ON THE MORPHISMS AND DEFORMATIONS OF MONADS AND ADJOINTS AND THEIR RELATIONSHIP

J. CLIMENT VIDAL AND J. SOLIVERES TUR

ABSTRACT. Once defined the morphisms of Kleisli and Eilenberg-Moore from a monad to another, we extend the monad functor transformations between monad functors of Street to the deformations between the morphisms of Kleisli and Eilenberg-Moore, respectively, all in such a way that, e.g., the deformations between two interpretations from a logic to another, will be particular cases of such deformations. Following this, we define the algebraic morhisms from a monad to another as well as the algebraic deformations between algebraic morphisms, in such a way that, e.g., the morhisms of Fujiwara from a heterogeneous algebraic signature to another and the deformations between morhisms of Fujiwara, will be particular cases of such concepts. Moreover, we investigate for the adjoint situations los conceptos introducidos para las mónadas, obteniendo diversas 2-categorías de adjunciones con morfismos y 2-células de Kleisli y Eilenberg-Moore, respectively, así como 2-functores hasta las 2-categorías correspondientes de mónadas, morfismos y deformaciones de Kleisli y Eilenberg-Moore, all in such a way that the classical constructions of Kleisli and Eilenberg-Moore are, respectively, 2-adjuntos por la izquierda y por la derecha de tales 2-functores. Finally, we show that the algebraic morphisms and algebraic deformations of the monads corresponden to algebraic squares of adjunciones and deformations entre tales cuadrados. Además, demostramos que diversas adjunciones, e.g., las asociadas a las álgebras de Hall y Bénabou y las que hay entre teorías y modelos, son equivalentes en la 2-categoría apropiada.

CONTENTS

Date: January 13, 2005.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 18A40, 18C15, 18C20, 18D05; Secondary: 03B05, 03B45, 08A68.

Key words and phrases. Morphism of Kleisli, morphism of Eilenberg-Moore, deformation of Kleisli, deformation of Eilenberg-Moore, adjoint square, algebraic square of adjunctions, deformation of algebraic squares, algebraic morphism of monads, algebraic deformation.

1. Introduction.

En este trabajo estudiamos varias 2-categorías de mónadas en las que las 2-células, denominadas deformaciones, generalizan las correspondientes entre morfismos de mónadas definidas por Street, y reflejan alguna de las propiedades de las deformaciones entre morfismos de signaturas algebraicas heterogéneas.

Consideramos, en primer lugar, los morfismos de Kleisli y de Eilenberg-Moore entre mónadas, que, como demostraremos, están en correspondencia biunívoca con ciertos functores entre las categorías de Kleisli y de Eilenberg-Moore asociadas a las mónadas respectivas, y las deformaciones entre morfismos de Kleisli y de Eilenberg-Moore. A partir de lo anterior, definimos los morfismos algebraicos y las deformaciones algebraicos entre mónadas que son, simultáneamente, morfismos y deformaciones de Kleisli y de Eilenberg-Moore, de los que, e.g., los morfismos y deformaciones de Fujiwara serán casos particulares. A continuación, estudiamos para las adjunciones los conceptos introducidos para las mónadas y obtenemos 2-categorías de adjunciones con morfismos y 2-células de Kleisli y Eilenberg-Moore y 2-functores hasta las 2-categorías correspondientes de mónadas, morfismos y deformaciones de Kleisli y Eilenberg-Moore, todo ello de manera que las construcciones clásicas de Kleisli y Eilenberg-Moore son, respectivamente, 2-adjuntos por la izquierda y por la derecha de tales 2-functores.

Por último, demostramos que los morfismos y deformaciones algebraicos de las mónadas corresponden a cuadrados algebraicos de adjunciones y deformaciones entre tales cuadrados. Además, demostramos que diversas adjunciones, e.g., las asociadas a las álgebras de Hall y Bénabou y las que hay entre teorías y modelos, son equivalentes en la 2-categoría apropiada y que, dado que, cada signatura algebraica heterogénea (S, Σ) tiene asociada, canónicamente, una adjunción entre la categoría de (S, Σ)-álgebras y la de $\mathbf{Set}^S$-conjuntos, así como una mónada sobre $\mathbf{Set}^S$, es inmediato que los morfismos de signaturas heterogéneas inducen cuadrados algebraicos entre las adjunciones correspondientes, así como morfismos algebraicos entre las mónadas asociadas. Esto es así también para los derivors o los morfismos de Fujiwara entre las signaturas. En particular, de las propiedades demostradas para los functores asociados a los F-morfismos de signaturas, tanto entre las categorías de términos, como entre las categorías de álgebras, se sigue que los F-morfismos determinan cuadrados algebraicos entre las adjunciones y morfismos algebraicos entre las mónadas asociadas. Es más, las deformaciones entre F-morfismos de signaturas algebraicas inducen asimismo deformaciones entre cuadrados algebraicos y deformaciones algebraicas entre morfismos algebraicos. Para comprobarlo, es suficiente tener en cuenta que cada deformación induce una transformación natural entre los functores correspondientes para las categorías de álgebras y de términos, que dan lugar a su vez a las 2-células correspondientes en $\mathbf{Ad}_{\mathrm{alg}}$ y $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}}$. Se tienen por tanto 2-functores de inclusión de las diversas categorías de signaturas en las 2-categorías $\mathbf{Ad}_{\mathrm{alg}}$ y $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}}$. Además, todo lo anterior es igualmente válido si en lugar de las 2-categorías de signaturas se consideran las 2-categorías de teorías.

Los functores de inclusión mencionados no son, obviamente, plenos, Las categorías de signaturas algebraicas discutidas pueden ser consideradas como descripciones sintácticas de morfismos algebraicos entre las mónadas asociadas a las signaturas. La teoría desarrollada puede ser de utilidad tanto a la hora de demostrar ciertas proposiciones relativas a las álgebras heterogéneas, como de marco para posibles generalizaciones de los conceptos de morfismo entre signaturas o entre presentaciones de teorías.

2. Some examples of morphisms and deformations.

2.1. **Espacios de clausura heterogéneos.** In this section we generalize to the heterogeneous sets the classical, and equivalent, notions of closure system and closure operator on a set.

To begin with we define, for a set of sorts, the concept of sorted set, delta of Kronecker, the relation of inclusion between sorted sets, product, coproduct and union of a family of sorted sets, intersection of a nonempty family of sorted sets and sorted mapping between sorted sets.

Definition 1. Let S be a set of sorts.

(1) A word on S is a mapping $w\colon n \longrightarrow S$, for some $n \in \mathbb{N}$. We denote by $S^\star$ the set of all words on S, i.e., $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S^n$. Moreover, we call the unique mapping $\lambda\colon \varnothing \longrightarrow S$, the empty word on S. The length of w, $|w|$, is the domain of the mapping w.

(2) An S-sorted set is a mapping $A = (A_s)_{s\in S}$ from S into $\boldsymbol{\mathcal{U}}$. If A and B are S-sorted sets, then $A \subseteq B$ if, for every $s \in S$, $A_s \subseteq B_s$. Moreover, given a set I and an I-indexed family $(A^i)_{i\in I}$ of S-sorted sets, we denote by $\prod_{i\in I} A^i$ the S-sorted set such that, for every $s \in S$,

$$(\textstyle\prod_{i\in I} A^i)_s = \prod_{i\in I} A^i_s,$$

by $\coprod_{i\in I} A^i$ the S-sorted set such that, for every $s \in S$,

$$(\textstyle\coprod_{i\in I} A^i)_s = \coprod_{i\in I} A^i_s,$$

by $\bigcup_{i\in I} A^i$ the S-sorted set such that, for every $s \in S$,

$$(\textstyle\bigcup_{i\in I} A^i)_s = \bigcup_{i\in I} A^i_s,$$

and if I is nonempty, by $\bigcap_{i\in I} A^i$ the S-sorted set such that, for every $s \in S$,

$$(\textstyle\bigcap_{i\in I} A^i)_s = \bigcap_{i\in I} A^i_s.$$

(3) If $w \in S^\star$ and A is an S-sorted set, then A_w is $\prod_{i\in |w|} A_{w_i}$.

(4) Given a sort $t \in S$ we call delta of Kronecker in t, the S-sorted set $\delta^t = (\delta^t_s)_{s\in S}$ defined, for every $s \in S$, as:

$$\delta^t_s = \begin{cases} 1, & \text{if } s = t; \\ \varnothing, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

For $t \in S$ and a set A, we denote by $\delta^t(A)$ the S-sorted set defined, for every $s \in S$, as:

$$\delta^t_s(A) = \begin{cases} A, & \text{if } s = t; \\ \varnothing, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(5) If A and B are S-sorted sets, an S-sorted mapping from A to B is a family of component mappings $f_s\colon A_s \longrightarrow B_s$ for each s in S. We denote by B_A the set of all S-sorted mapping from A to B.

Now we define the concept of heterogeneous closure system on an S-sorted set.

Definition 2. Let A be an S-sorted set. A heterogeneous closure system, abbreviated to h-closure system, on A is a subset $\mathcal{C}$ of $\mathrm{Sub}(A)$ that satisfies the following conditions

(1) $A \in \mathcal{C}$.
(2) For every $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$, if $\mathcal{D} \neq \emptyset$, then $\bigcap \mathcal{D} \in \mathcal{C}$.

We denote by $\mathrm{Cls}(A)$ the set of the h-closure systems on A.

Proposition 1. *Let A be an S-sorted set and $\mathcal{C}$ a* h*-closure system on A. Then $\underline{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, \subseteq)$ is a complete lattice.*

Proposition 2. *The ordered set $\underline{\mathrm{Cls}}(A) = (\mathrm{Cls}(A), \subseteq_S)$ is a complete lattice.*

Definition 3. A heterogeneous closure operator, abreviated to h-closure operator, on an S-sorted set A is an operator J on $\mathrm{Sub}(A)$ such that, for every $X, Y \subseteq A$, satisfies:

(1) $X \subseteq \mathrm{J}(X)$, i.e., J is extensive.
(2) If $X \subseteq Y$, then $\mathrm{J}(X) \subseteq \mathrm{J}(Y)$, i.e., J is isotone.
(3) $\mathrm{J}(\mathrm{J}(X)) = \mathrm{J}(X)$, i.e., J is idempotent.

We denote by $\mathrm{Clop}(A)$ the set of the h-closure operators on A and by $\underline{\mathrm{Clop}}(A)$ the same set but ordered by the relation $\leq$, where, for J and K in $\mathrm{Clop}(A)$, we have that $\mathrm{J} \leq \mathrm{K}$ if, for every $X \subseteq_S A$, $\mathrm{J}(X) \subseteq_S \mathrm{K}(X)$. Moreover, we call the fixed points of a h-closure operator J on A, J-closed sets.

Proposition 3. *The ordered set $\underline{\mathrm{Clop}}(A)$ is a complete lattice.*

Proposition 4. *Let A be an S-sorted set. Then there exists an anti-isomorphism* Fix *from the ordered set $\underline{\mathrm{Clop}}(A)$, of the* h*-closure operators on A, into the ordered set $\underline{\mathrm{Cls}}(A)$, of the* h*-closure systems on A.*

Para cada conjunto de tipos S, existe una categoría de S-espacios de clausura, cuyos objetos están formados por un S-conjunto y, alternativa pero equivalentemente, un sistema de clausura heterogéneo o un operador clausura heterogéneo, y cuyos morfismos son las S-aplicaciones compatibles con los espacios de clausura respectivos.

Proposition 5. *Sea S un conjunto de tipos. Entonces $\mathbf{ClSp}(S)$, es la categoría cuyos objetos son pares $(A, \mathcal{C})$, en los que A un S-conjunto y $\mathcal{C} \in \mathrm{Cls}(A)$, y cuyos morfismos de $(A, \mathcal{C})$ en $(B, \mathcal{D})$ son los triplos $((A, \mathcal{C}), f, (B, \mathcal{D}))$, denotados como $f\colon (A, \mathcal{C}) \longrightarrow (B, \mathcal{D})$, en los que f es una S-aplicación de A en B tal que, para cada $D \in \mathcal{D}$, $f^{-1}[D] \in \mathcal{C}$, y con composición e identidades definidas a partir de las de sus S-aplicaciones subyacentes.*

De $\mathbf{ClSp}(S)$ en $\mathbf{Set}^S$ se tiene un functor de olvido, $G_{\mathbf{ClSp}(S)}$, definido como:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{ClSp}(S) & \xrightarrow{G_{\mathbf{ClSp}(S)}} & \mathbf{Set}^S \\
 & & \\
(A, \mathcal{C}) & & A \\
{\scriptstyle f}\Big\downarrow & \longmapsto & \Big\downarrow{\scriptstyle f} \\
(B, \mathcal{D}) & & B
\end{array}
$$

que es obviamente fiel, por lo que $\mathbf{ClSp}(S)$ *es una categoría concreta sobre* $\mathbf{Set}^S$*.*

Proposition 6. *Sea* S *un conjunto de tipos. Entonces* $\mathbf{Clop}(S)$*, es la categoría cuyos objetos son pares* (A, J)*, en los que* A *un* S*-conjunto y* $\mathrm{J} \in \mathrm{Clop}(A)$*, y cuyos morfismos de* (A, J) *en* (B, K) *son los triplos* $((A, \mathrm{J}), f, (B, \mathrm{K})$*, denotados como* $f \colon (A, \mathrm{J}) \longrightarrow (B, \mathrm{K})$*, en los que* f *es una* S*-aplicación de* A *en* B *tal que, para todo* $X \subseteq A$*,* $f[\mathrm{J}(X)] \subseteq_S \mathrm{K}(f[X])$*, y con composición e identidades definidas a partir de las de sus* S*-aplicaciones subyacentes.*

De $\mathbf{Clop}(S)$ *en* $\mathbf{Set}^S$ *se tiene un functor de olvido* $G_{\mathbf{Clop}(S)}$*, definido similarmente a* $G_{\mathbf{ClSp}(S)}$*, por lo que* $\mathbf{Clop}(S)$ *es también una categoría concreta sobre* $\mathbf{Set}^S$*.*

Proposition 7. *Las categorías* $\mathbf{ClSp}(S)$ *y* $\mathbf{Clop}(S)$ *son concretamente isomorfas, a través del functor definido como:*

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{Clop}(S) & \longrightarrow & \mathbf{ClSp}(S) \\[1em]
(A, \mathrm{J}) & & (A, \mathrm{Fix}(J)) \\
f \big\downarrow & \longmapsto & \big\downarrow f \\
(B, \mathrm{K}) & & (B, \mathrm{Fix}(K))
\end{array}
$$

Este resultado justifica que, en lo que sigue, se use aquella de las dos categorías, $\mathbf{Clop}(S)$, o $\mathbf{ClSp}(S)$, que se considere más oportuna para abordar la situación de que se trate. Convenimos que por la categoría de S-espacios de clausura, $\mathbf{ClSp}(S)$, nos referimos indistintamente a cualquiera de las dos categorías $\mathbf{Clop}(S)$, o $\mathbf{ClSp}(S)$.

Cada espacio de clausura ordinario se identifica con un S-espacio de clausura heterogéneo, tomando como conjunto de tipos S cualquier conjunto final. Por otra parte, del mismo modo que a cada espacio de clausura ordinario se le asigna una mónada, see e.g.[Mac71], dado un S-espacio de clausura heterogéneo (A, T), obtenemos la mónada $(\mathbf{Sub}(A), \mathbb{T})$, en la que $\mathbf{Sub}(A)$ es la categoría determinada por el conjunto ordenado $(\mathrm{Sub}(A), \subseteq_S)$ y $\mathbb{T}$ la mónada sobre $\mathbf{Sub}(A)$ obtenida a partir del operador clausura heterogéneo T on the S-sorted set A. La categoría de Eilenberg-Moore de la mónada $\mathbb{T}$ sobre $\mathbf{Sub}(A)$, $\mathbf{EM}(\mathbb{T})$, es $\mathbf{Fix}(T)$ la categoría asociada al conjunto ordenado $(\mathrm{Fix}(T), \subseteq_S)$ de los puntos fijos del operador clausura T, y la categoría de Kleisli de la misma, $\mathbf{Kl}(\mathbb{T})$, es la asociada al conjunto ordenado $(\mathrm{Sub}(A), \leq_S)$, en el, para dos partes $X, Y \subseteq_S A$, $X \leq_S Y$ iff $X \subseteq_S T(Y)$.

Además, como veremos más adelante, cada morfismo de S-espacios de clausura j de (A, T) en (A', T'), inducirá un morfismo de Kleisli $(j[\cdot], \lambda)$ de la mónada $(\mathbf{Sub}(A), \mathbb{T})$ en la mónada $(\mathbf{Sub}(A'), \mathbb{T}')$, y por tener el functor $j[\cdot]$ de $\mathbf{Sub}(A)$ en $\mathbf{Sub}(A')$ de formación de imágenes directas, un adjunto por la derecha, entonces λ dará lugar a un morfismo algebraico de la mónada $(\mathbf{Sub}(A), \mathbb{T})$ en la mónada $(\mathbf{Sub}(A'), \mathbb{T}')$. Por último, si j y j' son dos morfismos de (A, T) en (A', T') y se cumple que, para cada $X \subseteq_S A$, $j'[X] \subseteq_S T'(j[X])$, entonces obtendremos una deformación de Kleisli de $(j[\cdot], \lambda)$ en $(j'[\cdot], \lambda')$, que inducirá una deformación algebraica entre los correspondientes morfismos algebraicos.

Podemos inducir un sistema de clausura heterogéneo, de manera optimal, sobre el dominio común de una familia de S-aplicaciones cuando los codominios de las mismas están dotados de sistemas de clausura heterogéneos, y, dualmente, podemos inducir un sistema de clausura heterogéneo, de manera co-optimal, sobre el codominio común de una familia de S-aplicaciones cuando los dominios de las mismas están dotados de sistemas de clausura heterogéneos.

Lemma 1. *Sea A un S-conjunto, $(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}$ una familia de S-espacios de clausura y $f^{\cdot} = (f^i)_{i\in I}$ una familia de S-aplicaciones, en la que, para cada $i \in I$, $f^i\colon A \longrightarrow A^i$. Entonces hay un único sistema de clausura heterogéneo $\mathcal{C}$ sobre A, al que denotamos por $\mathrm{L}^{f^{\cdot}}(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}$, y denominamos el levantamiento optimal de $(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}$ a través de $f^{\cdot}$, tal que:*

1. *Para cada $i \in I$, $f^i\colon (A, L^f(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}) \longrightarrow (A^i, \mathcal{C}^i)$.*
2. *Dado un S-espacio de clausura $(B, \mathcal{B})$ y $g\colon B \longrightarrow A$, si, para cada $i \in I$, $f^i \circ g\colon (B, \mathcal{B}) \longrightarrow (A^i, \mathcal{C}^i)$, entonces $g\colon (B, \mathcal{B}) \longrightarrow (A, L^{f^{\cdot}}(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I})$.*

Además, se cumple que:

1. *Para cada sistema de clausura heterogéneo $\mathcal{C}$ sobre A:*
$$L^{\mathrm{id}_A}(A, \mathcal{C}) = \mathcal{C}.$$
2. *Si, para cada $i \in I$, $(A^{i,m}, \mathcal{C}^{i,m})_{m\in \mathrm{M}_i}$ es una familia de S-espacios de clausura, $g^{i,\cdot} = (g^{i,m})_{m\in\mathrm{M}_i}$ una familia de S-aplicaciones, en la que, para cada $m \in \mathrm{M}_i$, $g^{i,m}\colon A^i \longrightarrow A^{i,m}$ y $\mathcal{C}^i = L^{g^{i,\cdot}}(A^{i,m}, \mathcal{C}^{i,m})_{m\in\mathrm{M}_i}$, entonces*
$$L^{(g^{i,\cdot}\circ f^{\cdot})_{i\in I}}(A^{i,m}, \mathcal{C}^{i,m})_{(i,m)\in\coprod_{i\in I}\mathrm{M}_i} = L^{f^{\cdot}}(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}.$$

Proof. Es suficiente que tomemos como $\mathrm{L}^{f^{\cdot}}(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}$ el sistema de clausura heterogéneo sobre A generado por $\bigcup_{i\in I}\{\, (f^i)^{-1}[C] \mid C \in \mathcal{C}^i \,\}$. $\square$

Obsérvese que, para cada S-conjunto A, el levantamiento optimal de $(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in\emptyset}$ a través de $f^{\cdot} = (f^i)_{i\in\emptyset}$ es $\{A\}$.

Definition 4. Sea $f\colon (A, \mathcal{C}) \longrightarrow (B, \mathcal{D})$ un morfismo de S-espacios de clausura. Decimos que f es un morfismo optimal si, para cada S-espacio de clausura $(C, \mathcal{E})$ y cada aplicación $g\colon C \longrightarrow A$, si $f \circ g\colon (C, \mathcal{E}) \longrightarrow (B, \mathcal{D})$, entonces $g\colon (C, \mathcal{E}) \longrightarrow (A, \mathcal{C})$.

Proposition 8. *Sea $f\colon (A, \mathcal{C}) \longrightarrow (B, \mathcal{D})$ un morfismo de S-espacios de clausura. Una condición necesaria y suficiente para que f sea un morfismo optimal es que $\mathcal{C} = L^f(B, \mathcal{D})$.*

Proposition 9. *Si $f\colon (A, \mathcal{C}) \longrightarrow (B, \mathcal{D})$ y $g\colon (B, \mathcal{D}) \longrightarrow (C, \mathcal{E})$ son morfismos optimales, entonces $g \circ f\colon (A, \mathcal{C}) \longrightarrow (C, \mathcal{E})$ es un morfismo optimal. Además, si $g \circ f\colon (A, \mathcal{C}) \longrightarrow (C, \mathcal{E})$ es un morfismo optimal, entonces se cumple que $f\colon (A, \mathcal{C}) \longrightarrow (B, \mathcal{D})$ es optimal.*

Lemma 2. *Sea A un S-conjunto, $(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}$ una familia de S-espacios de clausura heterogéneos y $f^{ulob} = (f^i)_{i\in I}$ una familia de S-aplicaciones, en la que, para cada $i \in I$, $f^i\colon A^i \longrightarrow A$. Entonces hay un único sistema de clausura heterogéneo $\mathcal{C}$ sobre A, al que denotamos por $L_{f^{\cdot}}(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}$, y denominamos el levantamiento co-optimal de $(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}$ a través de $f^{\cdot}$, tal que:*

1. *Para cada $i \in I$, $f^i\colon (A^i, \mathcal{C}^i) \longrightarrow (A, L_{f^{\cdot}}(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I})$.*
2. *Dado un S-espacio de clausura $(B, \mathcal{D})$ y $g\colon A \longrightarrow B$, si, para cada $i \in I$, $g \circ f^i\colon (A^i, \mathcal{C}^i) \longrightarrow (B, \mathcal{D})$, entonces $g\colon (A, L_{f^{\cdot}}(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}) \longrightarrow (B, \mathcal{D})$.*

Además, se cumple que:

1. *Para cada sistema de clausura heterogéneo $\mathcal{C}$ en A:*
$$L_{\mathrm{id}_A}(A, \mathcal{C}) = \mathcal{C}.$$
2. *Si, para cada $i \in I$, $(A^{i,m}, \mathcal{C}^{i,m})_{m\in\mathrm{M}_i}$ es una familia de S-espacios de clausura, $g^{i,\cdot} = (g^{i,m})_{m\in\mathrm{M}_i}$ una familia de S-aplicaciones, en la que, para cada $m \in \mathrm{M}_i$, $g^{i,m}\colon A^{i,m} \longrightarrow A^i$ y $\mathcal{C}^i = L_{g^i}(A^{i,m}, \mathcal{C}^{i,m})_{m\in\mathrm{M}_i}$, entonces*
$$L_{(f^{\cdot}\circ g^{i,\cdot})_{i\in I}}(A^{i,m}, \mathcal{C}^{i,m})_{(i,m)\in\coprod_{i\in I}\mathrm{M}_i} = L_{f^{\cdot}}(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}.$$

Proof. Es suficiente que tomemos como $\mathrm{L}_{f^{\cdot}}(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}$ el subconjunto de $\mathrm{Sub}(A)$ definido como:

$$\mathrm{L}_{f^{\cdot}}(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I} = \{\, C \subseteq A \mid \forall i \in I\,(\,(f^i)^{-1}[C] \in \mathcal{C}^i\,)\,\}.$$

□

Para cada S-conjunto A, el levantamiento co-optimal de $(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in\emptyset}$ a través de $f^{\cdot} = (f^i)_{i\in\emptyset}$ es $\mathrm{Sub}(A)$.

Definition 5. Sea $f\colon (A, \mathcal{C}) \longrightarrow (B, \mathcal{D})$ un morfismo de S-espacios de clausura. Decimos que f es un morfismo co-optimal si, para cada S-espacio de clausura $(C, \mathcal{E})$ y cada aplicación $g\colon B \longrightarrow C$, si $g\circ f\colon (A, \mathcal{C}) \longrightarrow (C, \mathcal{E})$, entonces $g\colon (B, \mathcal{D}) \longrightarrow (C, \mathcal{E})$.

Proposition 10. *Sea $f\colon (A, \mathcal{C}) \longrightarrow (B, \mathcal{D})$ un morfismo de S-espacios de clausura. Una condición necesaria y suficiente para que f sea un morfismo co-optimal es que $\mathcal{D} = L_f(A, \mathcal{C})$.*

Proposition 11. *Si $f\colon (A, \mathcal{C}) \longrightarrow (B, \mathcal{D})$ y $g\colon (B, \mathcal{D}) \longrightarrow (C, \mathcal{E})$ son morfismos co-optimales, entonces $g\circ f\colon (A, \mathcal{C}) \longrightarrow (C, \mathcal{E})$ es un morfismo co-optimal. Además, si $g\circ f\colon (A, \mathcal{C}) \longrightarrow (C, \mathcal{E})$ es un morfismo co-optimal, entonces $g\colon (B, \mathcal{D}) \longrightarrow (C, \mathcal{E})$ es co-optimal.*

Los morfismos entre conjuntos de tipos dan lugar a functores entre las categorías de espacios de clausura correspondientes. Esta construcción se extiende hasta un functor que, mediante la construcción de Ehresmann-Grothendieck, permite obtener una categoría de espacios de clausura heterogéneos, donde se considera la variación en el conjunto de tipos.

Now we define the concepts of heterogeneous set and mapping.

Definition 6.

(1) A heterogeneous set is a pair (S, A), where $S \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$ and A is an S-sorted set. To abbreviate we will call the heterogeneous sets, simply, h-sets.

(2) Let (S, A) and (T, B) be two h-sets. An h-relation (Φ, D) from (S, A) into (T, B) is a sub-h-set of $(S, A) \times (T, B)$ and $\mathrm{Rel}((S, A), (T, B))$ denotes the set of all h-relations from (S, A) into (T, B). The diagonal of (S, A), $\Delta_{(S,A)}$, is the h-relation $(\Delta_S, (\Delta_{A_s})_{s\in S})$.

Let (Φ, D) be an h-relation from (S, A) into (T, B) and (Ψ, E) one from (T, B) into (U, C). We define the composition $(\Psi, E) \circ (\Phi, D)$ of (Φ, D) and (Ψ, E) as the h-set:

$$\left(\Psi \circ \Phi, \left(\bigcup \left\{ E_{t,u} \circ D_{s,t} \;\middle|\; \exists t \in T \left(\begin{matrix} (s,t) \in \Phi & \text{and} \\ (t,u) \in \Psi & \end{matrix} \right) \right\}\right)_{(s,u)\in\Psi\circ\Phi}\right)$$

(3) Let (S, A) and (T, B) be two h-sets. An h-relation (Φ, F) from (S, A) into (T, B) is an h-function if Φ is a function from S into T and, for every $s \in S$, F_s is a function from A_s into $B_{\phi(s)}$.

We denote by $\mathrm{Fnc}((S, A), (T, B))$ the set of all h-functions from (S, A) into (T, B). The composition of two h-functions is their composition as h-relations and is an h-function.

(4) Let (S, A) and (T, B) be two h-sets. An h-mapping from (S, A) into (T, B) is a triple $((S, A), (\Phi, F), (T, B))$, denoted by (ϕ, f) or diagrammatically by

$$(\phi, f)\colon (S, A) \longrightarrow (T, B)$$

where (Φ, F) is an h-function from (S, A) into (T, B). We denote by $(T, B)_{(S,A)}$ the set of all h-mappings from (S, A) into (T, B).

Let (ϕ, d) be an h-mapping from (S, A) into (T, B) and (ψ, e) one from (T, B) into (U, C). We define the composition $(\psi, e) \circ (\phi, d)$ of (ϕ, d) and (ψ, e) as:

$$((S, A), (\Psi, E) \circ (\Phi, D), (U, C)).$$

Moreover, for an h-set (S, A), we define the identity h-mapping, of (S, A), denoted by $\mathrm{id}_{(S,A)}$, as $((S, A), \Delta_{(S,A)}, (S, A))$

Proposition 12. *The* h-*sets in* $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ *together with the* h-*mappings, the composition and the identities, determine a category, denoted by* **HSet**. *Moreover,* **HSet** *is a bicomplete category.*

Proposition 13. *Let* $\phi\colon S \longrightarrow T$ *be a mapping. Then for the functors*

1. $\Delta_\phi = (\cdot_{\phi(s)})_{s\in S}\colon \mathbf{Set}^T \longrightarrow \mathbf{Set}^S$ *that to a* T*-sorted set* A *assigns the* S*-sorted set* $A_\phi = (A_{\phi(s)})_{s\in S}$ *and to a* T*-sorted mapping* $f\colon A \longrightarrow B$ *the* S*-sorted mapping* $f_\phi = (f_{\phi(s)})_{s\in S}$*, and*
2. $\coprod_\phi = (\coprod_{s\in\phi^{-1}[t]} \cdot_s)_{t\in T}\colon \mathbf{Set}^S \longrightarrow \mathbf{Set}^T$ *that to an* S*-sorted set* A *assigns the* T*-sorted set* $\coprod_\phi A = (\coprod_{s\in\phi^{-1}[t]} A_s)_{t\in T}$ *and to an* S*-sorted mapping* $f\colon A \longrightarrow B$ *the* T*-sorted mapping* $\coprod_\phi f = (\coprod_{s\in\phi^{-1}[t]} f_s)_{t\in T}$*, we have that* $\coprod_\phi \dashv \Delta_\phi$*.*

For a T-sorted set A and a subset $\mathcal{C}$ of $\mathrm{Sub}(A)$, convenimos que $\Delta_\phi[\mathcal{C}]$ denota el subconjunto $\{\, C_\phi \mid C \in \mathcal{C} \,\}$ de $\mathrm{Sub}(A_\phi)$ y que $\coprod_\phi[\mathcal{C}]$ denota el subconjunto $\{\, \coprod_\phi C \mid C \in \mathcal{C} \,\}$ de $\mathrm{Sub}(\coprod_\phi A)$.

Proposition 14. *Sea* $\phi\colon S \longrightarrow T$ *una aplicación. Entonces de* $\mathbf{ClSp}(T)$ *en* $\mathbf{ClSp}(S)$ *existe un functor,* $\mathrm{ClSp}^\Delta(\phi)$*, definido como*

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{ClSp}(T) & \xrightarrow{\mathrm{ClSp}^\Delta(\phi)} & \mathbf{ClSp}(S) \\
(B, \mathcal{D}) & & (B_\phi, \Delta_\phi[\mathcal{D}]) \\
f \Big\downarrow & \longmapsto & \Big\downarrow f_\phi \\
(B', \mathcal{D}') & & (B'_\phi, \Delta_\phi[\mathcal{D}'])
\end{array}$$

Proof. Si $\mathcal{D}$ es un sistema de clausura sobre B, entonces $\Delta_\phi[\mathcal{D}]$ es un sistema de clausura sobre B_ϕ, porque, para cada familia $(Y^i)_{i\in I}$ de T-conjuntos, se cumple que

$$\Delta_\phi(\textstyle\bigcap_{i\in I} Y^i) = \bigcap_{i\in I} \Delta_\phi(Y^i)$$

Además, si $f\colon (B, \mathcal{D}) \longrightarrow (B', \mathcal{D}')$ es continuo y $Y'_\phi \in \Delta_\phi[\mathcal{D}']$, entonces $Y' \in \mathcal{D}'$ y $f^{-1}[Y'] \in \mathcal{D}$, luego $\Delta_\phi(f^{-1}[Y']) \in \Delta_\phi[\mathcal{D}]$. Pero $\Delta_\phi(f^{-1}[Y'])$ es idéntico a $\Delta_\phi(f)^{-1}(Y'_\phi)$ y, por consiguiente, f_ϕ es continuo. □

Proposition 15. *Sea* $\phi\colon S \longrightarrow T$ *una aplicación. Entonces de* $\mathbf{ClSp}(S)$ *en* $\mathbf{ClSp}(T)$ *existe un functor,* $\mathrm{ClSp}^{\amalg}(\phi)$*, definido como*

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{ClSp}(S) & \xrightarrow{\mathrm{ClSp}^{\amalg}(\phi)} & \mathbf{ClSp}(T) \\
(A,\mathcal{C}) & & (\coprod_\phi A, \coprod_\phi[\mathcal{C}]) \\
f\Big\downarrow & \longmapsto & \Big\downarrow \coprod_\phi f \\
(A',\mathcal{C}') & & (\coprod_\phi A', \coprod_\phi[\mathcal{C}'])
\end{array}
$$

Proof. Si $\mathcal{C}$ es un sistema de clausura sobre A, entonces $\coprod_\phi[\mathcal{C}]$ es un sistema de clausura sobre $\coprod_\phi A$, porque, para cada familia $(X^i)_{i\in I}$ de S-conjuntos, se cumple que

$$\textstyle\coprod_\phi \bigcap_{i\in I} X^i = \bigcap_{i\in I} \coprod_\phi X^i$$

Además, si $f\colon (A,\mathcal{C}) \longrightarrow (A',\mathcal{C}')$ es continuo y $\coprod_\phi X' \in \coprod_\phi[\mathcal{C}']$, entonces X' está en $\mathcal{C}'$ y $f^{-1}[X'] \in \mathcal{C}$, luego $\coprod_\phi f^{-1}[X'] \in \coprod_\phi[\mathcal{C}]$. Puesto que $\coprod_\phi f^{-1}[X']$ es idéntico a $(\coprod_\phi f)^{-1}[\coprod_\phi X']$, se cumple que $\coprod_\phi f$ es continuo. □

Proposition 16. *Sea* $\phi\colon S \longrightarrow T$ *una aplicación. Entonces se cumple que* $\mathrm{ClSp}^{\amalg}(\phi) \dashv \mathrm{ClSp}^{\Delta}(\phi)$.

Proof. El isomorfismo natural θ^ϕ de la adjunción $\coprod_\phi \dashv \Delta_\phi$ es también un isomorfismo natural

$$\mathbf{ClSp}(S)((A,\mathcal{C}),(B_\phi,\Delta_\phi[\mathcal{D}])) \cong \mathbf{ClSp}(T)((\textstyle\coprod_\phi A), \coprod_\phi[\mathcal{C}]),(B,\mathcal{D}))$$

para cada $(A,\mathcal{C})$ en $\mathbf{ClSp}(S)$ y cada $(B,\mathcal{D})$ en $\mathbf{ClSp}(T)$.

Sea f un morfismo continuo de $(A,\mathcal{C})$ en $(B_\phi,\Delta_\phi[\mathcal{D}])$, e $Y \in \mathcal{D}$. Puesto que $Y_\phi \in \Delta_\phi[\mathcal{D}]$ y f es continuo, se cumple que $f^{-1}[Y_\phi] \in \mathcal{C}$ y $\coprod_\phi f^{-1}[Y_\phi] \in \coprod_\phi[\mathcal{C}]$. Pero $\coprod_\phi f^{-1}[Y_\phi]$ coincide con $((\theta^\phi)^{-1}(f))^{-1}[Y]$, puesto que

$$
\begin{aligned}
((\theta^\phi)^{-1}(f))^{-1}[Y] &= (\{(a,s) \in \textstyle\coprod_\phi(A)_t \mid a \in A_s,\ \phi(s)=t,\ f_s(a) \in Y_t\})_{t\in T} \\
&= (\{(a,s) \in \textstyle\coprod_\phi(A)_t \mid a \in f^{-1}[Y_\phi]_s,\ \phi(s)=t\})_{t\in T} \\
&= (\textstyle\coprod_{s\in\phi^{-1}[t]} f^{-1}[Y_\phi]_s)_{t\in T} \\
&= \textstyle\coprod_\phi f^{-1}[Y_\phi]
\end{aligned}
$$

y, por consiguiente, $(\theta^\phi)^{-1}(f)$ es continuo.

Recíprocamente, supongamos que g es un morfismo continuo de $(\coprod_\phi A, \coprod_\phi[\mathcal{C}])$ en $(B,\mathcal{D})$. Sea $Y_\phi \in \Delta_\phi[\mathcal{D}]$. Entonces $Y \in \mathcal{D}$ y $g^{-1}[Y] \in \coprod_\phi[\mathcal{C}]$. Pero tenemos que

$$
\begin{aligned}
g^{-1}[Y] &= (\{(a,s) \in \textstyle\coprod_\phi(A)_t \mid g_t(a,s) \in Y_t\})_{t\in T} \\
&= (\textstyle\coprod_{s\in\phi^{-1}[t]}\{a \in A_s \mid g_{\phi(s)}(a,s) \in Y_{\phi(s)}\})_{t\in T} \\
&= \textstyle\coprod_\phi((\{a \in A_s \mid g_{\phi(s)}(a,s) \in Y_{\phi(s)}\})_{s\in S})
\end{aligned}
$$

y, además,

$$
\begin{aligned}
(\{a \in A_s \mid g_{\phi(s)}(a,s) \in Y_{\phi(s)}\})_{s\in S} &= (\{a \in A_s \mid \theta^\phi(g)_s(a) \in Y_{\phi(s)}\})_{s\in S} \\
&= (\theta^\phi(g))^{-1}[Y_\phi]
\end{aligned}
$$

luego $g^{-1}[Y] = \coprod_\phi(\theta^\phi(g))^{-1}[Y_\phi]$, por lo que $(\theta^\phi(g))^{-1}[Y_\phi] \in \mathcal{C}$ y $\theta^\phi(g)$ es continuo. □

Los functores $\mathrm{ClSp}^{\Delta}(\phi)$ y $\mathrm{ClSp}^{\amalg}(\phi)$ pueden definirse alternativamente para operadores clausura. En particular, la definición apropiada para el functor $\mathrm{ClSp}^{\amalg}(\phi)$ es inmediata teniendo en cuenta la siguiente proposición.

