in \preceq)$ a $\preceq \cap (S' \times S')$.

Corollary 14. *Si* $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ *es un sistema inductivo de sistemas algebraicos y* S' *es un subconjunto cofinal de* $\underline{S}$, *con* $\underline{S}$ *dirigidossuperiormente, entonces para el morfismo inductivo canónico* $\Phi = (in_{\underline{S}'}, (id_{\underline{A}_{s'}} \mid s' \in S'))$ *de* $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}){\restriction}S'$ *en* $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ *se cumple que* $\varinjlim \Phi$ *es un isomorfismo.*

Proof. □

3.8. **Algunos límites y colímites de familias de sistemas inductivos.** Del mismo modo que para el universo de conjuntos y aplicaciones, demostramos la existencia de productos y coproductos de familias de conjuntos así como la de igualadores de pares de aplicaciones con el mismo dominio y codominio, ahora, para el universo de discurso formado por los sistemas inductivos de $\underline{\Sigma}$-álgebras y los morfismos entre ellos, demostramos la existencia de productos y coproductos de familias de sistemas inductivos de $\underline{\Sigma}$-álgebras, así como la de igualadores de pares de mofismos con el mismo dominio y codominio.

Proposition 105. *Sea* $((\underline{S}^i, \underline{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I)$ *una familia de sistemas inductivos de* $\underline{\Sigma}$-*álgebras. Entonces hay un par ordenado* $\big(\prod((\underline{S}^i, \underline{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I), (pr^i \mid i \in I)\big)$, *también denotado por* $\big(\prod_{i\in I}(\underline{S}^i, \underline{\mathcal{A}}^i), (pr^i \mid i \in I)\big)$, *en el que* $\prod((\underline{S}^i, \underline{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I)$, *el* producto *de* $((\underline{S}^i, \underline{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I)$, *es un sistema inductivo de* $\underline{\Sigma}$-*álgebras y, para cada* $i \in I$, pr^i, *la* proyección canónica i-ésima *del producto, es un morfismo inductivo de* $\prod((\underline{S}^i, \underline{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I)$ *en* $(\underline{S}^i, \underline{\mathcal{A}}^i)$, *que tiene la siguiente* propiedad universal*:*

Para cada par ordenado $((\underline{T}, \underline{\mathcal{B}}), (\Psi^i \mid i \in I))$, *en el que* $(\underline{T}, \underline{\mathcal{B}})$ *es un sistema inductivo de* $\underline{\Sigma}$-*álgebras y, para cada* $i \in I$, $\Psi^i \colon (\underline{T}, \underline{\mathcal{B}}) \longrightarrow (\underline{S}^i, \underline{\mathcal{A}}^i)$, *hay un único morfismo inductivo* $\langle \Psi^i \mid i \in I \rangle : (\underline{T}, \underline{\mathcal{B}}) \longrightarrow \prod((\underline{S}^i, \underline{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I)$ *tal que, para cada* $i \in I$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
(\underline{T}, \underline{\mathcal{B}}) \arrow[d, "\langle \Psi^i \mid i \in I \rangle"'] \arrow[dr, "\Psi^i"] & \\
\prod((\underline{S}^i, \underline{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I) \arrow[r, "pr^i"'] & (\underline{S}^i, \underline{\mathcal{A}}^i)
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Proof. Es suficiente tomar como primera coordenada de $\prod((\underline{S}^i, \underline{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I)$ el producto de la familia de conjuntos preordenados d.s. $(\underline{S}^i \mid i \in I)$ y, como segunda coordenada, el par ordenado cuya primera componente es

$$\Big(\prod(\underline{A}^i_{s_i} \mid i \in I) \mid (s_i \mid i \in I) \in \prod(S^i \mid i \in I)\Big)$$

y cuya segunda componente es

$$\Big(\prod(a^i_{s_i, s'_i} \mid i \in I) \mid ((s_i \mid i \in I), (s'_i \mid i \in I)) \in \preceq\Big);$$

y, por otra parte, para cada $i \in I$, como primera coordenada de pr^i, pr_i, la proyección canónica de $\prod(\underline{S}^i \mid i \in I)$ en $\underline{S}^i$, y, como segunda coordenada, $(\mathrm{pr}_{\underline{A}^i_{s_i}} \mid (s_i \mid i \in I) \in \prod(S^i \mid i \in I))$

□

Proposition 106. *Sea* $((\underline{S}^i, \underline{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I)$ *una familia de sistemas inductivos de* $\underline{\Sigma}$-*álgebras. Entonces hay un par ordenado* $\big(\coprod((\underline{S}^i, \underline{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I), (in^i \mid i \in I)\big)$, *también denotado por* $\big(\coprod_{i\in I}(\underline{S}^i, \underline{\mathcal{A}}^i), (in^i \mid i \in I)\big)$, *en el que* $\coprod((\underline{S}^i, \underline{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I)$, *el* coproducto *de* $((\underline{S}^i, \underline{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I)$, *es un sistema inductivo de* $\underline{\Sigma}$-*álgebras y, para cada* $i \in I$, in^i, *la* inclusión canónica i-ésima *del coproducto, es un morfismo inductivo de* $(\underline{S}^i, \underline{\mathcal{A}}^i)$ *en* $\coprod((\underline{S}^i, \underline{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I)$, *que tiene la siguiente* propiedad universal*:*

Para cada par ordenado $((\underline{T}, \underline{\mathcal{B}}), (\Psi^i \mid i \in I))$*, en el que* $(\underline{T}, \underline{\mathcal{B}})$ *es un sistema inductivo de* $\underline{\Sigma}$*-álgebras y, para cada* $i \in I$*,* $\Psi_i \colon (\underline{S}^i, \underline{\mathcal{A}}^i) \longrightarrow (\underline{T}, \underline{\mathcal{B}})$*, hay un único morfismo inductivo* $\left[\Psi^i \mid i \in I\right] : \coprod((\underline{S}^i, \underline{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I) \longrightarrow (\underline{T}, \underline{\mathcal{B}})$ *tal que, para cada* $i \in I$*, el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
(\underline{S}^i, \underline{\mathcal{A}}^i) \arrow[r, "in^i"] \arrow[dr, "\Psi^i"'] & \coprod((\underline{S}^i, \underline{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I) \arrow[d, "{[f_i \mid i \in I]}"] \\
& (\underline{T}, \underline{\mathcal{B}})
\end{tikzcd}
$$

conmuta.

Proof. Es suficiente tomar como primera coordenada de $\coprod((\underline{S}^i, \underline{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I)$ el coproducto de la familia de conjuntos preordenados d.s. $(\underline{S}^i \mid i \in I)$ y, como segunda coordenada, el par ordenado cuya primera componente es

$$(\underline{A}^i_s \mid (s, i) \in \coprod(S^i \mid i \in I))$$

y cuya segunda componente es

$$(a^i_{s,s'} \mid ((s, i), (s', i)) \in \preceq);$$

y, por otra parte, para cada $i \in I$, como primera coordenada de in^i, in_i, la inclusión canónica de $\underline{S}^i$ en $\coprod(\underline{S}^i \mid i \in I)$, y, como segunda coordenada, $(\mathrm{id}_{\underline{A}^i_s} \mid (s, i) \in \coprod(S^i \mid i \in I))$.

□

Proposition 107. *Sean* $\Phi, \Psi \colon (\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) \longrightarrow (\underline{T}, \underline{\mathcal{B}})$ *dos morfismos inductivos, con* $\Phi = (\phi, f)$ *y* $\Psi = (\psi, g)$*. Entonces existe un par ordenado* $(\underline{\mathrm{Eq}}(\Phi, \Psi), eq(\Phi, \Psi))$*, el* igualador *de* Φ *y* Ψ*, en el que* $\underline{\mathrm{Eq}}(\Phi, \Psi)$ *es un sistema inductivo de* $\underline{\Sigma}$*-álgebras y* $\mathrm{eq}(\Phi, \Psi)$ *un morfismo inductivo de* $\underline{\mathrm{Eq}}(\Phi, \Psi)$ *en* $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$*, que tiene las siguientes propiedades:*

(1) $\Phi \circ eq(\Phi, \Psi) = \Psi \circ eq(\Phi, \Psi)$.

(2) (Propiedad universal del igualador) *Para cada sistema inductivo de* $\underline{\Sigma}$*-álgebras* $(\underline{U}, \underline{\mathcal{C}})$ *y cada morfismo proyectivo* $\Xi \colon (\underline{U}, \underline{\mathcal{C}}) \longrightarrow (\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$*, si* $\Phi \circ \Xi = \Psi \circ \Xi$*, entonces hay un único morfismo proyectivo* $\Gamma \colon (\underline{U}, \underline{\mathcal{C}}) \longrightarrow Eq(\Phi, \Psi)$ *tal que* $eq(\Phi, \Psi) \circ \Gamma = \Xi$.

Proof. Es suficiente tomar como primera coordenada de $\underline{\mathrm{Eq}}(\Phi, \Psi)$, el conjunto preordenado $\underline{\mathrm{Eq}}(\phi, \psi)$, formado por el igualador de $\phi, \psi \colon S \longrightarrow T$, y la restricción del preorden de $\underline{S}$ a ésa parte, y como segunda coordenada, $\underline{\mathcal{E}}$, el par ordenado cuya primera componente, $\underline{E}_s$, para cada $s \in \mathrm{Eq}(\phi, \psi)$, es $\underline{\mathrm{Eq}}(f_s, g_s)$, y cuya segunda componente, $e_{s,s'}$, para cada $s, s' \in \mathrm{Eq}(\phi, \psi)$, tal que $s \preceq s'$, es el único homomorfismo de $\underline{\mathrm{Eq}}(f_s, g_s)$ en $\underline{\mathrm{Eq}}(f_{s'}, g_{s'})$ tal que $a_{s,s'} \circ \mathrm{eq}(f_s, g_s) = \mathrm{eq}(f_{s'}, g_{s'}) \circ e_{s,s'}$; y, por otra parte, como primera coordenada de $\mathrm{eq}(\Phi, \Psi)$, $\mathrm{eq}(\phi, \psi)$, y, como segunda coordenada $(\mathrm{eq}(f_s, g_s) \mid s \in \mathrm{eq}(\phi, \psi))$.

□

4. Términos y fórmulas homogéneas

En esta sección definimos la noción de término y la relación de precedencia algebraica entre términos. Además, definimos los términos cerrados como los elementos de álgebras iniciales. Por otra parte, definimos el concepto de fórmula y la relación de precedencia algebraica entre fórmulas y, basándonos en ella, las nociones de ocurrencia libre y ligada de una variable en una fórmula, la de sentencia o fórmula cerrada y la de fórmula abierta.

4.1. **Lenguajes de primer orden.**

Definition 18. Un *lenguaje de primer orden* es un cuádruplo $\mathcal{L} = (V, \underline{\Lambda}, (\underline{\Sigma}, \underline{\Pi}), =)$, en el que $V = \{\, v_n \mid n \in \mathrm{N} \,\}$ es un conjunto infinito numerable, arbitrario pero fijo, $\underline{\Lambda}$ una signatura algebraica, a la que denominamos la signatura *lógica*, tal que, para cada $n \in \mathrm{N}$, los conjuntos Λ_n, de símbolos de operación lógicos, están definidos como:

(1) $\Lambda_1 = \{\neg\} \cup \{\, \forall v_n \mid n \in \mathrm{N} \,\}$.
(2) $\Lambda_2 = \{\, \wedge, \vee, \rightarrow \,\}$.
(3) $\Lambda_n = \varnothing$, si $n \neq 1, 2$,

$(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$ una signatura de primer orden y $=$ el símbolo de la igualdad.

Definition 19. El conjunto $\mathrm{Tm}(\mathcal{L})$, de los $\mathcal{L}$-*términos* es:

$$\mathrm{Tm}(\mathcal{L}) = \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(V),$$

i.e., el conjunto subyacente de la $\underline{\Sigma}$-álgebra libre sobre el conjunto de las variables V.

Los miembros de $\mathrm{Tm}(\mathcal{L})$, i.e., los símbolos de operación polinómica, o términos, denotan operaciones, esencialmente, finitarias, que se realizan como tales sobre conjuntos que estén dotados de una estructura de $\underline{\Sigma}$-álgebra. Además, para un término $P \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})$, tenemos que $P = (v_n)$, para un único $n \in \mathrm{N}$, o $P = (\sigma)$, para un único $\sigma \in \Sigma_0$, o $P = (\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}$, para un único $p \in \mathrm{N} - 1$, un único $\sigma \in \Sigma_p$ y una única familia $(P_j \mid j \in p)$ en $\mathrm{Tm}(\mathcal{L})$.

En virtud de la definición del conjunto de los $\mathcal{L}$-términos, como el conjunto subyacente de la $\underline{\Sigma}$-álgebra libre sobre el conjunto de las variables V, disponemos de un principio de demostración por inducción algebraica y de un principio de definición por recursión algebraica sobre los $\mathcal{L}$-términos.

Antes de establecer ambos principios, recordamos que $\underline{\mathrm{W}}_{\underline{\Sigma}}(V)$ es la $\underline{\Sigma}$-algebra cuyo conjunto subyacente, $\mathrm{W}_{\underline{\Sigma}}(V)$, es el conjunto $\mathrm{Ml}(\Sigma \coprod V)$, formado por todas las palabras sobre el alfabeto $\Sigma \coprod V$, y cuyas operaciones estructurales, F_σ, para cada $\sigma \in \Sigma$, son las definidas como:

$$\mathrm{F}_\sigma \left\{ \begin{array}{lcl} (\mathrm{Ml}(\Sigma \coprod V))^{\mathrm{ar}(\sigma)} & \longrightarrow & \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod V) \\ (P_j \mid j \in \mathrm{ar}(\sigma)) & \longmapsto & (\sigma) \curlywedge \curlywedge (P_j \mid j \in \mathrm{ar}(\sigma)), \end{array} \right.$$

i.e., como la concatenación de la palabra (σ) y de las palabras P_j, con $j \in \mathrm{ar}(\sigma)$.

Corollary 15. *Sea $T \subseteq W_{\underline{\Sigma}}(V)$. Si T es un cerrado de la $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{W}_{\underline{\Sigma}}(V)$ y T contiene al conjunto $\{\, (v_n) \mid n \in \mathrm{N} \,\}$, entonces* $\mathrm{Tm}(\mathcal{L}) \subseteq T$.

Corollary 16. *El par ordenado $(\eta_V, \underline{\mathrm{Tm}}(\mathcal{L}))$ en el que η_V es la única aplicación de V en* $\mathrm{Tm}(\mathcal{L})$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "\eta_V"'] \arrow[d, "in_V"] \\ & \Sigma \coprod V \arrow[d, "\eta_{\Sigma \coprod V}"] \\ \mathrm{Tm}(\mathcal{L}) \arrow[r, "in_{\mathrm{Tm}(\mathcal{L})}"'] & Ml(\Sigma \coprod V) \end{tikzcd}$$

conmuta, tiene la propiedad de que, para cada $\underline{\Sigma}$-algebra $\underline{A}$ y cada aplicación $f\colon V \longrightarrow A$, existe un único homomorfismo $f^\sharp$ de $\underline{\mathrm{Tm}}(\mathcal{L})$ en $\underline{A}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\eta_V"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{Tm}(\mathcal{L}) \arrow[d, "f^\sharp"] \\ & A \end{tikzcd}$$

conmuta.

Definition 20. Denotamos por Var el único homomorfismo de $\underline{\mathrm{Tm}}(\mathcal{L})$ en $\underline{\mathrm{Fin}}(V)$ tal que, para cada $n \in \mathrm{N}$, $\mathrm{Var}((v_n)) = \{v_n\}$, siendo $\underline{\mathrm{Fin}}(V)$ la $\underline{\Sigma}$-álgebra cuyo conjunto subyacente es $\mathrm{Sub_f}(V)$ y en la que, para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, F_σ, la operación estructural de $\underline{\mathrm{Fin}}(V)$ asociada a σ, asigna a una familia $(X_i \mid i \in n)$ en $\mathrm{Sub_f}(V)$, $\bigcup_{i\in n} X_i$.

Definition 21. El conjunto de los $\mathcal{L}$-*términos cerrados*, denotado por $\mathrm{ClTm}(\mathcal{L})$, es:

$$\mathrm{ClTm}(\mathcal{L}) = \{\, P \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L}) \mid \mathrm{Var}(P) = \varnothing \,\}.$$

Demuéstrese que $\mathrm{ClTm}(\mathcal{L})$ es, esencialmente, el conjunto subyacente de la $\underline{\Sigma}$-álgebra libre sobre el conjunto vacío.

Definition 22. El conjunto de las $\mathcal{L}$-*fórmulas atómicas* es el conjunto definido (explícitamente, y no por recursión) como:

$$\mathrm{At}(\mathcal{L}) = (\{=\} \times \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^2) \cup \bigcup_{\pi\in\Pi} \{\pi\} \times \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^{\mathrm{rk}(\pi)}.$$

De modo que una $\mathcal{L}$-fórmula atómica es o bien un par ordenado de la forma $(=, (P_i \mid i \in 2))$, para algún $(P_i \mid i \in 2) \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^2$, o bien un par ordenado de la forma $(\pi, (P_i \mid i \in n))$, para algún $n \in \mathrm{N} - 1$, algún $\pi \in \Pi_n$ y alguna familia $(P_i \mid i \in n) \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^n$. Para simplificar la escritura, convenimos en denotar a las $\mathcal{L}$-fórmulas atómicas del primer tipo por $P_0 = P_1$ y a las del segundo por $\pi(P_i \mid i \in n)$ o por $\pi(P_0, \ldots, P_{n-1})$.

Definimos a continuación el conjunto de las variables de las $\mathcal{L}$-fórmulas atómicas. Tal definición será explícita, i.e., no recursiva, ya que la definición de las $\mathcal{L}$-fórmulas atómicas es explícita.

Definition 23. Sea $n \in \mathrm{N} - 1$, $\pi \in \Pi_n$, $(P_i \mid i \in n) \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^n$ y $(P_i \mid i \in 2) \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^2$. Entonces:

$$\mathrm{Var}_{\mathrm{At}(\mathcal{L})}(P_0 = P_1) = \mathrm{Var}(P_0) \cup \mathrm{Var}(P_1).$$
$$\mathrm{Var}_{\mathrm{At}(\mathcal{L})}(\pi(P_0, \ldots, P_{n-1})) = \bigcup_{i\in n} \mathrm{Var}(P_i).$$

Definition 24. El conjunto $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$, de las $\mathcal{L}$-*fórmulas* es:

$$\mathrm{Fm}(\mathcal{L}) = \mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}(\mathrm{At}(\mathcal{L})),$$

i.e., el conjunto subyacente de la $\underline{\Lambda}$-álgebra libre sobre el conjunto $\mathrm{At}(\mathcal{L})$, de las $\mathcal{L}$-fórmulas atómicas.

De modo que para cada $\mathcal{L}$-fórmula ϕ o bien $\phi = (P_0 = P_1)$, para un único par $(P_i \mid i \in 2) \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^2$, o bien $\phi = (\pi(P_0, \ldots P_{n-1}))$, para un único $n \in \mathrm{N} - 1$, un único $\pi \in \Pi_n$ y una única familia $(P_i \mid i \in n) \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^n$, o bien $\phi = (\neg)\psi$, para una única fórmula ψ, o bien $\phi = (\wedge)\psi\xi$, para un único par de fórmulas ψ y ξ, o bien $\phi = (\vee)\psi\xi$, para un único par de fórmulas ψ y ξ, o bien $\phi = (\rightarrow)\psi\xi$, para un único par de fórmulas ψ y ξ, o bien $\phi = (\forall v_n)\psi$, para un único $n \in \mathrm{N}$ y una única fórmula ψ.

Para abreviar, convenimos en denotar $(P_0 = P_1)$, resp., $(\pi(P_0, \dots P_{n-1}))$, $(\neg)\psi$, $(\wedge)\psi\xi$, $(\vee)\psi\xi$, $(\rightarrow)\psi\xi$ y $(\forall v_n)\psi$ por $P_0 = P_1$, resp., $\pi(P_0, \dots P_{n-1})$, $\neg\psi$, $\psi \wedge \xi$, $\psi \vee \xi$, $\psi \rightarrow \xi$ y $\forall v_n \psi$.

Los miembros de $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$, y en particular los de $\mathrm{At}(\mathcal{L})$, i.e., tanto las fórmulas, como las fórmulas atómicas, denotan relaciones, esencialmente, finitarias, que se realizan como tales sobre conjuntos que estén dotados de una estructura de $\underline{\Lambda}$-álgebra.