Proposition 17. *Sea $\phi\colon S \longrightarrow T$ una aplicación y A un S-conjunto. Entonces se cumple que* $\mathrm{Sub}(A) \cong \mathrm{Sub}(\coprod_{\phi} A) = \coprod_{\phi}[\mathrm{Sub}(A)]$.

Se tiene, por tanto, que si $Z \in \mathrm{Sub}(\coprod_{\phi} A)$ entonces Z es de la forma $\coprod_{\phi} X$ con $X \subseteq A$. Si J es un operador clausura sobre A, podemos definir entonces un operador clausura J_{ϕ} sobre $\coprod_{\phi} A$ que asigna a cada $\coprod_{\phi} X$, con $X \subseteq A$, el T-conjunto $\coprod_{\phi} J(X)$. La definición es correcta porque para cada S-conjunto A, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Clop}(A) \arrow[r, "(\cdot)_{\phi}"] \arrow[d, "\mathrm{Fix}"'] & \mathrm{Clop}(\coprod_{\phi} A) \arrow[d, "\mathrm{Fix}"] \\
\mathrm{Cls}(A) \arrow[r, "\coprod_{\phi}[\cdot]"'] & \mathrm{Cls}(\coprod_{\phi} A)
\end{tikzcd}$$

conmuta.

La definición correspondiente para el functor $\mathrm{ClSp}^{\Delta}(\phi)$ es menos inmediata, puesto que, en general, si B es un T-conjunto, entonces $\Delta_{\phi}[\mathrm{Sub}(B)]$ está estrictamente incluido en $\mathrm{Sub}(B_{\phi})$. No obstante, debido a que tenemos una aplicación $\bigcup_{\phi,B}$, o simplemente $\bigcup_{\phi}$, de $\mathrm{Sub}(B_{\phi})$ en $\mathrm{Sub}(B)$ definida como:

$$\bigcup_{\phi} \begin{cases} \mathrm{Sub}(B_{\phi}) & \longrightarrow \mathrm{Sub}(B) \\ \quad Y & \longmapsto (\bigcup_{s\in\phi^{-1}[t]} Y_s)_{t\in T} \end{cases}$$

que, además, es isótona y tiene una adjunta por la derecha, precisamente la aplicación $\Delta_{\phi,B}$, o simplemente Δ_{ϕ}, de $\mathrm{Sub}(B)$ en $\mathrm{Sub}(B_{\phi})$ definida como:

$$\Delta_{\phi} \begin{cases} \mathrm{Sub}(B) & \longrightarrow \mathrm{Sub}(B_{\phi}) \\ \quad X & \longmapsto X_{\phi} \end{cases}$$

si K es un operador clausura sobre B, entonces podemos definir un operador clausura K_{ϕ} sobre B_{ϕ} como

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sub}(B_{\phi}) \arrow[r, "K_{\phi}"] \arrow[d, "\bigcup_{\phi}"'] & \mathrm{Sub}(B_{\phi}) \\
\mathrm{Sub}(B) \arrow[r, "K"'] & \mathrm{Sub}(B) \arrow[u, "\Delta_{\phi}"']
\end{tikzcd}$$

que a un $Y \subseteq_T B_{\phi}$ le asocia $K(\bigcup_{\phi}(Y))_{\phi}$. La definición es correcta porque si B es un T-conjunto, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Clop}(B) \arrow[r, "(\cdot)_{\phi}"] \arrow[d, "\mathrm{Fix}"'] & \mathrm{Clop}(B_{\phi}) \arrow[d, "\mathrm{Fix}"] \\
\mathrm{Cls}(B) \arrow[r, "\Delta_{\phi}[\cdot]"'] & \mathrm{Cls}(B_{\phi})
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Las construcciones anteriores se extienden, respectivamente, hasta un functor y un pseudo-functor, de **Set** en **Cat**. En particular, podemos obtener una categoría de espacios de clausura heterogéneos mediante la construcción de Ehresmann-Grothendieck aplicada al siguiente functor.

Proposition 18. *De* **Set** *en* **Cat** *existe un functor contravariante* ClSp^{Δ}*, definido como*

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{Set} & \xrightarrow{\mathrm{ClSp}^{\Delta}} & \mathbf{Cat} \\ & & \\ S & & \mathbf{ClSp}(S) \\ \phi\Big\downarrow & \longmapsto & \Big\uparrow \mathrm{ClSp}^{\Delta}(\phi) \\ T & & \mathbf{ClSp}(T)\end{array}$$

□

Definition 7. Denotamos por **HClSp** la categoría $\int^{\mathbf{Set}} \mathrm{ClSp}^{\Delta}$, obtenida mediante la construcción de Ehresmann-Grothendieck para functores contravariantes aplicada al functor ClSp^{Δ}.

La categoría **HClSp** tiene como objetos los triplos $(S, A, \mathcal{C})$, en los que S es un conjunto y $(A, \mathcal{C})$ un S-espacio de clausura, denominados espacios de clausura heterogéneos, y como morfismos de $(S, A, \mathcal{C})$ en $(T, B, \mathcal{D})$ los pares (ϕ, f), con $\phi\colon S \longrightarrow T$ una aplicación y $f\colon (A, \mathcal{C}) \longrightarrow (B_{\phi}, \Delta_{\phi}[\mathcal{D}])$ un morfismo continuo de S-espacios de clausura de $(A, \mathcal{C})$ en $(B_{\phi}, \Delta_{\phi}[\mathcal{D}])$.

Podemos inducir un sistema de clausura heterogéneo, de manera optimal, sobre el dominio común de una familia de h-aplicaciones cuando los codominios de las mismas están dotados de sistemas de clausura heterogéneos, y, dualmente, podemos inducir un sistema de clausura heterogéneo, de manera co-optimal, sobre el codominio común de una familia de h-aplicaciones cuando los dominios de las mismas están dotados de sistemas de clausura heterogéneos.

Lemma 3. *Sea* (S, A) *un* h*-conjunto,* $(S_i, A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}$ *una familia de espacios de clausura heterogéneos y* $(\phi_{\cdot}, f^{\cdot}) = (\phi_i, f^i)_{i\in I}$ *una familia de* h*-aplicaciones, en la que, para cada* $i \in I$*,* $(\phi_i, f^i)\colon (S, A) \longrightarrow (S_i, A^i)$*. Entonces hay un único sistema de clausura heterogéneo* $\mathcal{C}$ *sobre* A*, al que denotamos por* $L^{(\phi_{\cdot}, f^{\cdot})}(S_i, A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}$*, y denominamos el levantamiento optimal de* $(S_i, A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}$ *a través de* $(\phi_{\cdot}, f^{\cdot})$*, tal que:*

(1) *Para cada* $i \in I$*,* $(\phi_i, f^i)\colon (S, A, L^{(\phi_{\cdot}, f^{\cdot})}(S_i, A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}) \longrightarrow (S_i, A^i, \mathcal{C}^i)$*.*
(2) *Dado un espacio de clausura heterogéneo* $(T, B, \mathcal{D})$ *y* $(\psi, g)\colon (T, B) \longrightarrow (S, A)$*, si, para cada* $i \in I$*,* $(\phi_i, f^i) \circ (\psi, g)\colon (T, B, \mathcal{D}) \longrightarrow (S_i, A^i, \mathcal{C}^i)$*, entonces* $(\psi, g)\colon (T, B, \mathcal{D}) \longrightarrow (S, A, L^{(\phi_{\cdot}, f^{\cdot})}(S_i, A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I})$*.*

Además, se cumple que:

(1) *Para cada sistema de clausura heterogéneo* $\mathcal{C}$ *sobre* A*:*
$$L^{(\mathrm{id}_S, \mathrm{id}_A)}(S, A, \mathcal{C}) = \mathcal{C}.$$
(2) *Si, para cada* $i \in I$*,* $(S_{i,m}, A^{i,m}, \mathcal{C}^{i,m})_{m\in \mathrm{M}_i}$ *es una familia de espacios de clausura heterogéneos,* $(\phi_{i,\cdot}, g^{i,\cdot}) = (\phi_{i,m}, g^{i,m})_{m\in \mathrm{M}_i}$ *una familia de* h*-aplicaciones, en la que, para cada* $m \in \mathrm{M}_i$*,* $(\phi_{i,m}, g^{i,m})\colon (S_i, A^i) \longrightarrow (S_{i,m}, A^{i,m})$ *y* $\mathcal{C}^i = L^{(\phi_{i,\cdot}, g^{i,\cdot})}(S_{i,m}, A^{i,m}, \mathcal{C}^{i,m})_{m\in \mathrm{M}_i}$*, entonces*
$$L^{((\phi_{i,\cdot}, g^{i,\cdot})\circ(\phi_{\cdot}, f^{\cdot}))_{i\in I}}(S_{i,m}, A^{i,m}, \mathcal{C}^{i,m})_{(i,m)\in\coprod_{i\in I}\mathrm{M}_i} = L^{(\phi_{\cdot}, f^{\cdot})}(S_i, A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}.$$

Proof. Es suficiente que tomemos como $\mathrm{L}^{(\phi_{\cdot}, f^{\cdot})}(S_i, A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}$ el sistema de clausura heterogéneo sobre A generado por $\bigcup_{i\in I}\{\, (f^i)^{-1}[C] \mid C \in \Delta_{\phi_i}[\mathcal{C}^i] \,\}$. □

Obsérvese que, para cada S-conjunto A, el levantamiento optimal de $(S_i, A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in\varnothing}$ a través de $(\phi_{\cdot}, f^{\cdot}) = (\phi_i, f^i)_{i\in\varnothing}$ es $\{A\}$.

Definition 8. Sea $(\phi, f)\colon (S, A, \mathcal{C}) \longrightarrow (T, B, \mathcal{D})$ un morfismo de espacios de clausura heterogéneos. Decimos que (ϕ, f) es un morfismo optimal si, para cada espacio de clausura heterogéneo $(U, C, \mathcal{E})$ y cada h-aplicación $(\psi, g)\colon (U, C) \longrightarrow (S, A)$, si $(\phi, f) \circ (\psi, g)\colon (U, C, \mathcal{E}) \longrightarrow (T, B, \mathcal{D})$, entonces $(\psi, g)\colon (U, C, \mathcal{E}) \longrightarrow (S, A, \mathcal{C})$.

Proposition 19. *Sea $(\phi, f)\colon (S, A, \mathcal{C}) \longrightarrow (T, B, \mathcal{D})$ un morfismo de espacios de clausura heterogéneos. Una condición necesaria y suficiente para que (ϕ, f) sea un morfismo optimal es que $\mathcal{C} = L^{(\phi,f)}(T, B, \mathcal{D})$.*

Proposition 20. *Si $(\phi, f)\colon (S, A, \mathcal{C}) \longrightarrow (T, B, \mathcal{D})$ y $(\psi, g)\colon (T, B, \mathcal{D}) \longrightarrow (U, C, \mathcal{E})$ son morfismos optimales, entonces $(\psi, g) \circ (\phi, f)\colon (S, A, \mathcal{C}) \longrightarrow (U, C, \mathcal{E})$ es un morfismo optimal. Además, si $(\psi, g) \circ (\phi, f)\colon (S, A, \mathcal{C}) \longrightarrow (U, C, \mathcal{E})$ es un morfismo optimal, entonces $(\phi, f)\colon (S, A, \mathcal{C}) \longrightarrow (T, B, \mathcal{D})$ es optimal.*

Lemma 4. *Sea (S, A) un h-conjunto, $(S_i, A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}$ una familia de espacios de clausura heterogéneos y $(\phi_{.}, f^{\cdot}) = (\phi_i, f^i)_{i\in I}$ una familia de h-aplicaciones, en la que, para cada $i \in I$, $(\phi_i, f^i)\colon (S_i, A^i) \longrightarrow (S, A)$. Entonces hay un único sistema de clausura heterogéneo $\mathcal{C}$ sobre A, al que denotamos por $L_{(\phi_{.}, f^{\cdot})}(S_i, A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}$, y denominamos el levantamiento co-optimal de $(S_i, A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}$ a través de $(\phi_{.}, f^{\cdot})$, tal que:*

1. *Para cada $i \in I$, $(\phi_i, f^i)\colon (S_i, A^i, \mathcal{C}^i) \longrightarrow (S, A, L_{(\phi_{.}, f^{\cdot})}(S_i, A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I})$.*
2. *Dado un espacio de clausura heterogéneo $(T, B, \mathcal{D})$ y $(\psi, g)\colon (S, A) \longrightarrow (T, B)$, si, para cada $i \in I$, $(\psi, g) \circ (\phi_i, f^i)\colon (S_i, A^i, \mathcal{C}^i) \longrightarrow (T, B, \mathcal{B})$, entonces $(\psi, g)\colon (S, A, L_{(\phi_{.}, f^{\cdot})}(S_i, A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}) \longrightarrow (T, B, \mathcal{D})$.*

Además, se cumple que:

1. *Para cada sistema de clausura heterogéneo $\mathcal{C}$ en A:*
$$L_{(\mathrm{id}_S, \mathrm{id}_A)}(S, A, \mathcal{C}) = \mathcal{C}.$$
2. *Si, para cada $i \in I$, $(S_{i,m}, A^{i,m}, \mathcal{C}^{i,m})_{m\in \mathrm{M}_i}$ es una familia de espacios de clausura heterogéneos, $(\phi_{i,.}, g^{i,\cdot}) = (\phi_{i,m}, g^{i,m})_{m\in \mathrm{M}_i}$ una familia de h-aplicaciones, en la que, para cada $m \in \mathrm{M}_i$, $(\phi_{i,m}, g^{i,m})\colon (S_{i,m}, A^{i,m}) \longrightarrow (S_i, A^i)$ y $\mathcal{C}^i = L_{(\phi_{i,.}, g^{i,\cdot})}(S_{i,m}, A^{i,m}, \mathcal{C}^{i,m})_{m\in \mathrm{M}_i}$, entonces*
$$L_{((\phi_{.}, f^{\cdot}) \circ (\phi_{i,.}, g^{i,\cdot}))_{i\in I}}(S_{i,m}, A^{i,m}, \mathcal{C}^{i,m})_{(i,m)\in \coprod_{i\in I} \mathrm{M}_i} = L_{(\phi_{.}, f^{\cdot})}(S_i, A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}.$$

Proof. We must show that $(\phi_i, f^i)\colon (S_i, A^i) \longrightarrow (S, A)$ has a co-optimal lift. Let Λ be the set of all heterogeneous closure systems $\mathcal{L}$ on A such that $(\phi_i, f^i)\colon (S_i, A^i, \mathcal{C}^i) \longrightarrow (S, A, \mathcal{L})$ is admissible for all $i \in I$. Λ is nonempty since the empty optimal lift is in Λ. Let $\mathcal{C}$ be the optimal lift of the Λ-indexed family $(\mathrm{id}_S, \mathrm{id}_A)\colon (S, A) \longrightarrow (S, A, \mathcal{L})$. Suppose given $(\psi, g)\colon (S, A) \longrightarrow (T, B)$ such that, for all $i \in I$, $(\psi, g) \circ (\phi_i, f^i)\colon (S_i, A^i, \mathcal{C}^i) \longrightarrow (T, B, \mathcal{B})$. Let $\mathcal{L}$ be the optimal lift of $(\psi, g)\colon (S, A) \longrightarrow (T, B, \mathcal{D})$. As $\mathcal{L}$ is optimal, $\mathcal{L}$ belongs to Λ and $(\psi, g)\colon (S, A, \mathcal{C}) \longrightarrow (T, B, \mathcal{D})$ is admissible being the composition of $(\mathrm{id}_S, \mathrm{id}_A)$ and (ψ, g).

$$\begin{tikzcd}
(S_i, A^i, \mathcal{C}^i) \arrow[r, "{(\phi_i, f^i)}"] \arrow[ddr, "{(\psi, g) \circ (\phi_i, f^i)}"'] & (S, A, \mathcal{C}) \arrow[dr, "{(\mathrm{id}_S, \mathrm{id}_A)}"] \arrow[dd, "{(\psi, g)}"] & \\
& & (S, A, \mathcal{L}) \arrow[dl, "{(\psi, g)}"] \\
& (T, B, \mathcal{D}) &
\end{tikzcd}$$

□

Corollary 1. *El functor de olvido de la categoría* **HClSp** *en la categoría* **HSet** *has left and right adjoints.*

Corollary 2. *El functor de olvido de la categoría* **HClSp** *en la categoría* **HSet** *constucts limits and colimits.*

Definition 9. Sea $(\phi, f)\colon (S, A, \mathcal{C}) \longrightarrow (T, B, \mathcal{D})$ un morfismo de espacios de clausura heterogéneos. Decimos que (ϕ, f) es un morfismo co-optimal si, para cada espacio de clausura heterogéneo $(U, C, \mathcal{E})$ y cada h-aplicación $(\psi, g)\colon (T, B) \longrightarrow (U, C)$, si $(\psi, g) \circ (\Phi, f)\colon (S, A, \mathcal{C}) \longrightarrow (U, C, \mathcal{E})$, entonces $(\psi, g)\colon (T, B, \mathcal{D}) \longrightarrow (U, C, \mathcal{E})$.

Proposition 21. *Sea* $(\phi, f)\colon (S, A, \mathcal{C}) \longrightarrow (T, B, \mathcal{D})$ *un morfismo de espacios de clausura heterogéneos. Una condición necesaria y suficiente para que* (ϕ, f) *sea un morfismo co-optimal es que* $\mathcal{D} = L_{(\phi,f)}(S, A, \mathcal{C})$.

Proposition 22. *Si* $(\phi, f)\colon (S, A, \mathcal{C}) \longrightarrow (T, B, \mathcal{D})$ *y* $(\psi, g)\colon (T, B, \mathcal{D}) \longrightarrow (U, C, \mathcal{E})$ *son morfismos co-optimales, entonces* $(\psi, g) \circ (\phi, f)\colon (S, A, \mathcal{C}) \longrightarrow (U, C, \mathcal{E})$ *es un morfismo co-optimal. Además, si* $(\psi, g) \circ (\phi, f)\colon (S, A, \mathcal{C}) \longrightarrow (U, C, \mathcal{E})$ *es un morfismo co-optimal, entonces* $(\psi, g)\colon (T, B, \mathcal{D}) \longrightarrow (U, C, \mathcal{E})$ *es co-optimal.*

Del mismo modo que a cada S-espacio de clausura se le asigna una mónada, dado un espacio de clausura heterogéneo (S, A, T), obtenemos la mónada $(\mathbf{Sub}(A), \mathbb{T})$, en la que $\mathbf{Sub}(A)$ es la categoría determinada por el conjunto ordenado $(\mathrm{Sub}(A), \subseteq_S)$ y $\mathbb{T}$ la mónada sobre $\mathbf{Sub}(A)$ obtenida a partir del operador clausura heterogéneo T on the heterogeneous set A. Además, como veremos más adelante, cada morfismo de espacios de clausura heterogéneos (ϕ, j) de (S, A, T) en (S', A', T'), inducirá un morfismo de Kleisli $(\bigcup_\phi \circ j[\cdot], (\iota j[\cdot]) \circ (\bigcup_\phi \lambda))$ de la mónada $(\mathbf{Sub}(A), \mathbb{T})$ en la mónada $(\mathbf{Sub}(A'), \mathbb{T}')$, tal como indica el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Sub}(A) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "{j[\cdot]}"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda \swArrow"] & \mathbf{Sub}(A) \arrow[d, "{j[\cdot]}"] \\
\mathbf{Sub}(A'_\phi) \arrow[r, "T'_\phi"] \arrow[d, "\bigcup_\phi"'] \arrow[dr, phantom, "\iota \swArrow"] & \mathbf{Sub}(A'_\phi) \arrow[d, "\bigcup_\phi"] \\
\mathbf{Sub}(A') \arrow[r, "T'"'] & \mathbf{Sub}(A')
\end{tikzcd}$$

en el que debemos observar que la aplicación $\bigcup_\phi$ no es la extensión a las partes de ningún morfismo en **HSet** de (S, A'_ϕ) en (S', A'). Además, por tener los functores $j[\cdot]$ de $\mathbf{Sub}(A)$ en $\mathbf{Sub}(A'_\phi)$ de formación de imágenes directas, y $\bigcup_\phi$ de $\mathbf{Sub}(A'_\phi)$ en $\mathbf{Sub}(A')$, adjuntos por la derecha, entonces λ dará lugar a un morfismo algebraico de la mónada $(\mathbf{Sub}(A), \mathbb{T})$ en la mónada $(\mathbf{Sub}(A'), \mathbb{T}')$, de modo que la categoría **HClSp** se podrá identificar con una subcategoría de la categoría subyacente de la 2-categoría $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}}$. Por otra parte, al disponer en la 2-categoría $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}}$ de la noción de deformación entre dos morfismos algebraicos, tendremos, de manera derivada, la noción de deformación entre dos morfismos de espacios de clausura heterogéneos, pero por ser las categorías involucradas retículos completos, existirá a lo sumo una deformación entre dos morfismos algebraicos desde las mónadas asociadas a los espacios de clausura heterogéneos, lo que determinará un preorden en el conjunto de los morfismos algebraicos entre dos espacios de clausura heterogéneos.

De hecho, si (ϕ, j) y (ϕ', j') son dos morfismos de (S, A, T) en (S', A', T'), tendremos una deformación de $(\bigcup_\phi \circ j[\cdot], (\iota j[\cdot]) \circ (\bigcup_\phi \lambda))$ en $(\bigcup_{\phi'} \circ j'[\cdot], (\iota' j'[\cdot]) \circ (\bigcup_{\phi'} \lambda'))$, precisamente si, para cada $X \subseteq_S A$, se cumple que $\bigcup_{\phi'}(j'[X]) \subseteq_{S'} T'(\bigcup_\phi(j[X]))$. De todo ello, y de ejemplos posteriores referidos, en particular, a los operadores de consecuencia de Hall y Bénabou, se infiere la conveniencia de considerar maneras más generales que la ordinaria, de comparar los espacios de clausura entre sí, proponiéndose que un morfismo contínuo de la mónada $(\mathbf{Sub}(A), \mathbb{T})$, inducida por el espacio de clausura heterogéneo (S, A, T), en la mónada $(\mathbf{Sub}(A'), \mathbb{T}')$, inducida por el espacio de clausura heterogéneo (S', A', T'), sea un cuadrado adjunto

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Sub}(A) \arrow[r, "\mathrm{T}"] \arrow[d, shift right, "L"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \mathbf{Sub}(A) \arrow[d, shift right, "L"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{Sub}(A') \arrow[r, "\mathrm{T}'"'] \arrow[u, shift right, "R"'] & \mathbf{Sub}(A') \arrow[u, shift right, "R"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "\mathrm{T}"] \arrow[d, "L"'] \arrow[dr, phantom, "\Searrow"] & \cdot \arrow[d, "L"] \\
\cdot \arrow[r, "\mathrm{T}'"'] & \cdot
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "\mathrm{T}"] \arrow[d, "L"'] \arrow[dr, phantom, "\Nearrow"] & \cdot \\
\cdot \arrow[r, "\mathrm{T}'"'] & \cdot \arrow[u, "R"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "\mathrm{T}"] \arrow[dr, phantom, "\Nearrow"] & \cdot \arrow[d, "L"] \\
\cdot \arrow[r, "\mathrm{T}'"'] \arrow[u, "R"] & \cdot
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "\mathrm{T}"] \arrow[dr, phantom, "\Nwarrow"] & \cdot \\
\cdot \arrow[r, "\mathrm{T}'"'] \arrow[u, "R"] & \cdot \arrow[u, "R"']
\end{tikzcd}
$$

y que una deformación entre morfismos contínuos de espacios de clausura sea un cuadrado adjunto

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Sub}(A) \arrow[r, "1"] \arrow[d, shift right, "L"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \mathbf{Sub}(A) \arrow[d, shift right, "L'"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{Sub}(A') \arrow[r, "T'"'] \arrow[u, shift right, "R"'] & \mathbf{Sub}(A') \arrow[u, shift right, "R'"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "1"] \arrow[d, "L"'] \arrow[dr, phantom, "\Searrow"] & \cdot \arrow[d, "L'"] \\
\cdot \arrow[r, "T'"'] & \cdot
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "1"] \arrow[d, "L"'] \arrow[dr, phantom, "\Nearrow"] & \cdot \\
\cdot \arrow[r, "T'"'] & \cdot \arrow[u, "R'"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "1"] \arrow[dr, phantom, "\Nearrow"] & \cdot \arrow[d, "L'"] \\
\cdot \arrow[r, "T'"'] \arrow[u, "R"] & \cdot
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "1"] \arrow[dr, phantom, "\Nwarrow"] & \cdot \\
\cdot \arrow[r, "T'"'] \arrow[u, "R"] & \cdot \arrow[u, "R'"']
\end{tikzcd}
$$

2.2. **Relación entre la lógica proposicional clásica e intuicionista.** We show that the inclusion functor from the category of intuitionistic sentential pretheories and homotopy classes of morphisms, to that of classical sentential pretheories and homotopy classes of morphisms, has a left and a right adjoint and that from the left to the right adjoint there is a natural transformation. On the other hand, we show that the Lindenbaum-Tarski operators can be extended to equivalences from the category of classical, resp. intuitionistic, sentential pretheories and homotopy classes of morphisms to the category **Bool**, resp. **Heyt**. Finally, using another pair of adjoint situations between **Bool** and **Heyt**, induced by the functor of regularization from **Heyt** to **Bool**, we show that there are two pairs of adjoint natural transformations which, together with the functors of Lindenbaum-Tarski, determine two adjoint squares from the pairs of adjoints between classical and intuitionistic sentential pretheories to the pairs of adjoints from Boolean algebras to Heyting algebras.

As is well known, sentential logics, as any other logics, can be investigated at least from two points of view, the syntactical or proof theoretical and the semantical or model theoretical, being both, usually, strongly related through the Lindenbaum-Tarski operators, which assign to every theory in a sentential logic an algebraic construct, and this in such a way that the outcome is a representation of the algebraic constructs into the logical ones.

On the other hand, sometimes, it happens that for a given couple of logical systems it can be showed that there are adjoint situations, both, between the syntactical parts and the semantical, as, e.g., when there are natural interpretations between the sets of formulae of the logical systems involved, as well as transformations naturally defined between the algebraic categories canonically associated to the logical systems. Moreover, for those pairs of adjoints, when considered together with the operators of Lindenbaum-Tarski, it is possible to obtain adjoint squares, i.e., non-commutative squares consisting of functors and adjunctions, for which there is a pair of adjoint natural transformations.

Our objective will be to confirm the above by investigating a particular case, concretely that of classical and intuitionistic sentential logic. In the first section, once defined the categories of classical and intuitionistic sentential pretheories, denoted respectively by $\mathbf{Pth}_{\mathrm{c}}$ and $\mathbf{Pth}_{\mathrm{i}}$, and showed the existence of full and dense functors lt_{c} from $\mathbf{Pth}_{\mathrm{c}}$ to $\mathbf{Bool}$, the category of Boolean algebras, and lt_{i} from $\mathbf{Pth}_{\mathrm{i}}$ to $\mathbf{Heyt}$, that of Heyting algebras, we define two congruences, $\equiv_{\mathrm{c}}$ on $\mathbf{Pth}_{\mathrm{c}}$ and $\equiv_{\mathrm{i}}$ on $\mathbf{Pth}_{\mathrm{i}}$, and from them we obtain the functors of Lindenbaum-Tarski LT_{c} from $\mathbf{CSL} = \mathbf{Pth}_{\mathrm{c}}/\equiv_{\mathrm{c}}$ to $\mathbf{Bool}$ and LT_{i} from $\mathbf{ISL} = \mathbf{Pth}_{\mathrm{i}}/\equiv_{\mathrm{i}}$ to $\mathbf{Heyt}$. In this way the well known operators of Lindenbaum-Tarski have been functorized, i.e., they not only take as arguments pretheories, of some type, and give as values algebraic constructs, but they also operate on morphisms between pretheories, assigning as values morphisms between the associated algebraic constructs. Moreover, it happens that both functors of Lindenbaum-Tarski are indeed equivalences.

In the second section, from a full subcategory of the category, defined by Brown and Suszko in [BS73], of abstract logics and logical morphisms, and considering the work by Prawitz and Mälmnäs in [PM66] and that of Wójcicki in [Wój88], we define, categorially, the concept of an interpretation from classical to intuitionistic sentential logic, which will be used in the last section to prove that there are two adjoint situations

$$K \dashv J \dashv G\colon \mathbf{CSL} \longrightarrow \mathbf{ISL},$$

with K and G full embeddings from $\mathbf{CSL}$ to $\mathbf{ISL}$, and J injective on objects from $\mathbf{ISL}$ to $\mathbf{CSL}$, together with a pointwise monomorphic natural transformation ξ from K to G. Finally, also in the last section, we show that the above couple of adjoints between the categories $\mathbf{CSL}$ and $\mathbf{ISL}$ is related to another couple of adjoints for the semantical categories $\mathbf{Bool}$ and $\mathbf{Heyt}$, through the functors of Lindenbaum-Tarski and two pairs of adjoint natural transformations, in such a way that determine two adjoint squares.

We agree that the signatures of classical and intuitionistic sentential logic are identical and denote them by $\underline{\Sigma}$. Moreover, for a set X, $\underline{\mathrm{Fr}_{\Sigma}}(X)$ is the free $\underline{\Sigma}$-algebra on X. Finally, for $\mathrm{l} \in \{\mathrm{c}, \mathrm{i}\}$, $\mathrm{Cn}_{\mathrm{l},X}$ is the consequence operator for the classical, resp. intuitionistic, sentential logic relative to the set of variables X, and if $\Phi \subseteq \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X)$, $\equiv_{\mathrm{l},\Phi}$ is the congruence on $\underline{\mathrm{Fr}_{\Sigma}}(X)$ defined as $\alpha \equiv_{\mathrm{l},\Phi} \beta$ iff $\mathrm{Cn}_{\mathrm{l},X}(\Phi \cup \{\alpha\}) = \mathrm{Cn}_{\mathrm{l},X}(\Phi \cup \{\beta\})$.

Definition 10. We denote by $\mathbf{Pth}_{\mathrm{c}}$ the category which has as objects the classical sentential pretheories, i.e., the pairs (X, Φ) with X a non-empty set and Φ a subset of $\underline{\mathrm{Fr}_{\Sigma}}(X)$, and as morphisms from (X, Φ) to (Y, Δ) those homomorphisms $f\colon \underline{\mathrm{Fr}_{\Sigma}}(X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Fr}_{\Sigma}}(Y)$ such that $f[\mathrm{Cn}_{\mathrm{c},X}(\Phi)] \subseteq \mathrm{Cn}_{\mathrm{c},Y}(\Delta)$. The category $\mathbf{Pth}_{\mathrm{i}}$, of intuitionistic sentential pretheories, is defined the same way.

We remark that, for $\mathrm{l} \in \{\mathrm{c}, \mathrm{i}\}$, in the category $\mathbf{Pth}_{\mathrm{l}}$ any pretheory (X, Φ) is isomorphic to the theory $(X, \mathrm{Cn}_{\mathrm{c},X}(\Phi))$. Indeed we have that the category $\mathbf{Pth}_{\mathrm{l}}$ is equivalent to the full subcategory determined by the theories, i.e., the pretheories of the form $(X, \mathrm{Cn}_{\mathrm{l},X}(\Phi))$. However, we maintain the distinction between pretheories and theories, because the concept of pretheory allows to make finer distinctions, that are important for proof-theoretical and computational purposes.

The main properties of the concept of morphism we will needed are collected in the following proposition.

Proposition 23. *Let (X, Φ) and (Y, Δ) be two sentential pretheories and f an homomorphism from $\underline{\mathrm{Fr}_{\Sigma}}(X)$ to $\underline{\mathrm{Fr}_{\Sigma}}(Y)$. Then, for $\mathrm{l} \in \{\, \mathrm{c}, \mathrm{i} \,\}$, the following conditions are equivalent:*

1. *The homomorphism f is a morphism from (X, Φ) to (Y, Δ).*
2. *The homomorphism f is such that $f[\Phi] \subseteq \mathrm{Cn}_{\mathrm{l},Y}(\Delta)$.*
3. *For every $\alpha, \beta \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X)$, if $\alpha \leftrightarrow \beta \in \mathrm{Cn}_{\mathrm{l},X}(\Phi)$, then $f(\alpha) \leftrightarrow f(\beta) \in \mathrm{Cn}_{\mathrm{l},Y}(\Delta)$.*

Next we prove that there are full and dense, but not necessarily faithful, functors from $\mathbf{Pth}_{\mathrm{c}}$ to $\mathbf{Bool}$ and from $\mathbf{Pth}_{\mathrm{i}}$ to $\mathbf{Heyt}$, rendering categorical the well known representations of Lindenbaum-Tarski of some algebraic constructs through logical systems.

Proposition 24. *There are full and dense functors lt_{c} from $\mathbf{Pth}_{\mathrm{c}}$ to $\mathbf{Bool}$, and lt_{i} from $\mathbf{Pth}_{\mathrm{c}}$ to $\mathbf{Heyt}$.*

As we have said above neither lt_{c} nor lt_{i} is necessarily faithful, however we can obtain equivalences from them if we define convenient congruences $\equiv_{\mathrm{c}}$ and $\equiv_{\mathrm{i}}$ on $\mathbf{Pth}_{\mathrm{c}}$ and $\mathbf{Pth}_{\mathrm{i}}$, respectively.

Definition 11. We denote, for $\mathrm{l} \in \{\, \mathrm{c}, \mathrm{i} \,\}$, by $\equiv_{\mathrm{l}}$ the relation on the set of morphisms of $\mathbf{Pth}_{\mathrm{l}}$ defined, for $f, g\colon (X, \Phi) \longrightarrow (Y, \Delta)$, as follows:

$$f \equiv_{\mathrm{l}} g \quad \text{iff} \quad \mathrm{pr}_{\equiv_{\mathrm{l},\Delta}} \circ f = \mathrm{pr}_{\equiv_{\mathrm{l},\Delta}} \circ g.$$

If f and g are in the relation $\equiv_{\mathrm{l}}$, we say they are homotopical.

Proposition 25. *The relation $\equiv_{\mathrm{l}}$, for $\mathrm{l} \in \{\, \mathrm{c}, \mathrm{i} \,\}$, is a congruence on the category $\mathbf{Pth}_{\mathrm{l}}$.*

Corollary 3. *The category $\mathbf{CSL} = \mathbf{Pth}_{\mathrm{c}}/\equiv_{\mathrm{c}}$ is equivalent to $\mathbf{Bool}$ and $\mathbf{ISL} = \mathbf{Pth}_{\mathrm{i}}/\equiv_{\mathrm{i}}$ is equivalent to $\mathbf{Heyt}$.*

We point out that, because the operators of Lindenbaum-Tarski are really equivalences, the quotient categories of the type $\mathbf{Pth}/\equiv$ can be investigated through the algebraic categories canonically associated to them. In this way, e.g., being **Bool** and **Heyt** bicomplete categories, we can assert that **CSL** and **ISL** also are, and being **Bool** and **Heyt** also Mal'cev varieties, we have cohomology theories for **CSL** and **ISL**, as in [Smi76]. Therefore the extensions of one pretheory by another, as well as the obstructions to such extensions, can be cohomologically studied.

Definition 12. We denote by $\mathbf{ALog}(\underline{\Sigma})$ the category which has as objects those abstract logics $(\underline{A}, \mathrm{Cn})$ where $\underline{A}$ is a $\underline{\Sigma}$-algebra and Cn an structural algebraic closure operator on A, and as morphisms from $(\underline{A}, \mathrm{Cn})$ to $(\underline{A}', \mathrm{Cn}')$ the logical morphisms, i.e., the homomorphisms $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{A}'$ such that, for every $\Phi \subseteq A$, $f[\mathrm{Cn}(\Phi)] \subseteq \mathrm{Cn}'(f[\Phi])$. Moreover, for $\mathrm{l} \in \{\, \mathrm{c}, \mathrm{i} \,\}$, we denote by F_{l} the functor from **Set** to $\mathbf{ALog}(\underline{\Sigma})$ that to a set X associates the abstract logic $(\underline{\mathrm{Fr}_{\Sigma}}(X), \mathrm{Cn}_{\mathrm{l},X})$, and to a mapping $f\colon X \longrightarrow Y$, the canonical extension, $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(f)$, from $(\underline{\mathrm{Fr}_{\Sigma}}(X), \mathrm{Cn}_{\mathrm{l},X})$ to $(\underline{\mathrm{Fr}_{\Sigma}}(Y), \mathrm{Cn}_{\mathrm{l},Y})$.

The category $\mathbf{ALog}(\underline{\Sigma})$ is a full subcategory of the category of abstract logics and logical morphisms defined in [BS73], and we work in such a subcategory in this section because as is well known classical and intuitionistic sentential logics have structural and algebraic consequence operators.

Now, to define below the concept of interpretation from a sentential logic into another, we choose, once and for all, a denumerable set of variables V, and observe that if d is a mapping from Σ to $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}'}(V)$, such that, for every formal operation $\sigma \in \Sigma$, the arity of σ is equal to the number of variables of the formal polynomial $d(\sigma)$, then the mapping d determines a functor, also denoted by d, from the category $\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}')$ into the category $\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma})$, that assigns to a $\underline{\Sigma}'$-algebra $\underline{A}$ the $\underline{\Sigma}$-algebra $d(\underline{A})$ whose underlying set is that of $\underline{A}$ and whose structural operations are the polynomial operations of the $\underline{\Sigma}'$-algebra $\underline{A}$, associated to the formal polynomials $d(\sigma)$, for every $\sigma \in \Sigma$. Moreover, if $P \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}'}(\{v_0\})$ is a formal polynomial in the variable v_0, then P induces a natural transformation $P^{\underline{\Sigma}'}$ from $G_{\underline{\Sigma}'} \circ \underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}'}$ into $G_{\underline{\Sigma}'} \circ \underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}'}$, that to a set X assigns the polynomial operation $P^{\underline{\Sigma}',X} \colon \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}'}(X) \longrightarrow \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}'}(X)$.

We agree that a sentential logic is an algebraic signature $\underline{\Sigma}$ together with a functor F from $\mathbf{Set}$ into $\mathbf{ALog}(\underline{\Sigma})$ such that $F(X) = (\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(X), \mathrm{Cn}_X)$, i.e., the underlying algebra of the abstract logic $F(X)$ is $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(X)$, and the category $\mathbf{Pth}_F/\equiv_F$ is equivalent to a variety $\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}, \mathcal{E})$ through a functor LT_F from $\mathbf{Pth}_F/\equiv_F$ into $\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}, \mathcal{E})$ such that the following diagram

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Pth}_F \arrow[r, "\mathrm{Pr}_{\equiv_F}"] \arrow[dr, "\mathrm{lt}_F"'] & \mathbf{Pth}_F/\equiv_F \arrow[d, "\mathrm{LT}_F"] \\
 & \mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}, \mathcal{E})
\end{tikzcd}
$$

commutes, where lt_F assigns to (X, Φ) the quotient $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(X)/\equiv_{F(X),\Phi}$, with $\alpha \equiv_{F(X),\Phi} \beta$ iff $\mathrm{Cn}_X(\Phi \cup \{\alpha\}) = \mathrm{Cn}_X(\Phi \cup \{\beta\})$

Definition 13. An interpretation from a sentential logic $(\underline{\Sigma}, F \colon \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{ALog}(\underline{\Sigma}))$ into another $(\underline{\Sigma}', F' \colon \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{ALog}(\underline{\Sigma}'))$ is a pair $((d, P), t)$ where d is a mapping from Σ to $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}'}(V)$, such that, for every formal operation $\sigma \in \Sigma$, the arity of σ is equal to the number of variables of the formal polynomial $d(\sigma)$, $P \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}'}(\{v_0\})$ a formal polynomial in the variable v_0, and t a natural transformation from F to $D \circ F'$, where D is the functor from $\mathbf{ALog}(\underline{\Sigma}')$ into $\mathbf{ALog}(\underline{\Sigma})$ that to an abstract logic $(\underline{A}, T)$ in $\mathbf{ALog}(\underline{\Sigma}')$ assigns the abstract logic $(d(\underline{A}), T)$, such that $(G_{\underline{\Sigma}} U_{\underline{\Sigma}} t) \circ \eta^{\underline{\Sigma}} = P^{\underline{\Sigma}'} \circ \eta^{\underline{\Sigma}'}$

We summarize the above as:

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{ALog}(\underline{\Sigma}') \arrow[r, "U_{\underline{\Sigma}'}"] \arrow[dd, "D"] & \mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}') \arrow[dd, "d"] \arrow[dr, "G_{\underline{\Sigma}'}"] & \\
\mathbf{Set} \arrow[ur, "\mathrm{F}'"] \arrow[dr, "\mathrm{F}"'] \arrow[r, phantom, "t\Uparrow"] \arrow[rrr, bend left=70, "G_{\underline{\Sigma}'} \circ \underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}'}"] \arrow[rrr, bend right=70, "G_{\underline{\Sigma}} \circ \underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}"'] & {} & & \mathbf{Set} \\
 & \mathbf{ALog}(\underline{\Sigma}) \arrow[r, "U_{\underline{\Sigma}}"'] & \mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}) \arrow[ur, "G_{\underline{\Sigma}}"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Set} \arrow[rrr, "\mathrm{Id}_{\mathbf{Set}}"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_{\mathbf{Set}}"] \arrow[dd, "\mathrm{Id}_{\mathbf{Set}}"'] \arrow[drrr, phantom, "\Downarrow \eta^{\underline{\Sigma}'}"] \arrow[ddr, phantom, "\eta^{\underline{\Sigma}} \Downarrow"] & & & \mathbf{Set} \arrow[dr, "\mathrm{Id}_{\mathbf{Set}}"] \arrow[dd, "\mathrm{Id}_{\mathbf{Set}}"'] \arrow[ddr, phantom, "\Downarrow P^{\underline{\Sigma}'}"] & \\
& \mathbf{Set} \arrow[rrr, "G_{\underline{\Sigma}'} \circ \underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}'}"] \arrow[dd, "\mathrm{Id}_{\mathbf{Set}}"] & & & \mathbf{Set} \arrow[dd, "\mathrm{Id}_{\mathbf{Set}}"] \\
\mathbf{Set} \arrow[rrr, "G_{\underline{\Sigma}} \circ \underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_{\mathbf{Set}}"'] \arrow[drrr, phantom, "G_{\underline{\Sigma}} U_{\underline{\Sigma}} t \Downarrow"] & & & \mathbf{Set} \arrow[dr, "\mathrm{Id}_{\mathbf{Set}}"'] & \\
& \mathbf{Set} \arrow[rrr, "G_{\underline{\Sigma}'} \circ \underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}'}"'] & & & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}
$$

We remark that $G_{\underline{\Sigma}} \circ \underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}} = G_{\underline{\Sigma}} \circ U_{\underline{\Sigma}} \circ F$ and $G_{\underline{\Sigma}'} \circ \underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}'} = G_{\underline{\Sigma}} \circ U_{\underline{\Sigma}} \circ D \circ F'$

Observemos que tomando como objetos las lógicas sentenciales y como morfismos las interpretaciones de una en otra, obtenemos una categoría **LSen**. Además, tal categoría se puede obtener, mediante la construcción de Ehresmann-Grothendieck, como la categoría $\int^{\mathbf{Sig}} \mathrm{LSen}$, aplicada al functor contravariante LSen de $\mathbf{Sig}^{\mathrm{op}}$ en **Cat** que a una signatura $\underline{\Sigma}$ le asocia la subcategoría adecuada $\mathbf{LSen}(\underline{\Sigma})$ de la categoría functorial $\mathbf{ALog}(\underline{\Sigma})^{\mathbf{Set}}$, y a un morfismo (d, P) de una signatura $\underline{\Sigma}$ en otra $\underline{\Sigma}'$, el functor $\mathrm{LSen}_{(d,P)}$ de $\mathbf{LSen}(\underline{\Sigma}')$ en $\mathbf{LSen}(\underline{\Sigma})$ que a $F' \colon \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{ALog}(\underline{\Sigma}')$ le hace corresponder $D \circ F' \colon \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{ALog}(\underline{\Sigma})$ y a una transformación natural α de F' en G', le asocia la transformación natural $D * \alpha$ de $D \circ F'$ en $D \circ G'$. De manera que, desde este punto de vista, las lógicas sentenciales constituyen una fibración sobre la categoría de signaturas **Sig**.

Proposition 26. *The interpretations $((d, P), t)$ and $((d', P), t')$ from classical to intuitionistic sentential logic of Kolmogorov*[Kol25] *and Gentzen*[Gent33]*, defined, for every set X, as*

$$
t_X(\gamma) = \begin{cases} \neg\neg v_n, & \text{if } \gamma = v_n; \\ \neg\neg\neg t_X(\phi), & \text{if } \gamma = \neg\phi; \\ \neg\neg(t_X(\phi) \wedge t_X(\psi)), & \text{if } \gamma = \phi \wedge \psi; \\ \neg\neg(t_X(\phi) \vee t_X(\psi)), & \text{if } \gamma = \phi \vee \psi; \\ \neg\neg(t_X(\phi) \wedge t_X(\psi)), & \text{if } \gamma = \phi \to \psi. \end{cases}
$$

and

$$
t'_X(\gamma) = \begin{cases} \neg\neg v_n, & \text{if } \gamma = v_n; \\ \neg t'_X(\phi), & \text{if } \gamma = \neg\phi; \\ t'_X(\phi) \wedge t'_X(\psi), & \text{if } \gamma = \phi \wedge \psi; \\ \neg(\neg t'_X(\phi) \wedge \neg t'_X(\psi)), & \text{if } \gamma = \phi \vee \psi; \\ t'_X(\phi) \to t'_X(\psi), & \text{if } \gamma = \phi \to \psi. \end{cases}
$$

respectively, are such that, para cada conjunto de fórmulas Γ y cada fórmula ϕ,

$$
\Gamma \vdash_{\mathrm{c}} \phi \text{ iff } t_X[\Gamma] \vdash_{\mathrm{i}} t_X(\phi) \quad \text{and} \quad \Gamma \vdash_{\mathrm{c}} \phi \text{ iff } t'_X[\Gamma] \vdash_{\mathrm{i}} t'_X(\phi).
$$

Además, para cada fórmula ϕ, tenemos que

$$
\vdash_{\mathrm{i}} t_X(\phi) \leftrightarrow t'_X(\phi),
$$

por lo tanto, para cada conjunto de fórmulas Γ*, se cumple que*

$$t'_X[\Gamma] \subseteq \mathrm{Cn_i}(t_X[\Gamma]) \text{ y } t_X[\Gamma] \subseteq \mathrm{Cn_i}(t'_X[\Gamma]).$$

As is well known, the interpretations from classical to intuitionistic sentential logic of Kolmogorov, $((d,P),t)$, and Gentzen, $((d',P),t')$, are intuitionistically equivalent, i.e., for every set X and $\psi \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X)$, it is true that $\vdash_{\mathrm{i},X} t_X(\psi) \leftrightarrow t'_X(\psi)$. This means, categorically, that the natural endotransformation $\varepsilon = (\mathrm{Cn}_{\mathrm{i},X})_{X\in\mathrm{Ob}(\mathbf{Set})}$ of the functor $\mathrm{Sub}\circ\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}$ is a weak coequalizer of the natural transformations $\delta = (\mathrm{Sub}(t_X)\circ\{\cdot\}_{\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X)})_{X\in\mathrm{Ob}(\mathbf{Set})}$ and $\delta' = (\mathrm{Sub}(t'_X)\circ\{\cdot\}_{\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X)})_{X\in\mathrm{Ob}(\mathbf{Set})}$ defined from $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}\colon \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}$ to $\mathrm{Sub}\circ\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}\colon \mathbf{Set}\longrightarrow\mathbf{Set}$, where, for every set X, $\{\cdot\}_{\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X)}$ is the mapping from $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X)$ to $\mathrm{Sub}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X))$ that to a $\psi\in\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X)$ associates $\{\psi\}$.

En particular, para un conjunto de variables infinito numerable, arbitrario pero fijo V, tenemos dos deformaciones de Kleisli de $(t_V[\cdot]\circ\{\cdot\},\lambda)$ en $(t'_V[\cdot]\circ\{\cdot\},\lambda')$ y de $(t'_V[\cdot]\circ\{\cdot\},\lambda')$ en $(t_V[\cdot]\circ\{\cdot\},\lambda)$, inversas una de otra, tal como muestra el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Fr}_{\underline{\Sigma}}(V) \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\{\cdot\}"'] & \mathbf{Fr}_{\underline{\Sigma}}(V) \arrow[d, "\{\cdot\}"] \\
\mathbf{Sub}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(V)) \arrow[r, "\mathrm{Cn_c}"] \arrow[d, bend right, "t_V[\cdot]"'] \arrow[d, bend left, "t'_V[\cdot]"] \arrow[d, phantom, "\leftsquigarrow\rightsquigarrow"] & \mathbf{Sub}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(V)) \arrow[d, bend right, "t_V[\cdot]"'] \arrow[d, bend left, "t'_V[\cdot]"] \arrow[d, phantom, "\leftsquigarrow\rightsquigarrow"] \\
\mathbf{Sub}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Delta}}(V)) \arrow[r, "\mathrm{Cn_i}"'] & \mathbf{Sub}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Delta}}(V))
\end{tikzcd}$$

en donde la fila superior del último diagrama, representa la mónada asociada al conjunto $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(V)$, a través de la categoría discreta determinada por tal conjunto.

Proposition 27. *There are two adjoint situations*

$$K \dashv J \dashv G\colon \mathbf{CSL} \longrightarrow \mathbf{ISL},$$

with K *and* G *full embeddings from* **CSL** *to* **ISL***, and* J *injective on objects from* **ISL** *to* **CSL***, together with a pointwise monomorphic natural transformation* ξ *from* K *to* G*.*

Since the functors G and K from **CSL** to **ISL** are full embeddings and both have the same functor J as a left and a right adjoint, respectively, we could say that, from the syntactical point of view, the intellectual reflexion of Kolmogorov, Gentzen, Gödel, and others, on the relationship between the classical and intuitionistic sentential logics, becomes categorically reflected by the fact that **CSL** can be identified with a full reflective and coreflective subcategory of **ISL**. Moreover, the category **ISL** is subordinated to **CSL** by the existence of a pointwise natural transformation ξ from K to G.

On the semantic side, the regularization functor $R\colon \mathbf{Heyt}\longrightarrow\mathbf{Bool}$, which is a left adjoint to the canonical inclusion $I\colon\mathbf{Bool}\longrightarrow\mathbf{Heyt}$, has, in his turn, a left adjoint T. Indeed, since every Boolean algebra $\underline{B}$ is isomorphic to a Boolean algebra of the form $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(X)/\equiv_{\mathrm{c},\Phi}$, for some set X and classical sentential pretheory Φ, T is the functor which assigns, up to isomorphism, the Heyting algebra $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(X)/\equiv_{\mathrm{i},t_X(\Phi)}$ to $\underline{B}$. Moreover, there is a natural transformation ζ from T to I which is pointwise monomorphic. Because the functors I and T from **Bool** to **Heyt** are full embeddings and both have the same functor R as a left and a right adjoint, respectively, we could say that, from the semantical point of view, **Bool** can be identified with a full reflective and coreflective subcategory of **Heyt**. Moreover, the category **Heyt** is subordinated to **Bool** by the existence of a pointwise natural transformation ζ from T to I.

Corollary 4. *The, non-commutative, diagrams:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{CSL} \arrow[r, "\mathrm{LT_c}"] \arrow[d, shift left, "G"] & \mathbf{Bool} \arrow[d, shift left, "I"] \\
\mathbf{ISL} \arrow[r, "\mathrm{LT_i}"'] \arrow[u, shift left, "J"] & \mathbf{Heyt} \arrow[u, shift left, "R"]
\end{tikzcd}
\quad \textit{and} \quad
\begin{tikzcd}
\mathbf{CSL} \arrow[r, "\mathrm{LT_c}"] \arrow[d, shift right, "K"'] & \mathbf{Bool} \arrow[d, shift right, "T"'] \\
\mathbf{ISL} \arrow[r, "\mathrm{LT_i}"'] \arrow[u, shift right, "J"'] & \mathbf{Heyt}, \arrow[u, shift right, "R"']
\end{tikzcd}
$$

are adjoint squares, i.e., there are natural transformations

$$\lambda\colon R \circ \mathrm{LT_i} \Longrightarrow \mathrm{LT_c} \circ J,\ \mu\colon \mathrm{LT_i} \circ G \Longrightarrow I \circ \mathrm{LT_c} \ \textit{and}\ \nu\colon \mathrm{LT_i} \circ K \Longrightarrow T \circ \mathrm{LT_c}$$

such that $\lambda \dashv \mu$ and $\lambda \dashv \nu$. Moreover, the following diagram commutes

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{CSL} \arrow[ddr, phantom, "\overset{\nu}{\Rrightarrow}\quad\overset{\mu}{\Rrightarrow}"] \arrow[rd, "\mathrm{LT_c}"] \arrow[dd, bend right, "K"'] \arrow[dd, bend left, "G"] \arrow[dd, phantom, "\overset{\xi}{\Rightarrow}"] & \\
& \mathbf{Bool} \arrow[dd, bend right, "T"'] \arrow[dd, bend left, "I"] \arrow[dd, phantom, "\overset{\zeta}{\Rightarrow}"] \\
\mathbf{ISL} \arrow[rd, "\mathrm{LT_i}"'] & \\
& \mathbf{Heyt}
\end{tikzcd}
$$

i.e., $(\zeta * \mathrm{LT_c}) \circ \nu = \mu \circ (\mathrm{LT_i} * \xi)$.

2.3. **Hall and Bénabou algebras.** The Hall algebras or the Bénabou algebras are models of the essential properties of the clones of heterogeneous operations. In this section we will show that the categories of Hall and Bénabou algebras are equivalent and also that there exists a biunivocal correspondence between the Bénabou algebras and the Bénabou theories, that are a generalization of the algebraic theories of Lawvere. Moreover, these algebras will be used, among other things, to define, later on, the composition of the derivors and the F-morphisms from an h-signature into another, and also to exemplify an equivalence in a 2-category of pretheories, F-morphisms and deformations.

We begin by defining the equational class of the Hall algebras, that are a equational presentation of the essential properties of the clones of operations.

Definition 14. Let S be a set of sorts. A Hall algebra for S is a heterogeneous $(\underline{\Sigma}^{\mathrm{H}_S}, \mathcal{E}^{\mathrm{H}_S})$-algebra, where $\underline{\Sigma}^{\mathrm{H}_S} = (S^\star \times S, \Sigma^{\mathrm{H}_S})$, with Σ^{H_S} the heterogeneous $S^\star \times S$-sorted signature, i.e., the $(S^\star \times S)^\star \times (S^\star \times S)$-sorted set, defined as

(1) For every $w \in S^\star$ and $i \in |w|$,

$$\pi^w_i \colon \lambda \longrightarrow (w, w_i)$$

(2) For every u, $w \in S^\star$ and $s \in S$,

$$\xi_{u,w,s} \colon ((w, s), (u, w_0), \dots, (u, w_{|w|-1})) \longrightarrow (u, s)$$

and $\mathcal{E}^{\mathrm{H}_S} \subseteq \mathrm{Eq}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma^{\mathrm{H}_S})$ has the following equations

H1. *Projection.* For every u, $w \in S^\star$ and $i \in |w|$, the equation of type $((u, w_0), \dots, (u, w_{|w|-1})), (u, w_i)$

$$\xi_{u,w,w_i}(\pi^w_i, v^{u,w_0}_0, \dots, v^{u,w_{|w|-1}}_{|w|-1}) = v^{u,w_i}_i$$

H2. *Identity.* For every $u \in S^\star$ and $j \in |u|$, the equation of type $((u, u_j)), (u, u_j)$

$$\xi_{u,u,u_j}(v^{u,u_j}_j, \pi^u_0, \dots, \pi^u_{|u|-1}) = v^{u,u_j}_j$$

H3. *Associativity.* For every u, v, $w \in S^\star$ and $s \in S$, the equation of type $((w, s), (v, w_0), \dots, (v, w_{|w|-1}), (u, v_0), \dots (u, v_{|v|-1})), (u, s)$

$$\begin{aligned}\xi_{u,v,s}(\xi_{v,w,s}(v^{w,s}_0, v^{v,w_0}_1, \dots, v^{v,w_{|w|-1}}_{|w|}), v^{u,v_0}_{|w|+1}, \dots, v^{u,v_{|v|-1}}_{|w|+|v|}) = \\ \xi_{u,w,s}(v^{w,s}_0, \xi_{u,v,w_0}(v^{v,w_0}_1, v^{u,v_0}_{|w|+1}, \dots, v^{u,v_{|v|-1}}_{|w|+|v|}), \dots, \\ \xi_{u,v,w_{|w|-1}}(v^{v,w_{|w|-1}}_{|w|}, v^{u,v_0}_{|w|+1}, \dots, v^{u,v_{|v|-1}}_{|w|+|v|}))\end{aligned}$$

where, for $n \in \mathbb{N}$ and $(u, s) \in S^\star \times S$, $v^{u,s}_n$ is $v^{(u,s)}_n$, i.e., the n-th variable of type (u, s).

Let us remark that in H3, for $w = \lambda$ we have that the constant mappings are invariant:

The constants are invariant. For every u, $w \in S^\star$ and $s \in S$, the equation of type $((\lambda, s), (u, w_0), \dots, (u, w_{|w|-1})), (\lambda, s)$

$$\xi_{u,w,s}(\xi_{w,\lambda,s}(v^{\lambda,s}_0), v^{u,w_0}_1, \dots, v^{u,w_{|w|-1}}_{|w|}) = \xi_{u,\lambda,s}(v^{\lambda,s}_0)$$

We call the constants π^w_i the projections, and to the formal heterogeneous operations $\xi_{u,w,s}$ the operators of substitution.

For every S-sorted set A, the $S^\star \times S$-sorted set

$$\mathrm{Op}_{\mathrm{H}_S}(A) = (\mathbf{Set}(A_w, A_s))_{(w,s) \in S^\star \times S}$$

is endowed with a structure of Hall algebra, if we realize the projections as the true projections and the operators of substitution as the generalized composition of mappings. The closed sets of this h-algebra are the clones of operations and were investigated originally, for operations on ordinary sets, by Philip Hall (see e.g.,[Coh81]).

Proposition 28. *Let A be an S-sorted set and $\underline{\mathrm{Op}}_{\mathrm{H}_S}(A)$ the heterogeneous Σ^{H_S}-algebra with underlying* h*-set $\mathrm{Op}_{\mathrm{H}_S}(A)$ and* h*-algebraic structure F defined as*

(1) *For every $w \in S^\star$ and $i \in |w|$, $F_{\pi^w_i} = \mathrm{pr}^A_{w,i}$*
(2) *For every $u, w \in S^\star$ and $s \in S$, $F_{\xi_{u,w,s}}$ is defined, for every $f \in A_s^{A_w}$ and $g \in A_w^{A_u}$, as $F_{\xi_{u,w,s}}(f, g_0, \dots, g_{|w|-1}) = f \circ \langle g_i \rangle_{i \in |w|}$*

Then $\underline{\mathrm{Op}}_{\mathrm{H}_S}(A)$ is a Hall algebra.

Proof. The equations of Hall assert that the following diagrams commute

Projection

$$\begin{tikzcd} A_u \arrow[d, "\langle g_i \rangle_{i \in |w|}"'] \arrow[dr, "g_i"] & \\ A_w \arrow[r, "\mathrm{pr}^w_i"'] & A_{w_i} \end{tikzcd}$$

Identity

$$\begin{tikzcd} A_u \arrow[d, "\langle \mathrm{pr}^u_i \rangle_{i \in |u|}"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A_u \arrow[r, "f"'] & A_s \end{tikzcd}$$

Associativity

$$
\begin{tikzcd}
 & A_u \arrow[dl, "g_j \circ h"'] \arrow[d, "k"] \\
A_{w_j} & A_w \arrow[l, "\mathrm{pr}_j^w"] \arrow[d, "f"] \\
 & A_s
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
A_u \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "h_i"] & \\
A_v \arrow[r, "\mathrm{pr}_i^v"'] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "g_i"] & A_{w_j} \\
A_w \arrow[r, "\mathrm{pr}_j^w"'] \arrow[d, "f"'] & A_{w_j} \\
A_s &
\end{tikzcd}
$$

Constants are invariant

$$
\begin{tikzcd}
A_u \arrow[dd, "!_{A_u}"'] \\
\\
A_\lambda \arrow[d, "f"'] \\
A_s
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
A_u \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "g_j"] & \\
A_w \arrow[r, "\mathrm{pr}_j^w"'] \arrow[d, "!_{A_w}"'] & A_{w_j} \\
A_\lambda \arrow[d, "f"'] & \\
A_s &
\end{tikzcd}
$$

where $g = \langle g_j \rangle_{j \in |w|}$, $h = \langle h_i \rangle_{i \in |w|}$ and $k = \langle g_j \circ \langle h_i \rangle_{i \in |v|} \rangle_{j \in |w|}$.

Let us remark that, as a particular case of substitution, we also have $\xi_{u,\lambda,s}$, that converts constants of type $\kappa^a_{\lambda,s}$ into constants of type $\kappa^a_{u,s}$. $\square$

For every h-signature $\underline{\Sigma}$, the $S^\star \times S$-sorted set

$$\mathrm{Pol}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma) = (\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_s)_{(w,s) \in S^\star \times S}$$

is also endowed with a structure of Hall algebra that formalizes the concept of substitution.

Proposition 29. *Let $\underline{\Sigma}$ be an* h*-signature and $\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)$ the heterogeneous Σ^{H_S}-algebra with underlying* h*-set $\mathrm{Pol}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)$ and* h*-algebraic structure F defined as*

(1) *For every $w \in S^\star$ and $i \in |w|$, $F_{\pi^w_i}$ is the image under $\eta^{\downarrow w}_{w_i}$ of the variable $v^{w_i}_i$.*

(2) *For every $u, w \in S^\star$ and $s \in S$, $F_{\xi_{u,w,s}}$ is the mapping*

$$F_{\xi_{u,w,s}} \colon \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_s \times \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow u)_{w_0} \times \cdots \times \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow u)_{w_{|w|-1}} \longrightarrow \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow u)_s$$

that to $(P, Q_0, \ldots, Q_{|w|-1})$ assigns the formal h*-polynomial*

$$P \circ \langle Q_0, \ldots, Q_{|w|-1} \rangle$$

defined as $(Q_0, \ldots, Q_{|w|-1})^\sharp_s(P)$, where $(Q_0, \ldots, Q_{|w|-1})^\sharp$ is the unique homomorphism from $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)$ into $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow u)$ such that the following diagram commutes

$$
\begin{tikzcd}
\downarrow w \arrow[r, "\eta^{\downarrow w}"] \arrow[dr, "(Q_0, \ldots, Q_{|w|-1})"'] & \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w) \arrow[d, "(Q_0, \ldots, Q_{|w|-1})^\sharp"] \\
 & \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow u)
\end{tikzcd}
$$

Then $\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)$ is a Hall algebra.

We denote by $\mathbf{Alg}(\mathrm{H}_S)$ the category of Hall algebras for S and homomorphisms between Hall algebras. The forgetful functor $\mathrm{G}_{\mathrm{H}_S}$ from $\mathbf{Alg}(\mathrm{H}_S)$ into $\mathbf{Set}^{S^\star \times S}$ has a left adjoint $\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{H}_S}$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Alg}(\mathrm{H}_S) \arrow[r, shift left, "\mathrm{G}_{\mathrm{H}_S}"] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{Set}^{S^\star \times S} \arrow[l, shift left, "\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{H}_S}"]
\end{tikzcd}
$$

that to an $S^\star \times S$-sorted set assigns the corresponding free Hall algebra.

Now we show that, for every $S^{\star} \times S$-sorted set Σ, $\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)$, the free Hall algebra on Σ, is isomorphic to $\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)$.

Definition 15. Let $\underline{A}$ be a Hall algebra and $\Sigma = (\Sigma_{w,s})_{(w,s)\in S^{\star}\times S}$ an S-sorted signature. Then, for every $f\colon \Sigma \longrightarrow A$ and $u \in S^{\star}$, $\underline{A}^{f,u}$ is the heterogeneous $\underline{\Sigma}$-algebra with $A_u = (A_{u,s})_{s\in S}$ as underlying S-sorted set and with heterogeneous algebraic structure $F^{f,u}$, defined, for every $(w,s) \in S^{\star} \times S$, as

$$F^{f,u}_{w,s}\begin{cases} \Sigma_{w,s} \longrightarrow \mathrm{Op}_w(A_u)_s \\ \quad\sigma \quad\longmapsto \begin{cases} \quad(A_u)_w & \longrightarrow (A_u)_s \\ (a_0,\dots,a_{|w|-1}) & \longmapsto \xi^{\underline{A}}_{u,w,s}(f(\sigma),a_0,\dots,a_{|w|-1}) \end{cases} \end{cases}$$

where $\mathrm{Op}_w(A_u) = A_u^{(A_u)_w}$ and $\mathrm{Op}_w(A_u)_s = (A_u)_s^{(A_u)_w}$.

Let $p^u\colon \downarrow u \longrightarrow A_u$ be the S-sorted mapping defined as $p^u_s(v^s_i) = (\pi^u_i)^{\underline{A}}$. Then, by the universal property of $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow u)$, there exists a unique homomorphism $(p^u)^\sharp$ from $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow u)$ into $\underline{A}^{f,u}$ such that the following diagram commutes

$$\begin{tikzcd} \downarrow u \arrow[r, "\eta^{\downarrow u}"] \arrow[dr, "p^u"'] & \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow u) \arrow[d, "(p^u)^\sharp"] \\ & A_u \end{tikzcd}$$

Let us remark that for a $\underline{\Sigma}$-algebra $\underline{B} = (B,G)$, $G\colon \Sigma \longrightarrow \mathrm{Op}_{\mathrm{H}_S}(B)$, and $\underline{B} \cong (\underline{\mathrm{Op}}_{\mathrm{H}_S}(B))^{G,\lambda}$. Moreover, for every $u \in S^{\star}$ we have that $\underline{\mathrm{Op}}_u(\underline{B}) = \underline{B}^{B_u} \cong (\underline{\mathrm{Op}}_{\mathrm{H}_S}(B))^{G,u}$.

Lemma 5. *Let $\underline{A}$ be a Hall algebra, Σ an S-sorted signature, $f\colon \Sigma \longrightarrow A_u$ and $u \in S^{\star}$. Then, for every $P \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_s$ and $a \in (A_u)_w$, we have that*

$$P^{\underline{A}^{f,u}}(a_0,\dots,a_{|w|-1}) = \xi^{\underline{A}}_{u,w,s}((p^w)^\sharp_s(P),a_0,\dots,a_{|w|-1})$$

Proof. By algebraic induction on the complexity of P. If P is a variable v^s_i, with $i \in |w|$, then

$$\begin{aligned} v_i^{s,\underline{A}^{f,u}}(a_0,\dots,a_{|w|-1}) &= a^\sharp_{w_i}(v^s_i) \\ &= a_i \\ &= \xi^{\underline{A}}_{u,w,s}((\pi^w_i)^{\underline{A}},a_0,\dots,a_{|w|-1}) \quad \text{(H1)} \\ &= \xi^{\underline{A}}_{u,w,s}((p^w)^\sharp_s(v^s_i),a_0,\dots,a_{|w|-1}) \end{aligned}$$

Let us assume that $P = \sigma(Q_0, \ldots, Q_{|x|-1})$, with $\sigma\colon x \longrightarrow s$ and that, for every $j \in |x|$, $Q_j \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_{x_j}$ fulfills the induction hypothesis. Then we have that

$$\begin{aligned}
&(\sigma(Q_0, \ldots, Q_{|x|-1}))^{\underline{A}^{f,u}}(a_0, \ldots, a_{|w|-1})\\
&= \sigma^{\underline{A}^{f,u}}(Q_0^{\underline{A}^{f,u}}(a_0, \ldots, a_{|w|-1}), \ldots, Q_{|x|-1}^{\underline{A}^{f,u}}(a_0, \ldots, a_{|w|-1}))\\
&= \xi^{\underline{A}}_{u,x,s}(f(\sigma), Q_0^{\underline{A}^{f,u}}(a_0, \ldots, a_{|w|-1}), \ldots, Q_{|x|-1}^{\underline{A}^{f,u}}(a_0, \ldots, a_{|w|-1}))\\
&= \xi^{\underline{A}}_{u,x,s}(f(\sigma), \xi^{\underline{A}}_{u,w,x_0}((p^w)^\sharp_{x_0}(Q_0), a_0, \ldots, a_{|w|-1}), \ldots,\\
&\qquad\qquad \xi^{\underline{A}}_{u,w,x_{|x|-1}}((p^w)^\sharp_{x_{|x|-1}}(Q_{|x|-1}), a_0, \ldots, a_{|w|-1})) \quad \text{(Ind. hyp.)}\\
&= \xi^{\underline{A}}_{u,w,s}(\xi^{\underline{A}}_{w,x,s}(f(\sigma), (p^w)^\sharp_{x_0}(Q_0), \ldots, (p^w)^\sharp_{x_{|x|-1}}(Q_{|x|-1})), a_0, \ldots, a_{|w|-1}) \text{(H3)}\\
&= \xi^{\underline{A}}_{u,w,s}(\sigma^{\underline{A}_w}((p^w)^\sharp_{x_0}(Q_0), \ldots, (p^w)^\sharp_{x_{|x|-1}}(Q_{|x|-1})), a_0, \ldots, a_{|w|-1})\\
&= \xi^{\underline{A}}_{u,w,s}((p^w)^\sharp_s(\sigma, Q_0, \ldots, Q_{|x|-1}), a_0, \ldots, a_{|w|-1})\\
&= \xi^{\underline{A}}_{u,w,s}((p^w)^\sharp_s(P), a_0, \ldots, a_{|w|-1})
\end{aligned}$$

□

Proposition 30. *Let* $\underline{\Sigma}$ *be an* h*-signature. Then* $\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)$ *and* $\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)$ *are isomorphic.*

Proof. It is enough to show that $\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)$ has the universal property of the free Hall algebra on Σ. Let h be the $S^\star \times S$-sorted mapping defined, for every $(w,s) \in S^\star \times S$, as

$$h_{w,s}\left\{\begin{array}{ccc} \Sigma_{w,s} & \longrightarrow & \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_s \\ \sigma & \longmapsto & \sigma(v_0^s, \ldots, v_{|w|-1}^s) \end{array}\right.$$

Let $\underline{A}$ be a Hall algebra and $f\colon \Sigma \longrightarrow A$ an $S^\star \times S$-sorted mapping. Then, for every $u \in S^\star$, we have the S-sorted mapping $(p^u)^\sharp$ from $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow u)$ into $\underline{A}^{f,u}$, the canonical extension of $p^u\colon \downarrow u \longrightarrow A_u$. Let $\widehat{f}\colon \mathrm{Pol}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma) \longrightarrow A$ be the $S^\star \times S$-sorted mapping defined, for every $(w,s) \in S^\star \times S$, as $\widehat{f}_{w,s} = (p^u)^\sharp_s$. Let us see that $\widehat{f}$ is a homomorphism of Hall algebras. Let $w \in S^\star$ and $i \in |w|$ be. Then we have that

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_{w,w_i}(\pi_i^w)^{\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)} &= \widehat{f}_{w,w_i}(v_i^s)\\
&= p^w_{w_i}(v_i^s)\\
&= (\pi_i^w)^{\underline{A}}
\end{aligned}$$

Let $P \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_s$ and $Q \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow u)_w$ be. Then we have that

$$\begin{aligned}
&\widehat{f}_{u,s}(\xi^{\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)}_{u,w,s}(P, Q_0, \ldots, Q_{|w|-1}))\\
&= (p^u)^\sharp_s(Q^\sharp_s(P))\\
&= ((p^u)^\sharp \circ Q)^\sharp_s(P)\\
&= P^{\underline{A}^{f,u}}((p^u)^\sharp_{w_0}(Q_0), \ldots, (p^u)^\sharp_{w_{|w|-1}}(Q_{|w|-1}))\\
&= \xi^{\underline{A}}_{u,w,s}((p^w)^\sharp_s(P), (p^u)^\sharp_{w_0}(Q_0), \ldots, (p^u)^\sharp_{w_{|w|-1}}(Q_{|w|-1})) \qquad \textit{(by Lemma 5)}\\
&= \xi^{\underline{A}}_{u,w,s}(\widehat{f}_{w,s}(P), \widehat{f}_{(u,w_0)}(Q_0), \ldots, \widehat{f}_{(u,w_{|w|-1})}(Q_{|w|-1}))
\end{aligned}$$

Therefore the $S^{\star}\times S$-sorted mapping $\widehat{f}$ is a homomorphism. Moreover, the following diagram commutes

$$\begin{tikzcd}
\Sigma \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{Pol}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma) \arrow[d, "\widehat{f}"] \\
 & \underline{A}
\end{tikzcd}$$

because, for every $w \in S^{\star}$, $s \in S$, and $\sigma\colon w \longrightarrow s$, we have that

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_{w,s}(h_{w,s}(\sigma)) &= (p^{w})^{\sharp}_{s}(\sigma(v^{s}_{0},\ldots,v^{s}_{|w|-1})) \\
&= \sigma^{\underline{A}_w}((g_w)_{w_0}(v^{s}_{0}),\ldots,(g_w)_{w_{|w|-1}}(v^{s}_{|w|-1})) \\
&= \xi^{\underline{A}}_{w,w,s}(f(\sigma),(\pi^{w}_{0})\underline{A},\ldots,(\pi^{w}_{|w|-1})\underline{A}) \\
&= f(\sigma) \quad \text{(H2)}
\end{aligned}$$

It is obvious that $\widehat{f}$ is the unique homomorphism satisfying the preceding property. Henceforth $\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)$ is isomorphic to $\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)$. □

Proposition 31. *Let $\underline{A}$ be an heterogeneous $\underline{\Sigma}$-algebra. Then the $S^{\star}\times S$-sorted mapping $\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{\mathrm{H}_S}$ from $\mathrm{Pol}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)$ into $\mathrm{Op}_{\mathrm{H}_S}(A)$ defined as*

$$\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{\mathrm{H}_S} = (\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{w,s})_{(w,s)\in S^{\star}\times S}$$

where, for every $w \in S^{\star}$, $\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{w} = (\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{w,s})_{s\in S}$ is the unique homomorphism from $\underline{\mathrm{Fr}_{\Sigma}}(\downarrow w)$ into $\underline{\mathrm{Op}}_{w}(\underline{A})$ such that the following diagram commutes

$$\begin{tikzcd}
\downarrow w \arrow[r, "\eta^{\downarrow w}"] \arrow[dr, "\mathrm{p}^{\underline{A}}_{w}"'] & \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w) \arrow[d, "\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{w}"] \\
 & \mathrm{Op}_{w}(\underline{A})
\end{tikzcd}$$

where p^{A}_{w} is the S-sorted mapping defined, for every $s \in S$ and $v^{s}_{i} \in \downarrow w_s$, as $\mathrm{p}^{A}_{w,s}(v^{s}_{i}) = \mathrm{pr}^{A}_{w,i}$, is a homomorphism of Hall algebras.

Proof. For every $w \in S^{\star}$, we have that

$$\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{w,s}(\pi^{w}_{v^{s}_{i}}) = \mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{w,s}(v_i) = \mathrm{pr}^{A}_{w,i} = (\pi^{w}_{i})^{\underline{\mathrm{Op}}_{\mathrm{H}}(S,A)}$$

Moreover, for every $u, w \in S^{\star}$, $s \in S$, $P \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_s$ and $Q \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow u)_w$, we have that

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{u,s}(\xi_{u,w,s}(P,Q_0,\ldots,Q_{|w|-1})) \\
&= \xi^{\underline{\mathrm{Op}}_{\mathrm{H}_S}(A)}_{u,w,s}(\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{w,s}(P),\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{u,w_0}(Q_0),\ldots,\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{u,w_{|w|-1}}(Q_{|w|-1}))
\end{aligned}$$

by algebraic induction on the complexity of P. □

From the adjunction $\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{H}_S} \dashv \mathrm{G}_{\mathrm{H}_S}$ it follows that, for every S-sorted set A and h-signature $\underline{\Sigma}$, the sets

$$\mathbf{Set}^{S^{\star}\times S}(\Sigma,\mathrm{Op}_{\mathrm{H}_S}(A)) \text{ and } \mathbf{Alg}(\mathrm{H}_S)(\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma),\underline{\mathrm{Op}}_{\mathrm{H}_S}(A))$$

are isomorphic. The isomorphism assigns to every h-structure F on A the homomorphism of Hall algebras $\mathrm{Pd}^{(A,F)}_{\mathrm{H}_S}$ and the inverse mapping assigns to $h\colon \underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma) \longrightarrow \underline{\mathrm{Op}}_{\mathrm{H}_S}(A)$, the h-algebraic structure $\mathrm{G}_{\mathrm{H}_S}(h)\circ\eta^{\Sigma}$ on A.