En virtud de la definición del conjunto de las $\mathcal{L}$-fórmulas, como el conjunto subyacente de la $\underline{\Lambda}$-álgebra libre sobre el conjunto $\mathrm{At}(\mathcal{L})$, disponemos de un principio de demostración por inducción algebraica y de un principio de definición por recursión algebraica sobre las $\mathcal{L}$-fórmulas.

Corollary 17. *Sea* $F \subseteq W_{\underline{\Lambda}}(\mathrm{At}(\mathcal{L}))$. *Si* F *es un cerrado de la* $\underline{\Lambda}$*-álgebra* $\underline{W_{\underline{\Lambda}}}(\mathrm{At}(\mathcal{L}))$ *y además* $\{\, (\phi) \mid \phi \in \mathrm{At}(\mathcal{L}) \} \subseteq F$, *entonces* $\mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \subseteq F$.

Corollary 18. *El par ordenado* $(\eta_{\mathrm{At}(\mathcal{L})}, \underline{\mathrm{Fm}}(\mathcal{L}))$ *en el que* $\eta_{\mathrm{At}(\mathcal{L})}$ *es la única aplicación de* $\mathrm{At}(\mathcal{L})$ *en* $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ *tal que el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{At}(\mathcal{L}) \arrow[d, "in_{\mathrm{At}(\mathcal{L})}"] \arrow[ddl, "\eta_{\mathrm{At}(\mathcal{L})}"'] \\
 & \Lambda \coprod \mathrm{At}(\mathcal{L}) \arrow[d, "\eta_{\Lambda \coprod \mathrm{At}(\mathcal{L})}"] \\
\mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \arrow[r, "in_{\mathrm{Fm}(\mathcal{L})}"'] & Ml(\Lambda \coprod \mathrm{At}(\mathcal{L}))
\end{tikzcd}
$$

conmuta, tiene la propiedad de que, para cada $\underline{\Lambda}$*-algebra* $\underline{A}$ *y cada aplicación* $f\colon \mathrm{At}(\mathcal{L}) \longrightarrow A$, *existe un único homomorfismo* $f^\sharp$ *de* $\underline{\mathrm{Fm}}(\mathcal{L})$ *en* $\underline{A}$ *tal que el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{At}(\mathcal{L}) \arrow[r, "\eta_{\mathrm{At}(\mathcal{L})}"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \arrow[d, "f^\sharp"] \\
 & A
\end{tikzcd}
$$

conmuta.

Definition 25. Denotamos por $\mathrm{Var}_{\mathrm{Fm}(\mathcal{L})}$ el único homomorfismo de $\underline{\mathrm{Fm}}(\mathcal{L})$ en $\underline{\mathrm{Fin}_{\underline{\Lambda}}}(V)$ tal que, para cada $\phi \in \mathrm{At}(\mathcal{L})$, $\mathrm{Var}_{\mathrm{Fm}(\mathcal{L})}((\phi)) = \mathrm{Var}_{\mathrm{At}(\mathcal{L})}(\phi)$, siendo $\underline{\mathrm{Fin}_{\underline{\Lambda}}}(V)$ la $\underline{\Lambda}$-álgebra cuyo conjunto subyacente es $\mathrm{Sub_f}(V)$ y en la que las operaciones estructurales son:

(1) $F_\neg = \mathrm{id}_{\mathrm{Sub_f}(V)}$.
(2) Para cada $n \in \mathrm{N}$, $F_{\forall v_n} = \cup \circ \langle \kappa_{\{v_n\}}, \mathrm{id}_{\mathrm{Sub_f}(V)} \rangle$.
(3) $F_\vee = F_\wedge = F_\rightarrow = \cup$.

A continuación vamos a dotar al conjunto $2 = \{0, 1\}$ de una estructura de $\underline{\Lambda}$-álgebra que nos permitirá, en última instancia, definir el conjunto de las variables libres de una fórmula, conjunto del cual haremos uso cuando definamos la relación en un sistema algebraico asociada a la misma.

Definition 26. Sea $n \in \mathrm{N}$. Entonces denotamos por $\underline{2}_{v_n}$ la $\underline{\Lambda}$-álgebra cuyo conjunto subyacente es 2 y en la que las operaciones estructurales son:

(1) $F_\neg = \mathrm{id}_2$.

(2) Para cada $m \in \mathrm{N} - \{n\}$, $F_{\forall v_m} = \mathrm{id}_2$.
(3) $F_{\forall v_n} = \kappa_0$.
(4) $F_\vee = F_\wedge = F_\rightarrow = \text{máx}$.

Entonces denotamos por Foc_{v_n} el único homomorfismo de $\underline{\mathrm{Fm}}(\mathcal{L})$ en $\underline{2}_{v_n}$ tal que, para cada $\mathcal{L}$-fórmula atómica $\phi \in \mathrm{At}(\mathcal{L})$, $\mathrm{Foc}_{v_n}((\phi)) = 1$ precisamente si $v_n \in \mathrm{Var}_{\mathrm{At}(\mathcal{L})}(\phi)$. Además, denotamos por Foc el subconjunto de $V \times \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ definido como:

$$\mathrm{Foc} = \{\, (v_n, \phi) \in V \times \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \mid \mathrm{Foc}_{v_n}(\phi) = 1 \,\}.$$

Si entre la variable individual v_n y la $\mathcal{L}$-fórmula ϕ se da la relación Foc, entonces decimos que la variable individual v_n *ocurre libre* en la $\mathcal{L}$-fórmula ϕ.

Definition 27. Denotamos por $\mathrm{Fvar}_{\mathrm{Fm}(\mathcal{L})}$ la aplicación de $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ en $\mathrm{Fin}_{\underline{\Lambda}}(V)$ que a una fórmula ϕ le asigna:

$$\mathrm{Fvar}_{\mathrm{Fm}(\mathcal{L})}(\phi) = \{\, v_n \in \mathrm{Var}_{\mathrm{Fm}(\mathcal{L})}(\phi) \mid (v_n, \phi) \in \mathrm{Foc} \,\}.$$

A los elementos del conjunto $\mathrm{Fvar}_{\mathrm{Fm}(\mathcal{L})}(\phi)$ los denominamos las variables *libres* de la fórmula ϕ.

Definition 28. El conjunto de las *$\mathcal{L}$-fórmulas cerradas*, denotado por $\mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, es:

$$\mathrm{Sent}(\mathcal{L}) = \{\, \phi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \mid \mathrm{Fvar}_{\mathrm{Fm}(\mathcal{L})}(\phi) = \varnothing \,\}.$$

5. Semántica de la lógica de predicados homogénea

Para una signatura de primer orden $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$ y un sistema algebraico $\underline{A} = (A, F, R)$, una vez dotado el conjunto $\mathrm{Sub}(A^{\mathrm{N}})$ de una estructura de $\underline{\Lambda}$-álgebra, definimos, haciendo uso del principio de la definición por recursión algebraica, la relación, de rango N, en A asociada a una fórmula. Entonces, una vez definida la relación ternaria de satisfacibilidad entre sistemas algebraicos, fórmulas y valoraciones de las variables, definimos la relación binaria de validez entre sistemas algebraicos y fórmulas, obteniendo de este modo una conexión de Galois contravariante para la lógica de predicados de primer orden con igualdad. También definimos la noción de diagrama de un sistema algebraico y demostramos que los modelos del diagrama de un sistema algebraico, son los sistemas algebraicos en los que tal sistema algebraico se puede encajar. Por último, demostramos que toda fórmula es semánticamente equivalente a una fórmula prenexa.

Definition 29. Sea A un conjunto, $a \in A$, $n \in \mathrm{N}$ y $x\colon \mathrm{N} \longrightarrow A$. Entonces $x^{(n|a)}$ denota la aplicación de N en A definida como:

$$x^{(n|a)} \begin{cases} \mathrm{N} \longrightarrow A \\ m \longmapsto x^{(n|a)}(m) = \begin{cases} x(m), & \text{si } m \in \mathrm{N} - \{n\}; \\ a, & \text{si } m = n. \end{cases} \end{cases}$$

Así pues, la aplicación $x^{(n|a)}$ coincide con x en $\mathrm{N} - \{n\}$ y en n toma como valor a.

Definition 30. Sea $\underline{A} = (A, F, R)$ un sistema algebraico y $P \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})$. Entonces denotamos por $P^{\underline{A}}$ la imagen bajo $\mathrm{Pd}_{\omega,\underline{A}}$ de P, y lo denominamos el *polinomio determinado* por (el símbolo de operación polinómica) P en $\underline{A}$, siendo $\mathrm{Pd}_{\omega,\underline{A}}$ el único homomorfismo de la $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{\mathrm{Tm}}(\mathcal{L})$ en la $\underline{\Sigma}$-álgebra $(A, F)^{A^{\mathrm{N}}}$ tal que, para cada $n \in \mathrm{N}$, $\mathrm{Pd}_{\omega,\underline{A}}((v_n)) = \mathrm{pr}_{\mathrm{N},n}$, i.e., tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\eta_V"] \arrow[dr, "(\mathrm{pr}_{\mathrm{N},n} \mid n \in \mathrm{N})"'] & \mathrm{Tm}(\mathcal{L}) \arrow[d, "\mathrm{Pd}_{\omega,\underline{A}}"] \\ & A^{A^{\mathrm{N}}} \end{tikzcd}$$

conmuta.

Proposition 108. *Sea* $\underline{A}$ *un sistema algebraico* , $x, y \in A^{\mathrm{N}}$, $P \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})$ *y* $\mathrm{Var}(P) = \{ v_{n_\alpha} \mid \alpha \in p \}$. *Si, para cada* $\alpha \in p$, $x(n_\alpha) = y(n_\alpha)$, *entonces* $P^{\underline{A}}(x) = P^{\underline{A}}(y)$.

Proof. □

Definition 31. Sea $\underline{A}$ un sistema algebraico, $P \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(V)$ y $n(P) = \min\{ n \in \mathrm{N} \mid \mathrm{Var}(P) \subseteq \downarrow v_n \}$. Entonces $P^{n(P),\underline{A}}$ denota la operación $n(P)$-aria sobre A que a un $x \in A^{n(P)}$ le asigna $P^{n(P),\underline{A}}(x) = P^{\underline{A}}(y)$, siendo y cualquier miembro de A^{N} tal que $y{\restriction}n(P) = x$.

Definition 32 (Tarski)**.** Sea $\underline{A}$ un sistema algebraico. Entonces

(1) Denotamos por $\underline{\mathrm{Sub}}_{\underline{\Lambda}}(A^{\mathrm{N}})$ la $\underline{\Lambda}$-álgebra cuyas operaciones estructurales están definidas como:

(a)
$$F_\neg \begin{cases} \mathrm{Sub}(A^{\mathrm{N}}) \longrightarrow \mathrm{Sub}(A^{\mathrm{N}}) \\ \quad \mathcal{X} \qquad \longmapsto F_\neg(\mathcal{X}) = A^{\mathrm{N}} - \mathcal{X}. \end{cases}$$

(b)
$$F_{\forall v_n} \begin{cases} \mathrm{Sub}(A^{\mathrm{N}}) \longrightarrow \mathrm{Sub}(A^{\mathrm{N}}) \\ \quad \mathcal{X} \qquad \longmapsto F_{\forall v_n}(\mathcal{X}) = \{ y \in A^{\mathrm{N}} \mid \forall a \in A\, (y^{(n|a)} \in \mathcal{X}) \}. \end{cases}$$

(c)
$$F_\wedge \begin{cases} \mathrm{Sub}(A^{\mathrm{N}})^2 \longrightarrow \mathrm{Sub}(A^{\mathrm{N}}) \\ \quad \mathcal{X} \qquad \longmapsto F_\wedge(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}. \end{cases}$$

(d)
$$F_\vee \begin{cases} \mathrm{Sub}(A^{\mathrm{N}})^2 \longrightarrow \mathrm{Sub}(A^{\mathrm{N}}) \\ \quad \mathcal{X} \qquad \longmapsto F_\vee(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}. \end{cases}$$

(e)
$$F_\rightarrow \begin{cases} \mathrm{Sub}(A^{\mathrm{N}})^2 \longrightarrow \mathrm{Sub}(A^{\mathrm{N}}) \\ \quad \mathcal{X} \qquad \longmapsto F_\rightarrow(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = (A^{\mathrm{N}} - \mathcal{X}) \cup \mathcal{Y}. \end{cases}$$

(2) Denotamos por $\mathrm{Rd}_{\omega,\underline{A}}$ el único homomorfismo de la $\underline{\Lambda}$-álgebra libre $\underline{\mathrm{Fm}}(\mathcal{L})$ en la $\underline{\Lambda}$-álgebra $\underline{\mathrm{Sub}}_{\underline{\Lambda}}(A^{\mathrm{N}})$ tal que a cada $\mathcal{L}$-fórmula atómica de la forma $P = Q$, con $P, Q \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})$, le asigna
$$\mathrm{Rd}_{\omega,\underline{A}}(P = Q) = \mathrm{Eq}(P^{\underline{A}}, Q^{\underline{A}})$$
y a cada $\mathcal{L}$-fórmula atómica de la forma $\pi(P_i \mid i \in n)$, siendo $\pi \in \Pi$ tal que $\mathrm{rk}(\pi) = n$ y $(P_i \mid i \in n) \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^n$, le asigna
$$\mathrm{Rd}_{\omega,\underline{A}}(\pi(P_i \mid i \in n)) = \{ x \in A^{\mathrm{N}} \mid (P_i^{\underline{A}}(x) \mid i \in n) \in R_\pi \}.$$
Al valor de $\mathrm{Rd}_{\omega,\underline{A}}$ en una $\mathcal{L}$-fórmula ϕ, que es un subconjunto de A^{N}, lo denominamos la *relación determinada* por ϕ en $\underline{A}$ y lo denotamos por $\phi^{\underline{A}}$.

A partir del homomorfismo $\mathrm{Rd}_{\omega,\underline{A}}$ de la $\underline{\Lambda}$-álgebra libre $\underline{\mathrm{Fm}}(\mathcal{L})$ en la $\underline{\Lambda}$-álgebra $\underline{\mathrm{Sub}}_{\underline{\Lambda}}(A^{\mathrm{N}})$ definimos la relación ternaria de satisfacibilidad entre sistemas algebraicos, fórmulas y valoraciones de las variables.

Definition 33 (Tarski)**.** Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Entonces la relación de *satisfacibilidad* entre sistemas algebraicos, fórmulas y valoraciones de las variables, a la que denotamos por $\cdot \models_{\mathcal{L}} \cdot[\cdot]$, es la definida como:
$$\cdot \models_{\mathcal{L}} \cdot[\cdot] = \{ (\underline{A}, \phi, x) \in \bigcup\nolimits_{\underline{A} \in \mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})} \{\underline{A}\} \times \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \times A^{\mathrm{N}} \mid x \in \phi^{\underline{A}} \}.$$

Convenimos que $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi[x]$ significa que el triplo $(\underline{A}, \phi, x) \in \bigcup_{\underline{A} \in \mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})} \{\underline{A}\} \times \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \times A^{\mathrm{N}}$ está en $\cdot \models_{\mathcal{L}} \cdot[\cdot]$, y decimos, en ese caso, que la valoración x satisface a ϕ en $\underline{A}$.

Definition 34 (Tarski)**.** Sea $\underline{A}$ un sistema algebraico, $x \in A^{\mathrm{N}}$ y $\phi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$.

(1) Decimos que la fórmula ϕ es *satisfacible* en $\underline{A}$ si existe un $x \in A^{\mathrm{N}}$ tal que $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi[x]$, i.e., si $\phi^{\underline{A}} \neq \varnothing$.
(2) La fórmula ϕ es *satisfacible* si existe un sistema algebraico $\underline{A}$ tal que ϕ es satisfacible en $\underline{A}$.
(3) Un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas Φ es *satisfacible* si existe un sistema algebraico $\underline{A}$ y un $x \in A^{\mathrm{N}}$ tal que, para cada $\phi \in \Phi$, $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi[x]$.

Sea $\underline{A}$ un sistema algebraico, $P, Q \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})$, $\phi, \psi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$, $n \in \mathrm{N}$ y $x \in A^{\mathrm{N}}$. Demuéstrese que:

(1) $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} P = Q[x]$ precisamente si $x \in \mathrm{Eq}(P^{\underline{A}}, Q^{\underline{A}})$.
(2) $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \pi(P_i \mid i \in n)[x]$ precisamente si $(P_i^{\underline{A}}(x) \mid i \in n) \in R_\pi$.
(3) $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \neg\phi[x]$ si y sólo si no ocurre que $\underline{A} \models_{\mathcal{S}} \phi[x]$.
(4) $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi \wedge \psi[x]$ si y sólo si $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi[x]$ y $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \psi[x]$.
(5) $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi \vee \psi[x]$ si y sólo si $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi[x]$ o $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \psi[x]$.
(6) $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi \rightarrow \psi[x]$ si y sólo si no es el caso que $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi[x]$ o $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \psi[x]$.
(7) $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \forall v_n \phi[x]$ exactamente si, para cada $a \in A$, $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi[x^{(n|a)}]$.
(8) $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \exists v_n \phi[x]$ exactamente si, existe un $a \in A$ tal que $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi[x^{(n|a)}]$.

Proposition 109. *Sea $\underline{A}$ un sistema algebraico, $\phi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$, $x, y \in A^{\mathrm{N}}$ y $\mathrm{Fvar}(\phi) = \{ v_{n_\alpha} \mid \alpha \in p \}$. Si, para cada $\alpha \in p$, $x(n_\alpha) = y(n_\alpha)$, entonces $x \in \phi^{\underline{A}}$ si y sólo si $y \in \phi^{\underline{A}}$, i.e., $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi[x]$ precisamente si $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi[y]$. En particular, si $\phi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, entonces o bien $\phi^{\underline{A}} = A^{\mathrm{N}}$ o bien $\phi^{\underline{A}} = \varnothing$, i.e., o bien, para cada $x \in A^{\mathrm{N}}$, $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi[x]$ o bien, para cada $x \in A^{\mathrm{N}}$, $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \neg\phi[x]$.*

Proof. □

Definition 35. Sea $\underline{A}$ un sistema algebraico, $\phi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ y $n(\phi) = \min\{ n \in \mathrm{N} \mid \mathrm{Fvar}(\phi) \subseteq\downarrow v_n \}$. Entonces $\phi^{n(\phi),\underline{A}}$ denota la relación $n(P)$-aria sobre A definida como:

$$\phi^{n(\phi),\underline{A}} = \{ x \in A^{n(\phi)} \mid \exists y \in A^{\mathrm{N}}\ (y{\upharpoonright}n(\phi) = x\ \ \&\ \ y \in \phi^{\underline{A}}) \}.$$

Si $x \in \phi^{n(\phi),\underline{A}}$, decimos que x *satisface* a ϕ en $\underline{A}$ y lo denotamos por $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi[[x]]$.

Definition 36. Sea $\underline{A}$ un sistema algebraico, $n \in \mathrm{N} - 1$ y $R \subseteq A^n$. Decimos que R es *definible* en $\underline{A}$ si hay una fórmula ϕ tal que $\mathrm{Fvar}(\phi) \subseteq\downarrow v_n$ y $\phi^{n(\phi),\underline{A}} = R$.

Proposition 110. *Sea $n \in \mathrm{N} - 1$ y $\underline{A}$ un sistema algebraico. Entonces el conjunto $\mathrm{Def}_n(\underline{A})$ de las relaciones de rango n definibles en $\underline{A}$ está cerrado bajo la unión binaria, intersección binaria y complementación. Además, $\varnothing$ y $A^n \in \mathrm{Def}_n(\underline{A})$. Por lo tanto $\underline{\mathrm{Def}_n}(\underline{A}) = (\mathrm{Def}_n(\underline{A}), \cup, \cap, \complement, \varnothing, A^n)$ es un álgebra booleana.*

Proof. □

Definition 37. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Entonces la relación de *validez* entre sistemas algebraicos y fórmulas, a la que denotamos por $\models_{\mathcal{L}}$, es la definida como:

$$\models_{\mathcal{L}} = \{ (\underline{A}, \phi) \in \mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi}) \times \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \mid \forall x \in A^{\mathrm{N}}\ (\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi[x]) \}.$$

Convenimos que $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi$ significa que el par $(\underline{A}, \phi) \in \mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi}) \times \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ está en $\models_{\mathcal{L}}$, y decimos, en ese caso, que la fórmula ϕ es *verdadera* en $\underline{A}$ o que $\underline{A}$ es un *modelo* de ϕ; además, decimos que una fórmula ϕ es *universalmente válida* si, para cada sistema algebraico $\underline{A}$, $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi$. Entonces el triplo ordenado $(\mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi}), \mathrm{Fm}(\mathcal{L}), \models_{\mathcal{L}}$) es el *contexto de Galois de la $\mathcal{L}$-lógica de predicados de primer orden con igualdad* y a la situación de Galois contravariante $(\underline{\mathrm{Sub}}(\mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma},\underline{\Pi})), \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}, \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}, \underline{\mathrm{Sub}}(\mathrm{Fm}(\mathcal{L})))$, asociada al anterior contexto de Galois, la denominamos la *situación de Galois contravariante de la $\mathcal{L}$-lógica de predicados de primer orden con igualdad.*

La aplicación $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}$ asigna a cada conjunto A de sistemas algebraicos, el conjunto de fórmulas $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$ definido como:

$$\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}} \begin{cases} \mathrm{Sub}(\mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma},\underline{\Pi})) \longrightarrow \mathrm{Sub}(\mathrm{Fm}(\mathcal{L})) \\ \qquad\quad \mathsf{A} \qquad\quad \longmapsto \{\, \phi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \mid \forall \underline{A} \in \mathsf{A}\, (\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi) \,\}, \end{cases}$$

de modo que $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})$ es el conjunto de las fórmulas válidas, o verdaderas, en A. A cualquier fórmula *cerrada* de $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})$ la denominamos un *teorema* de A y al conjunto de los teoremas de A, i.e., a $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}) \cap \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, lo denotamos por $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})$.