La teoría de una $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$ respecto de las ecuaciones en $\mathrm{Eq}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)$, $\mathrm{Th}_{\Sigma,\mathrm{H}_S}(A)$, es, por definición, $(\mathrm{Ker}(\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_w)_s)_{(w,s)\in S^\star\times S}$, que es exactamente el núcleo de $\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{\mathrm{H}_S}$ y, por consiguiente, una congruencia en $\mathrm{Pol}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)$. Lo anterior es extensible a clases de $\underline{\Sigma}$-álgebras, y en particular, a los modelos de una familia $\mathcal{E}$ de $\underline{\Sigma}$-ecuaciones finitarias. Como consecuencia, el operador congruencia generada en $\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)$ es correcto respecto del operador consecuencia semántica $\mathrm{Cn}_{\Sigma,\mathrm{H}_S}$, la restricción de $\mathrm{Cn}_{\Sigma,\mathrm{H}_S}$ a las ecuaciones en $\mathrm{Eq}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)$.

Proposition 32. *Sea $\mathcal{K}$ una clase de $\underline{\Sigma}$-álgebras. Entonces $\mathrm{Th}_{\Sigma,\mathrm{H}_S}(\mathcal{K})$ es una congruencia sobre $\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)$.*

Proof. Puesto que $\mathrm{Th}_{\Sigma,\mathrm{H}_S}(\mathcal{K})$ es $\bigcap_{\underline{A}\in\mathcal{K}}\mathrm{Ker}(\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{\mathrm{H}_S})\in\mathrm{Cgr}(\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma))$. □

Corollary 5 (Teorema de corrección)**.** *Sea $\underline{\Sigma}$ una signatura algebraica. Entonces se cumple que $\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)}\leq\mathrm{Cn}_{\Sigma,\mathrm{H}_S}$.* □

Sea $\underline{A}=(A,F)$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra y $\mathrm{Pol}_{\mathrm{H}_S}(\underline{A})=(\mathrm{Pol}(\underline{A})_{w,s})_{(w,s)\in S^\star\times S}$. Entonces $\mathrm{Pol}_{\mathrm{H}_S}(\underline{A})=\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{\mathrm{H}_S}[\mathrm{Pol}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)]$. Además $\mathrm{Pol}_{\mathrm{H}_S}(\underline{A})$ es la subálgebra de $\underline{\mathrm{Op}}_{\mathrm{H}_S}(A)$ generada por las operaciones estructurales $F[\Sigma]$ de $\underline{A}$.

Proposition 33. *Sea $\underline{A}=(A,F)$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra. Entonces $\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{\mathrm{H}_S}$ es el único homomorfismo de álgebras de Hall que extiende a F, la estructura algebraica de $\underline{A}$.*

$$\begin{tikzcd}
\Sigma \arrow[r, "\eta^\Sigma"] \arrow[dr, "F"'] & \mathrm{Fr}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "F^\sharp"] & \mathrm{Pol}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma) \arrow[dl, "\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{\mathrm{H}_S}"] \\
 & \mathrm{Op}_{\mathrm{H}_S}(A) &
\end{tikzcd}$$

□

Proof. Es suficiente comprobar que $F=\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{\mathrm{H}_S}\circ\eta^\Sigma$, lo cual es inmediato puesto que, para cada $\sigma\colon w\longrightarrow s$, $F_\sigma=F^{\underline{A}}_\sigma\circ\langle\mathrm{pr}^A_{w,w_0},\ldots,\mathrm{pr}^A_{w,|w|-1}\rangle$. □

Cada familia de ecuaciones finitarias $\mathcal{E}$ sobre $\underline{\Sigma}$ es una $S^\star\times S$-relación sobre $\mathrm{Pol}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)$ y como tal, genera una congruencia $\overline{\mathcal{E}}=\mathrm{Cg}_{\mathrm{Pol}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)}(\mathcal{E})$. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra y $\mathcal{E}\subseteq\mathrm{Eq}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)$. Entonces $\underline{A}\models\mathcal{E}$ si y sólo si $\mathcal{E}\subseteq\mathrm{Ker}(\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{\mathrm{H}_S})$, o lo que es equivalente, $\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{\mathrm{H}_S}$ factoriza a través de la proyección canónica de $\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)$ en $\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)/\overline{\mathcal{E}}$.

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma) \arrow[rr, "\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{\mathrm{H}_S}"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}"'] & & \underline{\mathrm{Op}}_{\mathrm{H}_S}(A) \\
 & \underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)/\overline{\mathcal{E}} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

La congruencia generada en el álgebra de Hall de los $\underline{\Sigma}$-términos finitarios por una familia de ecuaciones finitarias $\mathcal{E}$ se puede caracterizar de la manera siguiente.

Proposition 34. *Sea $\mathcal{E}\subseteq\mathrm{Eq}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)$. Entonces $\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)}(\mathcal{E})$ es el menor sub-$S^\star\times S$-conjunto $\overline{\mathcal{E}}$ de $\mathrm{Pol}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)$ que contiene a $\mathcal{E}$ y satisface las condiciones siguientes, para cada $u,w\in S^\star$ y cada $s\in S$:*

(1) Reflexividad. *Para cada $P\in\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_s$, $(P,P)\in\overline{\mathcal{E}}_{w,s}$.*

(2) Simetría. *Para cada* P, $Q \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_s$, *si* $(P,Q) \in \overline{\mathcal{E}}_{w,s}$, $(Q,P) \in \overline{\mathcal{E}}_{w,s}$.
(3) Transitividad. *Para cada* P, Q, $R \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_s$, *si* (P,Q), $(Q,R) \in \overline{\mathcal{E}}_{w,s}$, $(P,R) \in \overline{\mathcal{E}}_{w,s}$.
(4) Substitución. *Para cada* $(P,Q) \in \overline{\mathcal{E}}_{w,s}$, *y cada* $P', Q' \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow u)_w$ *tal que, para cada* $i \in |w|$, $(P'_i, Q'_i) \in \overline{\mathcal{E}}_{u,w_i}$,

$$(\xi_{u,w,s}(P, P'_0, \ldots, P'_{|w|-1}), \xi_{u,w,s}(Q, Q'_0, \ldots, Q'_{|w|-1})) \in \overline{\mathcal{E}}_{u,s}$$

□

Obsérvese que en la proposición anterior, la condición de substitución para $w = \lambda$ exige que si $(P,Q) \in \overline{\mathcal{E}}_{\lambda,s}$ entonces, para cada $u \in S^{\star}$, $(P,Q) \in \overline{\mathcal{E}}_{u,s}$.

Proposition 35. *Sea* $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Eq}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)$. *Si* $(P_i, Q_i) \in \overline{\mathcal{E}}_{(w,w_i)}$ *y* $\sigma\colon w \longrightarrow s$, *entonces* $(\sigma(P_0, \ldots, P_{|w|-1}), \sigma(Q_0, \ldots, Q_{|w|-1})) \in \overline{\mathcal{E}}_{w,s}$.

Proof. Por reflexividad $(\sigma(v_0, \ldots, v_{|w|-1}), \sigma(v_0, \ldots, v_{|w|-1})) \in \overline{\mathcal{E}}_{w,s}$. Pero entonces, por substitución, $(\sigma(P_0, \ldots, P_{|w|-1}), \sigma(Q_0, \ldots, Q_{|w|-1})) \in \overline{\mathcal{E}}_{w,s}$ □

Proposition 36. *Sea* $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Eq}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)$. *Si* $(P,Q) \in \overline{\mathcal{E}}_{w,s}$ *y* f *es un endomorfismo de* $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)$ *entonces* $(f(P), f(Q)) \in \overline{\mathcal{E}}_{w,s}$.

Proof. Para cada $i \in \downarrow w$, la ecuación $(f_{w_i}(v_i), f_{w_i}(v_i))$ está en $\overline{\mathcal{E}}_{(w,w_i)}$. Por substitución, se cumple que

$$(\xi_{w,w,s}(P, f_{w_0}(v_0), \ldots, f_{w_{|w|-1}}(v_{|w|-1})), \xi_{w,w,s}(Q, f_{w_0}(v_0), \ldots, f_{w_{|w|-1}}(v_{|w|-1})))$$

pertenece a $\overline{\mathcal{E}}_{w,s}$, luego $(f(P), f(Q)) \in \overline{\mathcal{E}}_{w,s}$. □

Proposition 37. *Sea* $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Eq}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)$. *Entonces* $\overline{\mathcal{E}}_w = (\overline{\mathcal{E}}_{(w,s)})_{s\in S}$ *es una congruencia totalmente invariante sobre* $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)$.

Proof. Por definición, $\overline{\mathcal{E}}_w$ es una equivalencia sobre $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)$. Por la proposición 35 es compatible con las operaciones en Σ y por la proposición 36 está cerrada bajo endomorfismos. □

La congruencia $\overline{\mathcal{E}}_w$ incluye a $\mathrm{Cg}^{\mathrm{fi}}_{\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)}(\mathcal{E}_w)$, la congruencia totalmente invariante generada por $\mathcal{E}_w = (\mathcal{E}_{w,s})_{s\in S}$. En general, la inclusión es estricta, puesto que $\mathrm{Cg}^{\mathrm{fi}}_{\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)}(\mathcal{E}_w)$ contiene únicamente a las consecuencias de la subfamilia de $\mathcal{E}$ formada por las ecuaciones en $\mathcal{E}$ con variables en $\downarrow w$, mientras que $\overline{\mathcal{E}}_w$ contiene a las ecuaciones con variables en $\downarrow w$ que son consecuencia de todas las ecuaciones en $\mathcal{E}$.

Proposition 38. *Sea* $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Eq}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)$. *Entonces* $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)/\overline{\mathcal{E}}_w \models \mathcal{E}$.

Proof. Claramente, $\overline{\mathcal{E}}_w$ es una congruencia. Sea $(P,Q) \in \mathcal{E}_{u,s}$ y R una valoración $R\colon \downarrow u \longrightarrow \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)/\overline{\mathcal{E}}_w$. Entonces

$$R^{\sharp}(P) = [P(R_0, \ldots, R_{|u|-1})] = [Q(R_0, \ldots, R_{|u|-1})] = R^{\sharp}(Q)$$

□

Proposition 39 (Teorema de adecuación)**.** *Sea* $\underline{\Sigma}$ *una signatura algebraica. Entonces se cumple que* $\mathrm{Cn}_{\Sigma,\mathrm{H}_S} \leq \mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)}$.

Proof. Sea $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Eq}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)$. Si $(P, Q) \in \mathrm{Cn}_{\Sigma,\mathrm{H}_S}(\mathcal{E})_{w,s}$ entonces, puesto que $\underline{\mathrm{Fr}_\Sigma}(\downarrow w)/\overline{\mathcal{E}}_w$ es un modelo de $\mathcal{E}$, $P^{\underline{\mathrm{Fr}_\Sigma}(\downarrow w)/\overline{\mathcal{E}}_w} = Q^{\underline{\mathrm{Fr}_\Sigma}(\downarrow w)/\overline{\mathcal{E}}_w}$. Luego

$$\begin{aligned}
[P] &= [\xi_{w,w,s}(P, \pi^w_0, \dots, \pi^w_{|w|-1})] \\
&= [P^{\underline{\mathrm{Fr}}(\downarrow w)}(v_0, \dots, v_{|w|-1})] \\
&= P^{\underline{\mathrm{Fr}_\Sigma}(\downarrow w)/\overline{\mathcal{E}}_w}([v_0], \dots, [v_{|w|-1}]) \\
&= Q^{\underline{\mathrm{Fr}_\Sigma}(\downarrow w)/\overline{\mathcal{E}}_w}([v_0], \dots, [v_{|w|-1}]) \\
&= [Q^{\underline{\mathrm{Fr}}(\downarrow w)}(v_0, \dots, v_{|w|-1})] \\
&= [\xi_{w,w,s}(Q, \pi^w_0, \dots, \pi^w_{|w|-1})] \\
&= [Q]
\end{aligned}$$

y $(P, Q) \in \mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)}(\mathcal{E})_{w,s}$. □

Corollary 6 (Teorema de completud)**.** *Sea* Σ *una signatura algebraica. Entonces* $\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)} = \mathrm{Cn}_{\Sigma,\mathrm{H}_S}$. □

Proposition 40. *Sea* $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Eq}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)$. *Entonces* $\underline{\mathrm{Fr}_\Sigma}(\downarrow w)/\overline{\mathcal{E}}_w = \underline{\mathrm{Fr}_{\Sigma,\mathcal{E}}}(\downarrow w)$

Proof. Puesto que $\overline{\mathcal{E}}_w = \mathrm{Cn}_{\Sigma,\mathrm{H}_S}(\mathcal{E})_w = \equiv^{\mathcal{E}}_{\downarrow w}$. □

El teorema de completud proporciona un cálculo de ecuaciones heterogéneas sobre conjuntos de variables de la forma $\downarrow w$ con $w \in S^\star$. Las condiciones de la proposición 34 pueden ser traducidas para determinar un cálculo de ecuaciones heterogéneas finitarias relativas a los sub-S-conjuntos finitos del conjunto V^S de variables.

Para la descripción de las reglas del cálculo, convenimos que $(P, Q) : (X, s)$ significa que la Σ-ecuación (P, Q) es de tipo (X, s) y que si $P \in \mathrm{Fr}_\Sigma(X)_s$ y $P' \in \mathrm{Fr}_\Sigma(Y)$, entonces la expresión $P(x/P'_{x,s})_{s\in S,\, x\in X_s}$ denota el término $P'^\sharp(P)$.

Proposition 41 (Reglas de deducción)**.** *Las reglas siguientes determinan un operador clausura sobre* $\mathrm{Sub}(\mathrm{Eq}_{V^S}(\Sigma))$ *que es idéntico al operador* Cn_{Σ,V^S}.

R1 Reflexividad.

$$\frac{}{(P, P) : (X, s)} \quad P \in \mathrm{Fr}_\Sigma(X)_s$$

R2 Simetría.

$$\frac{(P, Q) : (X, s)}{(Q, P) : (X, s)}$$

R3 Transitividad.

$$\frac{(P, Q) : (X, s) \qquad (Q, R) : (X, s)}{(P, R) : (X, s)}$$

R4 Substitución generalizada.

$$\frac{(P, Q) : (X, s) \qquad ((P'_{x,s}, Q'_{x,s}) : (Y, s))_{s\in S,\, x\in X_s}}{(P(x/P'_{x,s})_{s\in S,\, x\in X_s}, Q(x/Q'_{x,s})_{s\in S,\, x\in X_s}) : (Y, s)}$$

donde X, $Y \in \mathrm{Sub_f}(V^S)$, $s \in S$.

Proof. Las reglas dadas son la traducción de las condiciones de la proposición 34 para S-conjuntos finitos. □

La regla de substitución generalizada es equivalente a una regla de substitución para ocurrencias particulares de las variables.

Proposition 42. *La regla R4 es equivalente (asumiendo R1) a la siguiente regla*

R4′ Substitución.

$$\frac{(P,Q):(X,s) \qquad (P',Q'):(Y,t)}{(P(x/P'),Q(x/Q')):(X-\delta^s(x)\cup Y,s)} \quad x\in X_t$$

Proof. Veamos que R4 implica R4′. Si $(P,Q):(X,s)$ y $(P',Q'):(Y,t)$ son deducibles y $x\in X_t$, entonces también son deducibles las ecuaciones en la familia $((P''_{x,s},Q''_{x,s}):(X-\delta^s(x)\cup Y,s))_{s\in S,\,x\in X_s}$, donde $P''_{x,t}=P'$, $Q''_{x,t}=Q'$, y en cualquier otro caso $P''_{y,s}=Q''_{y,s}=y$ (por reflexividad). Entonces, por substitución generalizada, $(P(x/P'),Q(x/Q')):(X-\delta^s(x)\cup Y,s)$ es deducible, puesto que $P(x/P')=(P(x/P''_{x,s})_{s\in S,\,x\in X_s}$ y $Q(x/Q')=Q(x/P''_{x,s})_{s\in S,\,x\in X_s}$.

Recíprocamente, R4′ implica R4, mediante $\mathrm{card}(\coprod X)$ aplicaciones de R4′. □

En algunas presentaciones del cálculo de ecuaciones heterogéneas finitarias, e.g., en [GM85], se introducen dos reglas adicionales que permiten la adición y supresión de variables.

Definition 16 (Reglas de abstracción y concreción)**.**

R5 *Abstracción.*

$$\frac{(P,Q):(X,s)}{(P,Q):(X\cup\delta^t(x),s)} \quad x\notin X_t$$

R6 *Concreción.*

$$\frac{(P,Q):(X,s)}{(P,Q):(X-\delta^t(x),s)} \quad x\in X_t,\ x\notin \mathrm{var}(P,Q),\ t \text{ no vacío}$$

donde t no vacío significa que $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\emptyset)_t\neq\emptyset$, i.e., que $t\in\mathrm{supp}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\emptyset))$.

Proposition 43. *Las reglas de abstracción y concreción son reglas derivadas.*

Proof. La regla de abstracción es derivada. Sea $y\neq x$ y tal que $y\notin X_t$. Entonces la ecuación $(y,y):(\delta^s(y)\cup\delta^s(x),s)$ es deducible por reflexividad. Por substitución, se tiene que la ecuación

$$(y(y/P),y(y/Q)):(((\delta^s(y)\cup\delta^t(x))-\delta^s(y))\cup X,s)$$

que es igual a $(P,Q):(X\cup\delta^t(y),s)$, es deducible. Como caso particular se tiene que si $(P,Q):(\emptyset,s)$ es deducible entonces $(P,Q):(\delta^t(y),s)$ es deducible.

La regla de concreción es derivada. Si t no es vacío, existe un $R\in\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(0)_t$ y la ecuación $(R,R):(0,t)$ es deducible. Aplicando la regla de substitución, $(P(x/R),Q(x/R)):(X-\delta^t(x)\cup 0,s)$ es deducible y, puesto que $x\notin\mathrm{var}(P,Q)$, $(P,Q):(X-\delta^t(x),s)$ es deducible. □

Definition 17 (Regla de reemplazo)**.**

R7 *Reemplazo.*

$$\frac{(P^i,Q^i):(X,w_i)}{(\sigma(P_0,\dots,P_{|w|-1}),\sigma(Q_0,\dots,Q_{|w|-1})):(X,s)} \quad \sigma\in\Sigma_{w,s}$$

Proposition 44. *La regla de reemplazo es una regla derivada.*

Proof. Por reflexividad, $(\sigma(v_0,\dots,v_{|w|-1}),\sigma(v_0,\dots,v_{|w|-1})):(\downarrow w,s)$ es deducible. Mediante $|w|$ aplicaciones de la regla de substitución se obtiene la ecuación deseada. □

El cálculo presentado es independiente del tipo de S-conjuntos de variables finitos que se consideren. De hecho, si $\mathcal{X}\subseteq\boldsymbol{\mathcal{U}}^S_{\mathrm{f}}$ es iso-equivalente a $\boldsymbol{\mathcal{U}}^S_{\mathrm{f}}$, entonces las reglas dadas son completas respecto del operador $\mathrm{Cn}_{\underline{\Sigma},\mathcal{X}}$ de consecuencia semántica relativo a $\mathcal{X}$. Es posible definir álgebras de Hall relativas a cualquier $\mathcal{X}\subseteq\boldsymbol{\mathcal{U}}^S_{\mathrm{f}}$ y obtener directamente el cálculo de los párrafos anteriores.

Por otra parte, lo expuesto en esta sección puede ser desarrollado para el caso de las ecuaciones heterogéneas sobre S-conjuntos de variables arbitrarios, aunque para ello es necesario considerar álgebras de Hall infinitarias. Puesto que cada clase ecuacional es una clase ecuacional localmente finitaria, es suficiente considerar S-conjuntos de variables localmente finitarios, e.g., $\mathrm{Sub}_{\mathrm{lf}}(V^S)$. Las álgebras de Hall para $\mathrm{Sub}_{\mathrm{lf}}(V^S) \times S$-conjuntos requieren de operaciones que son localmente finitarias. En general, la ariedad de las operaciones que se han de considerar en las álgebras de Hall está acotada por el cardinal de los S-conjuntos de variables que se consideren.

El cálculo resultante de considerar el operador de congruencia generada en las álgebras de Hall para $\mathrm{Sub}_{\mathrm{lf}}(V^S) \times S$-conjuntos consta de las mismas reglas R1–R4 que en el caso finitario, pero generalizado para S-conjuntos de variables arbitrarios, o si se prefiere, sin pérdida de generalidad, para S-conjuntos de variables localmente finitos. Sin embargo, la regla de substitución, que sigue siendo una regla derivada, ya no es equivalente a la de substitución generalizada, puesto que siendo el S-conjunto de las variables que ocurren en los términos posiblemente infinito, no es posible reemplazar todas las ocurrencias de variables en ellos por un numero finito de substituciones individuales. Por último, las reglas de abstracción y concreción tienen también versiones generalizadas.

Definition 18.

R5′ *Abstracción generalizada.*

$$\frac{(P,Q):(X,s)}{(P,Q):(X\cup Y,s)}$$

R6′ *Concreción generalizada.*

$$\frac{(P,Q):(X,s)}{(P,Q):(X-Y,s)} \quad Y\cap \mathrm{var}(P,Q)=\emptyset,\ \mathrm{supp}(Y)\subseteq \mathrm{supp}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\emptyset))$$

En el caso finitario las reglas de abstracción y concreción generalizada son también válidas (para S-conjuntos de variables finitos) y se deducen de sus versiones normales.

The Bénabou algebras, to be defined below, are equivalent to the Hall algebras, but have an intrinsic value because they are conceptually related to the algebraic theories of Lawvere and Bénabou, and are convenient to treat some complex types of morphisms between h-signatures. Moreover, later on, once we have defined the concept of deformation between F-morphism of theories, that will allow us to define a 2-category $\mathbf{Thp}_{\mathrm{fuj}}$ of presentations of theories, F-morphisms and deformations between F-morphisms, we will show that the presentations of the theories of Hall and Bénabou are equivalent. Now we show the equivalence for the respective categories of algebras.

Definition 19. Let S be set of sorts. A Bénabou algebra for S is an heterogeneous $(\underline{\Sigma}^{\mathrm{B}_S},\mathcal{E}^{\mathrm{B}_S})$-algebra, where $\underline{\Sigma}^{\mathrm{B}_S} = (S^\star\times S^\star,\Sigma^{\mathrm{B}_S})$, with Σ^{B_S} the heterogeneous $(S^\star)^2$-sorted signature, i.e., the $(S^\star\times S^\star)^\star\times(S^\star\times S^\star)$-sorted set, defined as

(1) For every $w\in S^\star$ and $i\in|w|$,

$$\pi^w_i\colon \lambda \longrightarrow (w,(w_i))$$

(2) For every u, $w\in S^\star$,

$$\langle\,\rangle_{u,w}\colon ((u,(w_0)),\dots,(u,(w_{|w|-1}))) \longrightarrow (u,w)$$

(3) For every u, x, $w\in S^\star$,

$$\circ_{u,x,w}\colon ((u,x),(x,w)) \longrightarrow (u,w)$$

and $\mathcal{E}^{\mathrm{B}_S}\subseteq \mathrm{Eq}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma^{\mathrm{B}_S})$ has the following equations

B1. For every u, $w \in S^\star$ and $i \in |w|$, the equation of type $((u,(w_0)),\dots,(u,(w_{|w|-1}))),(u,(w_i))$

$$\pi^w_i \circ_{u,w,(w_i)} \langle v^{u,(w_0)}_0,\dots,v^{u,(w_{|w|-1})}_{|w|-1}\rangle_{u,w} = v^{u,(w_i)}_i$$

B2. For every u and $w \in S^\star$, the equation of type $((u,w)),(u,w)$

$$v^{u,w}_0 \circ_{u,u,w} \langle \pi^u_0,\dots,\pi^u_{|u|-1}\rangle_{u,u} = v^{u,w}_0$$

B3. For every u and $w \in S^\star$, the equation of type $((u,w)),(u,w)$

$$\langle \pi^w_0 \circ_{u,w,w_0} v^{u,w}_0,\dots,\pi^w_{|w|-1} \circ_{u,w,w_{|w|-1}} v^{u,w}_0\rangle_{u,w} = v^{u,w}_0$$

B4. For every $w \in S^\star$, the equation of type $((w,(w_0))),(w,(w_0))$

$$\langle \pi^w_0\rangle_{w,(w_0)} = \pi^w_0$$

B5. For every u, x, w, $y \in S^\star$, the equation of type $((w,y),(x,w),(u,x)),(u,y)$

$$v^{w,y}_0 \circ_{u,w,y} (v^{x,w}_1 \circ_{u,x,w} v^{u,x}_2) = (v^{w,y}_0 \circ_{x,w,y} v^{x,w}_1) \circ_{u,x,y} v^{u,x}_2$$

where $v^{u,w}_n$ is the n-th variable of type (u,w), $P \circ_{u,x,w} Q$ is $\circ_{u,x,w}(P,Q)$, and $\langle P_0,\dots,P_{n-1}\rangle_{u,x}$ is $\langle\,\rangle_{u,x}(P_0,\dots,P_{n-1})$. We will write $\circ$ instead of $\circ_{u,x,w}$ and $\langle\dots\rangle$ instead of $\langle\dots\rangle_{u,w}$, if there is not risk of misunderstanding.

We denote by $\mathbf{Alg}(\mathrm{B}_S)$ the category of Bénabou algebras and homomorphisms between them. The forgetful functor $\mathrm{G}_{\mathrm{B}_S}$ from $\mathbf{Alg}(\mathrm{B}_S)$ into $\mathbf{Set}^{S^\star\times S^\star}$ has a left adjoint $\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{B}_S}$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Alg}(\mathrm{B}_S) \arrow[r, shift left=2, "\mathrm{G}_{\mathrm{B}_S}"] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{Set}^{S^\star\times S^\star} \arrow[l, shift left=2, "\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{B}_S}"] \end{tikzcd}$$

that to an $S^\star\times S^\star$-sorted set assigns the corresponding free Bénabou algebra.

For every h-signature $\underline{\Sigma}$, the $S^\star\times S^\star$-sorted set

$$\mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma) = (\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_u)_{(w,u)\in S^\star\times S^\star}$$

is endowed with a structure of Bénabou algebra. In fact, the projections π^w_i are interpreted as the variables $v^{w_i}_i$, an operation $\langle\rangle_{u,w}$ as the isomorphism that transforms S-sorted mappings from $\downarrow w$ to $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow u)$ into w-families of formal $\underline{\Sigma}$-polynomials on $\downarrow u$, and an operator $\circ_{u,w,x}$ as the substitution for families of formal polynomials, that to families $P \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_x$ and $Q \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow u)_w$, assigns the family associated to the S-sorted mapping $Q^\sharp \circ P \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow u)_x$,

$$\begin{tikzcd} \downarrow x \arrow[dr, "P"] & \\ \downarrow w \arrow[r, "\eta^{\downarrow w}"] \arrow[dr, "Q"'] & \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w) \arrow[d, "Q^\sharp"] \\ & \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow u) \end{tikzcd}$$

Now we state the equivalence between the categories of Hall algebras and Bénabou algebras.

Proposition 45. *The categories* $\mathbf{Alg}(\mathrm{H}_S)$ *and* $\mathbf{Alg}(\mathrm{B}_S)$ *are equivalent.*

Proof. We define a pair of quasi-inverse functors between the categories of Hall algebras and Bénabou algebras.

Let $\underline{\mathrm{B}}\colon \mathbf{Alg}(\mathrm{H}_S) \longrightarrow \mathbf{Alg}(\mathrm{B}_S)$ be the functor that to a Hall algebra $\underline{A}$, assigns the Bénabou algebra $\underline{\mathrm{B}}(\underline{A})$ with $\mathrm{B}(A) = ((A_w)_u)_{(w,u)\in(S^\star)^2}$ as underlying $S^\star \times S^\star$-sorted set, where $A_w = (A_{w,s})_{s\in S}$, and algebraic structure defined as

$$\begin{aligned}
(\pi_i^w)^{\underline{\mathrm{B}}(\underline{A})} &= ((\pi_i^w)^{\underline{A}}) \\
\langle (a_0), \dots, (a_{|w|-1})\rangle_{u,w}^{\underline{\mathrm{B}}(\underline{A})} &= (\xi_{u,w,w_0}^{\underline{A}}(\pi_0^w, a_0, \dots, a_{|w|-1}), \dots \\
&\qquad \xi_{u,w,w_{|w|-1}}^{\underline{A}}(\pi_{|w|-1}^w, a_0, \dots, a_{|w|-1})) \\
\circ_{u,x,w}^{\underline{\mathrm{B}}(\underline{A})}(a, b) &= (\xi_{u,x,w_0}^{\underline{A}}(b_0, a_0, \dots, a_{|x|-1}), \dots \\
&\qquad \xi_{u,x,w_{|w|-1}}^{\underline{A}}(b_0, a_0, \dots, a_{|x|-1}))
\end{aligned}$$

and to a morphism $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ of Hall algebras, assigns the morphism $\mathrm{B}(f) = ((f_w)_u)_{(w,u)\in(S^\star)^2}$, defined for $(a_0, \dots, a_{|u|-1})$ in $(A_w)_u$ as

$$(a_0, \dots, a_{|u|-1}) \longmapsto (f_{w,u_0}(a_0), \dots, f_{w,u_{|u-1|}}(a_{|u|-1})))$$

in $(B_w)_u$.

Reciprocally, let $\underline{\mathrm{H}}\colon \mathbf{Alg}(\mathrm{B}_S) \longrightarrow \mathbf{Alg}(\mathrm{H}_S)$ be the functor that assigns to a Bénabou algebra $\underline{A}$, the Hall algebra $\underline{\mathrm{H}}(\underline{A})$ with $\mathrm{H}(A) = (A_{w,(s)})_{(w,s)\in S^\star\times S}$ as underlying $S^\star \times S$-sorted set, and algebraic structure defined as

$$\begin{aligned}
(\pi_i^w)^{\underline{\mathrm{H}}(\underline{A})} &= (\pi_i^w)^{\underline{A}} \\
\xi_{u,w,s}^{\underline{\mathrm{H}}(\underline{A})}(a_0, a_1, \dots, a_{|w|}) &= a_0 \circ_{u,w,s} \langle a_1, \dots, a_{|w|}\rangle_{u,w}
\end{aligned}$$

and to a morphism $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ of Bénabou algebras, assigns the morphism $\mathrm{B}(f)$, i.e., the bi-restriction of f to $\mathrm{B}(A)$ and $\mathrm{B}(B)$.

Let $\underline{A}$ be a Bénabou algebra. We show that $\underline{A}$ and $\underline{\mathrm{B}}\,\underline{\mathrm{H}}(\underline{A})$ are isomorphic. Let $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{\mathrm{B}}\,\underline{\mathrm{H}}(A)$ be the $S^\star \times S^\star$-sorted mapping defined, for $(u, w) \in S^\star \times S^\star$, as

$$a \mapsto ((\pi_0^w)^{\underline{A}} \circ a, \dots, (\pi_{|w|-1}^w)^{\underline{A}} \circ a)$$

The definition is sound because, for $a \in A_{u,w}$, $(\pi_i^w)^{\underline{A}} \circ a \in \mathrm{H}(A)_{u,w_i}$ hence, $((\pi_0^w)^{\underline{A}} \circ a, \dots, (\pi_{|w|-1}^w)^{\underline{A}} \circ a) \in \mathrm{B}\,\mathrm{H}(A)_{u,w}$.

Reciprocally, let $g\colon \underline{\mathrm{B}}\,\underline{\mathrm{H}}(\underline{A}) \longrightarrow \underline{A}$ be the $S^\star \times S^\star$-sorted mapping defined, for $(u, w) \in S^\star \times S^\star$, as

$$b \mapsto \langle b_0, \dots, b_{|w|-1}\rangle^{\underline{A}}$$

The definition is sound because, for $b \in \mathrm{B}\,\mathrm{H}(A)$, $b = (b_0, \dots, b_{|w|-1})$, where $b_i \in \mathrm{H}(A)_{u,w_i}$, hence $b_i \in A_{u,(w_i)}$ therefore, $\langle b_0, \dots, b_{|w|-1}\rangle^{\underline{A}} \in A_{u,w}$.

The mappings f and g are inverse homomorphisms. We have that $g \circ f = \mathrm{id}_{\underline{A}}$, because, for every $a \in A_{u,w}$, $\langle (\pi_0^w)^{\underline{A}} \circ a, \dots, (\pi_{|w|-1}^w)^{\underline{A}} \circ a\rangle = a$ by B3. We also have that $f \circ g = \mathrm{id}_{\underline{\mathrm{B}}\,\underline{\mathrm{H}}(\underline{A})}$ because, for every $b \in \mathrm{B}\,\mathrm{H}(A)$, $f_{u,w} \circ g_{u,w}(b)$ is the mapping

$$\begin{aligned}
b \mapsto &\langle b_0, \dots, b_{|w|-1}\rangle_{u,w}^{\underline{A}} \\
\mapsto &((\pi_0^w)^{\underline{\mathrm{B}}\,\underline{\mathrm{H}}(\underline{A})} \circ \langle b_0, \dots, b_{|w|-1}\rangle_{u,w}^{\underline{A}}, \dots, (\pi_{|w|-1}^w)^{\underline{\mathrm{B}}\,\underline{\mathrm{H}}(\underline{A})} \circ \langle b_0, \dots, b_{|w|-1}\rangle_{u,w}^{\underline{A}}) \\
&= ((\pi_0^w)^{\underline{A}} \circ \langle b_0, \dots, b_{|w|-1}\rangle_{u,w}^{\underline{A}}, \dots, (\pi_{|w|-1}^w)^{\underline{A}} \circ \langle b_0, \dots, b_{|w|-1}\rangle_{u,w}^{\underline{A}}) \\
&= \langle b_0, \dots, b_{|w|-1}\rangle_{u,w}^{\underline{A}}
\end{aligned}$$

where the last step is justified by the axiom B1.

Finally, for a Hall algebra $\underline{B}$ we have that $\underline{B}$ and $\underline{\mathrm{H}}\,\underline{\mathrm{B}}(\underline{B})$ are identical, because $a \in A_{w,s}$ iff $a \in \mathrm{B}(A)_{w,(s)}$ iff $a \in \mathrm{H}\,\mathrm{B}(A)_{w,s}$. □

From this last proposition and for the functor $\coprod_{1\times\between_S}$ from $\mathbf{Set}^{S^\star\times S}$ into $\mathbf{Set}^{S^\star\times S^\star}$ determined by the mapping $1\times\between_S$ from $S^\star\times S$ into $S^\star\times S^\star$ that to a pair (w,s) assigns $(w,(s))$, follows that

$$\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{B}_S}\circ\textstyle\coprod_{1\times\between_S}\cong\underline{\mathrm{B}}\circ\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{H}_S}\ \text{ and }\ \Delta_{1\times\between_S}\circ\mathrm{G}_{\mathrm{B}_S}=\mathrm{G}_{\mathrm{H}_S}\circ\underline{\mathrm{H}}$$

for the situation represented by the diagram

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\mathbf{Set}^{S^\star\times S} \arrow[r, shift right, "\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{H}_S}"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, shift right, "\coprod_{1\times\between_S}"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \mathbf{Alg}(\mathrm{H}_S) \arrow[l, shift right, "\mathrm{G}_{\mathrm{H}_S}"'] \arrow[d, shift right, "\underline{\mathrm{B}}"'] \arrow[d, phantom, "\equiv"] \\
\mathbf{Set}^{S^\star\times S^\star} \arrow[u, shift right, "\Delta_{1\times\between_S}"'] \arrow[r, shift right, "\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{B}_S}"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{Alg}(\mathrm{B}_S) \arrow[l, shift right, "\mathrm{G}_{\mathrm{B}_S}"'] \arrow[u, shift right, "\underline{\mathrm{H}}"']
\end{tikzcd}$$

Therefore $\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)$ is isomorphic to $\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{B}_S}(\coprod_{1\times\between_S}\Sigma)$.

El functor $\mathrm{B}\colon\mathbf{Set}^{S^\star\times S}\longrightarrow\mathbf{Set}^{S^\star\times S^\star}$ definido en la proposición anterior también tiene un adjunto por la izquierda, D, definido, para cada $S^\star\times S^\star$-conjunto X y cada $(w,s)\in S^\star\times S$, como:

$$\mathrm{D}(X)_{w,s}=\textstyle\bigcup_{\substack{u\in S^\star\ \&\\ u^{-1}[s]\neq\varnothing}}X_{w,u}\times\{u\}\times u^{-1}[s].$$

Proposition 46. *El functor* $\mathrm{D}\colon\mathbf{Set}^{S^\star\times S}\longrightarrow\mathbf{Set}^{S^\star\times S^\star}$ *es un adjunto por la izquierda del functor* $\mathrm{B}\colon\mathbf{Set}^{S^\star\times S}\longrightarrow\mathbf{Set}^{S^\star\times S^\star}$.

Proposition 47. *Para el diagrama*

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\mathbf{Set}^{S^\star\times S^\star} \arrow[r, shift right, "\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{B}_S}"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, shift right, "\mathrm{D}"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \mathbf{Alg}(\mathrm{B}_S) \arrow[l, shift right, "\mathrm{G}_{\mathrm{B}_S}"'] \arrow[d, shift right, "\underline{\mathrm{H}}"'] \arrow[d, phantom, "\equiv"] \\
\mathbf{Set}^{S^\star\times S} \arrow[u, shift right, "\mathrm{B}"'] \arrow[r, shift right, "\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{H}_S}"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{Alg}(\mathrm{H}_S) \arrow[l, shift right, "\mathrm{G}_{\mathrm{H}_S}"'] \arrow[u, shift right, "\underline{\mathrm{B}}"']
\end{tikzcd}$$

Se cumple que $\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{H}_S}\circ\mathrm{D}\cong\underline{\mathrm{H}}\circ\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{B}_S}$ *y* $\mathrm{B}\circ\mathrm{G}_{\mathrm{H}_S}=\mathrm{G}_{\mathrm{B}_S}\circ\underline{\mathrm{B}}$

De lo anterior anterior se sigue que, en la 2-categoría de categorías, adjunciones y pares conjugados (v., e.g., [Mac71]), se tienen los isomorfismos siguientes

$$\begin{aligned}
(\,\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{H}_S}\dashv\mathrm{G}_{\mathrm{H}_S}\circ\underline{\mathrm{B}}\dashv\underline{\mathrm{H}}\,)&\cong(\,\mathrm{I}\dashv\mathrm{H}\circ\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{B}_S}\dashv\mathrm{G}_{\mathrm{B}_S}\,)\\
(\,\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{B}_S}\dashv\mathrm{G}_{\mathrm{B}_S}\circ\underline{\mathrm{H}}\dashv\underline{\mathrm{B}}\,)&\cong(\,\mathrm{D}\dashv\mathrm{B}\circ\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{B}_S}\dashv\mathrm{G}_{\mathrm{B}_S}\,)
\end{aligned}$$

En una sección posterior se introduce una cierta 2-categoría de adjunciones, morfismos de adjunciones y deformaciones entre tales morfismos y los resultados anteriores implican que, en tal 2-categoría, las adjunciones $\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{H}_S}\dashv\mathrm{G}_{\mathrm{H}_S}$ y $\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{B}_S}\dashv\mathrm{G}_{\mathrm{B}_S}$ son equivalentes, caracterizando así categorialmente la equivalencia entre ambas construcciones.

Para el estudio de la relación entre las ecuaciones y las congruencias en el álgebra de Bénabou de los términos finitarios para una signatura $\underline{\Sigma}$, es natural considerar a las ecuaciones como pares de tuplas de términos, pues esta es la forma de los elementos en las congruencias sobre $\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)$. Sin embargo, ambas nociones de ecuación tienen el mismo poder expresivo y son, por tanto, equivalentes, como se puede comprobar atendiendo a las reglas que definen el operador de congruencia generada en $\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)$.

Proposition 48. *Sea $\underline{\Sigma}$ una signatura algebraica y $\mathrm{Eq}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma) = \mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)^2$. Entonces, para cada $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Eq}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)$, $\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)}(\mathcal{E})$ es el menor sub-$(S^\star)^2$-conjunto $\overline{\mathcal{E}}$ de $\mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)$ que contiene a $\mathcal{E}$ y satisface las condiciones siguientes, para cada $u, w, x \in S^\star$:*

(1) Reflexividad. *Para cada $P \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_u$, $(P, P) \in \overline{\mathcal{E}}_{w,u}$.*
(2) Simetría. *Para cada P, $Q \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_u$, si $(P, Q) \in \overline{\mathcal{E}}_{w,u}$, $(Q, P) \in \overline{\mathcal{E}}_{w,u}$.*
(3) Transitividad. *Para cada P, Q, $R \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_u$, si (P, Q), $(Q, R) \in \overline{\mathcal{E}}_{w,u}$, entonces $(P, R) \in \overline{\mathcal{E}}_{w,s}$.*
(4) Compatibilidad con productos. *Para cada P, $Q \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_u$, si, para cada $i \in |u|$, $(P_i, Q_i) \in \overline{\mathcal{E}}_{w,u_i}$, $(\langle P_0, \ldots, P_{|w|-1}\rangle, \langle Q_0, \ldots, Q_{|w|-1}\rangle) \in \overline{\mathcal{E}}_{u,w}$*
(5) Substitución. *Para cada $P, Q \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_u$ y cada P', $Q' \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow x)_w$, si $(P, Q) \in \overline{\mathcal{E}}_{w,u}$ y $(P', Q') \in \overline{\mathcal{E}}_{x,w}$, entonces $(P \circ P', Q \circ Q') \in \overline{\mathcal{E}}_{x,u}$.*

□

Proposition 49. *Sea $\underline{\Sigma}$ una signatura algebraica. Considérense las aplicaciones $H, D\colon \mathrm{Sub}(\mathrm{Eq}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)) \longrightarrow \mathrm{Sub}(\mathrm{Eq}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma))$ definidas, para cada $\mathcal{E} \in \mathrm{Sub}(\mathrm{Eq}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma))$ and $(w, s) \in S^\star \times S$, como*

$$H(\mathcal{E})_{w,s} = \{(P, Q) \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)^2_s \mid (P, Q) \in \mathcal{E}_{w,(s)}\}$$
$$D(\mathcal{E})_{w,s} = \left\{(P, Q) \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)^2_s \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists u \in S^\star,\ \exists (P', Q') \in \mathcal{E}_{w,u}, \\ \exists i \in u^{-1}[s], (P, Q) = (P'_i, Q'_i) \end{array}\right\}$$

junto con las aplicaciones $I, B\colon \mathrm{Sub}(\mathrm{Eq}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)) \longrightarrow \mathrm{Sub}(\mathrm{Eq}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma))$ definidas, para cada $\mathcal{D} \in \mathrm{Sub}(\mathrm{Eq}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma))$ and $(w, u) \in S^\star \times S^\star$, como

$$I(\mathcal{D})_{w,u} = \{(P, Q) \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)^2_u \mid \exists s \in S,\ u = (s) \text{ y } (P, Q) \in \mathcal{D}_{w,s}\}$$
$$B(\mathcal{D})_{w,u} = \{(P, Q) \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)^2_u \mid \forall i \in |u|,\ (P_i, Q_i) \in \mathcal{D}_{w,u_i}\}$$

Los operadores H, D, I, B preservan el orden. Para cada $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Eq}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)$ y cada $\mathcal{D} \subseteq \mathrm{Eq}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)$, se cumple que:

$$D(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D} \text{ si y sólo si } \mathcal{E} \subseteq B(\mathcal{D})$$
$$I(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{E} \text{ si y sólo si } \mathcal{D} \subseteq H(\mathcal{E})$$

Además, $H \circ I = D \circ I = H \circ B = D \circ B = \mathrm{id}_{\mathrm{Sub}(\mathrm{Eq}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma))}$.

Proof. La preservación del orden es inmediata a partir de las definiciones.

$D(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D} \implies \mathcal{E} \subseteq B(\mathcal{D})$. Supongamos que $(P, Q) \in \mathcal{E}_{u,w}$. Entonces, para cada $i \in |w|$, $(P_i, Q_i) \in D(\mathcal{E})_{u,w_i} \subseteq \mathcal{D}_{u,w_i}$ y $(P, Q) \in B(\mathcal{D})_{u,w}$.

$\mathcal{E} \subseteq B(\mathcal{D}) \implies D(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}$. Supongamos que $(P, Q) \in D(\mathcal{E})_{u,s}$. Entonces existe un S-conjunto w, un $i \in |w|$ y un par $(P', Q') \in \mathcal{E}_{u,w}$ tal que $P'_i = P$ y $Q'_i = Q$. Por tanto, $(P', Q') \in B(\mathcal{D})_{u,w}$ y $(P, Q) \in \mathcal{D}_{u,w_i}$.

$I(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{E} \implies \mathcal{D} \subseteq H(\mathcal{E})$. Si $(P, Q) \in \mathcal{D}_{u,s}$, entonces $(P, Q) \in I(\mathcal{D})_{u,(s)}$, pero $I(\mathcal{D})_{u,(s)} \subseteq \mathcal{E}_{u,(s)}$, y por consiguiente, $(P, Q) \in H(\mathcal{E})_{u,s}$.

$\mathcal{D} \subseteq H(\mathcal{E}) \implies I(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{E}$. Si $(P, Q) \in I(\mathcal{D})_{u,w}$, entonces $w = (s)$, para algún $s \in S$. Pero entonces $(P, Q) \in \mathcal{D}_{u,s} \subseteq H(\mathcal{E})_{u,s}$ y $(P, Q) \in \mathcal{E}_{u,(s)}$. □

Proposition 50. *Sea $\underline{\Sigma}$ una signatura algebraica. Se cumple que,*

$$
\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)}"] \arrow[d, "I"'] \arrow[dr, phantom, "\subseteq"] & {} \arrow[d, "I"] \\ {} \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)}"'] & {} \end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)}"] \arrow[d, "I"'] \arrow[dr, phantom, "="] & {} \\ {} \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)}"'] & {} \arrow[u, "H"'] \end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)}"] \arrow[d, "D"'] \arrow[dr, phantom, "="] & {} \arrow[d, "D"] \\ {} \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)}"'] & {} \end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)}"] \arrow[d, "D"'] \arrow[dr, phantom, "="] & {} \\ {} \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)}"'] & {} \arrow[u, "B"'] \end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)}"] \arrow[dr, phantom, "\supseteq"] & {} \arrow[d, "I"] \\ {} \arrow[u, "H"] \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)}"'] & {} \end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)}"] \arrow[dr, phantom, "\subseteq"] & {} \\ {} \arrow[u, "H"] \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)}"'] & {} \arrow[u, "H"'] \end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)}"] \arrow[dr, phantom, "="] & {} \arrow[d, "D"] \\ {} \arrow[u, "B"] \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)}"'] & {} \end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)}"] \arrow[dr, phantom, "="] & {} \\ {} \arrow[u, "B"] \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)}"'] & {} \arrow[u, "B"'] \end{tikzcd}
$$

Proposition 51. *Sea $\underline{\Sigma}$ una signatura algebraica. Entonces los retículos $\underline{\mathrm{Cgr}}(\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma))$ y $\underline{\mathrm{Cgr}}(\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma))$ son isomorfos.*

Proof. Es suficiente considerar la birrestricción de los operadores B y H a $\mathrm{Cgr}(\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma))$ y $\mathrm{Cgr}(\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma))$.

Si $\mathcal{E} \in \mathrm{Cgr}(\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma))$ entonces

$$\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)}(B(\mathcal{E})) = B(\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)}(\mathcal{E})) \subseteq B(\mathcal{E})$$

y $B(\mathcal{E}) \in \mathrm{Cgr}(\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma))$.

Recíprocamente, si $\mathcal{E} \in \mathrm{Cgr}(\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma))$, entonces

$$\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)}(H(\mathcal{E})) \subseteq H(\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)}(\mathcal{E})) \subseteq H(\mathcal{E})$$

y $H(\mathcal{E}) \in \mathrm{Cgr}(\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma))$. Puesto que $H \circ B = \mathrm{Id}$, solo resta comprobar que para cada $\mathcal{E} \in \mathrm{Cgr}(\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma))$, $B(H(\mathcal{E})) = \mathcal{E}$. Si $(P, Q) \in B(H(\mathcal{E}))_{u,w}$, entonces, para cada $i \in |w|$, $(P_i, Q_i) \in H(\mathcal{E})_{u,w_i}$, luego $(P_i, Q_i) \in \mathcal{E}_{u,(w_i)}$ y $(P, Q) \in \mathcal{E}_{u,w}$. Si $(P, Q) \in \mathcal{E}_{u,w}$, entonces, para cada $i \in |w|$, $(P_i, Q_i) \in \mathcal{E}_{u,(w_i)}$, luego se tiene que $(P_i, Q_i) \in H(\mathcal{E})_{u,w_i}$ y $(P, Q) \in B(H(\mathcal{E}))_{u,w}$. □

Por la proposición anterior, cualquiera de las álgebras de términos consideradas es adecuada para la obtención de un cálculo de ecuaciones finitarias heterogéneas.

En particular, de la proposición 149 y la proposición 51, se sigue que los espacios de clausura heterogéneos asociados a los operadores de consecuencia de Hall y de Bénabou, son equivalentes en la 2-categoría $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}}$.

2.4. **The heterogeneous completeness theorem.** The celebrated completeness theorem of Birkhoff, see [Bir35], for the classical equational logic asserts that the semantical consequence relation between a given set of equations and an equation, derived from the validity relation between algebras and equations, coincides with the proof theoretic notion of an equation being syntactically deducible from the given equations by the axioms and rules of inference of the equational logic. However the naive generalization of the axioms and rules of inference from the ordinary universal algebra to the heterogeneous universal algebra is problematical and leads to an unsound system. Goguen and Meseguer in [GM85] showed the completeness of the heterogeneous equational logic providing a, somewhat redundant, set of sound and complete rules of inference. In this paper, once defined the concepts of equational class and equational theory for a monad in a category, derived from the validitation of an equation in an algebra for the monad, and the concept of congruence compatible with the projective limits, we show that the lattice of the congruences compatible with the products on the category of polynomials for a monad in a category of sorted sets is isomorphic to the lattice of the equational theories for the monad, in this way we obtain a version of the completeness theorem for the heterogeneous equational logic, that is independent of the syntactical representations of the relevant concepts.

In this section we define, for a monad in a category, the concepts of polynomial and equation and the relation of validation of an equation in an algebra for the monad. From this, as in the classical case, we also obtain a contravariant Galois connection between the equational theories and the equational classes for the monad.

Definition 20. Let $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ be a monad in a category $\mathbf{C}$ and X, $Y \in \mathbf{C}$.

1. A $\mathbb{T}$-polynomial of type (X, Y) is a morphism $P\colon Y \longrightarrow T(X)$ in $\mathbf{C}$. We identify the $\mathbb{T}$-polynomials with the morphisms in $\mathbf{Kl}(\mathbb{T})^{\mathrm{op}}$, the dual of the Kleisli category of $\mathbb{T}$, hence $P\colon X \longrightarrow Y$ is $P\colon Y \longrightarrow T(X)$.
2. A $\mathbb{T}$-equation of type (X, Y) is a pair (P, Q) of $\mathbb{T}$-polynomials of type (X, Y). We identify the $\mathbb{T}$-equations with the pairs of morphisms in $\mathbf{Kl}(\mathbb{T})^{\mathrm{op}}$.

We agree that $\mathbf{Pol}(\mathbb{T})$ denotes the category $\mathbf{Kl}(\mathbb{T})^{\mathrm{op}}$ and call it the category of $\mathbb{T}$-polynomials. On the other hand, $\mathrm{Eq}(\mathbb{T})$ denotes the $\mathrm{Ob}(\mathbf{C})^2$-sorted set of the $\mathbb{T}$-equations. Moreover, we call the sub-$\mathrm{Ob}(\mathbf{C})^2$-sorted sets of $\mathrm{Eq}(\mathbb{T})$, that are the relations on the morphisms of $\mathbf{Kl}(\mathbb{T})$, families of $\mathbb{T}$-equations.

To avoid misunderstandings we denote by $\diamond$ the composition in $\mathbf{Kl}(\mathbb{T})$ and $\mathbf{Pol}(\mathbb{T})$, preserving the standard notation for the composition in the category $\mathbf{C}$.

Now we define for a monad on a category, on the one hand, the realization of the polynomials relative to the monad in the algebras for the monad and, on the other, the concept of validation of an equations for the monad in an algebra for the monad.

Definition 21. Let $\mathbb{T}$ be a monad in $\mathbf{C}$ and (A, α) a $\mathbb{T}$-algebra. Then every $\mathbb{T}$-polynomial $P\colon X \longrightarrow Y$ determines a mapping $P^{(A,\alpha)}$ from $\mathbf{C}(X, A)$ to $\mathbf{C}(Y, A)$, the realization of P in (A, α), that to a morphism $f\colon X \longrightarrow A$ associates the morphism $\alpha \circ T(f) \circ P\colon Y \longrightarrow A$.

From now on, we agree that to say that a diagram of the form

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] & b \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] \arrow[r, phantom, "+"] & c \arrow[r, "k"] & d \end{tikzcd}$$

commutes, means that the diagram

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[r, "g"] & c \arrow[dr, "k"] & \\ a \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f"'] & & & d \\ & b \arrow[r, "h"'] & c \arrow[ur, "k"'] & \end{tikzcd}$$

commutes. We extend the above agreement to similar diagrams, when there is no danger of misunderstanding.

Definition 22. Let (A, α) be a $\mathbb{T}$-algebra and (P, Q) a $\mathbb{T}$-equation of type (X, Y). We say that (P, Q) is valid in (A, α), in symbols $(A, \alpha) \models^{\mathbb{T}}_{X,Y} (P, Q)$, if for every $f\colon X \longrightarrow A$, $\alpha \circ \mathrm{T}(\alpha) \circ P = \alpha \circ \mathrm{T}(\alpha) \circ Q$, i.e., if the following diagram commutes

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, shift left, "P"] \arrow[r, shift right, "Q"'] \arrow[r, phantom, "+"] & T(X) \arrow[r, "T(f)"] & T(A) \arrow[r, "\alpha"] & A \end{tikzcd}$$

or, equivalently, if $P^{(A,\alpha)} = Q^{(A,\alpha)}$. If $\mathcal{K} \subseteq \mathbf{EM}(\mathbb{T})$, where $\mathbf{EM}(\mathbb{T})$ is the Eilenberg-Moore category of $\mathbb{T}$, then we agree that $\mathcal{K} \models^{\mathbb{T}}_{X,Y} (P, Q)$ means that, for every $(A, \alpha) \in \mathcal{K}$, $(A, \alpha) \models^{\mathbb{T}}_{X,Y} (P, Q)$.

As for general algebra, from the concept of validation we also obtain a contravariant Galois connection.

Definition 23. Let $\mathbb{T}$ be a monad in $\mathbf{C}$.

(1) If $\mathcal{K} \subseteq \mathbf{EM}(\mathbb{T})$, then the $\mathbb{T}$-equational theory determined by $\mathcal{K}$, $\mathrm{Th}_{\mathbb{T}}(\mathcal{K})$, has as elements the $\mathbb{T}$-equations $(P,Q)\colon X \longrightarrow Y$ such that $\mathcal{K} \models^{\mathbb{T}}_{X,Y} (P,Q)$, i.e.,
$$\mathrm{Th}_{\mathbb{T}}(\mathcal{K}) = \left(\left\{(P,Q) \in \mathrm{Eq}(\mathbb{T})_{X,Y} \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall (A,\alpha) \in \mathcal{K}, \\ (A,\alpha) \models^{\mathbb{T}}_{X,Y} (P,Q) \end{array}\right\}\right)_{(X,Y)\in \mathbf{C}^2}$$

(2) If $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Eq}(\mathbb{T})$, then the $\mathbb{T}$-equational class determined by $\mathcal{E}$, $\mathrm{Mod}_{\mathbb{T}}(\mathcal{E})$, has as elements the $\mathbb{T}$-algebras (A,α) that validate each equation of $\mathcal{E}$,i.e.,
$$\mathrm{Mod}_{\mathbb{T}}(\mathcal{E}) = \left\{(A,\alpha) \in \mathbf{EM}(\mathbb{T}) \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall X,Y \in \mathbf{C},\, \forall (P,Q) \in \mathcal{E}_{X,Y}, \\ (A,\alpha) \models^{\mathbb{T}}_{X,Y} (P,Q) \end{array}\right\}$$

Proposition 52. *Let $\mathbb{T}$ be a monad in $\mathbf{C}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ two families of $\mathbb{T}$-equations and $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'$ two classes of $\mathbb{T}$-algebras. Then the following holds:*

(1) *If $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}'$, then $\mathrm{Mod}_{\mathbb{T}}(\mathcal{E}') \subseteq \mathrm{Mod}_{\mathbb{T}}(\mathcal{E})$.*
(2) *If $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}'$, then $\mathrm{Th}_{\mathbb{T}}(\mathcal{K}') \subseteq \mathrm{Th}_{\mathbb{T}}(\mathcal{K})$.*
(3) *$\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Th}_{\mathbb{T}}(\mathrm{Mod}_{\mathbb{T}}(\mathcal{E}))$ and $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Mod}_{\mathbb{T}}(\mathrm{Th}_{\mathbb{T}}(\mathcal{K}))$.*

Therefore the pair of mappings $\mathrm{Th}_{\mathbb{T}}$ and $\mathrm{Mod}_{\mathbb{T}}$ is a contravariant Galois connection.

The categories associated to the lattices of classes of $\mathbb{T}$-algebras and families of $\mathbb{T}$-equations are related through the adjunction

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Sub}}(\mathbf{EM}(\mathbb{T}))^{\mathrm{op}} \arrow[r, shift left, "\mathrm{Th}_{\mathbb{T}}"] \arrow[r, phantom, "\top"] & \underline{\mathrm{Sub}}(\mathrm{Eq}(\mathbb{T})) \arrow[l, shift left, "\mathrm{Mod}_{\mathbb{T}}"] \end{tikzcd}$$

where, for every class $\mathcal{K}$ of $\mathbb{T}$-algebras and every family $\mathcal{E}$ of $\mathbb{T}$-equations, the following holds:
$$\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Mod}_{\mathbb{T}}(\mathcal{E}) \text{ iff } \mathcal{E} \subseteq \mathrm{Th}_{\mathbb{T}}(\mathcal{K}).$$

Definition 24.

(1) We denote by $\mathrm{Cn}_{\mathbb{T}}$ the closure operator $\mathrm{Th}_{\mathbb{T}} \circ \mathrm{Mod}_{\mathbb{T}}$ on $\mathrm{Eq}(\mathbb{T})$ and we call the $\mathrm{Cn}_{\mathbb{T}}$-closed sets $\mathbb{T}$-equational theories. If $\mathcal{E}$ is a family of $\mathbb{T}$-equations and E a $\mathbb{T}$-equation, then we say that E is a semantical consequence of $\mathcal{E}$, $\mathcal{E} \Vdash E$, if $\mathrm{Mod}_{\mathbb{T}}(\mathcal{E}) \subseteq \mathrm{Mod}_{\mathbb{T}}(E)$, i.e., if $E \in \mathrm{Cn}_{\mathbb{T}}(\mathcal{E})$.
(2) We denote by $\mathrm{Ec}_{\mathbb{T}}$ the closure operator $\mathrm{Mod}_{\mathbb{T}} \circ \mathrm{Th}_{\mathbb{T}}$ on $\mathbf{EM}(\mathbb{T})$ and we call the $\mathrm{Ec}_{\mathbb{T}}$-closed classes $\mathbb{T}$-equational classes. If $\mathcal{K}$ is a class of $\mathbb{T}$-algebras and (A,α) a $\mathbb{T}$-algebra, then (A,α) is in the $\mathbb{T}$-equational class determined by $\mathcal{K}$, $\mathcal{K} \models \underline{A}$, if $\mathrm{Th}_{\mathbb{T}}(\mathcal{K}) \subseteq \mathrm{Th}_{\mathbb{T}}(\underline{A})$, i.e., if $\underline{A} \in \mathrm{Ec}_{\mathbb{T}}(\mathcal{K})$.

In this section we define, for a monad in a category, the abstract notions of subalgebra and quotient algebra of an algebra in the Eilenberg-Moore category of the monad, because we need them to show the completeness theorem for a monad in a category of sorted sets. Moreover, we characterize the quotient algebras in the Eilenberg-Moore category of a monad in a category of sorted sets through the notion congruence.

Definition 25. Let $\mathbb{T}$ be a monad in $\mathbf{C}$ and (A,α) a $\mathbb{T}$-algebra. A subalgebra of (A,α) is a monomorphism $i\colon B \longrightarrow A$ in $\mathbf{C}$ such that for some $\mathbf{C}$-morphism $\beta\colon T(B) \longrightarrow B$ we have that $i \circ \beta = \alpha \circ T(i)$.

If there exists a $\mathbf{C}$-morphism $\beta\colon T(B) \longrightarrow B$ such that $i \circ \beta = \alpha \circ T(i)$, then it is unique and (B, β) is a $\mathbb{T}$-algebra. Moreover, because the forgetful functor $\mathrm{G}^{\mathbb{T}}\colon \mathbf{EM}(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathbf{C}$ is faithful and has a left adjoint, the subalgebras are precisely the $\mathbf{EM}(\mathbb{T})$-monomorphisms.

Definition 26. Let $p\colon (A, \alpha) \longrightarrow (B, \beta)$ be a $\mathbb{T}$-homomorphism. We say that p or, simply, (B, β), is a quotient algebra of (A, α) if $p\colon A \longrightarrow B$ is an epimorphism.

If the functor T preserves the epimorphisms, then the quotients of a $\mathbb{T}$-algebra (A, α) are the epimorphisms $p\colon A \longrightarrow B$ such that $p \circ \alpha = \beta \circ T(p)$ for some $\mathbf{C}$-morphism $\beta\colon T(B) \longrightarrow B$.

Proposition 53. *Let $\mathbb{T}$ be a monad in $\mathbf{Set}^S$. Then T preserves epimorphisms.*

Definition 27. Let $\mathbb{T}$ be a monad in $\mathbf{Set}^S$, (A, α) a $\mathbb{T}$-algebra and Φ an equivalence on A. We say that Φ is a congruence on (A, α) if for every $a, b\colon Y \longrightarrow A$ such that $\mathrm{pr}^{\Phi} \circ a = \mathrm{pr}^{\Phi} \circ b$, it follows that the following diagram commutes:

$$\begin{tikzcd} T(Y) \arrow[r, shift left, "T(a)"] \arrow[r, shift right, "T(b)"'] \arrow[r, phantom, "+"] & T(A) \arrow[r, "\alpha"] & A \arrow[r, "\mathrm{pr}^{\Phi}"] & A/\Phi \end{tikzcd}$$

Proposition 54. *Let $\mathbb{T}$ be a monad in $\mathbf{Set}^S$, (A, α) a $\mathbb{T}$-algebra and Φ an equivalence on A. Then Φ is a congruence on (A, α) iff the following diagram commutes:*

$$\begin{tikzcd} T(\Phi) \arrow[r, shift left, "T(\mathrm{p}^0)"] \arrow[r, shift right, "T(\mathrm{p}^1)"'] \arrow[r, phantom, "+"] & T(A) \arrow[r, "\alpha"] & A \arrow[r, "\mathrm{pr}^{\Phi}"] & A/\Phi \end{tikzcd}$$

where p^0 and p^1 are the restrictions to Φ of the projections from A^2 onto A.

Proposition 55. *Let $\mathbb{T}$ be a monad in $\mathbf{Set}^S$ and (A, α) a $\mathbb{T}$-algebra. If Φ is a congruence on (A, α), then there exists a unique $\mathbb{T}$-algebra structure α/Φ on A/Φ such that the following diagram commutes*

$$\begin{tikzcd} T(A) \arrow[r, "T(\mathrm{pr}^{\Phi})"] \arrow[d, "\alpha"'] & T(A/\Phi) \arrow[d, "\alpha/\Phi"] \\ A \arrow[r, "\mathrm{pr}^{\Phi}"'] & A/\Phi \end{tikzcd}$$

In this last section once defined, for a congruence on a category, the concept of congruence compatible with the projective limits, we show the completeness theorem for a monad in a category of sorted sets, in the version that says that the lattice of the congruences compatible with the products on the category of polynomials for a monad in a category of sorted sets is isomorphic to the lattice of the equational theories for the monad.

Definition 28. Let $\mathbf{C}$ be a category, $\mathcal{E}$ a congruence on $\mathbf{C}$, $D\colon \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{C}$ and (b, β), (b, β') two projective cones from b to D. We say that β and β' are $\mathcal{E}$-congruents, denoted by $\beta \equiv_{\mathcal{E}} \beta'$, if, for every $i \in \mathbf{I}$, we have that $(\beta_i, \beta'_i) \in \mathcal{E}_{b, D_i}$. Moreover, we say that the congruence $\mathcal{E}$ is compatible with the projective limits of D if, for every projective limit (a, α) of D and every pair of projective cones (b, β), (b, β') from an object b of $\mathbf{C}$ to D, if $\beta \equiv_{\mathcal{E}} \beta'$, then the unique morphisms $\langle \beta \rangle, \langle \beta' \rangle : b \longrightarrow a$

such that, for every $i \in \mathbf{I}$, $\alpha_i \circ \langle\beta\rangle = \beta_i$ and $\alpha_i \circ \langle\beta'\rangle = \beta'_i$, are $\mathcal{E}$-congruents, i.e., $(\langle\beta\rangle, \langle\beta'\rangle) \in \mathcal{E}_{b,a}$.

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[d, bend right, "\langle\beta\rangle"'] \arrow[d, bend left, "\langle\beta'\rangle"] \arrow[d, phantom, "\equiv"] \arrow[drr, bend left, "\beta"] \arrow[drr, "\beta'"'] \arrow[drr, phantom, "///"] & & \\
a \arrow[rr, "\alpha"'] & & D
\end{tikzcd}$$

Proposition 56. *Let $\mathbf{C}$ be a category, $D, D' \colon \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{C}$, $\mathcal{E}$ a congruence on $\mathbf{C}$ compatible with the projective limits of D and D' and $\sigma, \tau \colon D \Longrightarrow D'$ two natural transformations from D to D'. Then, for every projective limits (a, α) of D and (a', α') of D', the unique morphisms $\langle\sigma \circ \alpha\rangle, \langle\tau \circ \alpha\rangle : a \longrightarrow a'$ such that, for every $i \in \mathbf{I}$, $\alpha'_i \circ \langle\sigma \circ \alpha\rangle = \sigma_i \circ \alpha_i$ and $\alpha'_i \circ \langle\tau \circ \alpha\rangle = \tau_i \circ \alpha_i$, are $\mathcal{E}$-congruents.*

Proposition 57. *Let $\mathbf{C}$ be a category with products. Then the ordered set $\underline{\mathrm{Cgr}}^{\Pi}_{\mathbf{C}} = (\mathrm{Cgr}^{\Pi}_{\mathbf{C}}, \subseteq)$ of the congruences on $\mathbf{C}$ that are compatible with the products, is a complete lattice.*

Definition 29. Let $\mathbf{C}$ be a category with products. We denote by $\underline{\mathrm{Cg}}^{\Pi}(\mathbf{C})$ the closure operator on the set of relations on $\mathbf{C}$, that to a relation $\mathcal{E}$ assigns the least congruence on $\mathbf{C}$ that is compatible with the products.

Proposition 58. *Let $\mathbb{T}$ be a monad in $\mathbf{C}$. If $\mathbf{C}$ has coproducts, then $\mathbf{Kl}(\mathbb{T})$ has coproducts.*

Corollary 7. *Let $\mathbb{T}$ be a monad in $\mathbf{C}$. If $\mathbf{C}$ has coproducts, then $\mathbf{Pol}(\mathbb{T})$ has products. Therefore, for every set S and every monad $\mathbb{T}$ in $\mathbf{Set}^S$, $\mathbf{Pol}(\mathbb{T})$ has products.*

Next we show that the congruences compatible with the products on the category of polynomials for a monad in a category of sorted sets, are determined by the pairs of morphisms in the congruence with codomains deltas of Kronecker.

Definition 30. Let S be a set and $t \in S$. We call delta of Kronecker in t, the S-sorted set $\delta^t = (\delta^t_s)_{s \in S}$ defined, for every $s \in S$, as:

$$\delta^t_s = \begin{cases} 1, & \text{if } s = t; \\ \varnothing, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Proposition 59. *Let $\mathbb{T}$ be a monad in $\mathbf{Set}^S$ and $\mathcal{E}$ a congruence on $\mathbf{Pol}(\mathbb{T})$ compatible with the productcs. Then $(P, Q) \in \mathcal{E}_{X,Y}$ iff, for every $s \in S$ and every $(y) \colon \delta^s \longrightarrow Y$ in $\mathbf{Set}^S$, $(P \circ (y), Q \circ (y)) \in \mathcal{E}_{X,\delta^s}$.*

Now we show the soundness theorem, i.e., that every equational theory is a congruence compatible with the products.

Theorem 1 (Soundness Theorem)**.** *Let S be a set and $\mathbb{T}$ be a monad in $\mathbf{Set}^S$. Then every $\mathbb{T}$-equational theory is a congruence on $\mathbf{Pol}(\mathbb{T})$ compatible with the products.*

We remark that the Soundness Theorem is equivalent to $\mathrm{Cn}_{\mathbb{T}}$, $\mathrm{Cg}^{\Pi}_{\mathbf{Pol}(\mathbb{T})} \leq \mathrm{Cn}_{\mathbb{T}}$.

Definition 31. Let $\mathbb{T}$ be a monad in $\mathbf{Set}^S$, $\mathcal{E}$ a family of $\mathbb{T}$-equations and X an S-sorted set. Then we denote by $\mathcal{E}_X$ the equivalence on $T(X)$ defined as follows

$$(\{(P, Q) \in T(X)^2_s \mid ((P), (Q)) \in \mathcal{E}_{X,\delta^s}\})_{s \in S}.$$

Lemma 6. *Let $\mathbb{T}$ a monad in $\mathbf{Set}^S$, $\mathcal{E}$ a congruence on $\mathbf{Pol}(\mathbb{T})$ compatible with the products and X an S-sorted set. Then, for every S-sorted set Y and every $(P, Q) \in \mathrm{Eq}(\mathbb{T})_{X,Y}$, the following conditions are equivalents:*

(1) $(P, Q) \in \mathcal{E}_{X,Y}$.
(2) *The diagram*

$$Y \underset{Q}{\overset{P}{\rightrightarrows}} T(X) \xrightarrow{\mathrm{pr}^{\mathcal{E}_X}} T(X)/\mathcal{E}_X$$

commutes.

Proposition 60. *Let $\mathbb{T}$ be a monad in $\mathbf{Set}^S$ and $\mathcal{E}$ a congruence on $\mathbf{Pol}(\mathbb{T})$ compatible with the products. Then, for every S-sorted set X, $\mathcal{E}_X$ is a congruence on $(T(X), \mu_X)$.*

Proposition 61. *Let $\mathbb{T}$ be a monad in $\mathbf{Set}^S$, $\mathcal{E}$ a congruence on $\mathbf{Pol}(\mathbb{T})$ compatible with the products, X, Y two S-sorted sets and $(P, Q) \in \mathcal{E}_{X,Y}$. Then, for every S-sorted set Z, $(T(Z)/\mathcal{E}_Z, \mu_Z/\mathcal{E}_Z) \models^{\mathbb{T}}_{X,Y} (P, Q)$.*

Theorem 2 (Adecuacy Theorem)**.** *Let S be a set and $\mathbb{T}$ a monad in $\mathbf{Set}^S$. Then every congruence on $\mathbf{Pol}(\mathbb{T})$ compatible with the productos is a $\mathbb{T}$-equational theory.*

Corollary 8 (Completeness Theorem)**.** *Let S be a set and $\mathbb{T}$ a monad in $\mathbf{Set}^S$. Then, the lattice of congruences on $\mathbf{Pol}(\mathbb{T})$ compatibles with the products and the lattice of the $\mathbb{T}$-equational theories are isomorphic.*

For a set S and a monad $\mathbb{T}$ in $\mathbf{Set}^S$, the category $\mathbf{Pol}(\mathbb{T})$ of $\mathbb{T}$-polynomials is a category with products and is such that the deltas of Kronecker δ^s, $s \in S$, is a set of cogenerators. From this follows that a $\mathbb{T}$-equation $(P, Q) \in \mathrm{Eq}(\mathbb{T})_{X,Y}$ is valid in a $\mathbb{T}$-algebra (A, α) iff every equation in $\mathrm{Eq}(\mathbb{T})_{X,\delta^s}$ obtained from (P, Q) by composition with a morphism $R\colon Y \longrightarrow \delta^s$ in $\mathbf{Pol}(\mathbb{T})$, is valid in (A, α). This fact allows us to restrict, for the monads in categories of sorted sets, without lost of generality, to consider exclusively equations with codomain δ^s, for some $s \in S$. Moreover, for this type of equations, we have a consequence operator directly definible and equivalent to the operator $\mathrm{Cg}^{\Pi}_{\mathbb{T}}$.

Definition 32. Let $\mathbb{T}$ be a monad in $\mathbf{Set}^S$ and $\widetilde{\mathrm{Eq}}(\mathbb{T})$ the family

$$(\mathbf{Pol}(\mathbb{T})(X, \delta^s)^2)_{(X,s) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^S \times S}.$$

Then $\widetilde{\mathrm{Mod}}_{\mathbb{T}}$ and $\widetilde{\mathrm{Th}}_{\mathbb{T}}$ are the operators defined as follows:

$$\widetilde{\mathrm{Mod}}_{\mathbb{T}} \begin{cases} \mathrm{Sub}(\widetilde{\mathrm{Eq}}(\mathbb{T})) \longrightarrow \mathrm{Sub}(\mathbf{EM}(\mathbb{T})) \\ \mathcal{D} \longmapsto \left\{ (A, \alpha) \in \mathbf{EM}(\mathbb{T}) \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall (X, s) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^S \times S,\ \forall (P, Q) \in \mathcal{D}_{X,s}, \\ (A, \alpha) \models^{\mathbb{T}}_{X,\delta^s} (P, Q) \end{array} \right\} \end{cases}$$

$$\widetilde{\mathrm{Th}}_{\mathbb{T}} \begin{cases} \mathrm{Sub}(\mathbf{EM}(\mathbb{T})) \longrightarrow \mathrm{Sub}(\widetilde{\mathrm{Eq}}(\mathbb{T})) \\ \mathcal{K} \longmapsto \left(\left\{ (P, Q) \in \widetilde{\mathrm{Eq}}(\mathbb{T})_{X,s} \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall (A, \alpha) \in \mathcal{K}, \\ (A, \alpha) \models^{\mathbb{T}}_{X,\delta^s} (P, Q) \end{array} \right\} \right)_{(X,s) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^S \times S} \end{cases}$$

The pair of mappings $\widetilde{\mathrm{Th}}_{\mathbb{T}}$ and $\widetilde{\mathrm{Mod}}_{\mathbb{T}}$ is a contravariant Galois connection. We denote by $\widetilde{\mathrm{Cn}}_{\mathbb{T}}$ and $\widetilde{\mathrm{Ec}}_{\mathbb{T}}$ the derived closure operators.