La aplicación $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}$ asigna a cada conjunto Φ de fórmulas, el conjunto de sistemas algebraicos $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)$ definido como:

$$\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}} \begin{cases} \mathrm{Sub}(\mathrm{Fm}(\mathcal{L})) \longrightarrow \mathrm{Sub}(\mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma},\underline{\Pi})) \\ \qquad\quad \oplus \qquad\quad \longmapsto \{\, \underline{A} \in \mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma},\underline{\Pi}) \mid \forall \phi \in \Phi\, (\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi) \,\}. \end{cases}$$

A cualquier sistema algebraico de $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)$ lo denominamos *modelo* de Φ.

Decimos que un conjunto A de sistemas algebraicos es *axiomatizable* si hay un conjunto de *fórmulas cerradas* Φ tal que $\mathsf{A} = \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)$, en cuyo caso decimos que Φ es un conjunto de *axiomas* de $\mathcal{A}$. Si Φ es finito, entonces decimos que A es *finitamente axiomatizable.* Decimos que un conjunto de fórmulas Φ está *modelísticamente cerrado* si hay un conjunto de sistemas algebraicos A tal que $\Phi = \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})$.

Proposition 111. *Para el contexto de Galois* $(\mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma},\underline{\Pi}), \mathrm{Fm}(\mathcal{L}), \models_{\mathcal{L}})$*, dados* $\mathsf{A}, \mathsf{A}' \subseteq \mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma},\underline{\Pi})$*, una familia no vacía* $(\mathsf{A}_i \mid i \in I)$ *de subconjuntos de* $\mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma},\underline{\Pi})$*,* $\Phi, \Phi' \subseteq \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ *y una familia no vacía* $(\Phi_i \mid i \in I)$ *de subconjuntos de* $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ *se cumple que:*

(1) $\mathsf{A} \subseteq \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}))$.
(2) $\Phi \subseteq \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))$.
(3) *Si* $\mathsf{A} \subseteq \mathsf{A}'$*, entonces* $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}') \subseteq \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})$.
(4) *Si* $\Phi \subseteq \Phi'$*, entonces* $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi') \subseteq \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)$.
(5) $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}) = \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})))$.
(6) $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi) = \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi')))$.
(7) $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}\big(\bigcup_{i\in I} \mathsf{A}_i\big) = \bigcap_{i\in I} \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}_i)$.
(8) $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}\big(\bigcup_{i\in I} \Phi_i\big) = \bigcap_{i\in I} \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi_i)$.

Proof. □

Definition 38. Sea $\phi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ tal que $\mathrm{Fvar}(\phi) = \{\, v_{n_\alpha} \mid \alpha \in p \,\}$. Una *clausura universal* de ϕ es cualquier fórmula de la forma $\forall v_{n_{\sigma(0)}} \dots v_{n_{\sigma(p-1)}} \phi$, para alguna permutación $(\sigma(\alpha) \mid \alpha \in p)$ de p. A cualquiera de ellas la denotamos por $\mathrm{cl}_\forall(\phi)$.

Proposition 112. *Sea* $\underline{A}$ *un sistema algebraico y* $\phi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ *tal que* $\mathrm{Fvar}(\phi) = \{\, v_{n_\alpha} \mid \alpha \in p \,\}$*. Entonces* $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi$ *si y sólo si* $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \mathrm{cl}_\forall(\phi)$.

Proof. □

Lemma 4. *Para cada* $\mathsf{A} \subseteq \mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma},\underline{\Pi})$*, se cumple que*

$$\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}) = \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}))).$$

Proof. Puesto que $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})$ está incluido en $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})$, ya que, por definición, $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}) = \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}) \cap \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, y por ser $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}$ antítona, tenemos que

$$\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})) \subseteq \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})),$$

luego, por ser $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}$ antítona, se cumple que

$$\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}))) \subseteq \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}))),$$

pero $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}) = \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})))$, por lo tanto

$$\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}))) \subseteq \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}).$$

Demostramos por último que $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})))$. Sea $\phi \in \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})$. Para demostrar que $\phi \in \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})))$ hemos de establecer que, para cada $\underline{B} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}))$, $\underline{B} \models_{\mathcal{L}} \phi$. Sea pues $\underline{B} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}))$ i.e., $\underline{B}$ cumple que

$$\forall\psi\,((\psi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L}) \;\;\&\;\; (\forall \underline{A} \in \mathcal{A}\,(\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \psi))) \to \underline{B} \models_{\mathcal{L}} \psi),$$

entonces, ya que $\mathrm{cl}_{\forall}(\phi) \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$ y, para cada $\underline{A} \in \mathsf{A}$, $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \mathrm{cl}_{\forall}(\phi)$, porque $\phi \in \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})$ y en virtud de la proposición 112, tenemos que $\underline{B} \models_{\mathcal{L}} \mathrm{cl}_{\forall}(\phi)$, luego, por la misma proposición, $\underline{B} \models_{\mathcal{L}} \phi$. Por lo tanto

$$\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}) \subseteq \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}))).$$

$\square$

Lemma 5. *Para cada $\Phi \subseteq \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$, se cumple que*

$$\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi) = \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))).$$

Proof. Puesto que $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))$ está incluido en $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))$, ya que, por definición $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)) = \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)) \cap \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, y por ser $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}$ antítona, tenemos que

$$\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))) \subseteq \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))),$$

pero $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi) = \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)))$, por lo tanto

$$\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi) \subseteq \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))).$$

Demostramos por último que $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))) \subseteq \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)$. Sea pues $\underline{A}$ un modelo de $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))$ i.e., $\underline{A}$ cumple que

$$\forall\psi\,((\psi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L}) \;\;\&\;\; (\forall \underline{C} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)\,(\underline{C} \models_{\mathcal{L}} \psi))) \to \underline{A} \models_{\mathcal{L}} \psi),$$

entonces, dado un $\phi \in \Phi$, ya que $\mathrm{cl}_{\forall}(\phi) \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$ y, para cada $\underline{C} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)$, se cumple, en virtud de la proposición 112, que $\underline{C} \models_{\mathcal{L}} \mathrm{cl}_{\forall}(\phi)$, tenemos que $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \mathrm{cl}_{\forall}(\phi)$, luego, por la misma proposición, $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi$. Por lo tanto

$$\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))) \subseteq \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi).$$

$\square$

Proposition 113. *El conjunto*

$$\mathrm{Im}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}) = \{\, \Phi \subseteq \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \mid \exists \mathsf{A} \subseteq \mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})\,(\Phi = \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}))\,\},$$

de todos los conjuntos de fórmulas modelísticamente cerrados, es un sistema de clausura y es isomorfo al conjunto

$$\mathrm{Im}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}{\restriction}\mathrm{Sub}(\mathrm{Sent}(\mathcal{L}))) = \{\, \mathsf{A} \subseteq \mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi}) \mid \exists \Phi \subseteq \mathrm{Sent}(\mathcal{L})\,(\mathsf{A} = \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))\,\},$$

de todos los conjuntos de sistemas algebraicos axiomatizables.

Proof. Veamos que el conjunto $\mathrm{Im}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}})$ es un sistema de clausura sobre $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$. Se cumple que $\mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \in \mathrm{Im}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}})$ porque, para $\mathsf{A} = \varnothing$, $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\varnothing) = \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$. Además, si $(\Phi_i \mid i \in I)$ es una familia no vacía en $\mathrm{Im}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}})$, entonces $\bigcap_{i\in I} \Phi_i \in \mathrm{Im}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}})$, porque, para cada $i \in I$, existe un subconjunto A_i de $\mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$ tal que $\Phi_i = \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}_i)$ y $\bigcap_{i\in I} \Phi_i = \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\bigcup_{i\in I} \mathsf{A}_i)$.

Para establecer que el conjunto de todos los conjuntos de fórmulas modelísticamente cerrados es isomorfo al conjunto de todos los conjuntos de sistemas algebraicos axiomatizables, es suficiente tomar en consideración que las aplicaciones:

$$\mathrm{M}_{\mathcal{L}} \begin{cases} \mathrm{Im}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}) \longrightarrow \mathrm{Im}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}{\restriction}\mathrm{Sub}(\mathrm{Sent}(\mathcal{L}))) \\ \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}) \;\longmapsto\; \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})) \end{cases}$$

y

$$\mathrm{V}_{\mathcal{L}}\left\{\begin{array}{ccc}\mathrm{Im}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}\restriction\mathrm{Sub}(\mathrm{Sent}(\mathcal{L}))) & \longrightarrow & \mathrm{Im}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}})\\ \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi) & \longmapsto & \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))\end{array}\right.$$

son inversas una de otra, debido a los lemas 4 y 5. □

En la próxima sección, cuando dispongamos del teorema de Łoś, demostraremos que $\mathrm{Im}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}})$, y por lo tanto $\mathrm{Im}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}\restriction\mathrm{Sub}(\mathrm{Sent}(\mathcal{L})))$, es un sistema de clausura algebraico.

Tal como señala Cohn en [**?**], la anterior conexión de Galois se puede usar, bien para estudiar las fórmulas a través de sus modelos, bien para estudiar los sistemas algebraicos mediante sus teoremas. Sin embargo, este método tiene ciertas limitaciones; porque no nos permite distinguir entre dos fórmulas que tengan los mismos modelos, ni entre dos sistemas algebraicos que tengan los mismos teoremas.

Esto conduce a definir dos relaciones de equivalencia, una sobre el conjunto de las fórmulas y otra sobre el conjunto de los sistemas algebraicos. Nos ocupamos ahora de la primera relación de equivalencia, y para ello, pero no sólo para ello, definimos la relación de consecuencia semántica entre conjuntos de fórmulas y fórmulas.

Definition 39. La *relación de consecuencia semántica* entre los conjuntos de fórmulas y las fórmulas, denotada por $\Vdash_{\mathcal{L}}$, es el subconjunto de $\mathrm{Sub}(\mathrm{Fm}(\mathcal{L}))\times\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ que consta de los pares (Γ,ϕ) tales que, para cada sistema algebraico $\underline{A}$ y cada $x\in A^{\mathrm{N}}$, si, para cada $\gamma\in\Gamma$, $\underline{A}\models_{\mathcal{L}}\gamma[x]$, entonces $\underline{A}\models_{\mathcal{L}}\phi[x]$.

Si $\Gamma\Vdash_{\mathcal{L}}\phi$, decimos que ϕ es *consecuencia semántica* de Γ. En particular, si $\{\psi\}\Vdash_{\mathcal{L}}\phi$, denotado simplemente por $\psi\Vdash_{\mathcal{L}}\phi$, entonces decimos que ϕ es *consecuencia semántica* de ψ y si tanto $\psi\Vdash_{\mathcal{L}}\phi$ como $\phi\Vdash_{\mathcal{L}}\psi$, situación que denotamos por $\phi\approx_{\mathcal{L}}\psi$, que ϕ y ψ son *semánticamente equivalentes*.

Demuéstrese que si $\Gamma\cup\{\phi\}\subseteq\mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, entonces

$$\Gamma\Vdash_{\mathcal{L}}\phi\,\text{si y sólo si}\,\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Gamma)\subseteq\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\phi).$$

Proposition 114. *La endoaplicación* $\mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}$ *de* $\mathrm{Sub}(\mathrm{Fm}(\mathcal{L}))$ *definida como*

$$\mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}\left\{\begin{array}{ccc}\mathrm{Sub}(\mathrm{Fm}(\mathcal{L})) & \longrightarrow & \mathrm{Sub}(\mathrm{Fm}(\mathcal{L}))\\ \Gamma & \longmapsto & \{\,\phi\in\mathrm{Fm}(\mathcal{L})\mid\Gamma\Vdash_{\mathcal{L}}\phi\,\},\end{array}\right.$$

es un operador clausura sobre $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$.

Proof. □

Demuéstrese que si $\Gamma\subseteq\mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, entonces

$$\mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma)\cap\mathrm{Sent}(\mathcal{L})=\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Gamma)).$$

Definition 40. Una *$\mathcal{L}$-teoría* o también, para abreviar, una *teoría*, es un subconjunto Γ de $\mathrm{Sent}(\mathcal{L})$ tal que, para cada $\phi\in\mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, si $\Gamma\Vdash_{\mathcal{L}}\phi$, entonces $\phi\in\Gamma$

Demuéstrese que si $\Gamma\subseteq\mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, entonces Γ es una teoría precisamente si $\Gamma=\mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma)$.

Proposition 115. *Para cada conjunto de sistemas algebraicos* A*,* $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})$ *es una teoría. En particular, para cada sistema algebraico* $\underline{A}$*,* $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\underline{A})$ *es una teoría.*

Proof. □

Theorem 1 (Herbrand-Tarski)**.** *Sea* $\Gamma\subseteq\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ *y* $\phi,\psi\in\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$*. Entonces* $\Gamma\cup\{\phi\}\Vdash_{\mathcal{L}}\psi$ *exactamente si* $\Gamma\Vdash_{\mathcal{L}}\phi\to\psi$

Proof. □

Proposition 116. *Una condición necesaria y suficiente para que dos fórmulas cerradas ϕ y ψ sean semánticamente equivalentes es que* $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\phi) = \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\psi)$. *Por lo tanto $\approx_{\mathcal{L}}$, es una relación de equivalencia sobre* $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$. *Además, la relación $\approx_{\mathcal{L}}$ retringida al subconjunto* $\mathrm{Sent}(\mathcal{L})$ *de* $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ *es compatible con los operadores booleanos y el conjunto cociente* $\mathrm{Sent}(\mathcal{L})/\approx_{\mathcal{L}}$ *está dotado de una estructura de álgebra booleana, a la que denotamos por* $\underline{\mathrm{LT}}(\mathcal{L})$ *y denominamos el álgebra de* Lindenbaum-Tarski *de la lógica de predicados de primer orden. Por último, cada elemento de* $\mathrm{LT}(\mathcal{L})$ *determina un conjunto finitamente axiomatizable, siendo tal asociación inyectiva.*

Proof. □

6. Extensiones y equivalencias elementales

> The "objects"of model theory are the structures. The "maps"of first order model theory are not the monomorphisms, which preserve merely the atomic structural properties, but rather the elementary monomorphisms, which preserve all first order properties.
>
> *G. Sacks.*

En esta sección definimos la relación de equivalencia elemental y la de encajamiento elemental entre sistemas algebraicos y estudiamos tanto las propiedades de las mismas, como las relaciones que subsisten entre ellas y la relación de isomorfía. Además, demostramos el teorema de Tarski-Vaught sobre la clausura del conjunto de los sistemas algebraicos, relativos a una signatura de primer orden, arbitraria pero fija, respecto de la unión de cadenas ascendentes de sistemas algebraicos, en las que cada término de la cadena es un subsistema elemental de su sucesor, el teorema de Tarski-Vaught sobre la caracterización de los subsistemas elementales, el teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski descendente y ascendente, el teorema de Łoś y el teorema de compacidad. Además, dotamos al conjunto de los conjuntos axiomatizables minimales de una estructura de espacio topológico compacto, Hausdorff y cero-dimensional y demostramos un teorema de Taimanov que caracteriza el operador clausura, en el espacio topológico mencionado, mediante la noción de ultraproducto.

6.1. **Los teoremas de Tarski-Vaught sobre la elementalidad.**

Definition 41 (Tarski)**.** Sean $\underline{A}$ y $\underline{B}$ dos sistemas algebraicos. Decimos que $\underline{A}$ y $\underline{B}$ son *elementalmente equivalentes*, y lo denotamos por $\underline{A} \equiv \underline{B}$, si, para cada $\phi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, si $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi$, entonces $\underline{B} \models_{\mathcal{L}} \phi$.

La definición de equivalencia elemental entre dos sistemas algebraicos puede parecer asimétrica, pero no es ése el caso, como pone de manifiesto el siguiente corolario.

Corollary 19. *Sean $\underline{A}$ y $\underline{B}$ dos sistemas algebraicos. Entonces $\underline{A} \equiv \underline{B}$ precisamente si, para cada $\phi \in$* $\mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, *$\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi$, si y sólo si $\underline{B} \models_{\mathcal{L}} \phi$ o, lo que es equivalente, exactamente si* $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\underline{A}) = \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\underline{B})$. *Por consiguiente, la relación binaria $\equiv$ en* $\mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$ *es simétrica. Además, $\equiv$ es reflexiva y transitiva, por lo tanto, es una relación de equivalencia sobre* $\mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$ *y es menos fina que la relación de isomorfía $\cong$ sobre el mismo conjunto, i.e., $\cong \subseteq \equiv$.*

Proof. □

Definition 42. Sean $\underline{A}$ y $\underline{B}$ dos sistemas algebraicos. Un *encajamiento elemental* de $\underline{A}$ en $\underline{B}$ es un triplo ordenado $(\underline{A}, f, \underline{B})$, abreviado como f y denotado por $f\colon \underline{A} \rightarrowtail \underline{B}$, en el que f es una aplicación de A en B tal que, para cada fórmula ϕ

y cada $x \in A^{\mathrm{N}}$, $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi[x]$ exactamente si $\underline{B} \models_{\mathcal{L}} \phi[f \circ x]$, i.e., $x \in \phi^{\underline{A}}$ sí y sólo si $f \circ x \in \phi^{\underline{B}}$.

Proposition 117. *Si $f\colon \underline{A} \rightarrowtail \underline{B}$ es un encajamiento elemental, entonces f es un encajamiento de $\underline{A}$ en $\underline{B}$.*

Proof. □

Proposition 118.

(1) *Si $f\colon \underline{A} \rightarrowtail \underline{B}$ y $g\colon \underline{B} \rightarrowtail \underline{C}$ son encajamientos elementales, entonces también lo es $g \circ f\colon \underline{A} \rightarrowtail \underline{C}$.*
(2) *Si $g \circ f\colon \underline{A} \rightarrowtail \underline{C}$ y $g\colon \underline{B} \rightarrowtail \underline{C}$ son encajamientos elementales, entonces también lo es $f\colon \underline{A} \rightarrowtail \underline{B}$.*
(3) $\mathrm{id}_{\underline{A}}$ *es un encajamiento elemental.*
(4) *Si $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ es un isomorfismo, entonces también es un encajamiento elemental.*
(5) *Si $f\colon \underline{A} \rightarrowtail \underline{B}$ es un encajamiento elemental, entonces $\underline{A} \equiv \underline{B}$.*

Proof. □

Definition 43 (Tarski)**.** Sean $\underline{A}$ y $\underline{B}$ dos sistemas algebraicos. Decimos que $\underline{A}$ es un *subsistema elemental* de $\underline{B}$, y lo denotamos por $\underline{A} \preccurlyeq \underline{B}$, si $A \subseteq B$ y si $\mathrm{in}_{\underline{A}}$ es un encajamiento elemental de $\underline{A}$ en $\underline{B}$.

Proposition 119. *Sean $\underline{A}$ y $\underline{B}$ dos sistemas algebraicos. Si $\underline{A}$ es un subsistema elemental de $\underline{B}$, entonces $\underline{A}$ es un subsistema de $\underline{B}$ y $\underline{A} \equiv \underline{B}$.*

Proof. □

Los grupos $\underline{Z} = (Z, +, -, 0)$ y $\underline{P} = (P, +, -, 0)$, siendo P el conjunto de los números enteros pares, son isomorfos, luego son elementalmente equivalentes; pero $\underline{P}$, que es un subgrupo de $\underline{Z}$, *no es un subsistema elemental* de $\underline{Z}$ (esto no entra en contradicción con el que todo isomorfismo sea un encajamiento elemental, porque las inclusiones son distintas de los isomorfismos). De hecho, el único subsistema elemental de $\underline{Z}$ es él mismo.