Proposition 62. *Let $\mathbb{T}$ be a monad in $\mathbf{Set}^S$. Then the operators*

$$H, D\colon \mathrm{Sub}(\mathrm{Eq}(\mathbb{T})) \longrightarrow \mathrm{Sub}(\widetilde{\mathrm{Eq}}(\mathbb{T})),$$

defined, for every $\mathcal{E} \in \mathrm{Sub}(\mathrm{Eq}(\mathbb{T}))$ and $(X, s) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^S \times S$, as

$$H(\mathcal{E})_{X,s} = \left\{ (P, Q) \in \widetilde{\mathrm{Eq}}(\mathbb{T})_{X,s} \;\middle|\; (P, Q) \in \mathcal{E}_{X,\delta^s} \right\}$$

$$D(\mathcal{E})_{X,s} = \left\{ (P \circ (y), Q \circ (y) \in \widetilde{\mathrm{Eq}}(\mathbb{T})_{X,s} \;\middle|\; (P, Q) \in \mathcal{E}_{X,Y},\ y \in Y_s \right\}$$

together with the operators

$$I, D\colon \mathrm{Sub}(\widetilde{\mathrm{Eq}}(\mathbb{T})) \longrightarrow \mathrm{Sub}(\mathrm{Eq}(\mathbb{T})),$$

defined, for every $\mathcal{D} \in \mathrm{Sub}(\widetilde{\mathrm{Eq}}(\mathbb{T}))$ *and* $(X, Y) \in (\boldsymbol{\mathcal{U}}^S)^2$*, as*

$$I(\mathcal{D})_{X,Y} = \left\{(P, Q) \in \mathrm{Eq}(\mathbb{T})_{X,Y} \;\middle|\; \exists s \in S,\ Y = \delta^s,\ (P, Q) \in \mathcal{D}_{X,s}\right\}$$

$$B(\mathcal{D})_{X,Y} = \left\{(P, Q) \in \mathrm{Eq}(\mathbb{T})_{X,Y} \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall s \in S,\ \forall (y)\colon \delta^s \longrightarrow Y, \\ (P \circ (y), Q \circ (y)) \in \mathcal{D}_{X,s} \end{array}\right\}$$

are order preserving. Moreover, $H \circ I = D \circ I = H \circ B = D \circ B = \mathrm{Id}_{\mathrm{Sub}(\widetilde{\mathrm{Eq}}(\mathbb{T}))}$ *and, for every* $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Eq}(\mathbb{T})$ *and every* $\mathcal{D} \subseteq \widetilde{\mathrm{Eq}}(\mathbb{T})$*, we have that:*

$$D(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D} \text{ iff } \mathcal{E} \subseteq B(\mathcal{D});$$
$$I(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{E} \text{ iff } \mathcal{D} \subseteq H(\mathcal{E}),$$

hence $D \dashv B$ *and* $I \dashv H$*.*

From this last Proposition we can conclude that the unit of the adjunction $I \dashv H$ and the counit of the adjunction $D \dashv B$ are identities. Moreover, the adjunction $D \circ I \dashv H \circ B$ is the identity adjunction, hence the category $\mathrm{Sub}(\widetilde{\mathrm{Eq}}(\mathbb{T}))$ is a retract of $\mathrm{Sub}(\mathrm{Eq}(\mathbb{T})$ in the category **Adj** of categories and adjunctions.

Proposition 63. *Let* $\mathbb{T}$ *be a monad in* $\mathbf{Set}^S$*. Then the following diagrams commute*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sub}(\mathrm{Eq}(\mathbb{T}) \arrow[r, shift right, "\mathrm{Mod}_{\mathbb{T}}"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, shift right, "D"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \underline{\mathrm{Sub}}(\mathbf{EM}(\mathbb{T}))^{\mathrm{op}} \arrow[l, shift right, "\mathrm{Th}_{\mathbb{T}}"'] \arrow[d, equal] \\
\underline{\mathrm{Sub}}(\widetilde{\mathrm{Eq}}(\mathbb{T})) \arrow[r, shift right, "\widetilde{\mathrm{Mod}}_{\mathbb{T}}"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[u, shift right, "B"'] & \underline{\mathrm{Sub}}(\mathbf{EM}(\mathbb{T}))^{\mathrm{op}} \arrow[l, shift right, "\widetilde{\mathrm{Th}}_{\mathbb{T}}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Sub}}(\widetilde{\mathrm{Eq}}(\mathbb{T})) \arrow[r, shift right, "\widetilde{\mathrm{Mod}}_{\mathbb{T}}"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, shift right, "I"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \underline{\mathrm{Sub}}(\mathbf{EM}(\mathbb{T}))^{\mathrm{op}} \arrow[l, shift right, "\widetilde{\mathrm{Th}}_{\mathbb{T}}"'] \arrow[d, equal] \\
\underline{\mathrm{Sub}}(\mathrm{Eq}(\mathbb{T}) \arrow[r, shift right, "\mathrm{Mod}_{\mathbb{T}}"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[u, shift right, "H"'] & \underline{\mathrm{Sub}}(\mathbf{EM}(\mathbb{T}))^{\mathrm{op}} \arrow[l, shift right, "\mathrm{Th}_{\mathbb{T}}"']
\end{tikzcd}$$

□

This fact implies, as we will see later on, that the adjunctions $\mathrm{Mod}_{\mathbb{T}} \dashv \mathrm{Th}_{\mathbb{T}}$ and $\widetilde{\mathrm{Mod}}_{\mathbb{T}} \dashv \widetilde{\mathrm{Th}}_{\mathbb{T}}$ are equivalent in a convenient 2-category of adjunctions, algebraic morphisms of adjunctions and deformations between algebraic morphisms.

For the equations in $\widetilde{\mathrm{Eq}}(\mathbb{T})$ we can define a closure system $\widetilde{\mathcal{C}}_{\mathbb{T}}$ such that the associated closure operator $\widetilde{\mathrm{C}}_{\mathbb{T}}$ is equivalent to $\underline{\mathrm{Cg}}^{\Pi}_{\mathbb{T}}$.

Proposition 64. *Let* $\mathbb{T}$ *be a monad in* $\mathbf{Set}^S$ *and* $\widetilde{\mathcal{C}}_{\mathbb{T}}$ *the of all* $\mathcal{E}$ *de* $\widetilde{\mathrm{Eq}}(\mathbb{T})$ *that satisfy the following conditions:*

1. *For every* $(X, s) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^S \times S$, $\mathcal{E}_{X,s}$ *is an equivalence.*
2. *For every* $(P, Q) \in \mathcal{E}_{Y,s}$ *and every* $(P', Q') \in \mathbf{Pol}(\mathbb{T})(X, Y)$*, if, for every* $s' \in S$ *and every* $(y)\colon \delta^{s'} \longrightarrow Y$, $(P' \circ (y), Q' \circ (y)) \in \mathcal{E}_{X,s'}$ *then it follows that* $(P \diamond P', Q \diamond Q') \in \mathcal{E}_{X,s}$*.*

Then $\widetilde{\mathcal{C}}_{\mathbb{T}}$ *is a closure operator on* $\widetilde{\mathrm{Eq}}(\mathbb{T})$*. We denote by* $\widetilde{\mathrm{C}}_{\mathbb{T}}$ *the closure operador determined by* $\widetilde{\mathcal{C}}_{\mathbb{T}}$*.*

Proposition 65. *Let* $\mathbb{T}$ *be a monad in* $\mathbf{Set}^S$ *Then we have that the lattices* $(\widetilde{\mathcal{C}}_{\mathbb{T}}, \subseteq)$ *and* $\underline{\mathrm{Cgr}}^{\Pi}(\mathbf{Pol}(\mathbb{T}))$ *are isomorphic.*

2.5. **Morphisms and deformations of Fujiwara.** In this section we generalize the preceding morphisms between h-signatures in such a way that a morphism from an h-signature into another will consists of two suitably related mappings: On the one hand, the mapping that relates the sets of sorts of the h-signatures will not be, as above, a mapping from the set of sorts of one to the set of sorts of the other, but a mapping that assigns to each sort in the first, a derived sort in the second, and, on the other hand, a mapping that assigns to formal operations in the first, families of formal h-polynomials in the second, all in such a way that both transformations are compatible. This type of transformation between h-signatures will allow us to generalize, concordantly, the morphisms between heterogeneous algebras. We recall that Fujiwara in [Fuj59] defined transformations between h-signatures, but only for the homogeneous case. Moreover, we will endow to the h-signatures, morphisms between them, that we will call F-morphisms to honor Prof. Fujiwara, and deformations from one F-morphism into another, of a structure of 2-category, that was not considered by Fujiwara. We will also show that the category $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$ of h-signatures and F-morphisms can be obtained as the Kleisli category for a monad on $\mathbf{Sig}$, however the procedure to obtain this monad is more intricate than that for the derivors. This is due, essentially, to the fact that, for an h-signature (S,Σ), the pair $(S^\star\times S^\star, \mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma))$ is not an h-signature. Moreover, the contravariant functor $\mathrm{Alg}\colon \mathbf{Sig}\longrightarrow\mathbf{Cat}$ will be lifted to a contravariant pseudo-functor $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}\colon \mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}\longrightarrow\mathbf{Cat}$. Then, by applying the construction of Ehresmann-Grothendieck, we will obtain a new category $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fuj}}$ of h-algebras and morphisms between h-algebras that have the F-morphisms as a component.

Every F-morphism between h-signatures has associated a functor between the respectives categories of formal heterogeneous polynomials, defined in a similar way to the case of the morphisms of h-signatures, that we will lift to a pseudo-functor $\mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}\colon \mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}\longrightarrow\mathbf{Cat}$. Moreover, for the F-morphisms are valid the replicas of the propositions on morphisms between h-signatures that were enunciated in the section on formal heterogeneous polynomials. In particular, the realization of formal heterogeneous polynomial in the algebras will be invariant relative to the functors $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}$ and $\mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}$, for which we have a proposition analogous to the Prop. **??**.

Before we define the F-morphisms, we agree that $\mathbf{FMon} = (\star, \between, \curlywedge)$ is the monad for the formation of the free monoid, where, for every set S, $\between_S\colon S\longrightarrow S^\star$ is the canonical inclusion from S into $S^\star$ and $\curlywedge_S\colon S^{\star\star}\longrightarrow S^\star$ is the concatenation of words. To simplify the notation, we write $S^\star$ instead of $\star(S)$ and (s) instead of $\between_S(s)$. Moreover, if $\phi\colon S\longrightarrow T^\star$, then $\phi^\sharp\colon S^\star\longrightarrow T^\star$ is the extension of ϕ to the free monoid $S^\star$ on S.

Definition 33. Let $\underline{\Sigma}$ and $\underline{\Lambda}$ be h-signatures. A morphism of Fujiwara or, simply, an F-morphism, from $\underline{\Sigma}$ into $\underline{\Lambda}$ is a pair $\underline{d} = (\phi, d)$, with $\phi\colon S\longrightarrow T^\star$ and $d\colon \Sigma\longrightarrow \Delta_{\phi^\sharp\times\phi}(\mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda))$, i.e., an $S^\star\times S$-sorted mapping from Σ into $\mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda)_{\phi^\sharp\times\phi}$.

Once defined the F-morphisms, we point out that every derivor $\underline{d}\colon\underline{\Sigma}\longrightarrow\underline{\Lambda}$ determines an F-morphism $(\between_T\circ\phi, d)$, because

$$d\colon \Sigma\longrightarrow\Delta_{\phi^\star\times\phi}(\mathrm{Pol}_{\mathrm{H}_T}(\Lambda)) = \Delta_{(\between_T\circ\phi)^\sharp\times\phi}(\mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda)),$$

therefore the theory of derivors falls under that of the F-morphisms.

If $\underline{d}\colon\underline{\Sigma}\longrightarrow\underline{\Lambda}$ is an F-morphism, then d is an $S^\star\times S$-sorted mapping such that, for every $(w,s)\in S^\star\times S$,

$$d_{w,s}\colon \Sigma_{w,s}\longrightarrow \mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda)_{\phi^\sharp(w),\phi(s)} = \mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}(\downarrow\phi^\sharp(w))_{\phi(s)}$$

and because $\Delta_{\phi^\sharp\times\phi} = \Delta_{1\times\between_S}\circ\Delta_{\phi^\sharp\times\phi^\sharp}$ and the functor $\coprod_{1\times\between_S}$ is left adjoint for the functor $\Delta_{1\times\between_S}$, d is, essentially, an $S^\star\times S^\star$-sorted mapping

$$\theta^{1\times\between_S}(d)\colon \coprod_{1\times\between_S}\Sigma \longrightarrow \Delta_{\phi^\sharp\times\phi^\sharp}(\mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda)).$$

From now on, for every F-morphism $\underline{d}$, we identify d and $\theta^{1\times\between_S}(d)$.

For every h-signature $\underline{\Lambda}$, $\mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda)$ is the underlying h-set of the Bénabou algebra for T, $\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda)$. Because $\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda)$ is isomorphic to $\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{B}_T}(\coprod_{1\times\between_T}\Lambda)$, the F-morphisms can also be defined as pairs (ϕ, d) with $\phi\colon S\longrightarrow T^\star$ and d an $S^\star\times S$-sorted mapping from Σ into $\mathrm{Fr}_{\mathrm{B}_T}(\coprod_{1\times\between_T}\Lambda)_{\phi^\sharp\times\phi}$ or, equivalently, an $S^\star\times S^\star$-sorted mapping from $\coprod_{1\times\between_S}\Sigma$ into $\mathrm{Fr}_{\mathrm{B}_T}(\coprod_{1\times\between_T}\Lambda)_{\phi^\sharp\times\phi^\sharp}$.

On the other hand, as we will show next, every mapping $\phi\colon S\longrightarrow T^\star$ induces a functor from the category $\mathbf{Alg}(\mathrm{B}_T)$ into the category $\mathbf{Alg}(\mathrm{B}_S)$, but, unlike the case of the Hall algebras, it does not arises from a morphism of algebraic presentations, but from a derivor between the corresponding algebraic presentations. Hence, $\mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda)_{\phi^\sharp\times\phi^\sharp}$ will be endowed with a structure of Bénabou algebra for S, that will allow us, among other things, to define the composition of the F-morphisms.

Proposition 66. *Let ϕ be a mapping from S into $T^\star$. Then there exists an $(S^\star\times S^\star)^\star\times(S^\star\times S^\star)$-sorted mapping*

$$\mathrm{b}^\phi\colon \Sigma^{\mathrm{B}_S}\longrightarrow \mathrm{Pol}_{\mathrm{H}_T}(\Sigma^{\mathrm{B}_T})_{(\phi^\sharp\times\phi^\sharp)^\star\times(\phi^\sharp\times\phi^\sharp)}$$

defined as

(1) *For every $w\in S^\star$ and $i\in|w|$, $\mathrm{b}^\phi(\pi^w_i)$ is the $\underline{\Sigma}^{\mathrm{B}_T}$-polynomial*

$$\langle\pi^{\phi^\sharp(w)}_{s_i},\ldots,\pi^{\phi^\sharp(w)}_{s_{i+1}-1}\rangle_{\phi^\sharp(w),\phi(w_i)}$$

of type $\lambda\longrightarrow(\phi^\sharp(w),(\phi(w_i)))$

(2) *For every u, $w\in S^\star$, $\mathrm{b}^\phi(\langle\,\rangle_{u,w})$ is the $\underline{\Sigma}^{\mathrm{B}_T}$-polynomial*

$$\begin{aligned}&\langle\pi^{\phi(w_0)}_0\circ v^{(\phi^\sharp(u),\phi(w_0))}_0,\ldots,\pi^{\phi(w_0)}_{|\phi(w_0)|-1}\circ v^{(\phi^\sharp(u),\phi(w_0))}_0,\ldots,\\ &\ \pi^{\phi(w_i)}_0\circ v^{(\phi^\sharp(u),\phi(w_i))}_i,\ldots,\pi^{\phi(w_i)}_{|\phi(w_i)|-1}\circ v^{(\phi^\sharp(u),\phi(w_i))}_i,\ldots,\\ &\ \pi^{\phi(w_{|w|-1})}_0\circ v^{(\phi^\sharp(u),\phi(w_{|w|-1}))}_{|w|-1},\ldots,\pi^{\phi(w_{|w|-1})}_{|\phi(w_{|w|-1})|-1}\circ v^{(\phi^\sharp(u),\phi(w_{|w|-1}))}_{|w|-1}\rangle\end{aligned}$$

of type $((\phi^\sharp(u),\phi(w_0)),\ldots,(\phi^\sharp(u),\phi(w_{|w|-1})))\longrightarrow(\phi^\sharp(u),\phi^\sharp(w))$

(3) *For every u, x, $w\in S^\star$, $\mathrm{b}^\phi(\circ_{u,x,w})$ is the $\underline{\Sigma}^{\mathrm{B}_T}$-polynomial*

$$\circ_{\phi^\sharp(u),\phi^\sharp(x),\phi^\sharp(w)}(v^{(\phi^\sharp(u),\phi^\sharp(x))}_0, v^{(\phi^\sharp(x),\phi^\sharp(w))}_1)$$

of type $((\phi^\sharp(u),\phi^\sharp(x)),(\phi^\sharp(x),\phi^\sharp(w)))\longrightarrow(\phi^\sharp(u),\phi^\sharp(w))$

Moreover, $(\phi^\sharp\times\phi^\sharp,\mathrm{b}^\phi)\colon(S^\star\times S^\star,\underline{\Sigma}^{\mathrm{B}_S},\mathcal{E}^{\mathrm{B}_S})\longrightarrow(T^\star\times T^\star,\underline{\Sigma}^{\mathrm{B}_T},\mathcal{E}^{\mathrm{B}_T})$ is a morphism of algebraic presentations.

Because every derivor between algebraic presentations induces a functor, in the opposite direction, between the associated categories of algebras, every mapping $\phi\colon S\longrightarrow T^\star$, determines a functor $\mathrm{Alg}_{\mathrm{der}}(\phi^\sharp\times\phi^\sharp,\mathrm{b}^\phi)$ from $\mathbf{Alg}(\mathrm{B}_T)$ into $\mathbf{Alg}(\mathrm{B}_S)$. The action of the functor on the free Bénabou algebra on a T-signature Λ is a Bénabou algebra for S, with $\mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda)_{\phi^\sharp\times\phi^\sharp}$ as underlying $S^\star\times S^\star$-sorted set.

Let us remark that for an F-morphism $\underline{d}\colon\underline{\Sigma}\longrightarrow\underline{\Lambda}$, we can extend the $S^\star\times S$-sorted mapping $d\colon\Sigma\longrightarrow\mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda)_{\phi^\sharp\times\phi^\sharp}$ to a homomorphism of Bénabou algebras $d^\sharp\colon\mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)\longrightarrow\mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda)_{\phi^\sharp\times\phi^\sharp}$, whose underlying $S^\star\times S^\star$-mapping determines a translation of $\underline{\Sigma}$-polynomials into $\underline{\Lambda}$-polynomials. In particular, for every $(w,s)\in S^\star\times S$, $d^\sharp_{w,(s)}$ is the translation of formal h-polynomials in $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_s$ into formal h-polynomials in $\mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}(\downarrow\phi^{\sharp}(w))_{\phi(s)}$, that assigns to every variable v_i^s in $\downarrow w$ the tuple of variables $(v_{s_i}^{\phi^{\sharp}(w)_{s_i}}, \ldots, v_{s_{i+1}-1}^{\phi^{\sharp}(w)_{s_{i+1}-1}})$.

Definition 34. Let $\underline{d}\colon \underline{\Sigma} \longrightarrow \underline{\Lambda}$ and $\underline{e}\colon \underline{\Lambda} \longrightarrow \underline{\Omega}$ be F-morphisms. Then the composition of $\underline{d}$ and $\underline{e}$, denoted by $\underline{e} \circ \underline{d}$, is the morphism $(\psi^{\sharp} \circ \phi, e^{\sharp}_{\phi^{\sharp} \times \phi^{\sharp}} \circ d)$, where $\psi^{\sharp} \circ \phi\colon S \longrightarrow U^{\star}$ and $e^{\sharp}_{\phi^{\sharp} \times \phi^{\sharp}} \circ d$ is obtained from

$$
\begin{tikzcd}
\Lambda \arrow[r, "\eta^{\mathrm{B}_T}_{\Lambda}"] \arrow[dr, "e"'] & \mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda) \arrow[d, "e^{\sharp}"] \\
& \mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_U}(\Omega)_{\psi^{\sharp} \times \psi^{\sharp}}
\end{tikzcd}
\quad \text{as} \quad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda)_{\phi^{\sharp} \times \phi^{\sharp}} \arrow[d, "e^{\sharp}_{\phi^{\sharp} \times \phi^{\sharp}}"] & \Sigma \arrow[l, "d"'] \\
\mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_U}(\Omega)_{\psi^{\sharp} \times \psi^{\sharp}\,\psi^{\sharp} \times \psi^{\sharp}} &
\end{tikzcd}
$$

and, for every h-signature $\underline{\Sigma}$, the F-identity is the F-morphism $(\mathbin{\char"2E17}_S, \eta^{\mathrm{B}_S}_{\Sigma})$.

The preceding definition allows us to obtain a category of h-signatures and morphisms of Fujiwara.

Proposition 67. *The* h*-signatures together with the morphisms of Fujiwara determine a category, that we denote by* $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$.

The category $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$ can be obtained as the Kleisli category for a monad on $\mathbf{Sig}$, however the procedure to obtain this monad is more involved than that for the case of the derivors. This is due to the fact that, for an h-signature $\underline{\Sigma}$, the pair $(S^{\star} \times S^{\star}, \mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma))$ is not an h-signature, because $\mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)$ is an $S^{\star} \times S^{\star}$-sorted set, but not an $(S^{\star} \times S^{\star})^{\star} \times (S^{\star} \times S^{\star})$-sorted set. To obtain such an h-signature, let us remark that the functor

$$
\Delta_{\curlywedge_S \times 1}\colon \mathbf{Set}^{S^{\star} \times S^{\star}} \longrightarrow \mathbf{Set}^{S^{\star\star} \times S^{\star}}
$$

assigns to $S^{\star} \times S^{\star}$-sorted sets $S^{\star}$-signatures, therefore, for every S-signature Σ, we have that $\Delta_{\curlywedge_S \times 1}(\mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma))$ is a $S^{\star}$-signature. On the other hand, for every set of sorts S, the adjunction $\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{B}_S} \dashv \mathrm{G}_{\mathrm{B}_S}$, determines a monad on $\mathbf{Set}^{S^{\star} \times S^{\star}}$ denoted as $\mathbf{Fr}_{\mathrm{B}_S} = (\mathrm{Fr}_{\mathrm{B}_S}, \eta^{\mathrm{B}_S}, \mu^{\mathrm{B}_S})$. From this we can obtain the monad that is associated to the F-morphisms as follows.

Proposition 68. *There exists a monad* $\mathbf{fuj} = (\mathrm{fuj}, \eta^{\mathrm{fuj}}, \mu^{\mathrm{fuj}})$ *on* $\mathbf{Sig}$ *such that the categories* $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$ *and* $\mathbf{Kl}(\mathbf{fuj})$ *are isomorphic.*

Now we will lift the contravariant functor $\mathrm{Alg}\colon \mathbf{Sig} \longrightarrow \mathbf{Cat}$ to a contravariant pseudo-functor $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}\colon \mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}} \longrightarrow \mathbf{Cat}$, and by applying the construction of Ehresmann-Grothendieck, we will obtain a new category of heterogeneous algebras $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fuj}}$. But before that we define some auxiliary functors and natural transformations.

For every set of sorts S, there exists a functor $(\cdot)^{\natural_S}$ from $\mathbf{Set}^S$ into $\mathbf{Set}^{S^{\star}}$ defined as $(\cdot)^{\natural_S} = (\cdot_u)_{u \in S^{\star}}$. If $f\colon A \longrightarrow B$ is an S-sorted mapping, then we say that $A^{\natural_S}$ and $f^{\natural_S}$ are the extensions of A and f to the words on S. Sometimes, to simplify the notation we will write $A^{\natural}$ instead of $A^{\natural_S}$ and $f^{\natural}$ instead of $f^{\natural_S}$.

The functors $(\cdot)^{\natural_S}$ are the components of a natural transformation.

Proposition 69. *From* Set *into* $\mathrm{Set}\circ\mathrm{FMon}^{\mathrm{op}}$ *there exists a natural transformation* $(\cdot)^{\natural}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \arrow[rr, "\mathrm{FMon}^{\mathrm{op}}"] \arrow[dr, "\mathrm{Set}"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{(\cdot)^{\natural}}{\Rrightarrow}"] & \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \arrow[dl, "\mathrm{Set}"] \\
& \mathbf{Cat} &
\end{tikzcd}$$

that to a set S assigns the functor $(\cdot)^{\natural_S}$.

Proposition 70. *Let S be a set of sorts. Then from the functor $(\cdot)^{\natural_{S^\star}}\circ(\cdot)^{\natural_S}$ into the functor $\Delta_{\curlywedge_S}\circ(\cdot)^{\natural_S}$ there exists a natural isomorphism ι_S*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Set}^{S} \arrow[r, bend left, "(\cdot)^{\natural_{S^\star}}\circ(\cdot)^{\natural_S}"{name=U}] \arrow[r, bend right, "\Delta_{\curlywedge_S}\circ(\cdot)^{\natural_S}"'{name=D}] & \mathbf{Set}^{S^{\star\star}}
\arrow[from=U, to=D, phantom, "\Downarrow\iota_S"]
\end{tikzcd}$$

such that, for every S-sorted set A, $(\iota_S)_A\colon A^{\natural\natural}\longrightarrow A^{\natural}_{\curlywedge}$ is the $S^{\star\star}$-isomorphism defined, for every $\overline{w}=(w_i)_{i\in|\overline{w}|}\in S^{\star\star}$, as

$$A^{\natural\natural}_{\overline{w}}=\prod\nolimits_{i\in|\overline{w}|}\prod\nolimits_{j\in|w_i|}A_{w_{i_j}}\xrightarrow{\langle \mathrm{pr}_{i_j}\circ\mathrm{pr}_i\rangle_{i\in|\overline{w}|,j\in|w_i|}}\prod\nolimits_{i\in|\overline{w}|,\,j\in|w_i|}A_{w_{i_j}}=A^{\natural}_{\curlywedge\overline{w}}$$

where $\mathrm{pr}_i\colon A_{\overline{w}}\longrightarrow A_{w_i}$ and $\mathrm{pr}_{i_j}\colon A_{w_i}\longrightarrow A_{w_{i_j}}$ are the canonical projections. To simplify the notation we will write ι^A instead of $(\iota_S)_A$.

The natural isomorphisms ι_S, in his turn, are the components of an iso-modification, i.e., of an invertible isomorphism between 2-natural transformations ([Bor94]).

Proposition 71. *From $((\cdot)^{\natural}*\mathrm{FMon}^{\mathrm{op}})\circ(\cdot)^{\natural}$ into $(\mathrm{Set}*\curlywedge^{\mathrm{op}})\circ(\cdot)^{\natural}$ there exists an iso-modification $\iota=(\iota_S)_{S\in\mathbf{Set}^{S^{\mathrm{op}}}}$.*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \arrow[r, "\mathrm{FMon}^{\mathrm{op}}"] \arrow[dr, bend right, "\mathrm{Set}"'] & \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \arrow[r, "\mathrm{FMon}^{\mathrm{op}}"] \arrow[d, "\mathrm{Set}"] & \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \arrow[dl, bend left, "\mathrm{Set}"] & \overset{\iota}{\Rrightarrow} & \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \arrow[r, "\mathrm{FMon}^{\mathrm{op}}"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{FMon}^{\mathrm{op}}"'] \arrow[dr, bend right, "\mathrm{Set}"'] & \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \arrow[r, "\mathrm{FMon}^{\mathrm{op}}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\curlywedge^{\mathrm{op}}"] & \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \arrow[dl, bend left, "\mathrm{Set}"] \\
& \mathbf{Cat} & & & & \mathbf{Cat} &
\end{tikzcd}$$

Corollary 9. *Let $\phi\colon S\longrightarrow T^\star$ be a mapping. Then, for every T-sorted set B, we have that $B_\phi=B_{\phi^\star}$ and $B_{\phi^\sharp}$ are isomorphic $S^\star$-sorted sets.*

Corollary 10. *Let $\phi\colon S\longrightarrow T^\star$ and $\psi\colon T\longrightarrow U^\star$ be mappings. Then, for every U-sorted set C, we have that C_{ψ_ϕ} and $C_{\psi^\sharp\circ\phi}$ are isomorphic S-sorted sets.*

Corollary 11. *let $\phi\colon S\longrightarrow T^\star$ be a mapping. Then, for every T-sorted set B, we have that $\mathrm{Op}_{\mathbf{B}_T}(B)_{\phi^\sharp\times\phi^\sharp}$ and $\mathrm{Op}_{\mathbf{B}_S}(B_\phi)$ are isomorphic. We denote the isomorphism by $\kappa^B_\phi\colon\mathrm{Op}_{\mathbf{B}_T}(B)_{\phi^\sharp\times\phi^\sharp}\longrightarrow\mathrm{Op}_{\mathbf{B}_T}(B_\phi)$.*

In the preceding Proposition, for every mapping $\phi\colon S\longrightarrow T^\star$ and T-sorted set B, the isomorphisms κ^B_ϕ are the components of a natural isomorphism κ_ϕ, defined as

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Set}^{S}_{\mathrm{iso}} \arrow[r, "\mathrm{Op}_{\mathrm{B}_S}"] & \mathbf{Set}^{S^\star \times S^\star} \\
\mathbf{Set}^{T}_{\mathrm{iso}} \arrow[u, "\Delta_\phi"] \arrow[r, "\mathrm{Op}_{\mathrm{B}_T}"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\kappa_\phi}{\Leftarrow}"] & \mathbf{Set}^{T^\star \times T^\star} \arrow[u, "\Delta_{\phi^\sharp \times \phi^\sharp}"']
\end{tikzcd}$$

with $\mathbf{Set}^{S}_{\mathrm{iso}}$ the category of S-sorted sets and isomorphisms.

Next we show that the F-morphisms between h-signatures determine functors in the opposite direction, between the associated categories of h-algebras.

Proposition 72. *Let* $\underline{d}\colon \underline{\Sigma} \longrightarrow \underline{\Lambda}$ *be a morphism in* $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$. *Then* $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})$ *is the functor defined as*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Alg}(\underline{\Lambda}) \arrow[rr, "\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})"] & & \mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}) \\
(B, G) \arrow[d, "f"'] & & (B_\phi, G^{\underline{d}}) \arrow[d, "f_\phi"] \\
(B', G') & \longmapsto & (B'_\phi, G'^{\underline{d}})
\end{tikzcd}$$

where, for every $\underline{\Lambda}$*-algebra* (B, G), $G^{\underline{d}}$ *is* $\kappa^B_\phi \circ G^\sharp_{\phi^\sharp \times \phi^\sharp} \circ d$, *obtained from*

$$\begin{tikzcd}
\Lambda \arrow[r, "\eta^{\mathrm{B}_T}_\Lambda"] \arrow[dr, "G"'] & \mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda) \arrow[d, "G^\sharp"] \\
 & \mathrm{Op}_{\mathrm{B}_T}(B)
\end{tikzcd}
\quad \textit{as} \quad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda)_{\phi^\sharp \times \phi^\sharp} \arrow[d, "G^\sharp_{\phi^\sharp \times \phi^\sharp}"'] & \Sigma \arrow[l, "d"'] \\
\mathrm{Op}_{\mathrm{B}_T}(B)_{\phi^\sharp \times \phi^\sharp} \arrow[r, "\kappa^B_\phi"'] & \mathrm{Op}_{\mathrm{B}_S}(B_\phi)
\end{tikzcd}$$

If $\underline{d}\colon \underline{\Sigma} \longrightarrow \underline{\Lambda}$ is an F-morphism, $\underline{B} = (B, G)$ a $\underline{\Lambda}$-algebra, $\sigma\colon w \longrightarrow s$ a formal operation in Σ and

$$\begin{aligned}
w &= (s_0, \dots, s_{m-1}) \\
\phi(s_0) &= (t_{0,0}, \dots, t_{0,n_0-1}) \\
&\ \vdots \\
\phi(s_{m-1}) &= (t_{m-1,0}, \dots, t_{m-1,n_{m-1}-1}) \\
\phi(s) &= (t_0, \dots, t_{p-1})
\end{aligned}$$

then $\phi^\sharp(w)$ is the word

$$(t_{0,0}, \dots, t_{0,n_0-1}, \dots, t_{m-1,0}, \dots, t_{m-1,n_{m-1}-1})$$

and $d(\sigma)\colon \phi^\sharp(w) \longrightarrow \phi(s)$ i.e., $d(\sigma)$ is a family of formal h-polynomials $P = (P_0, \dots, P_{p-1})$ such that, for every $i \in p$, $P_i\colon \phi^\sharp(w) \longrightarrow t_i$. The realization of $d(\sigma)$ in $\underline{B}$, $G^\sharp_{\phi^\sharp \times \phi^\sharp}(P)$, is the polynomical operation $P^{\underline{B}} = \langle P^{\underline{B}}_0, \dots, P^{\underline{B}}_{p-1} \rangle$ of type

$$B_{t_{0,0}} \times \cdots \times B_{t_{0,n_0-1}} \times \cdots \times B_{t_{m-1,0}} \times \cdots \times B_{t_{m-1,n_{m-1}-1}} \longrightarrow B_{t_0} \times \cdots \times B_{t_{p-1}}$$

that by composition with the canonical isomorphism from B_{ϕ_w} into $B_{\phi^\sharp(w)}$ gives rise to the operación $G^{\underline{d}}(\sigma)$

$$\begin{array}{c}(B_{t_{0,0}}\times\cdots\times B_{t_{0,n_0-1}})\times\cdots\times(B_{t_{m-1,0}}\times\cdots\times B_{t_{m-1,n_{m-1}-1}})\\ \Big\downarrow \iota^{B}_{(\phi(s_0),\ldots,\phi(s_{m-1}))}\\ B_{t_{0,0}}\times\cdots\times B_{t_{0,n_0-1}}\times\cdots\times B_{t_{m-1,0}}\times\cdots\times B_{t_{m-1,n_{m-1}-1}}\\ \Big\downarrow P^{\underline{B}}\\ B_{t_0}\times\cdots\times B_{t_{p-1}}\end{array}$$

this justifies that we denote $G^{\underline{d}}(\sigma)$ as

$$G^{(\phi,d)}(\sigma)\colon\begin{pmatrix}B_{t_{0,0}} & \cdots & B_{t_{0,n_0-1}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ B_{t_{m-1,0}} & \cdots & B_{t_{m-1,n_{m-1}-1}}\end{pmatrix}\longrightarrow(B_{t_0}\ \ldots\ B_{t_{p-1}}).$$

Proposition 73. *Let $\underline{d}\colon\underline{\Sigma}\longrightarrow\underline{\Lambda}$ be an F-morphism of* h*-signatures. Then the following diagram commutes*

$$\begin{tikzcd}\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}) \arrow[r, "\mathrm{G}_{\underline{\Sigma}}"] & \mathbf{Set}^S\\ \mathbf{Alg}(\underline{\Lambda}) \arrow[u, "\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})"] \arrow[r, "\mathrm{G}_{\underline{\Lambda}}"'] & \mathbf{Set}^T \arrow[u, "\Delta_{\phi}^{\natural_S}"']\end{tikzcd}$$

The functor $\mathrm{Alg}\colon\mathbf{Sig}\longrightarrow\mathbf{Cat}$ can be lifted to a contravariant pseudo-functor $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}\colon\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}\longrightarrow\mathbf{Cat}$, and, by applying to this contravariant pseudo-functor the construction of Ehresmann-Grothendieck, we obtain the category $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fuj}}$.

Proposition 74. *From $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$ into $\mathbf{Cat}$ there exists a contravariant pseudo-functor, denoted by $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}$, defined as*

$$\begin{tikzcd}\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}} \arrow[rr, "\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}"] & & \mathbf{Cat}\\ \underline{\Sigma} \arrow[d, "\underline{d}"'] & & \mathbf{Alg}(\underline{\Sigma})\\ \underline{\Lambda} & \longmapsto & \mathbf{Alg}(\underline{\Lambda}) \arrow[u, "\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})"']\end{tikzcd}$$

(1) *For given* h*-signatures $\underline{\Sigma}$, $\underline{\Lambda}$, $\underline{\Omega}$, the natural isomorphism $\gamma_{\underline{\Sigma},\underline{\Lambda},\underline{\Omega}}$ is, for every $\underline{d}\colon\underline{\Sigma}\longrightarrow\underline{\Lambda}$ and $\underline{e}\colon\underline{\Lambda}\longrightarrow\underline{\Omega}$, the natural isomorphism from $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{e})\circ\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})$ into $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{e}\circ\underline{d})$ that, for every $\underline{\Omega}$-algebra (C,H), is the isomorphism $\iota^{C}_{\psi^\star\circ\phi}$. To simplify, we write $\gamma_{\underline{d},\underline{e}}$ instead of $(\gamma_{\underline{\Sigma},\underline{\Lambda},\underline{\Omega}})_{\underline{d},\underline{e}}$.*

(2) *For an* h*-signature $\underline{\Sigma}$, the natural isomorphism $\nu_{(S,\Sigma)}$ from $\mathrm{Id}_{\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma})}$ into $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\between_S,\eta_\Sigma)$ is, for every $\underline{\Sigma}$-algebra (A,F), the isomorphism $\delta^{A}_{S}\colon A\longrightarrow(A_{(s)})_{s\in S}$.*

Definition 35. By applying the Ehresmann-Grothendieck construction to the contravariant pseudo-functor $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}$ we obtain the category $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fuj}}$ i.e.,

$$\mathbf{Alg}_{\mathrm{fuj}}=\int^{\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}}\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}.$$

The category $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fuj}}$ has the pairs $((S,\Sigma),(A,F))$ as objects, with S a set of sorts, Σ a heterogeneous S-signature and (A,F) a Σ-algebra, and as morphisms from $((S,\Sigma),(A,F))$ into $((T,\Lambda),(B,G))$, the pairs $((\phi,d),h)$, with (ϕ,d) an F-morphism from (S,Σ) into (T,Λ) and h a homomorphism of Σ-algebras from (A,F) into $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\phi,d)(B,G)=(B_\phi,G^{(\phi,d)})$.

Now we define some auxiliary functors and natural transformations that we will use later on to show the existence of a pseudo-functor from the category $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$ into the category $\mathbf{Cat}$.

For every set of sorts S, the functor $(\cdot)^{\natural_S}$ from $\mathbf{Set}^S$ into $\mathbf{Set}^{S^\star}$, has a left adjoint.

Proposition 75. *Let S be a set of sorts. From $\mathbf{Set}^{S^\star}$ into $\mathbf{Set}^S$ there exists a functor $(\cdot)^{\dagger_S}$ defined, for every $S^\star$-sorted set C and $s\in S$, as follows*

$$C^{\dagger_S}_s=\bigcup\nolimits_{\substack{w\in S^\star\ \&\\ w^{-1}[s]\neq\varnothing}} C_w\times\{w\}\times w^{-1}[s]$$

and, for every $S^\star$-mapping $f\colon C\longrightarrow C'$, $s\in S$ and (c,w,i) in $C^{\dagger_S}_s$, as follows

$$f^{\dagger_S}_s(c,w,i)=(f_w(c),w,i).$$

Moreover, the functor $(\cdot)^{\dagger_S}$ is a left adjoint for the functor $(\cdot)^{\natural_S}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Set}^S \arrow[r, shift left=2, "(\cdot)^{\natural_S}"] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{Set}^{S^\star} \arrow[l, shift left=2, "(\cdot)^{\dagger_S}"]
\end{tikzcd}$$

The functors $(\cdot)^{\dagger_S}$ are also the components of a natural transformation.

Proposition 76. *From the functor $\mathrm{Set}\circ\mathrm{FMon}^{\mathrm{op}}$ into the functor Set there exists a natural transformation $(\cdot)^\dagger$*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \arrow[rr, "\mathrm{FMon}^{\mathrm{op}}"] \arrow[dr, "\mathrm{Set}"'] & \arrow[d, phantom, "{(\cdot)^\dagger \Leftarrow}"] & \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \arrow[dl, "\mathrm{Set}"] \\
& \mathbf{Cat} &
\end{tikzcd}$$

that to every set S assigns the functor $(\cdot)^{\dagger_S}$.

From the Prop. 75, follows the existence of an adjunction $(\cdot)^\dagger\dashv(\cdot)^\natural$, i.e., the natural transformations $(\cdot)^\dagger$ and $(\cdot)^\natural$ are adjoint 2-cells in a 3-category of 2-categories, 2-natural transformations and modifications.

Proposition 77. *Let S be a set of sorts. From the functor $(\cdot)^{\dagger_S}\circ(\cdot)^{\dagger_{S^\star}}$ into the functor $(\cdot)^{\dagger_S}\circ\coprod_{\curlywedge_S}$ there exists a natural isomorphism ζ_S*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Set}^S \arrow[r, phantom, "\Downarrow\zeta_S"] & \mathbf{Set}^{S^{\star\star}} \arrow[l, shift right=3, "(\cdot)^{\dagger_S}\circ(\cdot)^{\dagger_{S^\star}}"'] \arrow[l, shift left=3, "(\cdot)^{\dagger_S}\circ\coprod_{\curlywedge_S}"]
\end{tikzcd}$$

If there is no risk of misunderstanding we will write ζ^C instead of $(\zeta_S)_C$.

For every $S^{\star\star}$-sorted set C, $\zeta^C\colon C^{\dagger\dagger}\longrightarrow C^{\dagger}_{\curlywedge}$ is the S-isomorphism that, for $s\in S$, assigns to $((c,\overline{x},i),y,j)$ in $C^{\dagger\dagger}_s$ the element $((c,\overline{x}),\curlywedge\overline{x},k)$ in $C^{\dagger}_{\curlywedge}$, where $\overline{x}$ is of the form

$$\underbrace{((\cdot,\ldots,\cdot),\ldots,\overbrace{(\cdot,\ldots,\ \overline{x}_{i,j}\ ,\ldots,\cdot)}^{\overline{x}_i},\ldots,(\cdot,\ldots,\cdot))}_{}$$
$$(\curlywedge\overline{x})_k$$

The natural isomorphisms ζ_S are the components of an iso-modification.

Proposition 78. *From* $((\cdot)^{\dagger} * \mathrm{FMon}^{\mathrm{op}}) \circ (\cdot)^{\dagger}$ *into* $(\cdot)^{\dagger} \circ (\mathrm{Set} * \curlywedge^{\mathrm{op}})$ *there exists an iso-modification* $\zeta = (\zeta_S)_{S \in \mathbf{Set}^{S^{\mathrm{op}}}}$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \arrow[r, "\mathrm{FMon}^{\mathrm{op}}"] \arrow[dr, bend right, "\mathrm{Set}"'] & \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \arrow[r, "\mathrm{FMon}^{\mathrm{op}}"] \arrow[d, "\mathrm{Set}"] & \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \arrow[dl, bend left, "\mathrm{Set}"] \\
& \mathbf{Cat} &
\end{tikzcd}
\overset{\zeta}{\Rrightarrow}
\begin{tikzcd}
\mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \arrow[r, "\mathrm{FMon}^{\mathrm{op}}"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{FMon}^{\mathrm{op}}"'] \arrow[dr, bend right, "\mathrm{Set}"'] & \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \arrow[r, "\mathrm{FMon}^{\mathrm{op}}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \curlywedge^{\mathrm{op}}"] & \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \arrow[dl, bend left, "\mathrm{Set}"] \\
& \mathbf{Cat} &
\end{tikzcd}
$$

If $\phi\colon S \longrightarrow T^{\star}$ is a mapping, then we can compose the adjunctions $\coprod_{\phi} \dashv \Delta_{\phi}$ and $(\cdot)^{\dagger} \dashv (\cdot)^{\natural}$ to obtain a adjunction from $\mathbf{Set}^S$ into $\mathbf{Set}^T$, that we denote by $\coprod_{\phi}^{\dagger} \dashv \Delta_{\phi}^{\natural}$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Set}^{S} \arrow[d, bend right, "\coprod_{\phi}^{\dagger}"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \arrow[drr, bend left, "\coprod_{\phi}"] \arrow[drr, phantom, "\top"] & & \\
\mathbf{Set}^{T} \arrow[u, bend right, "\Delta_{\phi}^{\natural}"'] \arrow[rr, bend left, "(\cdot)^{\natural}"] \arrow[rr, phantom, "\top"] & & \mathbf{Set}^{T^{\star}} \arrow[ll, bend left, "(\cdot)^{\dagger}"] \arrow[ull, bend right, "\Delta_{\phi}"']
\end{tikzcd}
$$

The functor $\coprod_{\phi}^{\dagger}$ assigns, to an S-sorted set A, the T-sorted set

$$(\{(a, s, i) \mid s \in S,\, a \in A_s,\, i \in |\phi(s)|,\, \phi(s)_i = t\})_{t \in T}$$

and the functor $\Delta_{\phi}^{\natural}$ assigns, to a T-sorted set B the S-sorted set $(B_{\phi(s)})_{s \in S}$. The natural isomorphism of the adjunction $\coprod_{\phi}^{\dagger} \dashv \Delta_{\phi}^{\natural}$, denoted by $\theta_{\phi}^{\dagger\natural}$, assigns, to every $f\colon \coprod_{\phi}^{\dagger}(A) \longrightarrow B$, the S-sorted mapping that, for $s \in S$, is defined as

$$\theta_{\phi}^{\dagger\natural}(f)_s \begin{cases} A_s & \longrightarrow \ B_{\phi(s)} \\ a & \longmapsto \ (f_{\phi(s)_i}(a, s, i))_{i \in |\phi(s)|} \end{cases}$$

and, to every $g\colon A \longrightarrow \Delta_{\phi}^{\natural}(B)$, the T-sorted mapping that, for $t \in T$, is defined as

$$(\theta_{\phi}^{\dagger\natural})^{-1}(g)_s \begin{cases} \coprod_{\phi}^{\dagger}(A)_t & \longrightarrow \ B_t \\ (a, s, i) & \longmapsto \ g_s(a)_i \end{cases}$$

From this follows that every F-morphism of h-signatures induces a functor between the associated categories of formal h-polynomials.

Proposition 79. *Every F-morphism* $\underline{d}\colon \underline{\Sigma} \longrightarrow \underline{\Lambda}$ *induces a functor* $\mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})$ *defined as*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Pol}(\underline{\Sigma}) \arrow[rr, "\mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})"] & & \mathbf{Pol}(\underline{\Lambda}) \\
X \arrow[d, "P"'] & & \coprod_{\phi}^{\dagger} X \arrow[d, "(\theta_{\phi}^{\dagger\natural})^{-1}\left(\left(\theta_{\phi}^{\dagger\natural}(\eta^{\Lambda}_{\coprod_{\phi}^{\dagger} X})\right)^{\sharp} \circ P\right)"] \\
Y & \longmapsto & \coprod_{\phi}^{\dagger} Y
\end{tikzcd}
$$

where $\big(\theta^{\dagger\natural}_{\phi}(\eta^{\Lambda}_{\coprod^{\dagger}_{\phi}X})\big)^{\sharp}$ *arises from*

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\eta^{\underline{\Sigma}}_{X}"] \arrow[d, "(\eta^{\dagger\natural}_{\phi})_X"'] \arrow[drr, "\theta^{\dagger\natural}_{\phi}(\eta^{\Lambda}_{\coprod^{\dagger}_{\phi}X})" description] & & \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X) \arrow[d, "\big(\theta^{\dagger\natural}_{\phi}(\eta^{\Lambda}_{\coprod^{\dagger}_{\phi}X})\big)^{\sharp}"] \\
\Delta^{\natural}_{\phi}\coprod^{\dagger}_{\phi}X \arrow[rr, "\Delta^{\natural}_{\phi}(\eta^{\Lambda}_{\coprod^{\dagger}_{\phi}X})"'] & & \Delta^{\natural}_{\phi}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}(\coprod^{\dagger}_{\phi}X))
\end{tikzcd}
$$

with $\eta^{\dagger\natural}_{\phi}$ *the unit of the adjunction* $\coprod^{\dagger}_{\phi}\dashv\Delta^{\natural}_{\phi}$.

Let us remark that, in the preceding Proposition, $(\eta^{\dagger\natural}_{\phi})_X$ assigns, to $x\in X_s$, the family $((x,s,0),\ldots,(x,s,|\phi(s)|-1))$. We can say, informally, that to a variable $x\in X_s$ corresponds in $\coprod^{\dagger}_{\phi}X$ a family of variables of the form (x,s,i), with sorts $\phi(s)_i$, and that, for a morphism $P\colon X\longrightarrow Y$ in $\mathbf{Pol}(\underline{\Sigma})$ and $(y,s,i)\in(\coprod^{\dagger}_{\phi}Y)_t$, $\mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})(P)_{\phi(s)_i}(y,s,i)$ is the formal h-polynomial for $\underline{\Lambda}$ obtained by replacing, recursively, in $P_s(y)$ the formal operations $\sigma\colon w\longrightarrow s$ by the families of operations $d(\sigma)\colon\phi^{\sharp}(w)\longrightarrow\phi(s)$ and the variables $x\in X_s$ by families of variables $(x,s,j)_{j\in|\phi(s)|}$.

The above construction can be lifted to a pseudo-functor from the category of h-signatures and F-morphisms into the category **Cat**.

Proposition 80. *From* $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$ *into* **Cat** *there exists a pseudo-functor* $\mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}$ *defined as*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}} \arrow[rr, "\mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}"] & & \mathbf{Cat} \\
\underline{\Sigma} \arrow[d, "\underline{d}"'] & \longmapsto & \mathbf{Pol}(\underline{\Sigma}) \arrow[d, "\mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})"] \\
\underline{\Lambda} & & \mathbf{Pol}(\underline{\Lambda})
\end{tikzcd}
$$

(1) *Given* h*-signatures* $\underline{\Sigma}$, $\underline{\Lambda}$ *and* $\underline{\Omega}$, *the natural isomorphism* $\gamma_{\underline{\Sigma},\underline{\Lambda},\underline{\Omega}}$ *is, for every* $\underline{d}\colon\underline{\Sigma}\longrightarrow\underline{\Lambda}$ *and* $\underline{e}\colon\underline{\Lambda}\longrightarrow\underline{\Omega}$, *the natural isomorphism from* $\underline{e}_{\diamond}\circ\underline{d}_{\diamond}$ *into* $(\underline{e}\circ\underline{d})_{\diamond}$ *that assigns to every* S*-sorted set* X, *the morphism* $\gamma^{\underline{d},\underline{e}}_{X}\colon\coprod^{\dagger}_{\psi}\coprod^{\dagger}_{\phi}X\longrightarrow\coprod^{\dagger}_{\psi^{\sharp}\circ\phi}X$ *in* $\mathbf{Pol}(\underline{\Omega})$ *that corresponds to the* U*-sorted mapping*

$$
\coprod\nolimits^{\dagger}_{\psi^{\sharp}\circ\phi}X \xrightarrow{\ \rho_X\ } \coprod\nolimits^{\dagger}_{\psi}\coprod\nolimits^{\dagger}_{\phi}X \xrightarrow{\ \eta^{\underline{\Omega}}_{\coprod^{\dagger}_{\psi}\coprod^{\dagger}_{\phi}X}\ } \mathrm{Fr}_{\underline{\Omega}}(\coprod\nolimits^{\dagger}_{\psi}\coprod\nolimits^{\dagger}_{\phi}X)
$$

where ρ is the isomorphism obtained from the following diagram

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
\mathbf{Set}^{S} \arrow[d, "\coprod_{\phi}^{\dagger_T}"'] \arrow[dr, "\coprod_{\phi}"] \arrow[dddr, bend left=80, "\coprod_{\psi^\sharp\circ\phi}"] & & \\
\mathbf{Set}^{T} \arrow[d, "\coprod_{\psi}^{\dagger_U}"'] \arrow[dr, "\coprod_{\psi}"] & \mathbf{Set}^{T^\star} \arrow[l, "(\cdot)^{\dagger_T}"'] \arrow[dr, "\coprod_{\psi^\star}"] \arrow[dd, bend left=60, "\coprod_{\psi^\sharp}"] \arrow[d, phantom, "="] & \arrow[d, phantom, "(\gamma^{\phi,\psi^\sharp})^{-1}\Swarrow"] \\
\mathbf{Set}^{U} & \mathbf{Set}^{U^\star} \arrow[l, "(\cdot)^{\dagger_U}"'] \arrow[d, phantom, "\Uparrow(\zeta^{U^\star})^{-1}"] & \mathbf{Set}^{U^{\star\star}} \arrow[l, "(\cdot)^{\dagger_{U^\star}}"'] \arrow[dl, "\coprod_{\curlywedge_U}"] \arrow[r, phantom, "="] & {} \\
& \mathbf{Set}^{U^\star} \arrow[uul, "(\cdot)^{\dagger_U}"] &
\end{tikzcd}
$$

and γ the isomorphism associated to the pseudo-functor $\mathrm{Set}^{\coprod}$. *To simplify the notation we write $\gamma^{\underline{d},\underline{e}}$ instead of $(\gamma_{\underline{\Sigma},\underline{\Lambda},\underline{\Omega}})_{\underline{d},\underline{e}}$.*

(2) *For an* h*-signature $\underline{\Sigma}$, the natural isomorphism $\nu^{\underline{\Sigma}}$ from* $\mathrm{Id}_{\mathbf{Pol}(\underline{\Sigma})}$ *into* $\mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}(\between_S, \eta_{\underline{\Sigma}}^{\mathrm{B}_S})$ *is, for an S-sorted set X, the morphism, in the category* $\mathbf{Pol}(\underline{\Sigma})$, $\nu_X^{\underline{\Sigma}}\colon X \longrightarrow \coprod_{\mathrm{id}_{\underline{\Sigma}}X}$ *that corresponds to the S-sorted mapping*

$$\textstyle\coprod_{\between_S}^{\dagger} X \xrightarrow{\ \tau_X^S\ } X \xrightarrow{\ \eta_X^{\underline{\Omega}}\ } \mathrm{Fr}_{\underline{\Omega}}(X)$$

with τ^S the isomorphism in the diagram

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
\mathbf{Set}^{S} \arrow[d, "\mathrm{Id}_{\mathbf{Set}^S}"'] \arrow[dr, "\coprod_{\between_S}"] \arrow[dr, phantom, "\tau^S\Swarrow"' near start] & \\
\mathbf{Set}^{S} & \mathbf{Set}^{S^\star} \arrow[l, "(\cdot)^{\dagger_S}"]
\end{tikzcd}
$$

defined, for every S-sorted set A, as the S-sorted mapping that, for $s \in S$, assigns to $((a,s),(s),0)$, a.

We can give an alternative description of the pseudo-functors $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}$ and $\mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}$ because, for an h-signature $\underline{\Sigma}$, there exists an F-morphism $\widetilde{\underline{\mathrm{id}}}_{\mathrm{fuj}(\underline{\Sigma})} = (\mathrm{id}_{S^\star}, \widetilde{\mathrm{id}}_{\mathrm{fuj}(\underline{\Sigma})})$ from $\mathrm{fuj}(\underline{\Sigma})$ into $\underline{\Sigma}$, with $\mathrm{id}_{S^\star}\colon S^\star \longrightarrow S^\star$ the identity in $S^\star$ and

$$\widetilde{\mathrm{id}}_{\mathrm{fuj}(\underline{\Sigma})}\colon \mathrm{Fr}_{\mathrm{B}_S}(\textstyle\coprod_{1\times\between_S}\Sigma)_{\curlywedge_S\times 1} \longrightarrow \mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_S}(\textstyle\coprod_{1\times\between_S}\Sigma)_{\curlywedge_S\times 1}$$

the canonical isomorphism.

The value of the functor $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}$ in the F-morphism $\widetilde{\underline{\mathrm{id}}}_{\mathrm{fuj}(\underline{\Sigma})}$ determines a functor from $\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma})$ into $\mathbf{Alg}(\mathrm{fuj}(\underline{\Sigma}))$, that assigns to every $\underline{\Sigma}$-algebra (B,G) the $\mathrm{fuj}(\underline{\Sigma})$-algebra $(B^\natural, G^\sharp_{\curlywedge_S\times 1})$, whose algebraic structure associates to every formal h-polynomial $P\colon \overline{w} \longrightarrow u$ for $\mathrm{fuj}(\underline{\Sigma})$, the realization of the formal h-polynomial $P\colon \curlywedge\overline{w} \longrightarrow u$ for $\mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)$ in (B,G).

If $\underline{d}\colon \underline{\Sigma} \longrightarrow \underline{\Lambda}$ is an F-morphism of h-signatures, then the composition of $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{\widetilde{\mathrm{id}}}_{\mathrm{fuj}(\underline{\Lambda})})$ and $\mathrm{Alg}(\phi, \widetilde{d})$, where $(\phi, \widetilde{d})$ is the morphism of h-signatures associated to the F-morphism $\underline{d}$, by the Prop. 68, is identical to $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})$.

Proposition 81. *Let $\underline{d}\colon \underline{\Sigma} \longrightarrow \underline{\Lambda}$ be an F-morphism of* h*-signatures. Then the following diagram commutes*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}) & \\
\mathbf{Alg}(\underline{\Lambda}) \arrow[u, "\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})"] \arrow[r, "\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\mathrm{id}_{T^\star}, \widetilde{\mathrm{id}}_{\mathrm{fuj}(\underline{\Lambda})})"'] & \mathbf{Alg}(\mathrm{fuj}(\underline{\Lambda})) \arrow[ul, "\mathrm{Alg}(\phi, \widetilde{d})"']
\end{tikzcd}$$

The functors $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{\widetilde{\mathrm{id}}}_{\mathrm{fuj}(\underline{\Sigma})})$ are the components of a natural transformation, from which we obtain the functor $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}$.

Proposition 82. *From* Alg *into* $\mathrm{Alg} \circ \mathrm{fuj}^{\mathrm{op}}$ *there exists a natural transformation* $\alpha = (\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\mathrm{id}_{S^\star}, \widetilde{\mathrm{id}}_{\mathrm{fuj}(\underline{\Sigma})}))_{\underline{\Sigma} \in \mathbf{Sig}}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Sig}^{\mathrm{op}} \arrow[rr, "\mathrm{fuj}^{\mathrm{op}}"] \arrow[dr, "\mathrm{Alg}"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\alpha}{\Rightarrow}"] & \mathbf{Sig}^{\mathrm{op}} \arrow[dl, "\mathrm{Alg}"] \\
& \mathbf{Cat} &
\end{tikzcd}$$

The value of the functor $\mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}$ in the F-morphism $\underline{\widetilde{\mathrm{id}}}_{\mathrm{fuj}(\underline{\Sigma})}$ is the functor that to a morphism $P\colon X \longrightarrow Y$ in $\mathbf{Pol}(\mathrm{fuj}(\underline{\Sigma}))$ assigns the morphism in $\mathbf{Pol}(\underline{\Sigma})$

$$X^{\dagger} \xrightarrow{(\theta^{\dagger\natural})^{-1}\Big(\big((\eta^{\Sigma}_{X^{\dagger}})^{\natural} \circ \eta^{\dagger\natural}_{X}\big)^{\sharp} \circ P\Big)} Y^{\dagger}$$

If $\underline{d}\colon \underline{\Sigma} \longrightarrow \underline{\Lambda}$ is an F-morphism of h-signatures, then the composition of $\mathrm{Pol}(\phi, \widetilde{d})$ and $\mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}(\underline{\widetilde{\mathrm{id}}}_{\mathrm{fuj}(\underline{\Lambda})})$ is $\mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})$.

Proposition 83. *Let $\underline{d}\colon \underline{\Sigma} \longrightarrow \underline{\Lambda}$ be an F-morphism. Then for the corresponding morphism of* h*-signatures $(\phi, \widetilde{d})\colon \underline{\Sigma} \longrightarrow \mathrm{fuj}(\underline{\Lambda})$ we have that the following diagram commutes*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Pol}(\underline{\Sigma}) \arrow[d, "\mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})"'] \arrow[dr, "\mathrm{Pol}(\phi, \widetilde{d})"] & \\
\mathbf{Pol}(\underline{\Lambda}) & \mathbf{Pol}(\mathrm{fuj}(\underline{\Lambda})) \arrow[l, "\mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}(\mathrm{id}_{T^\star}, \widetilde{\mathrm{id}}_{\mathrm{fuj}(\underline{\Lambda})})"]
\end{tikzcd}$$

The functors $\mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}(\underline{\widetilde{\mathrm{id}}}_{\mathrm{fuj}(\underline{\Sigma})})$ are, also, the components of a natural transformation.

Proposition 84. *From the functor* Pol $\circ$ fuj *into the functor* Pol *there exists a natural transformation* $\beta = (\mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}(\mathrm{id}_{S^\star}, \widetilde{\mathrm{id}}_{\mathrm{fuj}(\underline{\Sigma})}))_{\Sigma \in \mathbf{Sig}}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Sig} \arrow[rr, "\mathrm{fuj}"] \arrow[dr, "\mathrm{Pol}"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\beta}{\Leftarrow}"] & \mathbf{Sig} \arrow[dl, "\mathrm{Pol}"] \\ & \mathbf{Cat} & \end{tikzcd}$$

Lemma 7. *For every* h*-signature* $\underline{\Sigma}$ *the following diagram iso-commutes*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}) \times \mathbf{Pol}(\mathrm{fuj}(\underline{\Sigma})) \arrow[r, "\alpha_{\underline{\Sigma}} \times \mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{Id} \times \beta_{\underline{\Sigma}}"'] & \mathbf{Alg}(\mathrm{fuj}(\underline{\Sigma})) \times \mathbf{Pol}(\mathrm{fuj}(\underline{\Sigma})) \arrow[d, "\mathrm{Pd}^{\mathrm{fuj}(\underline{\Sigma})}"] \\ \mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}) \times \mathbf{Pol}(\underline{\Sigma}) \arrow[r, "\mathrm{Pd}^{\underline{\Sigma}}"'] & \mathbf{Set} \end{tikzcd}$$

Proposition 85. *From the category* $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$ *into* **Cat** *we have a pseudo-functor defined as*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}} \arrow[rr, "\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\cdot) \times \mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}(\cdot)"] & & \mathbf{Cat} \\ (\underline{\Sigma}, \underline{\Lambda}) \arrow[d, "(\underline{d}, \underline{e})"'] & & \mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}) \times \mathbf{Pol}(\underline{\Lambda}) \arrow[d, "\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d}) \times \mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})"] \\ (\underline{\Sigma}', \underline{\Lambda}') & \longmapsto & \mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}') \times \mathbf{Pol}(\underline{\Lambda}') \end{tikzcd}$$

as well as the functor $\mathrm{K}_{\mathbf{Set}}$ *constantly* **Set**. *Then* $\mathrm{Pd} = (\mathrm{Pd}^{\underline{\Sigma}})_{\underline{\Sigma} \in \mathbf{Sig}}$*, together with the family* $\theta = (\theta^{\underline{d}})_{\underline{d} \in \mathrm{Mor}(\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}})}$*, where* $\theta^{\underline{d}}_{\underline{A}, X} = \theta^{\dagger\natural}_{X, A}$*, is a pseudo-extranatural transformation from the pseudo-functor* $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\cdot) \times \mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}(\cdot)$ *into the functor* $\mathrm{K}_{\mathbf{Set}}$.

From this last proposition we can assert that the realization of the formal h-polynomials is invariant relative to the F-morphisms of h-signatures, i.e., that, for every F-morphism of h-signatures $\underline{d}\colon \underline{\Sigma} \longrightarrow \underline{\Lambda}$, if (P, Q) is a $\underline{\Sigma}$-equation of type (X, Y) and $\underline{B}$ a $\underline{\Lambda}$-algebra, then

$$\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})(\underline{B}) \models^{\underline{\Sigma}} (P, Q) \text{ iff } \underline{B} \models^{\underline{\Lambda}} \mathrm{Pol}^2_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})(P, Q)$$

where $\mathrm{Pol}^2_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})(P, Q)$ is the $\underline{\Lambda}$-equation $(\mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})(P), \mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})(Q))$ of type $(\coprod^{\dagger}_{\phi} X, \coprod^{\dagger}_{\phi} Y)$.

Corollary 12. *The quadruple* $(\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}, \mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}, \mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}, (\mathrm{Pd}, \theta))$ *is an institution on* **Set***, the institution of Fujiwara.*

In the preceding section we obtained a category of h-signatures in which the morphisms of Fujiwara were the transformations between the h-signatures. In this section we will obtain a structure of 2-category on the category of h-signatures and F-morphisms, through the concept of deformation between F-morphisms. The deformations that we consider are a generalization of the concept of equivalence between F-morphisms, defined by Fujiwara in [Fuj60]. The deformations between F-morphisms, in his turn, determine natural transformations between the functors associated to the F-morphisms, that will allow us to lift the pseudo-functors

$\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}$ and $\mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}$ to 2-functors, and hence to obtain, by applying a construction of Ehresmann-Grothendieck to $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}$, a 2-category $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fuj}}$.

As we will see, the deformations are, also, compatible with the realization of the formal h-polynomials in the h-algebras and this will be characterized through the concept of pseudo-extranatural transformation between pseudo-functors on 2-categories. From this we will obtain that the relation between formal h-polynomials and h-algebras is an example of 2-institution, that generalizes the usual concept of institution. Following this, we define a 2-category of heterogeneous pretheories, $\mathbf{Thp}_{\mathrm{fuj}}$, with objects the heterogeneous pretheories, morphisms the F-morphisms between h-signatures that are compatible with the equations, and 2-cells the deformations between F-morphisms of pretheories. In such a 2-category we will show the equivalence of the pretheories of Hall and Bénabou, equivalence that was showed, for the categories of corresponding algebras, in the section on Hall and Bénabou algebras.

To study the deformations we need to consider some derived operations in the h-algebras of formal h-polynomials for the different h-signatures.

Definition 36. Let S be set of sorts.

(1) For every $\overline{w} \in S^{\star\star}$ and $i \in |\overline{w}|$, let $\pi_i^{\overline{w}}$ be the derived operation of type $\lambda \longrightarrow (\curlywedge\overline{w}, \overline{w}_i)$ defined as

$$\langle \pi_{s_i}^{\curlywedge\overline{w}}, \pi_{s_{i+1}-1}^{\curlywedge\overline{w}} \rangle_{\curlywedge\overline{w}, \overline{w}_i}$$

where $\overline{w}$ is of the form

$$((\cdot,\dots,\cdot),\dots,\overbrace{(\underset{s_i}{\cdot},\dots,\underset{s_{i+1}-1}{\cdot})}^{\overline{w}_i},\dots,(\cdot,\dots,\cdot))$$

and, for every $i \in |\overline{w}|$, $n_i = |\overline{w}_i|$ and $s_i = \sum_{\alpha \in i} n_\alpha$.

(2) For every $u \in S^\star$ and $\overline{w} \in S^{\star\star}$, let $\langle\,\rangle_{u,\overline{w}}$ be the derived operation of type $((u,\overline{w}_0),\dots,(u,\overline{w}_{|\overline{w}|-1})) \longrightarrow (u, \curlywedge\overline{w})$ defined as

$$\begin{aligned}\langle P_0,\dots,P_{|\overline{w}|-1}\rangle_{u,\overline{w}} = \langle &\pi_0^{\overline{w}_0} \circ P_0, \dots, \pi_{|\overline{w}_0|-1}^{\overline{w}_0} \circ P_0, \dots,\\ &\pi_0^{\overline{w}_{|\overline{w}|-1}} \circ P_{|\overline{w}|-1}, \dots, \pi_{|\overline{w}_{|\overline{w}|-1}|-1}^{\overline{w}_{|\overline{w}|-1}} \circ P_{|\overline{w}|-1}\rangle_{u,\curlywedge\overline{w}}\end{aligned}$$

(3) For every $n \in \mathbb{N}$, and $\overline{u}$, $\overline{w} \in S^{\star n}$, let $\curlywedge_{\overline{u},\overline{w}}$ be the derived operation of type $((\overline{u}_0,\overline{w}_0),\dots,(\overline{u}_{n-1},\overline{w}_{n-1})) \longrightarrow (\curlywedge\overline{u}, \curlywedge\overline{w})$ defined as

$$\curlywedge_{\overline{u},\overline{w}}(P_0,\dots,P_{n-1}) = \langle P_0 \circ \pi_0^{\overline{u}}, \dots, P_{n-1} \circ \pi_{n-1}^{\overline{u}} \rangle_{\curlywedge\overline{u},\overline{w}}$$

From now on, to simplify the notation, we will omit some indexes in the expressions. Moreover, for the operations of the form $\curlywedge_{\overline{u},\overline{w}}$ we adopt the infix notation, and we will write $P_0 \curlywedge \cdots \curlywedge P_{n-1}$ instead of $\curlywedge_{\overline{u},\overline{w}}(P_0,\dots,P_{n-1})$, the type, in his turn, will be $\overline{u}_0 \curlywedge \cdots \curlywedge \overline{u}_{n-1} \longrightarrow \overline{w}_0 \curlywedge \cdots \curlywedge \overline{w}_{n-1}$.

For the algebras of formal h-polynomials $\mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)$, the operations $\curlywedge_{\overline{u},\overline{w}}$ are, essentially, the result of gather in a family the corresponding formal h-polynomials, relabeling adequately the variables.

Definition 37. Let $\underline{d}$ and $\underline{e}$ be F-morphisms from $\underline{\Sigma}$ into $\underline{\Lambda}$. A deformation from $\underline{d}$ into $\underline{e}$ is a choice function ξ for the S-sorted set $(\mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda)_{\phi(s),\psi(s)})_{s\in S}$, such that, for every formal operation $\sigma\colon w \longrightarrow s$, we have that the following diagram commutes

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}(\downarrow\phi(s))_{\psi(s)} \times \mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}(\downarrow\phi^{\sharp}(w))_{\phi(s)} \arrow[dr, "\circ"] & \\
1 \arrow[ur, "\langle \xi_s, d(\sigma)\rangle"] \arrow[dr, "\langle e(\sigma), \xi_w\rangle"'] & & \mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}(\downarrow\phi^{\sharp}(w))_{\psi(s)} \\
 & \mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}(\downarrow\psi^{\sharp}(w))_{\psi(s)} \times \mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}(\downarrow\phi^{\sharp}(w))_{\psi^{\sharp}(w)} \arrow[ur, "\circ"'] &
\end{tikzcd}$$

or, to simplify, that the following equation holds

$$\xi_s \circ d(\sigma) = e(\sigma) \circ \xi_w$$

where ξ_w is the formal h-polynomial $\xi_{w_0} \curlywedge \cdots \curlywedge \xi_{w_{|w|-1}}$.

We agree that $\xi\colon \underline{d} \rightsquigarrow \underline{e}$ denotes the deformation ξ from $\underline{d}$ into $\underline{e}$.

The deformations are families of formal h-polynomials $\xi = (\xi_s)_{s\in S}$ such that, for every $s \in S$, $\xi_s \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}(\downarrow\phi(s))_{\psi(s)}$, i.e., ξ_s is $((\xi_s)_0, \dots, (\xi_s)_{|\psi(s)|-1})$ such that, for every $i \in |\psi(s)|$, $(\xi_s)_i$ is a formal h-polynomial for $\underline{\Lambda}$ of type $\psi(s)_i$, with variables those associated to the word $\phi(s)$. The commutativity condition we represent by the commutativity of the following diagram

$$\begin{tikzcd}
\phi^{\sharp}(w) \arrow[r, "d(\sigma)"] \arrow[d, "\xi_w"'] & \phi(s) \arrow[d, "\xi_s"] \\
\psi^{\sharp}(w) \arrow[r, "e(\sigma)"'] & \psi(s)
\end{tikzcd}$$

were ξ_w arises as

$$\begin{tikzcd}
 & \phi(w_0) \curlywedge \cdots \curlywedge \phi(w_{|w|-1}) \arrow[dl, "\pi_0^{\phi^\star(w)}"] \arrow[d, "\xi_w"] \arrow[dr, "\pi_{|w|-1}^{\phi^\star(w)}"] & \\
\phi(w_0) \arrow[dd, "\xi_{w_0}"'] & & \phi(w_{|w|-1}) \arrow[dd, "\xi_{w_{|w|-1}}"] \\
 & \psi(w_0) \curlywedge \cdots \curlywedge \psi(w_{|w|-1}) \arrow[dl, "\pi_0^{\psi^\star(w)}"] \arrow[dr, "\pi_{|w|-1}^{\psi^\star(w)}"'] & \\
\psi(w_0) & & \psi(w_{|w|-1})
\end{tikzcd}$$

The commutativity condition in the above definition can be extended to the formal h-polynomials.

Proposition 86. *Let $\underline{d}$ and $\underline{e}$ be F-morphisms from $\underline{\Sigma}$ into $\underline{\Lambda}$ and $\xi\colon \underline{d} \rightsquigarrow \underline{e}$ a deformation. Then, for every formal* h*-polynomial $P\colon u \longrightarrow w$ in $\mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)$, the* *following diagram commutes*

$$\begin{tikzcd}
\phi^\sharp(u) \arrow[r, "d^\sharp(P)"] \arrow[d, "\xi_u"'] & \phi^\sharp(w) \arrow[d, "\xi_w"] \\
\psi^\sharp(u) \arrow[r, "e^\sharp(P)"'] & \psi^\sharp(w)
\end{tikzcd}$$

The deformations can be both horizontally and vertically composed, and from this we will obtain a structure of 2-category on the h-signatures.

Definition 38. Given the configuration

$$\begin{tikzcd}
& \underline{d} \arrow[dr] \arrow[d, squiggly, "\xi"] & \\
\underline{\Sigma} \arrow[ur, dash] \arrow[r, dash] \arrow[dr, dash] & \underline{e} \arrow[r] \arrow[d, squiggly, "\chi"] & \underline{\Lambda} \\
& \underline{h} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

the vertical composition of ξ and χ, denoted by $\chi \circ \xi$, is $(\chi_s \circ \xi_s)_{s\in S}$.

Proposition 87. *The vertical composition of deformations is a deformation.*

Definition 39. Given the configuration

$$\begin{tikzcd}
& \underline{d} \arrow[dr] \arrow[d, squiggly, "\xi"] & & \underline{h} \arrow[dr] \arrow[d, squiggly, "\chi"] & \\
\underline{\Sigma} \arrow[ur, dash] \arrow[r, dash] & \underline{e} \arrow[r] & \underline{\Lambda} \arrow[ur, dash] \arrow[r, dash] & \underline{i} \arrow[r] & \underline{\Omega}
\end{tikzcd}$$

the horizontal composition of ξ and χ, denoted by $\chi * \xi$, is the S-family such that, for every $s \in S$, $(\chi * \xi)_s$ is the diagonal in the following diagram

$$\begin{tikzcd}
\gamma^\sharp(\phi(s)) \arrow[r, "h^\sharp(\xi_s)"] \arrow[d, "\chi_{\phi(s)}"'] & \gamma^\sharp(\psi(s)) \arrow[d, "\chi_{\psi(s)}"] \\
\nu^\sharp(\phi(s)) \arrow[r, "i^\sharp(\xi_s)"'] & \nu^\sharp(\psi(s))
\end{tikzcd}$$

The definition of the horizontal composition is sound because, for every $s \in S$, ξ_s is a formal h-polynomial in $\mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda)_{\phi(s),\psi(s)}$ and, because χ is a deformation, the above diagram commutes.

Proposition 88. *The horizontal composition of deformations is a deformation.*

Once defined the horizontal composition of deformations, we state, in the following proposition, that the horizontal and vertical composition of deformations fulfill the interchange law of Godement.

Proposition 89. *Given the configuration*

$$\begin{tikzcd}
& \underline{d}_0 \arrow[dr] \arrow[d, squiggly, "\xi"] & & \underline{e}_0 \arrow[dr] \arrow[d, squiggly, "\xi'"] & \\
\underline{\Sigma} \arrow[ur, dash] \arrow[r, dash] \arrow[dr, dash] & \underline{d}_1 \arrow[r] \arrow[d, squiggly, "\chi"] & \underline{\Lambda} \arrow[ur, dash] \arrow[r, dash] \arrow[dr, dash] & \underline{e}_1 \arrow[r] \arrow[d, squiggly, "\chi'"] & \underline{\Omega} \\
& \underline{d}_2 \arrow[ur] & & \underline{e}_2 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

we have that $(\chi' * \chi) \circ (\xi' * \xi) = (\chi' \circ \xi') * (\chi \circ \xi)$.

Definition 40. For every F-morphism $\underline{d}\colon \underline{\Sigma} \longrightarrow \underline{\Lambda}$, we denote by $\mathrm{id}_{\underline{d}}$ the S-family $(\langle \pi_0^{\phi(s)}, \ldots, \pi_{|\phi(s)|-1}^{\phi(s)}\rangle_{\phi(s),\phi(s)})_{s\in S}$.