Theorem 2. *Sea $(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$ un sistema inductivo de sistemas algebraicos. Si los homomorfismos de transición $a_{s,s'}\colon \underline{A}_s \longrightarrow \underline{A}_{s'}$ son encajamientos elementales, entonces, para cada $s \in S$, a_s, la inclusión canónica s-ésima, es un encajamiento elemental de $\underline{A}_s$ en $\varinjlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}})$. Además, si $\Phi\colon (\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) \longrightarrow (\underline{T}, \underline{\mathcal{B}})$ es un morfismo inductivo, en el que $\Phi = (\phi, f)$, con $\phi\colon \underline{S} \longrightarrow \underline{T}$ y $f = (f_s \mid s \in S)$, siendo, para cada $s \in S$, $f_s\colon \underline{A}_s \rightarrowtail \underline{B}_{\phi(s)}$, entonces $\varinjlim \Phi\colon \varinjlim(\underline{S}, \underline{\mathcal{A}}) \rightarrowtail \varinjlim(\underline{T}, \underline{\mathcal{B}})$.*

Proof. □

Corollary 20 (Tarski-Vaught)**.** *Sea I un conjunto no vacío y $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ una familia de sistemas algebraicos tal que, para cada $i, j \in I$ exista un $k \in I$ tal que $\underline{A}_i \preccurlyeq \underline{A}_k$ y $\underline{A}_j \preccurlyeq \underline{A}_k$. Entonces, para cada $i \in I$, $\underline{A}_i \preccurlyeq \bigcup_{i \in I} \underline{A}_i$.*

Proof. Antes de proceder a demostrar el teorema recordamos que para una familia de sistemas algebraicos dirigida superiormente $(\underline{A}_i \mid i \in I)$, el sistema algebraico $\bigcup_{i \in I} \underline{A}_i$ es el definido como:

(1) El conjunto subyacente de $\bigcup_{i \in I} \underline{A}_i$ es $\bigcup_{i \in I} A_i$.
(2) Para cada $n \in \mathrm{N}$ y cada $\sigma \in \Sigma$, la operación estructural F_σ es la aplicación definida como:

$$F_\sigma \begin{cases} (\bigcup_{i \in I} A_i)^n & \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \\ (x_\alpha \mid \alpha \in n) & \longmapsto F_\sigma^{\underline{A}_i}(x_\alpha \mid \alpha \in n), \end{cases}$$

siendo i un índice tal que, para cada $\alpha \in n$, $x_\alpha \in A_i$.

(3) Para cada $n \in \mathrm{N}-1$ y cada $\pi \in \Pi$, la relación estructural R_π es $\bigcup_{i\in I} R_\pi^{\underline{A}_i}$.

Es evidente que, para cada $i \in I$, $\underline{A}_i$ es un subsistema de $\bigcup_{i\in I} \underline{A}_i$.

La demostración del teorema es por inducción algebraica. Concretamente, vamos a demostrar que el conjunto de fórmulas Φ definido como:

$$\Phi = \{\, \phi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \mid \forall i \in I\, \forall x \in A_i^{\mathrm{N}}\ (\underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} \phi[x] \leftrightarrow \bigcup_{i\in I} \underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} \phi[\mathrm{in}_i \circ x])\,\},$$

contiene al conjunto $\mathrm{At}(\mathcal{L})$ de las fórmulas atómicas y está cerrado bajo las operaciones estructurales definidas sobre $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$.

Sabemos que las $\mathcal{L}$-fórmulas atómicas, o bien son de la forma $P_0 = P_1$, para algún $(P_i \mid i \in 2) \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^2$, o bien de la forma $\pi(P_i \mid i \in n)$, para algún $n \in \mathrm{N}-1$, algún $\pi \in \Pi_n$ y alguna familia $(P_i \mid i \in n) \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^n$.

Sea $i \in I$ y $x \in A_i^{\mathrm{N}}$. Vamos a demostrar que $\underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} P_0 = P_1[x]$ precisamente si $\bigcup_{i\in I} \underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} P_0 = P_1[\mathrm{in}_i \circ x]$, i.e., que $x \in \mathrm{Eq}(P_0^{\underline{A}_i}, P_1^{\underline{A}_i})$ si y sólo si $\mathrm{in}_i \circ x \in \mathrm{Eq}(P_0^{\bigcup_{i\in I}\underline{A}_i}, P_1^{\bigcup_{i\in I}\underline{A}_i})$, o lo que es equivalente, que $P_0^{\underline{A}_i}(x) = P_1^{\underline{A}_i}(x)$ si y sólo si $P_0^{\bigcup_{i\in I}\underline{A}_i}(\mathrm{in}_i \circ x) = P_1^{\bigcup_{i\in I}\underline{A}_i}(\mathrm{in}_i \circ x)$. Ahora bien, para $\alpha \in 2$ el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A_i^{\mathrm{N}} \arrow[r, "\mathrm{in}_i^{\mathrm{N}}"] \arrow[d, "P_\alpha^{\underline{A}_i}"'] & (\bigcup_{i\in I} A_i)^{\mathrm{N}} \arrow[d, "P_\alpha^{\bigcup_{i\in I}\underline{A}_i}"] \\
A_i \arrow[r, "\mathrm{in}_i"'] & \bigcup_{i\in I} A_i
\end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto, para $\alpha \in 2$, $\mathrm{in}_i(P_\alpha^{\underline{A}_i}(x)) = P_\alpha^{\bigcup_{i\in I}\underline{A}_i}(\mathrm{in}_i^{\mathrm{N}}(x))$.

De manera que si $P_0^{\underline{A}_i}(x) = P_1^{\underline{A}_i}(x)$, entonces $\mathrm{in}_i(P_0^{\underline{A}_i}(x)) = \mathrm{in}_i(P_1^{\underline{A}_i}(x))$, i.e., $P_0^{\bigcup_{i\in I}\underline{A}_i}(\mathrm{in}_i^{\mathrm{N}}(x)) = P_1^{\bigcup_{i\in I}\underline{A}_i}(\mathrm{in}_i^{\mathrm{N}}(x))$.

Por otra parte, si $P_0^{\bigcup_{i\in I}\underline{A}_i}(\mathrm{in}_i^{\mathrm{N}}(x)) = P_1^{\bigcup_{i\in I}\underline{A}_i}(\mathrm{in}_i^{\mathrm{N}}(x))$, entonces $\mathrm{in}_i(P_0^{\underline{A}_i}(x)) = \mathrm{in}_i(P_1^{\underline{A}_i}(x))$, luego, ya que in_i es inyectiva, $P_0^{\underline{A}_i}(x) = P_1^{\underline{A}_i}(x)$. Para las fórmulas atómicas de la forma $\pi(P_i \mid i \in n)$ se procede del mismo modo y lo dejamos como ejercicio.

Veamos que Φ esta cerrado bajo los operadores lógicos.

Sea $\phi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ tal que $\phi \in \Phi$. Vamos a demostrar que $\neg\phi \in \Phi$, i.e., que para cada $i \in I$ y cada $x \in A_i^{\mathrm{N}}$, $\underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} \neg\phi[x]$ precisamente si $\bigcup_{i\in I} \underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} \neg\phi[\mathrm{in}_i \circ x]$. Sea $i \in I$ y $x \in A_i^{\mathrm{N}}$. Supongamos que $\underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} \neg\phi[x]$, entonces $x \in (\neg\phi)^{\underline{A}_i} = \complement\phi^{\underline{A}_i}$, luego $x \notin \phi^{\underline{A}_i}$, i.e., no es el caso que $\underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} \phi[x]$, luego, por la hipótesis, no es el caso que $\bigcup_{i\in I} \underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} \phi[\mathrm{in}_i \circ x]$, por lo tanto $\bigcup_{i\in I} \underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} \neg\phi[\mathrm{in}_i \circ x]$. Del mismo modo se demuestra la recíproca.

Sea $\phi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ tal que $\phi \in \Phi$. Vamos a demostrar que, para cada $n \in \mathrm{N}$, $\exists v_n\phi \in \Phi$, i.e., que para cada $n \in \mathrm{N}$, se cumple que, para cada $i \in I$ y cada $x \in A_i^{\mathrm{N}}$, $\underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\phi[x]$ precisamente si $\bigcup_{i\in I} \underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\phi[\mathrm{in}_i \circ x]$. Sea $n \in \mathrm{N}$, $i \in I$ y $x \in A_i^{\mathrm{N}}$. Supongamos que $\underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\phi[x]$, entonces hay un $a \in A_i$ tal que $\underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} \phi[x^{(n|a)}]$, luego, por la hipótesis, $\bigcup_{i\in I} \underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} \phi[(\mathrm{in}_i \circ x)^{(n|a)}]$, así que $\bigcup_{i\in I} \underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\phi[\mathrm{in}_i \circ x]$. Recíprocamente, si $\bigcup_{i\in I} \underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\phi[\mathrm{in}_i \circ x]$, entonces hay un $a \in \bigcup_{i\in I} A_i$ tal que $\bigcup_{i\in I} \underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} \phi[(\mathrm{in}_i \circ x)^{(n|a)}]$. Por lo tanto para un $j \in I$ tenemos que $a \in A_j$, luego hay un $k \in I$ tal que $\underline{A}_i \preccurlyeq \underline{A}_k$ y $\underline{A}_j \preccurlyeq \underline{A}_k$, entonces, por la hipótesis de inducción algebraica, $\underline{A}_k \models_{\mathcal{L}} \phi[x^{(n|a)}]$, i.e., $\underline{A}_k \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\phi[x]$, luego $\underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\phi[x]$, porque $\underline{A}_i \preccurlyeq \underline{A}_k$.

Dejamos como ejercicio la demostración de que Φ está cerrado para el resto de los operadores lógicos.

□

Presentamos a continuación un teorema de Tarski-Vaught de caracterización de las extensiones elementales.

Theorem 3 (Tarski-Vaught)**.** *Sean $\underline{A}$ y $\underline{B}$ dos sistemas algebraicos. Entonces las dos condiciones*

(1) *$\underline{A}$ es un subsistema de $\underline{B}$.*
(2) *Para cada $\phi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$, cada $n \in \mathrm{N}$, cada $x \in A^{\mathrm{N}}$, si $\underline{B} \models_{\mathcal{L}} \exists v_n \phi[x]$, entonces existe un $a \in A$ tal que $\underline{B} \models_{\mathcal{L}} \phi[x^{(n|a)}]$.*

son necesarias y suficientes para que $\underline{A}$ sea un subsistema elemental de $\underline{B}$.

Proof. Necesidad. Si $\underline{A} \preccurlyeq \underline{B}$, entonces es obvio que $\underline{A}$ es un subsistema de $\underline{B}$. Veamos que se cumple 2. Sea $\phi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$, $n \in \mathrm{N}$, $x \in A^{\mathrm{N}}$ y supongamos que $\underline{B} \models_{\mathcal{L}} \exists v_n \phi[x]$. Entonces, en virtud de la definición de $\preccurlyeq$, $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \exists v_n \phi[x]$, luego, por la definición de la relación $\models_{\mathcal{L}}$, hay un $a \in A$ tal que $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi[x^{(n|a)}]$, por lo tanto, por la definición de $\preccurlyeq$, $\underline{B} \models_{\mathcal{L}} \phi[x^{(n|a)}]$.

Suficiencia. Es obvio que de 1 se deduce que $A \subseteq B$. Para demostrar que, para cada $\phi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ y cada $x \in A^{\mathrm{N}}$, $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi[x]$ precisamente si $\underline{B} \models_{\mathcal{L}} \phi[x]$, procedemos por inducción algebraica. Concretamente, vamos a demostrar que el conjunto de fórmulas Φ definido como:

$$\Phi = \{\, \phi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \mid \forall x \in A^{\mathrm{N}}\, (\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi[x] \leftrightarrow \underline{B} \models_{\mathcal{L}} \phi[x])\,\},$$

contiene al conjunto $\mathrm{At}(\mathcal{L})$ de las fórmulas atómicas y está cerrado bajo las operaciones estructurales definidas sobre $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$. Es evidente, en virtud de 1, que $\mathrm{At}(\mathcal{L}) \subseteq \Phi$.

Sea $\phi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ tal que $\phi \in \Phi$. Vamos a demostrar que $\neg\phi \in \Phi$, i.e., que para cada $x \in A^{\mathrm{N}}$, $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \neg\phi[x]$ precisamente si $\underline{B} \models_{\mathcal{L}} \neg\phi[x]$. Sea $x \in A^{\mathrm{N}}$ y supongamos que $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \neg\phi[x]$, entonces no es el caso que $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi[x]$, luego, por la hipótesis, no es el caso que $\underline{B} \models_{\mathcal{L}} \phi[x]$, por lo tanto $\underline{B} \models_{\mathcal{L}} \neg\phi[x]$. Del mismo modo se demuestra la recíproca.

Sea $\phi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ tal que $\phi \in \Phi$. Vamos a demostrar que, para cada $n \in \mathrm{N}$, $\exists v_n \phi \in \Phi$, i.e., que para cada $n \in \mathrm{N}$, se cumple que, para cada $x \in A^{\mathrm{N}}$, $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \exists v_n \phi[x]$ precisamente si $\underline{B} \models_{\mathcal{L}} \exists v_n \phi[\mathrm{in}_i \circ x]$. Sea $n \in \mathrm{N}$ y $x \in A^{\mathrm{N}}$. Supongamos que $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \exists v_n \phi[x]$, entonces hay un $a \in A$ tal que $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi[x^{(n|a)}]$, luego, por la hipótesis, $\underline{B} \models_{\mathcal{L}} \phi[x^{(n|a)}]$, así que $\underline{B} \models_{\mathcal{L}} \exists v_n \phi[x]$. Recíprocamente, si $\underline{B} \models_{\mathcal{L}} \exists v_n \phi[x]$, entonces, por 2, hay un $a \in A$ tal que $\underline{B} \models_{\mathcal{L}} \phi[x^{(n|a)}]$,luego, por la hipótesis de inducción, $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi[x^{(n|a)}]$, por lo tanto $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \exists v_n \phi[x]$.

Dejamos como ejercicio la demostración de que Φ está cerrado para el resto de los operadores lógicos. □

6.2. **El teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski descendente.**

Theorem 4 (Löwenheim-Skolem-Tarski descendente)**.** *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden, $\underline{B} = (B, F^{\underline{B}}, R^{\underline{B}})$ un $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-sistema algebraico, $X \subseteq B$ y $\mathfrak{m}$ un cardinal infinito tal que* $\mathrm{card}(X) \leq \mathfrak{m} \leq \mathrm{card}(B)$ *y* $\mathrm{card}(\Sigma \coprod \Pi) \leq \mathfrak{m}$. *Entonces $\underline{B}$ tiene un subsistema elemental $\underline{A} = (A, F^{\underline{A}}, R^{\underline{A}})$ tal que $X \subseteq A$ y* $\mathrm{card}(A) = \mathfrak{m}$.

Proof. Puesto que una $\mathcal{L}$-fórmula es una sucesión finita de símbolos de operación lógicos, variables, símbolos de operación y símbolos de relación, el número de fórmulas es a lo sumo $\sum_{n \in \mathrm{N}} \mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}$. Sea Y un subconjunto de B tal que $X \subseteq Y$ y $\mathrm{card}(Y) = \mathfrak{m}$. Por otra parte, sea f una función de elección para los subconjuntos no vacíos de B. Vamos a asociar a cada par $(\phi, i) \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \times \mathrm{N}$ una operación finitaria $G_{\phi,i}$ sobre B, la *operación de Skolem* para (ϕ, i). Sea m el primer número natural tal que las variables libres de ϕ estén incluidas en $\downarrow v_{m+1} = \{ v_0, \ldots, v_m \}$ e $i \leq m$. Entonces $G_{\phi,i}$ es la operación $m+1$-aria sobre B definida como:

$$G_{\phi,i} \begin{cases} B^{m+1} \longrightarrow B \\ \quad b \quad \longmapsto \begin{cases} f(\{ u \in B \mid \underline{B} \models_{\mathcal{L}} \phi[b^{(i|u)}] \}), & \text{si } \{ u \in B \mid \underline{B} \models_{\mathcal{L}} \phi[b^{(i|u)}] \} \neq \varnothing; \\ f(B), & \text{en caso contrario.} \end{cases} \end{cases}$$

Sea A el cerrado de $(B, (G_{\phi,i} \mid (\phi, i) \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \times \mathrm{N}))$ generado por Y. El conjunto A es tal que $\mathrm{card}(A) = \mathfrak{m}$. Ahora vamos a dotar al conjunto A de una estructura de $(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$-sistema algebraico. Para un símbolo de relación π de rango m convenimos que $R^{\underline{A}} = R^{\underline{B}} \cap A^m$. Por otra parte, para un símbolo de operación σ de ariedad m, vamos a ver que A está cerrado bajo la operación $F^{\underline{B}}_\sigma$. Sea ϕ la fórmula $\sigma(v_0, \ldots, v_{m-1}) = v_m$ y $a_0, \ldots, a_{m-1} \in A$, entonces

$$G_{\phi,m}(a_0, \ldots, a_{m-1}, a_0) = F^{\underline{B}}_\sigma(a_0, \ldots, a_{m-1}),$$

porque $F^{\underline{B}}_\sigma(a_0, \ldots, a_{m-1})$ es el único elemento u de B tal que, tomando como $a = (a_0, \ldots, a_{m-1}, a_0)$, $\underline{B} \models_{\mathcal{L}} \phi[a^{(m|u)}]$. Luego definimos

$$F^{\underline{A}}_\sigma(a_0, \ldots, a_{m-1}) = F^{\underline{B}}_\sigma(a_0, \ldots, a_{m-1}).$$

Obviamente se cumple que $\underline{A} = (A, F^{\underline{A}}, R^{\underline{A}})$ es un subsistema de $\underline{B} = (B, F^{\underline{B}}, R^{\underline{B}})$. Para demostrar que $\underline{A} = (A, F^{\underline{A}}, R^{\underline{A}})$ es un subsistema elemental de $\underline{B} = (B, F^{\underline{B}}, R^{\underline{B}})$ aplicamos el teorema 3. Sea $\phi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$, $n \in \mathrm{N}$, $x \in A^{\mathrm{N}}$ y supongamos que $\underline{B} \models_{\mathcal{L}} \exists v_n \phi[x]$. Sea m un número natural tal que las variables libres de ϕ estén incluidas en $\downarrow v_{m+1} = \{ v_0, \ldots, v_m \}$ y $n \leq m$. Entonces para $u = G_{\phi,n}(a_0, \ldots, a_m)$ se cumple que $u \in A$, porque A está cerrado bajo las operaciones $G_{\phi,n}$. Además, por la definición de $G_{\phi,n}$, tenemos que $\underline{B} \models_{\mathcal{L}} \phi[(x{\restriction}m+1)^{(n|u)}]$, luego $\underline{B} \models_{\mathcal{L}} \phi[x^{(n|u)}]$. $\square$

6.3. **El teorema de Łoś y la compacidad.**

Theorem 5 (Łoś). *Sea I un conjunto, $\mathcal{F}$ un ultrafiltro sobre I y $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ una familia de sistemas algebraicos. Entonces, para cada $\phi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ y cada $x \in \left(\prod_{i \in I} A_i\right)^{\mathrm{N}}$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\prod_{i \in I} \underline{A}_i / \equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} \phi[\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}} \circ x]$, *siendo* $\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}}$ *la proyección canónica de* $\prod_{i \in I} \underline{A}_i$ *en* $\prod_{i \in I} \underline{A}_i / \equiv_{\mathcal{F}}$.
(2) *El conjunto* $\{ i \in I \mid \underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} \phi[\mathrm{pr}_i \circ x] \} \in \mathcal{F}$.

Proof. Para la demostración conviene que tengamos presente el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{N} \arrow[d, "x"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}} \circ x"] & \\ \prod_{i \in I} A_i \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}}"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_i"'] & \prod_{i \in I} A_i / \equiv_{\mathcal{F}} \\ A_i & \end{tikzcd}$$

Para demostrar que, para cada $\phi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ y cada $x \in \left(\prod_{i \in I} A_i\right)^{\mathrm{N}}$, $\prod_{i \in I} \underline{A}_i / \equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} \phi[\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}} \circ x]$ precisamente si $\{ i \in I \mid \underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} \phi[\mathrm{pr}_i \circ x] \} \in \mathcal{F}$, procedemos por inducción algebraica. Concretamente, vamos a demostrar que el conjunto de fórmulas Φ definido como:

$$\Phi = \left\{ \phi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \;\middle|\; \forall x \in \Big(\prod_{i \in I} A_i\Big)^{\mathrm{N}} \left(\begin{array}{c} \prod_{i \in I} \underline{A}_i / \equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} \phi[\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}} \circ x] \text{ si y sólo} \\ \text{si } \{ i \in I \mid \underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} \phi[\mathrm{pr}_i \circ x] \} \in \mathcal{F} \end{array} \right) \right\},$$

contiene al conjunto $\mathrm{At}(\mathcal{L})$ de las fórmulas atómicas y está cerrado bajo las operaciones estructurales definidas sobre $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$.

Sabemos que las $\mathcal{L}$-fórmulas atómicas, o bien son de la forma $P_0 = P_1$, para algún $(P_i \mid i \in 2) \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^2$, o bien de la forma $\pi(P_i \mid i \in n)$, para algún $n \in \mathrm{N} - 1$, algún $\pi \in \Pi_n$ y alguna familia $(P_i \mid i \in n) \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^n$.

Sea $x \in \left(\prod_{i\in I} A_i\right)^{\mathrm{N}}$. Vamos a demostrar que $\prod_{i\in I} \underline{A}_i/ \equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} P_0 = P_1[\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}} \circ x]$ precisamente si $\{\, i \in I \mid \underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} P_0 = P_1[\mathrm{pr}_i \circ x] \,\} \in \mathcal{F}$. Si $\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}} \circ x$ satisface a $P_0 = P_1$ en $\prod_{i\in I} \underline{A}_i/ \equiv_{\mathcal{F}}$, entonces $\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}} \circ x$ pertenece al igualador de $P_0^{\prod_{i\in I} \underline{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}}}$ y $P_1^{\prod_{i\in I} \underline{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}}}$. Ahora bien, para $\alpha \in 2$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\left(\prod_{i\in I} A_i\right)^{\mathrm{N}} \arrow[r, "\mathrm{pr}^{\mathrm{N}}_{\equiv_{\mathcal{F}}}"] \arrow[d, "P_\alpha^{\prod_{i\in I} \underline{A}_i}"'] & \left(\prod_{i\in I} A_i/ \equiv_{\mathcal{F}}\right)^{\mathrm{N}} \arrow[d, "P_\alpha^{\prod_{i\in I} \underline{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}}}"] \\
\prod_{i\in I} A_i \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}}"'] & \prod_{i\in I} A_i/ \equiv_{\mathcal{F}}
\end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto, para $\alpha \in 2$, $P_\alpha^{\prod_{i\in I} \underline{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}}}(\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}} \circ x) = \mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}}(P_\alpha^{\prod_{i\in I} \underline{A}_i}(x))$.

Luego $\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}}(P_0^{\prod_{i\in I} \underline{A}_i}(x)) = \mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}}(P_1^{\prod_{i\in I} \underline{A}_i}(x))$, por consiguiente el conjunto $\{\, i \in I \mid \mathrm{pr}_i(P_0^{\prod_{i\in I} \underline{A}_i}(x)) = \mathrm{pr}_i(P_1^{\prod_{i\in I} \underline{A}_i}(x)) \,\} \in \mathcal{F}$.

Ahora bien, para $\alpha \in 2$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\left(\prod_{i\in I} A_i\right)^{\mathrm{N}} \arrow[r, "\mathrm{pr}^{\mathrm{N}}_i"] \arrow[d, "P_\alpha^{\prod_{i\in I} \underline{A}_i}"'] & A_i^{\mathrm{N}} \arrow[d, "P_\alpha^{\underline{A}_i}"] \\
\prod_{i\in I} A_i \arrow[r, "\mathrm{pr}_i"'] & A_i
\end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto, para $\alpha \in 2$, $\mathrm{pr}_i(P_\alpha^{\prod_{i\in I} \underline{A}_i}(x)) = P_\alpha^{\underline{A}_i}(\mathrm{pr}_i \circ x))$

Luego, $\{\, i \in I \mid P_0^{\underline{A}_i}(\mathrm{pr}_i \circ x) = P_1^{\underline{A}_i}(\mathrm{pr}_i \circ x) \,\} \in \mathcal{F}$, pero $\underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} P_0 = P_1[\mathrm{pr}_i \circ x]$ precisamente si $P_0^{\underline{A}_i}(\mathrm{pr}_i \circ x) = P_1^{\underline{A}_i}(\mathrm{pr}_i \circ x)$, así que $\{\, i \in I \mid \underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} P_0 = P_1[\mathrm{pr}_i \circ x] \,\} \in \mathcal{F}$. La recíproca es similar.

Dejamos como ejercicio la demostración del caso en el que la fórmula atómica sea de la forma $\pi(P_i \mid i \in n)$, para algún $n \in \mathrm{N} - 1$, algún $\pi \in \Pi_n$ y alguna familia $(P_i \mid i \in n) \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^n$.

Sea $\phi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ tal que $\phi \in \Phi$. Vamos a demostrar que $\neg\phi \in \Phi$, i.e., que para cada $x \in \left(\prod_{i\in I} A_i\right)^{\mathrm{N}}$, $\prod_{i\in I} \underline{A}_i/ \equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} \neg\phi[\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}} \circ x]$ precisamente si $\{\, i \in I \mid \underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} \neg\phi[\mathrm{pr}_i \circ x] \,\} \in \mathcal{F}$.

Sea $x \in \left(\prod_{i\in I} A_i\right)^{\mathrm{N}}$ y supongamos que $\prod_{i\in I} \underline{A}_i/ \equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} \neg\phi[\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}} \circ x]$, entonces no es el caso que $\prod_{i\in I} \underline{A}_i/ \equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} \phi[\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}} \circ x]$, luego, por la hipótesis, $\{\, i \in I \mid \underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} \phi[\mathrm{pr}_i \circ x] \,\} \notin \mathcal{F}$. Pero, por ser $\mathcal{F}$ un ultrafiltro, entonces $I - \{\, i \in I \mid \underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} \phi[\mathrm{pr}_i \circ x] \,\} \in \mathcal{F}$. Ahora bien, este último conjunto es $\{\, j \in I \mid \underline{A}_j \models_{\mathcal{L}} \neg\phi[\mathrm{pr}_j \circ x] \,\}$, luego $\{\, j \in I \mid \underline{A}_j \models_{\mathcal{L}} \neg\phi[\mathrm{pr}_j \circ x] \,\} \in \mathcal{F}$. La recíproca es obvia.

Sea $\phi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ tal que $\phi \in \Phi$. Vamos a demostrar que, para cada $k \in \mathrm{N}$, $\exists v_k \phi \in \Phi$. Sea $k \in \mathrm{N}$ y $x \in \left(\prod_{i\in I} A_i\right)^{\mathrm{N}}$. Supongamos que $\prod_{i\in I} \underline{A}_i/ \equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} \exists v_k \phi[\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}} \circ x]$, entonces hay un $y \in \prod_{i\in I} A_i$ tal que $\prod_{i\in I} \underline{A}_i/ \equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} \phi[(\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}} \circ x)^{(k|[y]_{\equiv_{\mathcal{F}}})}]$. Ahora bien, puesto que $\phi \in \Phi$, obtenemos que $\{\, i \in I \mid \underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} \phi[\mathrm{pr}_i \circ x^{(k|\mathrm{pr}_i(y))}] \,\} \in \mathcal{F}$. Pero se cumple que este último conjunto está incluido en $\{\, i \in I \mid \underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} \exists v_k \phi[\mathrm{pr}_i \circ x] \,\}$, porque si $i \in I$ es tal que $\underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} \phi[\mathrm{pr}_i \circ x^{(k|\mathrm{pr}_i(y))}]$, entonces, para $a = y(i)$, tenemos que $\underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} \phi[(\mathrm{pr}_i \circ x)^{(k|y(i))}]$, porque $(\mathrm{pr}_i \circ x)^{(k|y(i))} = \mathrm{pr}_i \circ x^{(k|\mathrm{pr}_i(y))}$, luego $\underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} \exists v_k \phi[\mathrm{pr}_i \circ x]$. Por lo tanto $\{\, i \in I \mid \underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} \exists v_k \phi[\mathrm{pr}_i \circ x] \,\} \in \mathcal{F}$. Recíprocamente, si $J = \{\, i \in I \mid \underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} \exists v_k \phi[\mathrm{pr}_i \circ x] \,\} \in \mathcal{F}$, entonces, para cada $j \in J$, hay un $a_j \in A_j$ tal que $\underline{A}_j \models_{\mathcal{L}} \exists v_k \phi[\mathrm{pr}_j \circ x]$. Sea y la función de elección para $(A_i \mid i \in I)$ cuya coordenada j-ésima, con $j \in J$, es a_j, y cuya coordenada i-ésima, con $i \in I - J$, es un $b_i \in A_i$, arbitrario, pero fijo. Se cumple que $\{\, i \in I \mid \underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} \exists v_k \phi[\mathrm{pr}_i \circ x] \,\}$ está incluido en $\{\, i \in I \mid \underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} \phi[\mathrm{pr}_i \circ x^{(k|y)}] \,\}$. Por lo tanto $\{\, i \in I \mid \underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} \phi[\mathrm{pr}_i \circ x^{(k|y)}] \,\} \in \mathcal{F}$, luego, ya que $\phi \in \mathcal{F}$, $\prod_{i \in I} \underline{A}_i / \equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} \phi[(\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}} \circ x)^{(k|[y]_{\equiv_{\mathcal{F}}})}]$. Por consiguiente $\prod_{i \in I} \underline{A}_i / \equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} \exists v_k \phi[\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}} \circ x]$. Dejamos como ejercicio la demostración de que Φ está cerrado para el resto de los operadores lógicos. $\square$

Corollary 21. *Sea I un conjunto, $\mathcal{F}$ un ultrafiltro sobre I, $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ una familia de sistemas algebraicos y $\phi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$. Entonces $\prod_{i \in I} \underline{A}_i / \equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} \phi$ si y sólo si el conjunto $\{\, i \in I \mid \underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} \phi \,\} \in \mathcal{F}$.*

Corollary 22. *Sea I un conjunto, $\mathcal{F}$ un ultrafiltro sobre I, $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ una familia de sistemas algebraicos y $\phi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$. Si, para cada $i \in I$, $\underline{A}_i \models_{\mathcal{L}} \phi$ entonces $\prod_{i \in I} \underline{A}_i / \equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} \phi$.*

Corollary 23 (Teorema de compacidad)**.** *Sea Φ un conjunto infinito de sentencias. Si cada subconjunto finito de Φ tiene un modelo, entonces Φ tiene un modelo.*

Proof. Sea $I = \{\, \Delta \subseteq \Phi \mid \mathrm{card}(\Delta) < \aleph_0 \,\}$. Entonces, dada una parte finita Δ de Φ, hay un sistema algebraico $\underline{A}_\Delta$ tal que, para cada $\delta \in \Delta$, $\underline{A}_\Delta \models_{\mathcal{L}} \delta$. Por otra parte, para cada $\Delta \in I$, sea $G_\Delta = \{\, \Theta \in I \mid \Delta \subseteq \Theta \,\}$. Entonces el subconjunto $\mathcal{G} = \{\, G_\Delta \mid \Delta \in I \,\}$ de $\mathrm{Sub}(I)$, es una subbase de filtro sobre I, i.e., se cumple que:

(1) $\mathcal{G} \neq \varnothing$.
(2) $\varnothing \notin \mathcal{G}$.
(3) Para cada $n \in \mathrm{N} - 1$ y cada $(\Delta_j \mid j \in n) \in I^n$, $\bigcap_{j \in n} G_{\Delta_j} \neq \varnothing$.

En efecto, el conjunto $\mathcal{G} \neq \varnothing$, porque $I \neq \varnothing$. El conjunto vacío no pertenece a $\mathcal{G}$ porque, dado un $\Delta \in I$, $\Delta \in G_\Delta$. Por último, dado un $n \in \mathrm{N} - 1$ y una familia $(\Delta_j \mid j \in n) \in I^n$, $\bigcap_{j \in n} G_{\Delta_j} \neq \varnothing$, porque $\bigcap_{j \in n} G_{\Delta_j} = G_{\bigcup_{j \in n} \Delta_j}$ y se cumple que $\bigcup_{j \in n} \Delta_j \in I$. Por lo tanto, en virtud del axioma de elección, hay un ultrafiltro $\mathcal{F}$ sobre I tal que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, i.e., tal que, para cada $\Delta \in I$, $,G_\Delta \in \mathcal{F}$. Veamos que, para cada $\phi \in \Phi$, $\prod_{\Delta \in I} \underline{A}_\Delta / \equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} \phi$. Para ello es suficiente que demostremos, en virtud del corolario 21 que, para cada $\phi \in \Phi$, $\{\, \Delta \in I \mid \underline{A}_\Delta \models_{\mathcal{L}} \phi \,\} \in \mathcal{F}$. Ahora bien, dado un $\phi \in \Phi$, el conjunto $\{\, \Delta \in I \mid \underline{A}_\Delta \models_{\mathcal{L}} \phi \,\}$ pertenece a $\mathcal{F}$, porque contiene al conjunto $G_{\{\phi\}} \in \mathcal{F}$. $\square$

Proposition 120. *El teorema de compacidad equivale a que, para cada $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, si $\Gamma \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$, entonces hay un subconjunto finito Δ de Γ tal que $\Delta \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$.*

Proof. Supongamos el teorema de compacidad y sea $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$ tal que $\Gamma \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$. Si, contrariamente a lo enunciado, para cada subconjunto finito Δ de Γ, existiera un sistema algebraico $\underline{A}$ tal que $\underline{A} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Delta)$ pero $\underline{A} \notin \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\phi)$, entonces, para cada subconjunto finito Δ de Γ, existiría un sistema algebraico $\underline{A}$ tal que $\underline{A} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Delta)$ y $\underline{A} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\neg\phi)$. Por lo tanto, para el conjunto de fórmulas cerradas $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$, tendríamos que, para cada subconjunto finito Θ de $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$, $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Theta) \neq \varnothing$, pero $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Gamma \cup \{\neg\phi\}) = \varnothing$, ya que en caso contrario, i.e., si existiera un sistema algebraico $\underline{A}$ tal que $\underline{A} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Gamma \cup \{\neg\phi\})$, entonces $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi$ y $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \neg\phi$, lo cual es absurdo. De modo que hay un subconjunto finito Δ de Γ tal que $\Delta \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$.

Ahora supongamos que, para cada $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, si $\Gamma \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$, entonces hay un subconjunto finito Δ de Γ tal que $\Delta \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$. Si no se cumpliera el teorema de compacidad, i.e., si existiera un $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$ tal que, para cada subconjunto finito

Δ de Γ, $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Delta) \neq \varnothing$ pero $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Gamma) = \varnothing$, entonces, para la fórmula cerrada $\exists x\,(x \neq x)$, tendríamos que $\Gamma \Vdash_{\mathcal{L}} \exists x\,(x \neq x)$, porque $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Gamma) = \varnothing$, y, para cada subconjunto finito Δ de Γ, $\Delta \nVdash_{\mathcal{L}} \exists x\,(x \neq x)$, porque $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Delta) \neq \varnothing$ pero $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\exists x\,(x \neq x)) = \varnothing$. □

Corollary 24. *Tanto los functores de formación de ultraproductos como los de formación de ultrapotencias preservan encajamientos elementales. Además, las componentes de las transformaciones naturales del functor identidad en los functores de ultrapotencia, son encajamientos elementales.*

Corollary 25. *Cualquier sistema algebraico se puede encajar en un ultraproducto de sus subsistemas finitamente generados.*

Proof. □

Proposition 121. *Sea A un conjunto infinito y $\mathfrak{m}$ un cardinal transfinito. Entonces hay un conjunto I tal que* $\mathrm{card}(I) = \mathfrak{m}$ *y un ultrafiltro $\mathcal{F}$ sobre I tal que* $2^{\mathfrak{m}} \leq \mathrm{card}(A^I/\equiv_{\mathcal{F}})$.

Proof. Sea $I = \{\, X \subseteq \mathfrak{m} \mid \mathrm{card}(X) < \aleph_0 \,\}$. Para cada $X \in I$, sea $G_X = \{\, Y \in I \mid X \subseteq Y \,\}$. Entonces el subconjunto $\mathcal{G} = \{\, G_X \mid X \in I \,\}$ de $\mathrm{Sub}(I)$, es una subbase de filtro sobre I, i.e., se cumple que:

(1) $\mathcal{G} \neq \varnothing$.
(2) $\varnothing \notin \mathcal{G}$.
(3) Para cada $n \in \mathrm{N} - 1$ y cada $(X_j \mid j \in n) \in I^n$, $\bigcap_{j \in n} G_{X_j} \neq \varnothing$.

En efecto, el conjunto $\mathcal{G} \neq \varnothing$, porque $I \neq \varnothing$. El conjunto vacío no pertenece a $\mathcal{G}$ porque, dado un $X \in I$, $X \in G_X$. Por último, dado un $n \in \mathrm{N} - 1$ y una familia $(X_j \mid j \in n) \in I^n$, $\bigcap_{j \in n} G_{X_j} \neq \varnothing$, porque $\bigcap_{j \in n} G_{X_j} = G_{\bigcup_{j \in n} X_j}$ y se cumple que $\bigcup_{j \in n} X_j \in I$. Por lo tanto, en virtud del axioma de elección, hay un ultrafiltro $\mathcal{F}$ sobre I tal que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, i.e., tal que, para cada $X \in I$, ,$G_X \in \mathcal{F}$. Ahora vamos a demostrar que existe una aplicación inyectiva de $\mathrm{Sub}(\mathfrak{m})$ en $A^I/\equiv_{\mathcal{F}}$. Para ello, una vez elegida una familia $f = (f_X \mid X \in I)$ en $\prod_{X \in I} \mathrm{Mono}(\mathrm{Sub}(X), A)$, definimos la aplicación H_f de $\mathrm{Sub}(\mathfrak{m})$ en A^I como:

$$H_f \begin{cases} \mathrm{Sub}(\mathfrak{m}) & \longrightarrow A^I \\ \quad Y & \longmapsto (f_X(Y \cap X) \mid X \in I). \end{cases}$$

Entonces la aplicación H de $\mathrm{Sub}(\mathfrak{m})$ en $A^I/\equiv_{\mathcal{F}}$ definida como:

$$H \begin{cases} \mathrm{Sub}(\mathfrak{m}) & \longrightarrow A^I/\equiv_{\mathcal{F}} \\ \quad Y & \longmapsto [H_f(Y)]_{\equiv_{\mathcal{F}}}, \end{cases}$$

es inyectiva. En efecto, dados dos subconjuntos distintos Y y Z de $\mathfrak{m}$, si $\alpha \in Y \oplus Z$, entonces, ya que $G_{\{\alpha\}} \subseteq \{\, X \in I \mid f_X(Y \cap X) \neq f_X(Z \cap X) \,\}$ y $G_{\{\alpha\}} \in \mathcal{F}$, se cumple que $\{\, X \in I \mid f_X(Y \cap X) \neq f_X(Z \cap X) \,\} \in \mathcal{F}$, luego $H(Y) \neq H(Z)$.

□

Theorem 6 (Löwenheim-Skolem-Tarski ascendente)**.** *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden, $\underline{A}$ un (Σ, Π)-sistema algebraico y $\mathfrak{m}$ un cardinal infinito tal que* $\mathrm{card}(A) \leq \mathfrak{m}$ *y* $\mathrm{card}(\Sigma \coprod \Pi) \leq \mathfrak{m}$. *Entonces $\underline{A}$ tiene una extensión elemental $\underline{B}$ diferente de $\underline{A}$ y tal que* $\mathrm{card}(B) = \mathfrak{m}$.

Proof. Sea $\underline{C}$ una extensión elemental de $\underline{A}$ tal que $\mathrm{card}(C) \geq 2^{\mathfrak{m}}$ y $c \in C - A$. Entonces, en virtud del teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski descendente, sea $\underline{B}$ un subsistema elemental de $\underline{C}$ tal que $\mathrm{card}(B) = \mathfrak{m}$ y $A \cup \{c\} \subseteq B$. Es evidente que $\underline{B}$ cumple las condiciones del teorema. □

La ruptura con la tradición, que arrancó con Aristóteles, en virtud de la cual para el despliegue de cualquier ciencia deductiva es imprescindible que sus conceptos deban ser significativos, se produjo a partir de 1882, por obra del geómetra Pasch. Según este autor el proceso deductivo debe ser independiente del significado de los conceptos y sólo debe retenerse como básico las relaciones que subsistan entre los mismos, expresadas mediante axiomas.

Como Hilbert le comunica a Frege el 29 de Diciembre de 1899:

> Naturalmente, cada teoría es sólo un andamiaje o esquema de conceptos con sus necesarias relaciones mutuas, y los elementos básicos pueden pensarse como se quiera. Si pienso que mis puntos son cualquier sistema de cosas, vgr., el sistema *amor*, *ley*, *deshollinador*, ..., con que luego sólo postule la totalidad de mis axiomas como relaciones entre estas cosas, mis teoremas –el de Pitágoras, por ejemplo– valen también para ellas. En otras palabras: cada teoría puede siempre aplicarse a infinitos sistemas de elementos básicos. Basta aplicar una transformación unívoca inversible y estipular que los axiomas homólogos valen para las transformadas

Definition 44. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Decimos que una teoría T es *completa* si, para cada $\phi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, o bien $\phi \in T$ o bien $\neg\phi \in T$; que T es *consistente* si $\mathrm{Mod}(T) \neq \varnothing$; por último, siendo $\mathfrak{m}$ un cardinal, decimos que T es una teoría $\mathfrak{m}$-*categórica* si, salvo isomorfismo, tiene exactamente un modelo de cardinal $\mathfrak{m}$, i.e., si, para cada $\underline{A}, \underline{B} \in \mathrm{Mod}(T)$, si la cardinalidad de A y B es $\mathfrak{m}$, entonces $\underline{A} \cong \underline{B}$, y que es *categórica* si dos modelos cualesquiera de T son isomorfos.

La teoría de grupos, Grp, no es una teoría completa, porque para la sentencia $\phi = \forall x, y\,(x \cdot y = y \cdot x)$, se cumple que ni $\mathsf{Grp} \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$ ni $\mathsf{Grp} \Vdash_{\mathcal{L}} \neg\phi$, i.e., que tanto $\mathsf{Grp} \cup \{\neg\phi\}$ como $\mathsf{Grp} \cup \{\phi\}$ son consistentes. Sin embargo la teoría de grupos triviales, $\mathsf{Grp} \cup \{\forall x\,(x = 1)\}$, es completa. Porque, por una parte, salvo isomorfismo, el grupo trivial es el único modelo de $\mathsf{Grp} \cup \{\forall x\,(x = 1)\}$ y, por otra, si fuera incompleta, entonces ....

Proposition 122. *Una teoría T es completa si y sólo si dos modelos cualesquiera de T son elementalmente equivalentes.*

Proof. Supongamos que dos modelos cualesquiera de T son elementalmente equivalentes. Si T no fuera completa, existiría un $\phi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$ tal que ni $T \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$ ni $T \Vdash_{\mathcal{L}} \neg\phi$. Luego $T \cup \{\neg\phi\}$ y $T \cup \{\phi\}$ serían teorías consistentes. Por lo tanto, para cada $\underline{A} \in \mathrm{Mod}(T \cup \{\neg\phi\})$ y cada $\underline{B} \in \mathrm{Mod}(T \cup \{\phi\})$, tendríamos que $\underline{A}, \underline{B} \in \mathrm{Mod}(T)$, luego, por la hipótesis, $\underline{A} \equiv \underline{B}$. Pero éso es absurdo, porque $\underline{A} \in \mathrm{Mod}(\{\neg\phi\})$ y $\underline{B} \in \mathrm{Mod}(\{\phi\})$. De modo que T es completa. Recíprocamente, si T es completa y $\underline{A}$, $\underline{B}$ son dos modelos de T, entonces dada $\phi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$ tal que $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi$, se cumple que $\phi \in T$, ya que en caso contrario, por ser T completa, $\neg\phi \in T$, luego $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \neg\phi$, que sería una contradicción. Por lo tanto $\underline{B} \models_{\mathcal{L}} \phi$. De modo que $\underline{A}$ y $\underline{B}$ son elementalmente equivalentes. □

Corollary 26. *Cualquier teoría categórica es completa.*

Proposition 123. *Si una teoría completa tiene un modelo finito, entonces es categórica.*

El test de Łoś-Vaught es otro método para establecer la completud de las teorías.

Theorem 7 (Test de Łoś-Vaught)**.** *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden tal que* $\mathrm{card}(\Sigma \coprod \Pi) = \mathfrak{m}$ *y $\mathfrak{n}$ un cardinal infinito tal que $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$. Si una teoría consistente T es tal que todos sus modelos son infinitos y es $\mathfrak{n}$-categórica, entonces T es completa.*

Proof. Sean $\underline{A}$ y $\underline{B}$ dos modelos de T. Entonces ambos modelos son infinitos y entonces, en virtud de los teoremas de Löwenheim-Skolem-Tarski, existen modelos $\underline{A}'$ y $\underline{B}'$ de T tales que $\underline{A}$ y $\underline{A}'$, así como $\underline{B}$ y $\underline{B}'$, son elementalmenta equivalentes y, además, A' y B' tienen cardinalidad $\mathfrak{n}$. Por lo tanto, al ser T $\mathfrak{n}$-categórica, $\underline{A}'$ y $\underline{B}'$ son isomorfos, luego $\underline{A}$ y $\underline{B}$ son elementalmente equivalentes. □

Usando el test de Łoś-Vaught demostramos que la teoría de los órdenes lineales densos y sin máximo ni mínimo, Dlone, es completa. En primer lugar, cualquier modelo de Dlone es infinito (demuéstrese). Además, en virtud de un teorema de Cantor, Dlone es $\aleph_0$-categórica. Por lo tanto es completa.

Otro modo de demostrar la completud de la teoría Dlone es: Si Dlone no fuera completa, existiría una sentencia ϕ tal que ni $\mathsf{Dlone} \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$ ni $\mathsf{Dlone} \Vdash_{\mathcal{L}} \neg\phi$. Luego $\mathsf{Dlone} \cup \{\neg\phi\}$ y $\mathsf{Dlone} \cup \{\phi\}$ serían teorías consistentes. Por lo tanto, puesto que el conjunto de los símbolos no lógicos, que es $\{\leq\}$, es numerable, en virtud del teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski descendente, existiría un $\underline{A} \in \mathrm{Mod}(T \cup \{\neg\phi\})$ infinito numerable y un $\underline{B} \in \mathrm{Mod}(T \cup \{\phi\})$ infinito numerable. Ahora bien, puesto que Dlone, en virtud de un teorema de Cantor, es $\aleph_0$-categórica, $\underline{A} \cong \underline{B}$. Pero éso es absurdo, porque $\underline{A} \in \mathrm{Mod}(\{\neg\phi\})$ y $\underline{B} \in \mathrm{Mod}(\{\phi\})$.

La teoría de los órdenes lineales densos y sin máximo ni mínimo, como acabamos de ver, es completa pero no es categórica, en el sentido de que dos modelos cualesquiera de tal teoría sean isomorfos. Porque tanto $(Q, \leq)$ como $(R, \leq)$ son modelos de Dlone y, obviamente, $(Q, \leq) \ncong (R, \leq)$.

El conjunto linealmente ordenado $(R, \leq)$ es Dedekind-completo, pero el conjunto linealmente ordenado $(Q, \leq)$, como es bien sabido, no es Dedekind-completo. Esto significa que la Dedekind-completud es una propiedad que distingue a los conjuntos linealmente ordenados $(R, \leq)$ y $(Q, \leq)$. Pero tanto $(R, \leq)$ como $(Q, \leq)$ son modelos de Dlone, y Dlone es una teoría completa, por lo tanto $(R, \leq)$ y $(Q, \leq)$ satisfacen a las mismas sentencias, i.e., son elementalmente equivalentes. En particular, cualquier sentencia, del lenguaje de ambos sistemas relacionales, que exprese la Dedekind-completud debe ser verdadera en los dos modelos o falsa en los dos. De este modo, aparentemente, parece que hemos llegado a una situación contradictoria, porque los conjuntos linealmente ordenados $(R, \leq)$ y $(Q, \leq)$ satisfacen a las mismas sentencias, pero la Dedekind-completud es una propiedad que los distingue. De hecho no hay ninguna contradicción, simplemente porque no hay ninguna sentencia, del lenguaje de ambos sistemas relacionales, que exprese la Dedekind-completud (esta última es una sentencia de segundo orden, no de primer orden).

El test de Łoś-Vaught también puede usarse para demostrar la completud de la teoría de los grupos abelianos divisibles sin torsión y no triviales. Pero antes recordemos algunos de los términos acabados de mencionar.

Definition 45. Sea $\underline{A}$ un grupo abeliano. Decimos que $\underline{A}$ es *divisible* si, para cada $n \in \mathrm{Nat} - 1$, se cumple que:

$$\forall x \in A \, \exists y \in A \, (\, ny = x \,).$$

Obsérvese que la definición del concepto de divisibilidad, para los grupos abelianos, consta de una infinidad numerable de axiomas, uno por cada número natural no nulo.

Definition 46. Sea $\underline{A}$ un grupo abeliano. Decimos que $\underline{A}$ es *aperiódico* o *sin torsión* si, para cada $n \in \mathrm{Nat} - 1$, se cumple que:

$$\forall x \in A \, (\, nx = 0 \rightarrow x = 0 \,).$$

Lo mismo que en el caso anterior, el concepto de carencia de torsión viene determinado por una infinidad numerable de axiomas.

Conviene señalar que los grupos abelianos *periódicos* no se definen como los que no son aperiódicos, i.e., aquellos $\underline{A}$ para los que se cumple que, para al menos un número natural no nulo n, existe un $x \in A$ tal que $x \neq 0$ pero $nx = 0$, sino como los que tienen la propiedad de que, para cada $x \in A$, existe un $n \in \mathrm{Nat} - 1$ tal que $nx = 0$.

Proposition 124. *El grupo abeliano subyacente de cualquier espacio vectorial no trivial sobre el cuerpo de los racionales es divisible y sin torsión. Además, cualquier grupo abeliano divisible sin torsión no trivial es el grupo abeliano subyacente de un espacio vectorial sobre el cuerpo* $\underline{Q}$.

Proof. Sea $\underline{A} = (A, +, -, 0)$ un grupo abeliano divisible sin torsión no trivial. Vamos a definir una acción de $\underline{Q}$ sobre $\underline{A}$, de modo que dote al grupo abeliano $\underline{A}$ de una estructura de $\underline{Q}$-espacio vectorial. Sea $a \in A$ y $q = m/n \in \mathrm{Q}$, con $m \in \mathrm{Z}$ y $n > 0$. Entonces $ma \in A$, por ser $\underline{A}$ grupo abeliano, luego para $n > 0$, por ser $\underline{A}$ divisible, hay un $b \in A$ tal que $nb = ma$. Además, si $c \in A$ fuera tal que $nc = ma$, entonces $n(b - c) = 0$, luego, ya que $n > 0$, por ser $\underline{A}$ sin torsión, $b - c = 0$, i.e., $b = c$. Podemos afirmar, por lo tanto, que hay un único $b \in A$ tal que $nb = ma$. Definimos, en consecuencia, la acción de $q = m/n$ sobre a, como el único $b \in A$ tal que $nb = ma$. Dejamos como ejercicio la demostración de que tal acción dota al grupo abeliano $\underline{A}$ de una estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo $\underline{Q}$. □

Demuéstrese que los grupos abelianos $\underline{R} = (R, +, -, 0)$ y $\underline{Q} = (Q, +, -, 0)$, de los reales y los racionales, resp., son grupos abelianos divisibles sin torsión (y no triviales).

Evidentemente, todos los grupos abelianos divisibles sin torsión y no triviales son infinitos. Además, para cada cardinal $\mathfrak{n}$ tal que $\aleph_0 < \mathfrak{n}$, la teoría de los grupos abelianos divisibles sin torsión y no triviales es $\mathfrak{n}$-categórica. En efecto, si $\underline{A}$ y $\underline{B}$ son dos grupos abelianos divisibles sin torsión y no triviales de cardinal $\mathfrak{n}$, con $\aleph_0 < \mathfrak{n}$, entonces, en tanto que $\underline{Q}$-espacios vectoriales, tienen bases infinitas X e Y, resp. Si $\mathrm{card}(X) = \mathfrak{m}$, entonces, por una parte, $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$, y, por otra $\mathfrak{n} \leq \mathfrak{m}\aleph_0 = \mathfrak{m}$, luego $\mathfrak{n} = \mathrm{card}(X)$. Del mismo modo obtenemos que $\mathfrak{n} = \mathrm{card}(Y)$. Por lo tanto, en tanto que $\underline{Q}$-espacios vectoriales, son isomorfos. De donde, en virtud del test de Łoś-Vaught, podemos afirmar la completud de la teoría de los grupos abelianos divisibles sin torsión y no triviales.

Observemos que entonces los grupos abelianos $\underline{R} = (R, +, -, 0)$ y $\underline{Q} = (Q, +, -, 0)$, por ser grupos abelianos divisibles sin torsión y no triviales, son elementalmente equivalentes, pero no isomorfos.

Por otra parte, la teoría de los grupos abelianos divisibles sin torsión no triviales, no es $\aleph_0$-categórica, debido a que tal teoría tiene (una infinidad de) modelos infinito numerables, que no son isomorfos, por ejemplo, las potencias finitas de $\underline{Q} = (Q, +, -, 0)$, considerado como $\underline{Q}$-espacio vectorial.

Haciendo uso del test de Łoś-Vaught, también se puede demostrar que la teoría de los cuerpos algebraicamente cerrados de característica p, siendo $p = 0$ o un número primo, es completa.

Definition 47. Decimos que un cuerpo $\underline{K}$ es algebraicamente cerrados si, para cada $n \in \mathrm{Nat} - 1$, se cumple que:

$$\forall x_0, \ldots, x_n \in K \, (x_n \neq 0 \rightarrow \exists y \in K \, (x_n y^n + \cdots + x_1 y + x_0 = 0)).$$

Una vez más, observemos que la propiedad de un cuerpo de estar algebraicamente cerrado, viene determinado por una infinidad numerable de axiomas.

Veamos que la teoría de los cuerpos algebraicamente cerrados de característica p, es para cada cardinal $\mathfrak{n}$ tal que $\aleph_0 < \mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}$-categórica.

6.4. **El espacio de los conjuntos axiomatizables minimales.**

Lemma 6. *Sea* $\underline{A}$ *un sistema algebraico y* Φ *un conjunto de fórmulas cerradas tal que* $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi) \subseteq [\underline{A}]_{\equiv}$. *Entonces*

(1) $[\underline{A}]_{\equiv} = \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\underline{A}))$.
(2) $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\underline{A}) \subseteq \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))$.

Proof. □

Proposition 125. *Las clases de equivalencia* $[\underline{A}]_{\equiv} \in \mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})/\equiv$ *son los conjuntos (de sistemas algebraicos) axiomatizables minimales.*

Proof. Puesto que, por el lema 6, $[\underline{A}]_{\equiv} = \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\underline{A}))$, podemos afirmar que $[\underline{A}]_{\equiv}$ es axiomatizable.

Veamos que $[\underline{A}]_{\equiv}$ es minimal. Sea Φ un conjunto de fórmulas cerradas tal que $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi) \subseteq [\underline{A}]_{\equiv}$. Sea $\underline{B}$ un sistema algebraico tal que $\underline{B} \in [\underline{A}]_{\equiv}$, i.e., tal que $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\underline{B}) = \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\underline{A})$ y supongamos que $\underline{B} \notin \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)$. Entonces hay una fórmula cerrada $\phi \in \Phi$ tal que $\phi \notin \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\underline{B})$, por lo tanto $\phi \notin \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\underline{A})$, luego $\neg\phi \in \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\underline{A})$ (porque $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\underline{A})$ es completa). Pero, ya que $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi) \subseteq [\underline{A}]_{\equiv}$, por el lema 6, se cumple que

$$\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\underline{A}) \subseteq \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)),$$

luego $\neg\phi \in \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))$, por lo tanto todo modelo de Φ, que, en particular, lo será de ϕ, es modelo de $\neg\phi$, lo cual es absurdo. De modo que $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi) = [\underline{A}]_{\equiv}$. □

Proposition 126. *El subconjunto* $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$ *de* $\mathrm{Sub}(\mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})/\equiv)$ *definido como:*

$$\mathcal{B}_{\mathcal{L}} = \{\, \mathrm{B}_{\phi} \mid \phi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L}) \,\},$$

siendo, para cada $\phi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, B_{ϕ} *el conjunto definido como:*

$$\mathrm{B}_{\phi} = \{\, [\underline{A}]_{\equiv} \in \mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})/\equiv \mid \underline{A} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\phi) \,\},$$

es una base para una topología sobre $\mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})/\equiv$.

Proof. Es evidente que $\bigcup_{\phi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})} \mathrm{B}_{\phi} \subseteq \mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})/\equiv$. Por otra parte, si $[\underline{A}]_{\equiv} \in \mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})/\equiv$, entonces $[\underline{A}]_{\equiv} \in \mathrm{B}_{\phi}$, siendo ϕ cualquier fórmula cerrada de $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\underline{A})$.

Por último, si $[\underline{A}]_{\equiv} \in \mathrm{B}_{\phi} \cap \mathrm{B}_{\psi}$, entonces $[\underline{A}]_{\equiv} \in \mathrm{B}_{\phi \wedge \psi} \subseteq \mathrm{B}_{\phi} \cap \mathrm{B}_{\psi}$. □

Proposition 127. *El espacio topológico* $(\mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})/\equiv, \mathrm{Tg}_X(\mathcal{B}_{\mathcal{L}}))$ *es Hausdorff, compacto y cero-dimensional, luego* totalmente desconectado, *i.e., las componentes conexas son puntuales, y normal.*

Proof. □

Demuéstrese que los cerrados de $(\mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})/\equiv, \mathrm{Tg}_X(\mathcal{B}_{\mathcal{L}}))$ son precisamente los subconjuntos de $\mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})/\equiv$ que se pueden representar, para algún conjunto de fórmulas cerradas Φ, como $\mathrm{B}_{\Phi} = \{\, [\underline{A}]_{\equiv} \mid \underline{A} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi) \,\}$.

Ahora establecemos un teorema de Taimanov([**?**]) de caracterización del operador clausura del espacio topológico $(\mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})/\equiv, \mathrm{Tg}_X(\mathcal{B}_{\mathcal{L}}))$, mediante el concepto de ultraproducto.

Theorem 8 (Taimanov)**.** *Sea* $\underline{A}$ *un sistema algebraico y* $\{\, [\underline{A}_{\lambda}]_{\equiv} \mid \lambda \in \Lambda \,\}$ *un subconjunto de* $\mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})/\equiv$. *Entonces* $[\underline{A}]_{\equiv} \in \overline{\{\, [\underline{A}_{\lambda}]_{\equiv} \mid \lambda \in \Lambda \,\}}$ *precisamente si hay un conjunto* I, *una familia* $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ *de sistemas algebraicos en* $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} [\underline{A}_{\lambda}]_{\equiv}$ *y un ultrafiltro* $\mathcal{F}$ *sobre* I *tal que* $\underline{A} \equiv \prod_{i \in I} \underline{A}_i / \equiv_{\mathcal{F}}$.

Proof. Veamos en primer lugar que $[\underline{A}]_{\equiv} \in \overline{\{\, [\underline{A}_{\lambda}]_{\equiv} \mid \lambda \in \Lambda \,\}}$ exactamente si, para cada $\phi \in \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} [\underline{A}_{\lambda}]_{\equiv})$, $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi$ o, lo que es equivalente, si, para cada $\phi \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\underline{A}_{\lambda})$, $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi$, ya que se cumple que

$$\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} [\underline{A}_{\lambda}]_{\equiv}) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\underline{A}_{\lambda}).$$

Supongamos que, para cada $\phi \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\underline{A}_\lambda)$, $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi$. Entonces, para cualquier conjunto de fórmulas cerradas Φ, si $\{\, [\underline{A}_\lambda]_\equiv \mid \lambda \in \Lambda \,\} \subseteq \mathrm{B}_\Phi$, tenemos que, para cada $\lambda \in \Lambda$, $[\underline{A}_\lambda]_\equiv \in \mathrm{B}_\Phi$, luego, para cada $\lambda \in \Lambda$, $\underline{A}_\lambda \models_{\mathcal{L}} \Phi$, así que, para cada $\lambda \in \Lambda$, $\Phi \subseteq \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\underline{A}_\lambda)$, i.e., $\Phi \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\underline{A}_\lambda)$, por consiguiente $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \Phi$, de modo que $[\underline{A}]_\equiv \in \mathrm{B}_\Phi$ y, por lo tanto, $[\underline{A}]_\equiv \in \overline{\{\, [\underline{A}_\lambda]_\equiv \mid \lambda \in \Lambda \,\}}$. Recíprocamente, supongamos que $[\underline{A}]_\equiv$ esté en la clausura de $\{\, [\underline{A}_\lambda]_\equiv \mid \lambda \in \Lambda \,\}$. Si existiera un $\phi \in \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}[\underline{A}_\lambda]_\equiv)$ tal que $\underline{A} \notin \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\phi)$, entonces $[\underline{A}]_\equiv$ no estaría en la clausura de $\{\, [\underline{A}_\lambda]_\equiv \mid \lambda \in \Lambda \,\}$, porque, para el cerrado B_ϕ se cumpliría que $[\underline{A}]_\equiv \notin \mathrm{B}_\phi$, pero que $\{\, [\underline{A}_\lambda]_\equiv \mid \lambda \in \Lambda \,\} \subseteq \mathrm{B}_\phi$. Por lo tanto, para cada $\phi \in \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}[\underline{A}_\lambda]_\equiv)$, $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi$.

Ahora que ya sabemos que $[\underline{A}]_\equiv \in \overline{\{\, [\underline{A}_\lambda]_\equiv \mid \lambda \in \Lambda \,\}}$ si y sólo si para cada $\phi \in \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}[\underline{A}_\lambda]_\equiv)$, $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi$, si existiera un conjunto I, una familia $(\underline{A}_i \mid i \in I)$ de sistemas algebraicos en $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}[\underline{A}_\lambda]_\equiv$ y un ultrafiltro $\mathcal{F}$ sobre I tal que $\underline{A} \equiv \prod_{i\in I} \underline{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}}$, entonces, en virtud del teorema de Łoś, $[\underline{A}]_\equiv \in \overline{\{\, [\underline{A}_\lambda]_\equiv \mid \lambda \in \Lambda \,\}}$.

Recíprocamente, sea $[\underline{A}]_\equiv \in \overline{\{\, [\underline{A}_\lambda]_\equiv \mid \lambda \in \Lambda \,\}}$ y elijamos un sistema algebraico $\underline{A}_\lambda$ en cada clase de equivalencia de $\{\, [\underline{A}_\lambda]_\equiv \mid \lambda \in \Lambda \,\}$. Puesto que para cada $\phi \in \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}[\underline{A}_\lambda]_\equiv)$, $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi$, para cualquier fórmula cerrada ψ válida en $\underline{A}$, existe un $\underline{B} \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda}[\underline{A}_\lambda]_\equiv$ tal que $\underline{B} \models_{\mathcal{L}} \psi$ (porque sino, i.e., si existiera una fórmula cerrada ψ tal que $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \psi$ pero, para cada $\underline{B} \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda}[\underline{A}_\lambda]_\equiv$, $\underline{B} \not\models_{\mathcal{L}} \psi$, entonces, para cada $\underline{B} \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda}[\underline{A}_\lambda]_\equiv$, $\underline{B} \models_{\mathcal{L}} \neg\phi$, luego $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \neg\phi$, absurdo). Para cada $[\psi]_\approx \in \mathrm{LT}(\mathcal{L})$ tal que $\underline{A} \models_{\mathcal{L}} \psi$, sea $E_{[\psi]_\approx} = \{\, \lambda \in \Lambda \mid \underline{A}_\lambda \models_{\mathcal{L}} \psi \,\}$. Entonces $E_{[\psi]_\approx} \neq \varnothing$, porque para cualquier fórmula cerrada ψ válida en $\underline{A}$, existe un $\underline{B} \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda}[\underline{A}_\lambda]_\equiv$ tal que $\underline{B} \models_{\mathcal{L}} \psi$; y $E_{[\psi]_\approx} \cap E_{[\xi]_\approx} = E_{[\psi\wedge\xi]_\approx}$. Por lo tanto hay un ultrafiltro $\mathcal{F}$ sobre Λ que contiene a todos los conjuntos de la forma $E_{[\psi]_\approx}$, cuando ψ recorre el conjunto de las fórmulas cerradas. Se cumple que $\underline{A} \equiv \prod_{\lambda\in\Lambda} \underline{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}}$ □

6.5. **Relaciones entre límites inductivos y ultraproductos.**

Lemma 7. *Sea $\underline{I} = (I, \leq)$ un conjunto preordenado dirigido superiormente, $\mathcal{F}$ un ultrafiltro sobre I tal que, para cada $i \in I$, $J_i = \Uparrow_{\leq} i \in \mathcal{F}$ y $\underline{\mathcal{A}}$ un $\underline{I}$-sistema inductivo de sistemas algebraicos. Entonces, para cada $i \in I$, hay un único homomorfismo $\widetilde{a}_i \colon \underline{A}_i \longrightarrow \prod_{i\in I} \underline{A}_i/\mathcal{F}$ tal que, para cada $i, k \in I$, si $i \leq k$, entonces el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \underline{A}_i \arrow[rr, "a_{i,k}"] \arrow[dr, "\widetilde{a}_i"'] & & \underline{A}_k \arrow[dl, "\widetilde{a}_k"] \\ & \prod_{i\in I} \underline{A}_i/\mathcal{F} & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Proof. Es suficiente que tomemos como $\widetilde{a}_i \colon \underline{A}_i \longrightarrow \prod_{i\in I} \underline{A}_i/\mathcal{F}$ la composición de los homomorfismos:

$$\underline{A}_i \xrightarrow{\langle f_{i,j} \mid j \in J_i\rangle} \prod_{j\in J_i} \underline{A}_j \xrightarrow{\mathrm{pr}_{\mathcal{F}\restriction J_i}} \prod_{j\in J_i} \underline{A}_j/\mathcal{F}\restriction J_i \xrightarrow{u_{J_i}^{-1}} \prod_{i\in I} \underline{A}_i/\mathcal{F},$$

siendo $\langle f_{i,j} \mid j \in J_i\rangle$ el único homomorfismo de $\underline{A}_i$ en $\prod_{j\in J_i} \underline{A}_j$ tal que, para cada $j \in J_i$, $\mathrm{pr}_j \circ \langle f_{i,j} \mid j \in J_i\rangle = a_{i,j}$, $\mathrm{pr}_{\mathcal{F}\restriction J_i}$ la proyección canónica y $u_{J_i}^{-1}$ el inverso del isomorfismo canónico de la proposición 99. Para estos homomorfismos se cumple que, para cada $i, k \in I$, con $i \leq k$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}_i \arrow[rr, "a_{i,k}"] \arrow[dr, "\widetilde{a}_i"'] & & \underline{A}_k \arrow[dl, "\widetilde{a}_k"] \\
& \prod_{i \in I} \underline{A}_i / \mathcal{F} &
\end{tikzcd}$$

conmuta, precisamente porque el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}_i \arrow[r, "\langle a_{i,j} \mid j \in J_i \rangle"] \arrow[d, "a_{i,k}"'] & \prod_{j \in J_i} \underline{A}_j \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathcal{F} \restriction J_i}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{J_i, J_k}"'] & \prod_{j \in J_i} \underline{A}_j / \mathcal{F} \restriction J_i \arrow[d, "\mathrm{pr}_{\mathcal{F} \restriction J_i, \mathcal{F} \restriction J_k}"'] \arrow[dr, "u_{J_i}^{-1}"] & \\
\underline{A}_k \arrow[r, "\langle a_{k,l} \mid l \in J_k \rangle"'] & \prod_{l \in J_k} \underline{A}_l \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathcal{F} \restriction J_k}"'] & \prod_{l \in J_k} \underline{A}_l / \mathcal{F} \restriction J_k \arrow[r, "u_{J_k}^{-1}"'] & \prod_{i \in I} \underline{A}_i / \mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

conmuta. $\square$

Corollary 27. *Sea $\underline{I} = (I, \leq)$ un conjunto preordenado dirigido superiormente, $\mathcal{F}$ un ultrafiltro sobre I tal que, para cada $i \in I$, $J_i = \Uparrow_{\leq} i \in \mathcal{F}$, A un conjunto de sistemas algebraicos cerrado bajo isomorfismos y bajo ultraproductos y $\underline{\mathcal{A}}$ un $\underline{I}$-sistema inductivo de sistemas algebraicos en A. Si existe el límite inductivo $(\varinjlim_{\mathsf{A}} \underline{\mathcal{A}}, (a_{\mathsf{A},i} \mid i \in I))$ de $\underline{\mathcal{A}}$ en A, entonces hay un único homomorfismo $a_{\mathsf{A},\underline{\mathcal{A}},\mathcal{F}} \colon \varinjlim_{\mathsf{A}} \underline{\mathcal{A}} \longrightarrow \prod_{i \in I} \underline{A}_i / \mathcal{F}$ tal que, para cada $i \in I$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}_i \arrow[r, "a_{\mathsf{A},i}"] \arrow[dr, "\widetilde{a}_i"'] & \varinjlim_{\mathsf{A}} \underline{\mathcal{A}} \arrow[d, "a_{\mathsf{A},\underline{\mathcal{A}},\mathcal{F}}"] \\
& \prod_{i \in I} \underline{A}_i / \mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

conmuta. Además, si $\underline{\mathcal{B}}$ es otro $\underline{I}$-sistema inductivo de sistemas algebraicos en A para el que también existe el límite inductivo $(\varinjlim_{\mathsf{A}} \underline{\mathcal{B}}, (b_{\mathsf{A},i} \mid i \in I))$ en A y $f \colon \underline{\mathcal{A}} \longrightarrow \underline{\mathcal{B}}$ es un morfismo inductivo, entonces el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim_{\mathsf{A}} \underline{\mathcal{A}} \arrow[r, "a_{\mathsf{A},\underline{\mathcal{A}},\mathcal{F}}"] \arrow[d, "\varinjlim_{\mathsf{A}} f"'] & \prod_{i \in I} \underline{A}_i / \mathcal{F} \arrow[d, "\prod_{i \in I} f_i / \mathcal{F}"] \\
\varinjlim_{\mathsf{A}} \underline{\mathcal{B}} \arrow[r, "a_{\mathsf{A},\underline{\mathcal{B}},\mathcal{F}}"'] & \prod_{i \in I} \underline{B}_i / \mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Proof. Porque, para cada $i \in I$, el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\underline{A}_i \arrow[rrr, "f_i"] \arrow[dr, "a_{\mathsf{A},i}"] \arrow[ddr, swap, "\widetilde{a}_i"] & & & \underline{B}_i \arrow[dl, swap, "b_{\mathsf{A},i}"] \arrow[ddl, "\widetilde{b}_i"] \\
& \varinjlim_{\mathsf{A}} \underline{\mathcal{A}} \arrow[r, "\varinjlim_{\mathsf{A}} f"] \arrow[d, "a_{\mathsf{A},\underline{\mathcal{A}},\mathcal{F}}"] & \varinjlim_{\mathsf{A}} \underline{\mathcal{B}} \arrow[d, swap, "a_{\mathsf{A},\underline{\mathcal{B}},\mathcal{F}}"] & \\
& \prod_{i\in I} \underline{A}_i/\mathcal{F} \arrow[r, swap, "\prod_{i\in I} f_i/\mathcal{F}"] & \prod_{i\in I} \underline{B}_i/\mathcal{F} &
\end{tikzcd}
$$

conmuta. □

Proposition 128. *Sea $\underline{I} = (I, \leq)$ un conjunto preordenado dirigido superiormente, $\mathcal{F}$ un ultrafiltro sobre I tal que, para cada $i \in I$, $J_i = \Uparrow_{\leq} i \in \mathcal{F}$, A un conjunto de sistemas algebraicos cerrado bajo isomorfismos y bajo ultraproductos, $\underline{\mathcal{A}}$, $\underline{\mathcal{B}}$ dos $\underline{I}$-sistemas inductivos de sistemas algebraicos en A y $f \colon \underline{\mathcal{A}} \longrightarrow \underline{\mathcal{B}}$ un morfismo inductivo. Si existen los límites inductivos de ambos sistemas inductivos en A, entonces, aplicando el functor de formación de ultraproductos a los homomorfismos $a_{\mathsf{A},i} \colon \underline{A}_i \longrightarrow \varinjlim_{\mathsf{A}} \underline{\mathcal{A}}$ y $b_{\mathsf{A},i} \colon \underline{B}_i \longrightarrow \varinjlim_{\mathsf{A}} \underline{\mathcal{B}}$, obtenemos el diagrama conmutativo:*

$$
\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I} \underline{A}_i/\mathcal{F} \arrow[r, "\prod_{i\in I} a_{\mathsf{A},i}/\mathcal{F}"] \arrow[d, swap, "\prod_{i\in I} f_i/\mathcal{F}"] & (\varinjlim_{\mathsf{A}} \underline{\mathcal{A}})^I/\mathcal{F} \arrow[d, "(\varinjlim_{\mathsf{A}} f)^I/\mathcal{F}"] \\
\prod_{i\in I} \underline{B}_i/\mathcal{F} \arrow[r, swap, "\prod_{i\in I} b_{\mathsf{A},i}/\mathcal{F}"] & (\varinjlim_{\mathsf{A}} \underline{\mathcal{B}})^I/\mathcal{F}.
\end{tikzcd}
$$

Proof. □

Proposition 129. *Si $\delta_{\mathsf{A},\underline{\mathcal{A}},\mathcal{F}} \colon \varinjlim_{\mathsf{A}} \underline{\mathcal{A}} \longrightarrow (\varinjlim_{\mathsf{A}} \underline{\mathcal{A}})^I/\mathcal{F}$ es el encajamiento canónico, entonces el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
\varinjlim_{\mathsf{A}} \underline{\mathcal{A}} \arrow[r, "a_{\mathsf{A},\underline{\mathcal{A}},\mathcal{F}}"] \arrow[dr, swap, "\delta_{\mathsf{A},\underline{\mathcal{A}},\mathcal{F}}"] & \prod_{i\in I} \underline{A}_i/\mathcal{F} \arrow[d, "\prod_{i\in I} a_{\mathsf{A},i}/\mathcal{F}"] \\
& (\varinjlim_{\mathsf{A}} \underline{\mathcal{A}})^I/\mathcal{F}
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Además, el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\varinjlim_{\mathsf{A}} \underline{\mathcal{A}} \arrow[r, "a_{\mathsf{A},\mathcal{A},\mathcal{F}}"] \arrow[d, "\varinjlim_{\mathsf{A}} f"'] \arrow[rr, bend left, "\delta_{\mathsf{A},\underline{\mathcal{A}},\mathcal{F}}"] & \prod_{i\in I} \underline{A}_i/\mathcal{F} \arrow[r, "\prod_{i\in I} a_{\mathsf{A},i}/\mathcal{F}"] \arrow[d, "\prod_{i\in I} f_i/\mathcal{F}"'] & (\varinjlim_{\mathsf{A}} \underline{\mathcal{A}})^I/\mathcal{F} \arrow[d, "(\varinjlim_{\mathsf{A}} f)^I/\mathcal{F}"] \\
\varinjlim_{\mathsf{A}} \underline{\mathcal{B}} \arrow[r, "a_{\mathsf{A},\mathcal{B},\mathcal{F}}"'] \arrow[rr, bend right, "\delta_{\mathsf{A},\underline{\mathcal{B}},\mathcal{F}}"'] & \prod_{i\in I} \underline{B}_i/\mathcal{F} \arrow[r, "\prod_{i\in I} b_{\mathsf{A},i}/\mathcal{F}"'] & (\varinjlim_{\mathsf{A}} \underline{\mathcal{B}})^I/\mathcal{F}.
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Por consiguiente, ya que $\delta_{\mathsf{A},\underline{\mathcal{A}},\mathcal{F}}$ es un encajamiento, también $a_{\mathsf{A},\mathcal{A},\mathcal{F}}$ lo es.

Proof. □

Proposition 130. *Si $(\varinjlim \underline{\mathcal{A}}, (a_i \mid i \in I))$ es el límite inductivo de $\underline{\mathcal{A}}$ en $\mathsf{SAlg}(\underline{\Sigma}, \underline{\Pi})$, entonces hay dos homomorfismos $h\colon \varinjlim \underline{\mathcal{A}} \longrightarrow \varinjlim_{\mathsf{A}} \underline{\mathcal{A}}$ y $a_{\underline{\mathcal{A}},\mathcal{F}}\colon \varinjlim \underline{\mathcal{A}} \longrightarrow \prod_{i\in I} \underline{A}_i/\mathcal{F}$, unívocamente determinados, tales que, para cada $i \in I$, los diagramas:*

$$
\begin{tikzcd}
\underline{A}_i \arrow[r, "a_i"] \arrow[dr, "a_{\mathsf{A},i}"'] & \varinjlim \underline{\mathcal{A}} \arrow[d, "h"] \\
& \varinjlim_{\mathsf{A}} \underline{\mathcal{A}}
\end{tikzcd}
\quad y \quad
\begin{tikzcd}
\underline{A}_i \arrow[r, "a_i"] \arrow[dr, "\widetilde{a}_i"'] & \varinjlim \underline{\mathcal{A}} \arrow[d, "a_{\underline{\mathcal{A}},\mathcal{F}}"] \\
& \prod_{i\in I} \underline{A}_i/\mathcal{F}
\end{tikzcd}
$$

conmutan.

Por último, si convenimos que $\underline{L} = \varinjlim \underline{\mathcal{A}}$ *y* $\underline{L}_{\mathsf{A}} = \varinjlim_{\mathsf{A}} \underline{\mathcal{A}}$*, entonces los diagramas:*

$$\begin{tikzcd}
& \underline{L} \arrow[d, "a_{\underline{\mathcal{A}},\mathcal{F}}"] \arrow[ddl, bend right, "h"'] \arrow[dddr, bend left, "\delta_{\underline{\mathcal{A}},\mathcal{F}}"] & \\
& \prod_{i\in I}\underline{A}_i/\mathcal{F} \arrow[ddr, "\prod_{i\in I} a_i/\mathcal{F}"] \arrow[dddr, bend right, "\prod_{i\in I} a_{\mathsf{A},i}/\mathcal{F}"'] & \\
\underline{L}_{\mathsf{A}} \arrow[ur, "a_{\mathsf{A},\underline{\mathcal{A}},\mathcal{F}}"] \arrow[ddrr, bend right, "\delta_{\mathsf{A},\underline{\mathcal{A}},\mathcal{F}}"'] & & \\
& & \underline{L}^I/\mathcal{F} \arrow[d, "h^I/\mathcal{F}"] \\
& & (\underline{L}_{\mathsf{A}})^I/\mathcal{F}
\end{tikzcd}
\quad y \quad
\begin{tikzcd}
& \underline{L}^I/\mathcal{F} \arrow[d, "(a_{\underline{\mathcal{A}},\mathcal{F}})^I/\mathcal{F}"] \arrow[ddl, bend right, "h^I/\mathcal{F}"'] \arrow[dddr, bend left, "(\delta_{\underline{\mathcal{A}},\mathcal{F}})^I/\mathcal{F}"] & \\
& (\prod_{i\in I}\underline{A}_i/\mathcal{F})^I/\mathcal{F} \arrow[ddr, "(\prod_{i\in I} a_i/\mathcal{F})^I/\mathcal{F}"] \arrow[dddr, bend right, "(\prod_{i\in I} a_{\mathsf{A},i}/\mathcal{F})^I/\mathcal{F}"'] & \\
(\underline{L}_{\mathsf{A}})^I/\mathcal{F} \arrow[ur, "(a_{\mathsf{A},\underline{\mathcal{A}},\mathcal{F}})^I/\mathcal{F}"] \arrow[ddrr, bend right, "(\delta_{\mathsf{A},\underline{\mathcal{A}},\mathcal{F}})^I/\mathcal{F}"'] & & \\
& & (\underline{L}^I/\mathcal{F})^I/\mathcal{F} \arrow[d, "(h^I/\mathcal{F})^I/\mathcal{F}"] \\
& & ((\underline{L}_{\mathsf{A}})^I/\mathcal{F})^I/\mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

conmutan y los dos están conectados mediante el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& \underline{L} \arrow[rrr] \arrow[d, "a_{\underline{\mathcal{A}},\mathcal{F}}"] \arrow[ddl, bend right, "h"'] \arrow[dddr, bend left, "\delta_{\underline{\mathcal{A}},\mathcal{F}}"] & & & \underline{L}^I/\mathcal{F} \arrow[d, "(a_{\underline{\mathcal{A}},\mathcal{F}})^I/\mathcal{F}"] \arrow[ddl, bend right, "h^I/\mathcal{F}"'] \arrow[dddr, bend left, "(\delta_{\underline{\mathcal{A}},\mathcal{F}})^I/\mathcal{F}"] & \\
& \prod_{i\in I}\underline{A}_i/\mathcal{F} \arrow[rrr] \arrow[ddr, "\prod_{i\in I} a_i/\mathcal{F}"] \arrow[dddr, bend right, "\prod_{i\in I} a_{\mathsf{A},i}/\mathcal{F}"'] & & & (\prod_{i\in I}\underline{A}_i/\mathcal{F})^I/\mathcal{F} \arrow[ddr, "(\prod_{i\in I} a_i/\mathcal{F})^I/\mathcal{F}"] \arrow[dddr, bend right, "(\prod_{i\in I} a_{\mathsf{A},i}/\mathcal{F})^I/\mathcal{F}"'] & \\
\underline{L}_{\mathsf{A}} \arrow[rrr] \arrow[ur, "a_{\mathsf{A},\underline{\mathcal{A}},\mathcal{F}}"] \arrow[ddrr, bend right, "\delta_{\mathsf{A},\underline{\mathcal{A}},\mathcal{F}}"'] & & & (\underline{L}_{\mathsf{A}})^I/\mathcal{F} \arrow[ur, "(a_{\mathsf{A},\underline{\mathcal{A}},\mathcal{F}})^I/\mathcal{F}"] \arrow[ddrr, bend right, "(\delta_{\mathsf{A},\underline{\mathcal{A}},\mathcal{F}})^I/\mathcal{F}"'] & & \\
& & \underline{L}^I/\mathcal{F} \arrow[rrr] \arrow[d, "h^I/\mathcal{F}"] & & & (\underline{L}^I/\mathcal{F})^I/\mathcal{F} \arrow[d, "(h^I/\mathcal{F})^I/\mathcal{F}"] \\
& & (\underline{L}_{\mathsf{A}})^I/\mathcal{F} \arrow[rrr] & & & ((\underline{L}_{\mathsf{A}})^I/\mathcal{F})^I/\mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

en el que los homomorfismos horizontales son los encajamientos canónicos.

Si aplicamos una infinidad numerable de veces el último procedimiento, obtenemos un $(\mathrm{N}, \leq)$-sistema inductivo dirigido superiormente:

$$\underline{\mathcal{A}}^\natural = ((\underline{A}^\natural_n \mid n \in \mathrm{N}), (a^\natural_{n,n+1} \mid n \in \mathrm{N})),$$

en el que los $\underline{A}^\natural_n$ y los $a^\natural_{n,n+1}$ están definidos, por recursión como:

$$\underline{A}^\natural_0 = \underline{L}, \quad \underline{A}^\natural_1 = \underline{L}_{\mathsf{A}}, \quad \underline{A}^\natural_2 = \prod_{i\in I} \underline{A}_i/\mathcal{F}, \quad n \geq 3,\ \underline{A}^\natural_n = (\prod_{i\in I} \underline{A}^\natural_{n-3}/\mathcal{F})^I/\mathcal{F};$$

$$a^\natural_{0,1} = h, \quad a^\natural_{1,2} = a_{\mathsf{A},\underline{\mathcal{A}},\mathcal{F}}, \quad a^\natural_{2,3} = \prod_{i\in I} a_i/\mathcal{F}, \quad n \geq 3,\ a^\natural_{n,n+1} = (a^\natural_{n-3,n-2})^I/\mathcal{F}.$$

Puesto que $J_0 = \{\, 3n \mid n \in \mathrm{N} \,\}$, $J_1 = \{\, 3n+1 \mid n \in \mathrm{N} \,\}$ y $J_2 = \{\, 3n+2 \mid n \in \mathrm{N} \,\}$ son subconjuntos cofinales de $(\mathrm{N}, \leq)$, los subsistemas inductivos de $\underline{\mathcal{A}}^{\natural}$, obtenidos por restricción, tienen el mismo límite inductivo que $\underline{\mathcal{A}}^{\natural}$, si es que existe.

Theorem 9 (Richter). *Sea* A *un conjunto de sistemas algebraicos axiomatizable. Entonces se cumple que:*

(1) *Si existe* $\varinjlim_{\mathsf{A}} \underline{\mathcal{A}}$*, entonces es isomorfo a* $\varinjlim \underline{\mathcal{A}}$*.*
(2) *Cada límite inductivo dirigido superiormente de* A *es un subsistema elemental de un ultralímite de* A*, por lo tanto de* A *está cerrado bajo la formación límites inductivos dirigidos superiormente precisamente si está cerrado bajo la formación de ultralímites.*

7. La dualidad de Makkai

> The most interesting phenomena in model theory are conclusions concerning the syntactical structure of a first order theory drawn from the examination of the models of the theory. With these phenomena in mind, it is natural to ask if it is possible to endow the collection of models of the theory with a natural abstract structure so that from the resulting entity one can fully recover the theory as a syntactical structure.
>
> *M. Makkai.*

La teoría de la dualidad de Makkai para la lógica de primer orden hace uso, para su formulación, de la teoría de categorías. De hecho, las categorías hacen su aparición en la teoría de Makkai, de tres maneras:

(1) A las teorías de primer orden se les asocian categorías (pretopoi).
(2) Los modelos de una teoría, junto con los encajamientos elementales entre ellos, constituyen una categoría a la que se dota de una estructura adicional derivada de los ultraproductos, obteniéndose una ultracategoría de modelos.
(3) Los pretopoi por una parte, y las ultracategorías por otra, son 2-categorías, y el resultado fundamental de Makkai se establece en términos de una comparación entre esas 2-categorías.

A una teoría T le asociamos la categoría $\mathbf{Mod}(T)$ de los modelos de T y encajamientos elementales de un modelo de T en otro de la misma teoría. Por otra parte, cada fórmula $\phi \in T$ da lugar a un functor $[\phi]\colon \mathbf{Mod}(T) \longrightarrow \mathbf{Set}$ que a cada modelo $\underline{A}$ de T le asigna $\phi^{\underline{A}}$, la extensión de ϕ en $\underline{A}$, i.e., $\{\, x \in A^{\mathrm{N}} \mid \underline{A} \models_{\mathcal{L}} \phi[x] \,\}$, y a cada encajamiento elemental f de un modelo $\underline{A}$ de T en otro $\underline{B}$, la aplicación ϕ^{f} de $\phi^{\underline{A}}$ en $\phi^{\underline{B}}$ que a un x del primero le asigna $f^{\mathrm{N}}(x)$. A los functores de $\mathbf{Mod}(T)$ en $\mathbf{Set}$ de la forma $[\phi]$ los llamamos, siguiendo a Makkai, *standard*.

Lo que se pretende es encontrar propiedades de los functores de $\mathbf{Mod}(T)$ en $\mathbf{Set}$ que sean característicos de los functores standard. a tal fin, recordemos que en virtud del teorema de Łoś, la categoría $\mathbf{Mod}(T)$ está cerrada bajo ultraproductos y los functores standard los preservan, al menos salvo isomorfismo, i.e., existe un isomorfismo functorial entre dos functores.

There are canonically defined maps between various ultraproducts. a general notion of such canonical maps, called ultramorphisms, is the main new concept. standard functors are readily seen to preserve ultramorphisms . The main part of the content of the main result is that the structure preserving functors from $\mathbf{Mod}(T)$ to $\mathbf{Set}$, with respect to all the aforementioned structure put on $\mathbf{Mod}(T)$ and $\mathbf{Set}$, will be essentially just the standard ones.

There does not seem to be any way of organizing the models of a theory into an abstract structure other than introducing a category of models, possibly with additional structure. Once we have introduced categories on this level, we are stuck with them and theories necessarily have to be identified with categories. In short, categorical logic seems inevitable.

Definition 48. Un *pretopos* es una categoría $\mathbf{T}$ que cumple las siguientes condiciones:

(1) La categoría $\mathbf{T}$ tiene límites proyectivos finitos.
(2) La categoría $\mathbf{T}$ tiene un objeto inicial estricto 0, i.e., el objeto 0 es inicial y cualquier morfismo desde un objeto de $\mathbf{T}$ hasta 0 es un isomorfismo.
(3) La categoría $\mathbf{T}$ tiene sumas disjuntas estables de cualquier par de objetos. Una suma disjunta $A \amalg B$ de dos objetos A, B es un coproducto de A y B tal que los morfismos canónicos $i_0\colon A \longrightarrow A \amalg B$ e $i_1\colon B \longrightarrow A \amalg B$ son monomorfismos y en el producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "i_1"] \\ A \arrow[r, "i_0"'] & A \amalg B, \end{tikzcd}$$

$C \cong 0$; además, si en el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & & B' \arrow[dl, "i'_1"'] \arrow[dd, "v"] \\ A' \arrow[r, "i'_0"] \arrow[d, "u"'] & C' \arrow[d, "w"] & \\ A \arrow[r, "i_0"'] & A \amalg B & B \arrow[l, "i_1"] \end{tikzcd}$$

los dos cuadrados son productos fibrados, entonces C' junto con i'_0 e i'_1 es una suma disjunta de A' y B'.

La categoría $\mathbf{Set}$ es un pretopos, el pretopos standard; también lo es cualquier potencia cartesiana $\mathbf{Set}^I$ así como cualquier subcategoría de estas que esté cerrada bajo las operaciones del pretopos. A tales categorías, así como a las isomorfas a ellas, las llamamos pretopoi representables.

Theorem 10 (Gödel-Deligne-Joyal)**.** *Cualquier pretopos pequeño es representable.*

Hay una correspondencia, esencialmente, biunívoca entre teorías de primer orden y pretopoi. Los modelos de una teoría corresponden a los functores elementales del pretopos correspondiente hasta $\mathbf{Set}$, y de hecho, los functores elementales, en general, corresponden a interpretaciones convenientemente definidas. El pretopos correspondiente a una teoría se obtiene sintácticamente, en gran medida, del mismo modo que el álgebra de Lindenbaum-Tarski de la teoría. Una vez establecidas estas traducciones, elteorema de representación es equivalente al teorema de completud de Gödel.

Definition 49. Una *pre-ultracategoría* es una categoría $\mathbf{S}$ junto conun functor $[\mathcal{U}]\colon \mathbf{S}^I \longrightarrow \mathbf{S}$, para cada espacio ultrafiltrado $(I,\mathcal{U})$.

Definition 50. Un *pre-ultrafunctor* de una pre-ultracategoría $\mathbf{C}$ en otra $\mathbf{C}'$ es un functor $X\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}'$, junto con un isomorfismo functorial $[X,\mathcal{U}]\colon X \circ [\mathcal{U}] \longrightarrow [\mathcal{U}] \circ X^I$, por cada espacio ultrafiltrado $(I,\mathcal{U})$.

Definition 51. A *partial* 2-category $\mathcal{K}$ is given by the following data:

(1) A set K_0 of objects or 0-cells $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, ...
(2) A set K_1 of morphisms or 1-cells F, G, ...
(3) A set K_2 of 2-cells α, β, ...
(4) A family $(\mathrm{In}_F \mid F \in K_1)$ in K_1.
(5) For every $\mathcal{C} \in K_0$, a subset $\mathrm{I}_\mathcal{C}$ of K_1.
(6) For every $\mathcal{C} \in K_0$, a subset $\Lambda_\mathcal{C}$ of K_2.

These data are required to satisfy the following conditions:

(1) $K_1 = \bigcup_{\mathcal{C},\mathcal{D}\in K_0} \mathrm{H}_{0,1}(\mathcal{C},\mathcal{D})$, where the sets $\mathrm{H}_{0,1}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ are mutually disjoint.
(2) The objects in K_0 together with the 1-cells in K_1 form a category $\mathcal{K}_{0,1}$, called the *underlying category* of $\mathcal{K}$, under the operations

$$\circ_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E}} \colon \mathrm{H}_{0,1}(\mathcal{D},\mathcal{E}) \times \mathrm{H}_{0,1}(\mathcal{C},\mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{H}_{0,1}(\mathcal{C},\mathcal{E})$$

of *composition* of 1-cells, with identities $\mathrm{Id}_\mathcal{C} \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$.
(3) For every $F \in K_1$, if $F \in \mathrm{H}_{0,1}(\mathcal{C},\mathcal{D})$, then $\mathrm{In}_F \in \mathrm{H}_{0,1}(\mathcal{C},\mathcal{C})$ and $F = F \circ \mathrm{In}_F$.
(4) For every $\mathcal{C} \in K_0$, we have that:
  (a) $\mathrm{I}_\mathcal{C} \subseteq \mathrm{H}_{0,1}(\mathcal{C},\mathcal{C})$.
  (b) $(\mathrm{I}_\mathcal{C}, \circ_{\mathcal{C},\mathcal{C},\mathcal{C}}, \mathrm{Id}_\mathcal{C})$ is a commutative monoid of idempotents (hence there is a partial order on $\mathrm{I}_\mathcal{C}$, defined as $I \leq_\mathcal{C} J$ iff $I = I \circ J$).
  (c) $\mathrm{I}_\mathcal{C} = \{\, \mathrm{In}_F \mid F \in \bigcup_{\mathcal{D}\in K_0} \mathrm{H}_{0,1}(\mathcal{C},\mathcal{D}) \,\}$.
  Moreover, $\mathrm{In}_{\mathrm{Id}_\mathcal{C}} = \mathrm{Id}_\mathcal{C}$.
(5) $K_2 = \bigcup_{\mathcal{C},\mathcal{D}\in K_0} \mathrm{H}_{0,2}(\mathcal{C},\mathcal{D})$, were the sets $\mathrm{H}_{0,2}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ are mutually disjoint.
(6) For every $\mathcal{C},\mathcal{D} \in K_0$, $\mathrm{H}_{0,2}(\mathcal{C},\mathcal{D}) = \bigcup_{F,G\in \mathrm{H}_{0,1}(\mathcal{C},\mathcal{D})} \mathrm{H}_{1,2}(F,G)$, were the sets $\mathrm{H}_{1,2}(F,G)$ are mutually disjoint.
(7) For every $\mathcal{C},\mathcal{D} \in K_0$ and every $\alpha \in \mathrm{H}_{0,2}(\mathcal{C},\mathcal{D})$, if $\alpha \in \mathrm{H}_{1,2}(F,G)$, then $\mathrm{In}_F = \mathrm{In}_G$.
(8) For two fixed objects $\mathcal{C}$ and $\mathcal{D}$, the morphisms in $\mathrm{H}_{0,1}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ and the 2-cells in $\mathrm{H}_{0,2}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ form a category $\mathcal{K}_{1,2}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ under the operations

$$\circ_{F,G,H} \colon \mathrm{H}_{1,2}(G,H) \times \mathrm{H}_{1,2}(F,G) \longrightarrow \mathrm{H}_{1,2}(F,H)$$

of *vertical composition* of 2-cells, whereby from 2-cells

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, bend left, "F"] \arrow[rr, bend right, "G"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\alpha"] & & \mathcal{D} \end{tikzcd} \quad \text{and} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, bend left, "G"] \arrow[rr, bend right, "H"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\beta"] & & \mathcal{D}, \end{tikzcd}$$

we get a 2-cell

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, bend left=40, "F"] \arrow[rr, "G" description] \arrow[rr, bend right=40, "H"'] \arrow[rr, phantom, shift left=3, "\Downarrow\alpha"] \arrow[rr, phantom, shift right=3, "\Downarrow\beta"] & & \mathcal{D} \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, bend left, "F"] \arrow[rr, bend right, "H"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\beta\circ\alpha"] & & \mathcal{D}, \end{tikzcd}$$

with identities denoted by

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, bend left, "F"] \arrow[rr, bend right, "F"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}_F"] & & \mathcal{D}. \end{tikzcd}$$

(9) For every $\mathcal{C} \in K_0$, $\Lambda_\mathcal{C} \cong \mathrm{I}_\mathcal{C}$ and, for every $F \in \bigcup_{\mathcal{D}\in K_0} \mathrm{H}_{0,1}(\mathcal{C},\mathcal{D})$, if λ_{In_F} is the element in $\Lambda_\mathcal{C}$ that corresponds, under the above isomorphism, to $\mathrm{In}_F \in \mathrm{I}_\mathcal{C}$, then $\lambda_{\mathrm{In}_F} \in \mathrm{H}_{1,2}(\mathrm{In}_F, \mathrm{In}_F)$. In particular, we label $\mathrm{id}_{\mathrm{Id}_\mathcal{C}}$ the element assigned to $\mathrm{In}_{\mathrm{Id}_\mathcal{C}}$.

(10) The objects in K_0 together with the 2-cells in K_2 are such that there are partial operations

$$*_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E}} \colon \mathrm{H}_{0,2}(\mathcal{D},\mathcal{E}) \times \mathrm{H}_{0,2}(\mathcal{C},\mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{H}_{0,2}(\mathcal{C},\mathcal{E})$$

of *horizontal composition* of 2-cells, which together with the subsets $\Lambda_\mathcal{C} \subseteq \mathrm{H}_{0,2}(\mathcal{C},\mathcal{C})$, satisfy the following conditions

(a) From 2-cells

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{D} \end{tikzcd} \quad\text{and}\quad \begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "R"] \arrow[r, bend right, "S"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathcal{E}, \end{tikzcd}$$

if $(\beta,\alpha) \in \mathrm{Dom}(*_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E}})$, then we get a 2-cell

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "R"] \arrow[r, bend right, "S"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathcal{E} \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "R\circ F"] \arrow[r, bend right, "S\circ G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta * \alpha"] & \mathcal{E}. \end{tikzcd}$$

(b) For every $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F} \in K_0$, the following diagram commutes

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}_{0,2}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \times \mathrm{H}_{0,2}(\mathcal{D},\mathcal{E}) \times \mathrm{H}_{0,2}(\mathcal{C},\mathcal{D}) \arrow[r, "*_{\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{F}} \times \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times *_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E}}"'] & \mathrm{H}_{0,2}(\mathcal{D},\mathcal{F}) \times \mathrm{H}_{0,2}(\mathcal{C},\mathcal{D}) \arrow[d, "*_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{F}}"] \\ \mathrm{H}_{0,2}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \times \mathrm{H}_{0,2}(\mathcal{C},\mathcal{E}) \arrow[r, "*_{\mathcal{C},\mathcal{E},\mathcal{F}}"'] & \mathrm{H}_{0,2}(\mathcal{E},\mathcal{F}). \end{tikzcd}$$

(c) For every $\mathcal{C}$, $\mathcal{D} \in K_0$ and $\alpha \in \mathrm{H}_{0,2}(\mathcal{C},\mathcal{D})$, if $\alpha \in \mathrm{H}_{1,2}(F,G)$, then $(\mathrm{id}_{\mathrm{Id}_\mathcal{C}}, \alpha) \in \mathrm{Dom}(*_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{D}})$ and

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "\mathrm{Id}_\mathcal{C}"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{Id}_\mathcal{C}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}_{\mathrm{Id}_\mathcal{C}}"] & \mathcal{D} \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{D}. \end{tikzcd}$$

(d) For every $\mathcal{C}$, $\mathcal{D} \in K_0$ and $\alpha \in \mathrm{H}_{0,2}(\mathcal{C},\mathcal{D})$, if $\alpha \in \mathrm{H}_{1,2}(F,G)$, then $(\alpha, \lambda_{\mathrm{In}_F}) \in \mathrm{Dom}(*_{\mathcal{C},\mathcal{C},\mathcal{D}})$ and

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "\mathrm{In}_F"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{In}_F"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\lambda_{\mathrm{In}_F}"] & \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{D} \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{D}. \end{tikzcd}$$

(11) Under the situation described by:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"{name=U}] \arrow[r, "G"{name=M, description}] \arrow[r, bend right=50, "H"'{name=D}] \arrow[from=U, to=M, phantom, "\Downarrow\alpha"] \arrow[from=M, to=D, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left=50, "R"{name=U2}] \arrow[r, "S"{name=M2, description}] \arrow[r, bend right=50, "T"'{name=D2}] \arrow[from=U2, to=M2, phantom, "\Downarrow\gamma"] \arrow[from=M2, to=D2, phantom, "\Downarrow\delta"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

whenever defined, we have that

$$(\delta \circ \gamma) * (\beta \circ \alpha) = (\delta * \beta) \circ (\gamma * \alpha).$$

(12) Under the situation described by:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "F"'{name=D}] \arrow[from=U, to=D, phantom, "\Downarrow \mathrm{id}_F"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left=50, "R"{name=U2}] \arrow[r, bend right=50, "R"'{name=D2}] \arrow[from=U2, to=D2, phantom, "\Downarrow \mathrm{id}_R"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

whenever defined, we have that

$$\mathrm{id}_R * \mathrm{id}_F = \mathrm{id}_{R\circ F}.$$

References

Universidad de Valencia, Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia, Apt. 22.109 E-46071 Valencia, Spain

E-mail address: `Juan.B.Climent@uv.es`