Proposition 90. *For every F-morphism $\underline{d}\colon \underline{\Sigma} \longrightarrow \underline{\Lambda}$, $\mathrm{id}_{\underline{d}}$ is the identity deformation for $\underline{d}$.*

Proposition 91. *Given the configuration*

$$
\begin{tikzcd}
\underline{\Sigma} \arrow[r, bend left, "\underline{d}"{name=U}] \arrow[r, bend right, "\underline{d}"'{name=D}] \arrow[from=U, to=D, phantom, "\wr\downarrow\mathrm{id}_{\underline{d}}"] & \underline{\Lambda} \arrow[r, bend left, "\underline{e}"{name=U2}] \arrow[r, bend right, "\underline{e}"'{name=D2}] \arrow[from=U2, to=D2, phantom, "\wr\downarrow\mathrm{id}_{\underline{e}}"] & \underline{\Omega}
\end{tikzcd}
$$

we have that $\mathrm{id}_{\underline{e}} * \mathrm{id}_{\underline{d}}$ is the identity for $\underline{e}\circ\underline{d}$.

Corollary 13. *The* h*-signatures together with the F-morphisms and the deformations between the F-morphisms determine a 2-category, denoted as $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$.*

The deformations between F-morphisms from an h-signature into another, determine natural transformations among the functors between the categories of algebras for the h-signatures.

Proposition 92. *Let $\underline{d}$ and $\underline{e}$ be F-morphisms from $\underline{\Sigma}$ into $\underline{\Lambda}$ and $\xi\colon \underline{d} \rightsquigarrow \underline{e}$ a deformation in $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$. Moreover, for every $\underline{\Lambda}$-algebra (B,G), let $\xi^{(B,G)}$ be the S-sorted mapping $(\xi_s^{(B,G)})_{s\in S}$. Then, $\xi^{(B,G)}\colon B_\phi \longrightarrow B_\psi$ is a homomorphism of $\underline{\Sigma}$-algebras from $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})(B,G)$ into $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{e})(B,G)$.*

Proposition 93. *Let $\xi\colon \underline{d} \rightsquigarrow \underline{e}$ be a deformation in $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$, with $\underline{d}$ and $\underline{e}$ F-morphisms from $\underline{\Sigma}$ into $\underline{\Lambda}$. Then the family $(\xi^{\underline{B}})_{\underline{B}\in\mathbf{Alg}(\underline{\Lambda})}$, denoted by $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\xi)$, is a natural transformation from the functor $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})$ into the functor $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{e})$.*

The pseudo-functor $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}\colon \mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}} \longrightarrow \mathbf{Cat}$ can be lifted to the 2-cells in the 2-category $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$.

Proposition 94. *From the 2-category $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$ into the 2-category $\mathbf{Cat}$ there exists a pseudo-functor, contravariant in the morphisms and covariant in the 2-cells, denoted as $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}$, and defined as*

$$
\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}} \xrightarrow{\quad\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}\quad} \mathbf{Cat}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\underline{\Sigma} \arrow[d, bend right=60, "\underline{d}"'{name=L}] \arrow[d, bend left=60, "\underline{e}"{name=R}] \arrow[from=L, to=R, phantom, "\overset{\xi}{\rightsquigarrow}"] & {} & \mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}) \\
\underline{\Lambda} & {} \arrow[r, phantom, "\longmapsto"] & \mathbf{Alg}(\underline{\Lambda}) \arrow[u, bend left=60, "\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})"{name=A}] \arrow[u, bend right=60, "\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{e})"'{name=B}] \arrow[from=A, to=B, phantom, "\overset{\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\xi)}{\Rightarrow}"]
\end{tikzcd}
$$

together with the natural isomorphisms $\gamma_{\underline{\Sigma},\underline{\Lambda},\underline{\Omega}}$ and $\nu_{\underline{\Sigma}}$ defined in the Prop. 74.

From this we can lift the category $\mathbf{Alg}$ to the 2-category

$$
\mathbf{Alg}_{\mathrm{fuj}} = \iint^{\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}} \mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}},
$$

with objects (0-cells) pairs $((S,\Sigma),(A,F))$, where S is a set of sorts, Σ an S-sorted signature and (A,F) a Σ-algebra, morphisms (1-cells) from $((S,\Sigma),(A,F))$ into $((T,\Lambda),(B,G))$ the pairs $((\phi,d),f)$, where (ϕ,d) is a morphism of Fujiwara from (S,Σ) into (T,Λ) and f a homomorphism of Σ-algebras from (A,F) into $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\phi,d)(B,G) = (B_\phi, G^\sharp_{\phi^\sharp\times\phi^\sharp}\circ d)$, and 2-cells from $((\phi,d),f)$ into $((\psi,e),g)$, where $((\phi, d), f)$ and $((\psi, e), g)$ are morphisms from $((S, \Sigma), (A, F))$ into $((T, \Lambda), (B, G))$, the 2-cells $\xi\colon (S, \Sigma) \rightsquigarrow (T, \Lambda)$ in $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$ such that the following diagram commutes

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})(B,G) \arrow[dd, "\xi^{(B,G)}"] \\
(A,F) \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \\
& \mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{e})(B,G)
\end{tikzcd}$$

We only remark that for the following cofiguration of 2-cells

$$\begin{tikzcd}
(\underline{\Sigma}, \underline{A}) \arrow[r, bend left, "(\underline{d}, f)"] \arrow[r, bend right, "(\underline{e}, g)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \xi"] & (\underline{\Lambda}, \underline{B}) \arrow[r, bend left, "(\underline{h}, p)"] \arrow[r, bend right, "(\underline{i}, q)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \chi"] & (\underline{\Omega}, \underline{C})
\end{tikzcd}$$

we have the commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
& & & \mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{h} \circ \underline{d})(\underline{C}) \arrow[ddl, "\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})(\chi^{\underline{C}})"'] \arrow[dddd, "\xi^{\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{h})(\underline{C})}"] \\
& \mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})(\underline{B}) \arrow[urr, "\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})(p)"] \arrow[dr, "\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})(q)"] \arrow[dddd, "\xi^{\underline{B}}"] & & \\
& & \mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{i} \circ \underline{d})(\underline{C}) \arrow[dddd, "\xi^{\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{i})(\underline{C})}"] & \\
\underline{A} \arrow[uur, "f"] \arrow[ddr, "g"'] & & & \\
& & & \mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{h} \circ \underline{e})(\underline{C}) \arrow[ddl, "\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{e})(\chi^{\underline{C}})"'] \\
& \mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{e})(\underline{B}) \arrow[urr, "\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{e})(p)"] \arrow[dr, "\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{e})(q)"] & & \\
& & \mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{i} \circ \underline{e})(\underline{C}) &
\end{tikzcd}$$

The deformations between F-morphisms from an h-signature into another, also determine natural transformations among the functors between the categories of formal h-polynomials for the h-signatures.

Definition 41. Let $\underline{d}$ and $\underline{e}$ be F-morphisms from $\underline{\Sigma}$ into $\underline{\Lambda}$ and $\xi\colon \underline{d} \rightsquigarrow \underline{e}$ a deformation in $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$. For an S-sorted set X let $\xi_X\colon \coprod^{\dagger}_{\psi} X \longrightarrow \mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}(\coprod^{\dagger}_{\phi} X)$ be the T-sorted mapping defined, for $t \in T$, as the mapping

$$(x, s, i) \longmapsto (\xi_s)_i(v_0^{\phi(s)_0}/(x, s, 0), \ldots, v_{|\phi(s)|-1}^{\phi(s)_{|\phi(s)|-1}}/(x, s, |\phi(s)| - 1))$$

This definition is sound because, for every $j \in |\phi(s)|$, we have that $(x, s, j) \in (\coprod^{\dagger}_{\phi} X)_{\phi(s)_j}$ and $(\xi_s)_i\colon \phi(s) \longrightarrow \psi(s)_i$, hence $(\xi_X)_t(x, s, i)$ is a formal h-polynomial for (T, Λ) of type $\psi(s)_i = t$.

The mappings ξ_X, for every S-sorted set X, are, in the category $\mathbf{Pol}(\underline{\Lambda})$, morphisms from $\coprod^{\dagger}_{\phi} X$ into $\coprod^{\dagger}_{\psi} X$, and are the components of a natural transformation.

Proposition 95. *Let* $\xi\colon \underline{d} \rightsquigarrow \underline{e}$ *be a deformation in* $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$*, with* $\underline{d}$*,* $\underline{e}$ *F-morphisms from* $\underline{\Sigma}$ *into* $\underline{\Lambda}$*. Then* $(\xi_X)_{X\in\mathbf{Pol}(\underline{\Sigma})}$*, denoted by* $\mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}(\xi)$*, is a natural transformation from* $\mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})$ *into* $\mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}(\underline{e})$*.*

The preceding Proposition is analogous to the Prop. 86 for formal operations with variables in arbitrary heterogeneous sets.

The pseudo-functor $\mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}\colon \mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}} \longrightarrow \mathbf{Cat}$ can be lifted to the 2-cells of the 2-category $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$.

Proposition 96. *From the* 2*-category* $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$ *into* $\mathbf{Cat}$ *there exists a pseudo-functor, covariant in the morphisms and the 2-cells, denoted as* $\mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}$*,and defined as*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}} \arrow[rr, "\mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}"] & & \mathbf{Cat}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\underline{\Sigma} \arrow[d, bend right=50, "\underline{d}"'] \arrow[d, bend left=50, "\underline{e}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\xi}{\rightsquigarrow}"] & \longmapsto & \mathbf{Pol}(\underline{\Sigma}) \arrow[d, bend right=50, "\mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})"'] \arrow[d, bend left=50, "\mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}(\underline{e})"] \arrow[d, phantom, "\overset{\mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}(\xi)}{\Rightarrow}"] \\
\underline{\Lambda} & & \mathbf{Pol}(\underline{\Lambda})
\end{tikzcd}$$

together with the natural isomorphisms $\gamma_{\underline{\Sigma},\underline{\Lambda},\underline{\Omega}}$ *and* $\nu_{\underline{\Sigma}}$ *defined in the Prop. 80.*

Now we show that the realization of the formal h-polynomials in the respective algebras is consistent with the additional structure derived from the deformations.

Lemma 8. *Let* $\xi\colon \underline{d} \rightsquigarrow \underline{e}$ *be a deformation in* $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$ *from the F-morphism* $\underline{d}$ *into the F-morphism* $\underline{e}$*, both from* $\underline{\Sigma}$ *into* $\underline{\Lambda}$*. Then, for every* $\underline{\Lambda}$*-algebra* $\underline{B} = (B, G)$*, and* S*-sorted set* X*, the following diagram commutes*

$$\begin{tikzcd}
B_{\coprod^{\dagger}_{\phi} X} \arrow[r, "(\xi_X)^{\underline{B}}"] \arrow[d, "(\theta^{\dagger\natural}_{\phi})_{X,B}"'] & B_{\coprod^{\dagger}_{\psi} X} \arrow[d, "(\theta^{\dagger\natural}_{\psi})_{X,B}"] \\
(\Delta^{\natural}_{\phi} B)_X \arrow[r, "(\xi^{\underline{B}})_X"'] & (\Delta^{\natural}_{\psi} B)_X
\end{tikzcd}$$

The following proposition, in which we will state the existence of a pseudo-functor from the 2-category $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$ into $\mathbf{Cat}$, will be the basis to obtain a 2-institution on $\mathbf{Set}$.

Proposition 97. *From the* 2*-category* $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$ *into the* 2*-category* $\mathbf{Cat}$ *there exists a pseudo-functor defined as*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}} \arrow[rr, "\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\cdot) \times \mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}(\cdot)"] & & \mathbf{Cat} \\
(\underline{\Sigma}, \underline{\Lambda}) \arrow[d, "(\underline{d}, \underline{e})"'] & \longmapsto & \mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}) \times \mathbf{Pol}(\underline{\Lambda}) \arrow[d, "\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d}) \times \mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})"] \\
(\underline{\Sigma}', \underline{\Lambda}') & & \mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}') \times \mathbf{Pol}(\underline{\Lambda}')
\end{tikzcd}$$

as well as the functor $\mathrm{K}_{\mathbf{Set}}$*, constantly* **Set**. *Then* $\mathrm{Pd} = (\mathrm{Pd}^{\underline{\Sigma}})_{\underline{\Sigma}\in\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}}$*, together with the family* $\theta = (\theta^{\underline{d}})_{\underline{d}\in\mathrm{Mor}(\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}})}$*, with* $\theta^{\underline{d}}_{\underline{A},X} = \theta^{\dagger\natural}_{X,A}$*, is a pseudo-extranatural transformation from* $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\cdot) \times \mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}(\cdot)$ *into* $\mathrm{K}_{\mathbf{Set}}$.

Corollary 14. *The quadruple* $(\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}, \mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}, \mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}, (\mathrm{Pd}, \theta))$ *is a* 2*-institution on* **Set***, the* 2*-institution of Fujiwara.*

Our final objective is to define the 2-category of heterogeneous pretheories and to show that the pretheories of Hall and Bénabou are equivalent in such a 2-category.

The translation of equations determined by the functors $\mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})$ allows us to define the concept of F-morphism of pretheories from $(\underline{\Sigma}, \mathcal{E})$ into $(\underline{\Lambda}, \mathcal{H})$ as an F-morphism of h-signatures $\underline{d}\colon \Sigma \longrightarrow \Lambda$ such that $\mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})^2[\mathcal{E}] \subseteq \mathrm{Cn}_{\underline{\Lambda}}(\mathcal{H})$. The pretheories together with the F-morphisms between them determine, also by the Prop. 85, a category denoted as $\mathbf{Thp}_{\mathrm{fuj}}$. Moreover, we have a contravariant pseudo-functor $\mathrm{Alg}^{\mathrm{th}}_{\mathrm{fuj}}$ from $\mathbf{Thp}_{\mathrm{fuj}}$ into **Cat**, as well as a covariant pseudo-functor $\mathrm{Pol}^{\mathrm{th}}_{\mathrm{fuj}}$ from $\mathbf{Thp}_{\mathrm{fuj}}$ into **Cat** that extend to $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}$ and $\mathrm{Pol}_{\mathrm{fuj}}$, respectively.

From the deformations between F-morphisms we obtain a structure of 2-category on the categories **Thp**, $\mathbf{Thp}_{\mathrm{der}}$ or $\mathbf{Thp}_{\mathrm{fuj}}$. However, the condition of commutativity of the deformations is, for the pretheories, too much strict, because, for a deformation, it requires that the translation of a formal operation realized by the source F-morphism can be transformed, by the deformation, in exactly the same polynomial assigned by the target F-morphism. Under the presence of equations, the transformation of formal operations can be fulfilled, generally, only modulo the equivalence generated by the equations in the target pretheory. For the F-morphisms of pretheories, the following notion of deformation seems to be more adequate.

Definition 42. Let (ϕ, d) and $(\psi, e)\colon (S, \Sigma, \mathcal{E}) \longrightarrow (T, \Lambda, \mathcal{H})$ be F-morphisms of pretheories. A deformation from (ϕ, d) into (ψ, e) is choice function ξ for the S-sorted set $(\mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda)_{\phi(s),\psi(s)})_{s\in S}$, such that, for every formal operation $\sigma\colon w \longrightarrow s$, we have that

$$\xi_s \circ d(\sigma) \equiv_{\overline{\mathcal{H}}} e(\sigma) \circ \xi_w$$

i.e., such that the following diagram commutes

$$\begin{tikzcd}
\phi^\sharp(w) \arrow[r, "{[d(\sigma)]_{\overline{\mathcal{H}}}}"] \arrow[d, "{[\xi_w]_{\overline{\mathcal{H}}}}"'] & \phi(s) \arrow[d, "{[\xi_s]_{\overline{\mathcal{H}}}}"] \\
\psi^\sharp(w) \arrow[r, "{[e(\sigma)]_{\overline{\mathcal{H}}}}"'] & \psi(s)
\end{tikzcd}$$

For the above definition of deformation between F-morphisms of pretheories, we can obtain results similar to those obtained for the deformations between F-morphisms of h-signatures, from which we can define a 2-category $\mathbf{Thp}_{\mathrm{fuj}}$ of pretheories, F-morphisms and deformations between F-morphisms. In such a 2-category we can show, for example, the equivalence of the pretheories of Hall and Bénabou, equivalence that was showed, for the categories of corresponding algebras, in the Prop. 45.

To show that the pretheories $(\underline{\Sigma}^{\mathrm{B}_S}, \mathcal{E}^{\mathrm{B}_S})$ and $(\underline{\Sigma}^{\mathrm{H}_S}, \mathcal{E}^{\mathrm{H}_S})$ are equivalent in the 2-category $\mathbf{Thp}_{\mathrm{fuj}}$ we need to define two F-morphisms between them.

Definition 43. Let S be a set of sorts. From the h-signature $\underline{\Sigma}^{\mathrm{B}_S}$ into the h-signature $\underline{\Sigma}^{\mathrm{H}_S}$, we have the F-morphism (ϕ, d), with ϕ the mapping

$$\begin{array}{rcl} S^\star \times S^\star & \longrightarrow & (S^\star \times S)^\star \\ (u, v) & \longmapsto & ((u, v_0), \ldots, (u, v_{|v|-1})) \end{array}$$

and $d\colon \Sigma^{\mathrm{B}_S} \longrightarrow \mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_{S^\star \times S}}(\Sigma^{\mathrm{H}_S})_{\phi^\sharp \times \phi}$ defined as

(1) For every $w \in S^\star$, and $i \in |w|$,

$$d(\pi_i^w) = (\pi_i^w)$$

(2) For every u, $w \in S^\star$,

$$d(\langle\,\rangle_{u,w}) = (v_0^{u,w_0}, \ldots, v_{|w|-1}^{u,w_{|w|-1}})$$

(3) For every u, v, $w \in S^\star$,

$$\begin{aligned} d(\circ_{u,v,w}) = (\xi_{u,v,w_0}(v_{|v|}^{u,w_0}, v_0^{u,v_0}, \ldots, v_{|v|-1}^{u,v_{|v|-1}}), \ldots \\ , \xi_{u,v,w_{|w|-1}}(v_{|v|+|w|-1}^{u,w_{|w|-1}}, v_0^{u,v_0}, \ldots, v_{|v|-1}^{u,v_{|v|-1}})) \end{aligned}$$

Let us show that the above definition is sound.

For the formal operations $\pi_i^w \in \Sigma^{\mathrm{B}_S}_{\lambda,(w,(w_i))}$, we have that

$$\begin{aligned} d(\pi_i^w) &\in \mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_{S^\star \times S}}(\Sigma^{\mathrm{H}_S})_{\phi^\sharp(\lambda),\phi(w,(w_i))} \\ &= \mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_{S^\star \times S}}(\Sigma^{\mathrm{H}_S})_{\lambda,((w,(w_i)))} \\ &= \mathrm{Fr}_{\Sigma^{\mathrm{H}_S}}(\downarrow\lambda)_{((w,(w_i)))} \end{aligned}$$

because $d(\pi_i^w)$ is a word of length 1 that has a formal operation of coarity $(w, (w_i))$.

For the formal operations $\langle\,\rangle_{u,w} \in \Sigma^{\mathrm{B}_S}_{((u,(w_0)),\ldots,(u,(w_{|w|-1}))),(u,w)}$, we have that

$$\begin{aligned} d(\langle\,\rangle_{u,w}) &\in \mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_{S^\star \times S}}(\Sigma^{\mathrm{H}_S})_{\phi^\sharp((u,w_0),\ldots,(u,(w_{|w|-1}))),\phi(u,w)} \\ &= \mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_{S^\star \times S}}(\Sigma^{\mathrm{H}_S})_{((u,w_0),\ldots,(u,w_{|w|-1})),((u,w_0),\ldots,(u,w_{|w|-1}))} \\ &= \mathrm{Fr}_{\Sigma^{\mathrm{H}_S}}(\downarrow((u,w_0),\ldots,(u,w_{|w|-1})))_{((u,w_0),\ldots,(u,w_{|w|-1}))} \end{aligned}$$

because $d(\langle\,\rangle_{u,w})$ is a word of length $|w|$ that, for every $i \in |w|$, has a formal h-polynomial of coarity $(u, (w_i))$.

For the formal operations $\circ_{u,v,w} \in \Sigma^{\mathrm{B}_S}_{((u,v),(v,w)),(u,w)}$, we have that

$$\begin{aligned} d(\circ_{u,v,w}) &\in \mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_{S^\star \times S}}(\Sigma^{\mathrm{H}_S})_{\phi^\sharp((u,v),(v,w)),\phi(u,w)} \\ &= \mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_{S^\star \times S}}(\Sigma^{\mathrm{H}_S})_{((u,v_0),\ldots,(u,v_{|v|-1}),(v,w_0),\ldots,(v,w_{|w|-1})),((u,w_i)\mid i\in|w|)} \\ &= \mathrm{Fr}_{\Sigma^{\mathrm{H}_S}}(\downarrow(((u,v_j)\mid j\in|v|),((v,w_i)\mid i\in|w|)))_{((u,w_i)\mid i\in|w|)} \end{aligned}$$

because $d(\circ_{u,v,w})$ is a word of length $|w|$ that, for every $i \in |w|$, has a formal h-polynomial of coarity (u, w_i).

From $\underline{\Sigma}^{\mathrm{H}_S}$ into $\underline{\Sigma}^{\mathrm{B}_S}$ we also have an F-morphism, that is the associated to a derivor.

Definition 44. Let S be a set of sorts. From the h-signature $\underline{\Sigma}^{\mathrm{H}_S}$ into the h-signature $\underline{\Sigma}^{\mathrm{B}_S}$ we have the F-morphism (ψ, e), with ψ the mapping

$$\begin{array}{rcl} S^\star \times S & \longrightarrow & (S^\star \times S^\star)^\star \\ (w, s) & \longmapsto & ((w, (s))) \end{array}$$

and $e\colon \Sigma^{\mathrm{H}_S} \longrightarrow \mathrm{Pol}_{\mathrm{B}_{S^\star \times S}}(\Sigma^{\mathrm{B}_S})_{\psi^\sharp \times \psi}$ defined as

(1) For every $w \in S^\star$ and $i \in |w|$,

$$e(\pi_i^w) = (\pi_i^w)$$

(2) For every u, $w \in S^{\star}$ and $s \in S$,

$$e(\xi_{u,w,s}) = (v_0^{w,s} \circ \langle v_1^{u,w_0}, \dots, v_{|w|}^{u,w_{|w|-1}} \rangle)$$

The defined F-morphisms are compatible with the respective equations.

Proposition 98. *The F-morphisms (ϕ, d) and (ψ, e) are F-morphisms of pretheories*

From the compositions of the F-morphisms (ϕ, d) and (ψ, e) into the respective identities we have invertible deformations from which follows the equivalence of the corresponding pretheories.

Proposition 99. *The pretheories $(\underline{\Sigma}^{\mathrm{B}_S}, \mathcal{E}^{\mathrm{B}_S})$ and $(\underline{\Sigma}^{\mathrm{H}_S}, \mathcal{E}^{\mathrm{H}_S})$ are equivalent in the 2-category $\mathbf{Thp}_{\mathrm{fuj}}$.*

3. La 2-categoría $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})$.

En esta sección definimos una cierta 2-categoria de mónadas sobre una categoria arbitraria pero fija $\mathbf{C}$, y demostramos la existencia de un 2-isomorfismo entre ella y ciertas 2-categorías asociadas a las construcciones de Kleisli y de Eilenberg-Moore. Más adelante, demostraremos que el proceso descrito en esta sección forma parte de un functor contravariante desde la categoría $\mathbf{Adj}$, de categorías y adjunciones, hasta la categoría $\mathbf{2}-\mathbf{Cat}$, de 2-categorías y 2-functores. Además, componiendo tal functor contravariante con el functor de olvido de $\mathbf{2}-\mathbf{Cat}$ en $\mathbf{Cat}$, obtendremos, mediante la construcción de Ehresmann-Grothendieck, la categoría $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}}$ de las mónadas y morfismos algebraicos, para la que el functor correspondiente hasta $\mathbf{Adj}$ será una fibración.

3.1. Las categorías $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})$, $\mathbf{Kl}(\mathbf{C})$ y $\mathbf{EM}(\mathbf{C})$.

Definition 45. Sea $\mathbf{C}$ una categoría y $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$, $\mathbb{T}' = (T', \eta', \mu')$ dos $\mathbf{C}$-mónadas. Un morfismo de $\mathbf{C}$-mónadas $\lambda\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}'$ es una transformación natural $\lambda\colon T \Longrightarrow T'$ tal que $\lambda \circ \eta = \eta'$ y $\lambda \circ \mu = \mu' \circ (\lambda * \lambda)$, i.e., tal que los siguientes diagramas conmutan.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Id} \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\eta'"'] & T \arrow[d, "\lambda"] \\ & T' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T \circ T \arrow[r, "\lambda * \lambda"] \arrow[d, "\mu"'] & T' \circ T' \arrow[d, "\mu'"] \\ T \arrow[r, "\lambda"'] & T' \end{tikzcd}$$

Si $\lambda\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}'$ y $\lambda'\colon \mathbb{T}' \longrightarrow \mathbb{T}''$ son morfismos de $\mathbf{C}$-mónadas, su composición es la transformación natural $\lambda' \circ \lambda : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}''$.

Como es bien sabido, cada grupo $\underline{G}$ determina una mónada $\mathbb{G} = (G \times -, \eta, \mu)$ sobre $\mathbf{Set}$, en la que η es la transformación natural de $\mathrm{Id}_{\mathbf{Set}}$ en $G \times -$ que a un conjunto X le asigna la aplicación $\eta_X : X \longrightarrow G \times X$ que a un $x \in X$ le asocia $(1, x)$, y μ la transformación natural de $(G \times -) \circ (G \times -)$ en $G \times -$ que a un conjunto X le asigna la aplicación $\mu_X : G \times (G \times X) \longrightarrow G \times X$ que a un $(a, (b, x)) \in G \times (G \times X)$ le asocia $(ab, x) \in G \times X$. Por otra parte, si $f : \underline{G} \longrightarrow \underline{G}'$ es un homomorfismo de grupos, entonces f determina una transformación natural λ^f del functor $G \times -$ en el functor $G' \times -$ que a un conjunto X le asigna la aplicación $\lambda^f_X = f \times \mathrm{id}_X$ de $G \times X$ en $G' \times X$, y que es un morfismo de la mónada $\mathbb{G}$ en la mónada $\mathbb{G}'$.

Proposition 100. *Sea $\mathbf{C}$ una categoría. Las $\mathbf{C}$-mónadas y los morfismos entre ellas determinan una categoría, denotada como $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})$.* $\square$

Proposition 101. *Sean $\mathbb{T}$ y $\mathbb{T}'$ dos $\mathbf{C}$-mónadas. Entonces existe una biyección entre*

(1) *Los morfismos de $\mathbf{C}$-mónadas $\lambda\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}'$.*
(2) *Los functores $H\colon \mathbf{Kl}(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathbf{Kl}(\mathbb{T}')$ tales que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Kl}(\mathbb{T}) \arrow[dd, "H"] \\
\mathbf{C} \arrow[ur, "\mathrm{F}_{\mathbb{T}}"] \arrow[dr, "\mathrm{F}_{\mathbb{T}'}"'] & \\
 & \mathbf{Kl}(\mathbb{T}')
\end{tikzcd}$$

Proof. Sea $\lambda\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}'$ un morfismo de $\mathbf{C}$-mónadas. Entonces λ determina un functor H_λ de $\mathbf{Kl}(\mathbb{T})$ en $\mathbf{Kl}(\mathbb{T}')$, precisamente el definido sobre los objetos como la identidad y que a cada $P\colon Y \longrightarrow T(X)$ en $\mathbf{C}$ le asigna $\lambda_X \circ P$.

El functor H_λ preserva las identidades porque $\lambda \circ \eta = \eta'$. Veamos que H_λ preserva composiciones. Sean $Q\colon Z \longrightarrow T(Y)$ y $P\colon Y \longrightarrow T(X)$ un par de morfismos componibles en $\mathbf{C}$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
H_\lambda(P \diamond Q) &= \lambda_X \circ \mu_X \circ T(P) \circ Q \\
&= \mu'_X \circ (\lambda * \lambda)_X \circ T(P) \circ Q \\
&= \mu'_X \circ T'(\lambda_X) \circ \lambda_{T(X)} \circ T(P) \circ Q \\
&= \mu'_X \circ T'(\lambda_X) \circ T'(P) \circ \lambda_{T(Y)} \circ Q \\
&= (\lambda_{T(X)} \circ P) \diamond (\lambda_{T(Y)} \circ Q) \\
&= H_\lambda(P) \diamond H_\lambda(Q)
\end{aligned}$$

Se cumple que H_λ es tal que $H_\lambda \circ \mathrm{F}_{\mathbb{T}} = \mathrm{F}_{\mathbb{T}'}$, puesto que, para cada $f\colon Y \longrightarrow X$ en $\mathbf{C}$, se cumple que

$$\begin{aligned}
H_\lambda \circ \mathrm{F}_{\mathbb{T}}(f) &= H_\lambda(\eta_X \circ f) \\
&= \lambda_X \circ \eta_X \circ f = \eta'_X \circ f = \mathrm{F}_{\mathbb{T}'}(f)
\end{aligned}$$

Recíprocamente, si $H\colon \mathbf{Kl}(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathbf{Kl}(\mathbb{T}')$ es tal que $H \circ \mathrm{F}_{\mathbb{T}} = \mathrm{F}_{\mathbb{T}'}$, entonces sea λ_H la aplicación que a cada objeto X le asigna $H(\mathrm{id}_{T(X)})$.

Antes de pasar a demostrar que λ_H es una transformación natural de T en T', comprobamos, en primer lugar, que, para cada $\mathbf{Kl}(\mathbb{T})$-morfismo $P\colon Y \longrightarrow X$, $H(P) = H(\mathrm{id}_{T(X)}) \circ P$. El diagrama en $\mathbf{Kl}(\mathbb{T})$

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "F_{\mathbb{T}}(P)"] \arrow[dr, "P"'] & T(X) \arrow[d, "\mathrm{id}_{T(X)}"] \\
 & X
\end{tikzcd}$$

conmuta, y, puesto que H es functor, también el diagrama en $\mathbf{Kl}(\mathbb{T}')$

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "H(F_{\mathbb{T}}(P))"] \arrow[dr, "H(P)"'] & T(X) \arrow[d, "H(\mathrm{id}_{T(X)})"] \\
& X
\end{tikzcd}$$

conmuta. Como $H(F_{\mathbb{T}}(P)) = F_{\mathbb{T}'}(P) = \eta'_{T(X)} \circ P$, el diagrama en $\mathbf{C}$

$$\begin{tikzcd}
T(X) \arrow[r, "\eta'_{T(X)}"] & T'T(X) \arrow[r, "T'(H(\mathrm{id}_{T(X)}))"] & T'T'(X) \arrow[d, "\mu'_X"] \\
Y \arrow[u, "P"] \arrow[rr, "H(P)"'] & & T'(X)
\end{tikzcd}$$

conmuta. Pero $\mu'_X \circ T'(H(\mathrm{id}_{T(X)})) \circ \eta'_{T(X)} = H(\mathrm{id}_{T(X)})$,

$$\begin{tikzcd}
T(X) \arrow[r, "\eta'_{T(X)}"] \arrow[d, "H(\mathrm{id}_{T(X)})"'] & T'T(X) \arrow[d, "T'(H(\mathrm{id}_{T(X)}))"] \\
T'(X) \arrow[r, "\eta'_{T'(X)}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{T'(X)}"'] & T'T'(X) \arrow[d, "\mu'_X"] \\
& T'(X)
\end{tikzcd}$$

y por consiguiente, $H(T(f)) = H(\mathrm{id}_{T(X)}) \circ T(f)$.

Veamos que $\lambda_H \colon T \longrightarrow T'$ es una transformación natural. Sea $f \colon Y \longrightarrow X$ un $\mathbf{C}$-morfismo. Para comprobar la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
T(Y) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "H(\mathrm{id}^{\mathbf{C}}_{T(Y)})"'] & T(X) \arrow[d, "H(\mathrm{id}^{\mathbf{C}}_{T(X)})"] \\
T'(Y) \arrow[r, "T'(f)"'] & T'(X)
\end{tikzcd}$$

demostramos que ambos caminos coinciden con $H(T(f))$. Obviamente, se cumple que $H(\mathrm{id}_{T(X)}) \circ T(f) = H(T(f))$, porque $T(f) \colon T(Y) \longrightarrow X$ es un morfismo en $\mathbf{Kl}(\mathbb{T})$.

Por otra parte, el diagrama en $\mathbf{Kl}(\mathbb{T})$

$$\begin{tikzcd}
T(Y) \arrow[d, "\mathrm{id}_{T(Y)}"'] \arrow[dr, "T(f)"] & \\
Y \arrow[r, "F_{\mathbb{T}}(f)"'] & X
\end{tikzcd}$$

conmuta, luego el diagrama en $\mathbf{Kl}(\mathbb{T}')$

$$\begin{tikzcd}
T(Y) \arrow[d, "H(\mathrm{id}_{T(Y)})"'] \arrow[dr, "H(T(f))"] & \\
Y \arrow[r, "H(F_{\mathbb{T}}(f))"'] & X
\end{tikzcd}$$

también conmuta. Como $H(F_{\mathbb{T}}(f)) = F_{\mathbb{T}'}(f) = \eta'_X \circ f$, el diagrama en $\mathbf{C}$

$$\begin{tikzcd}
T'(Y) \arrow[r, "T'(f)"] & T'(X) \arrow[r, "T'(\eta'_X)"] & T'T'(X) \arrow[d, "\mu'_X"] \\
T(Y) \arrow[u, "H(\mathrm{id}_{T(Y)})"] \arrow[rr, "H(T(f))"'] & & T'(X)
\end{tikzcd}$$

conmuta, y, por consiguiente, $H(T(f)) = T'(f) \circ H(\mathrm{id}_{T(Y)})$.

Veamos que la transformación natural λ_H es un morfismo de mónadas. Para cada $X \in \mathbf{C}$, $H(\eta_X) = H(F_{\mathbb{T}}(\mathrm{id}_X) = F_{\mathbb{T}'}(\mathrm{id}_X) = \eta'_X$, por lo que $\lambda_H \circ \eta = \eta'$. Además, $\lambda_H \circ \mu = \mu' \circ (\lambda_H * \lambda_H)$, porque el diagrama en $\mathbf{Kl}(\mathbb{T})$

$$\begin{tikzcd}
TT(X) \arrow[r, "\mathrm{id}_{TT(X)}"] \arrow[dr, "\mu_X"'] & T(X) \arrow[d, "\mathrm{id}_{T(X)}"] \\
& X
\end{tikzcd}$$

es conmutativo y, por consiguiente, también lo es el diagrama en $\mathbf{Kl}(\mathbb{T}')$

$$\begin{tikzcd}
TT(X) \arrow[r, "H(\mathrm{id}_{TT(X)})"] \arrow[dr, "H(\mu_X)"'] & T(X) \arrow[d, "H(\mathrm{id}_{T(X)})"] \\
& X
\end{tikzcd}$$

de donde se sigue la conmutatividad en $\mathbf{C}$ del diagrama

$$\begin{tikzcd}
TT(X) \arrow[r, "H(\mathrm{id}_{TT(X)})"] \arrow[rr, bend left, "T'(\lambda_X) \circ \lambda_{T(X)}"] \arrow[drr, "H(\mu_X)"'] & T'T(X) \arrow[r, "T'(H(\mathrm{id}_{T(X)}))"] & T'T'(X) \arrow[d, "\mu'_X"] \\
& & T'(X)
\end{tikzcd}$$

Pero $H(\mathrm{id}_{T(X)}) \circ \mu_X = H(\mu_X)$, luego $\lambda_H \circ \mu = \mu' \circ (\lambda_H * \lambda_H)$.

Sólo falta comprobar que ambos procesos son inversos. Si $\lambda \colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}'$ es un morfismo de mónadas, entonces λ_{H_λ} es, para cada objeto X, el morfismo $\lambda(\mathrm{id}^{\mathbf{C}}_{T(X)}) = \lambda_X$. Por otra parte, si $H \colon \mathbf{Kl}(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathbf{Kl}(\mathbb{T}')$, entonces H_{λ_H} asigna a un $P \colon Y \longrightarrow X$ en $\mathbf{Kl}(\mathbb{T})$ el morfismo $(\lambda_H)_X \circ P = H(\mathrm{id}_{T(X)}) \circ P = H(P)$. $\square$

Proposition 102. *Sean $\mathbb{T}$ y $\mathbb{T}'$ dos $\mathbf{C}$-mónadas. Entonces existe una biyección entre*

(1) *Los morfismos de mónadas $\lambda\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}'$.*
(2) *Los functores $H\colon \mathbf{EM}(\mathbb{T}') \longrightarrow \mathbf{EM}(\mathbb{T})$ tales que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{EM}(\mathbb{T}') \arrow[dd, "H"'] \arrow[dr, "\mathrm{G}^{\mathbb{T}'}"] & \\
& \mathbf{C} \\
\mathbf{EM}(\mathbb{T}) \arrow[ur, "\mathrm{G}^{\mathbb{T}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Proof. Cada morfismo $\lambda\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}'$, determina un functor $H^{\lambda}\colon \mathbf{EM}(\mathbb{T}') \longrightarrow \mathbf{EM}(\mathbb{T})$, precisamente el que asigna a una $\mathbb{T}'$-álgebra (A, α) la $\mathbb{T}$-álgebra $(A, \alpha \circ \lambda_A)$ y que es la identidad sobre los morfismos.

Veamos que H^{λ} está bien definido. Si (A, α) es una $\mathbb{T}'$-álgebra, $(A, \alpha \circ \lambda_A)$ es una $\mathbb{T}$-álgebra, puesto que

$$\begin{aligned}
(\alpha \circ \lambda_A) \circ \eta_A &= \alpha \circ \eta'_A \\
&= \mathrm{id}_A \ , \\
(\alpha \circ \lambda_A) \circ \mu_A &= \alpha \circ \mu'_A \circ (\lambda * \lambda)_A = \alpha \circ \mu'_A \circ \lambda_{T'(A)} \circ T(\lambda)_A \\
&= \alpha \circ T'(\alpha) \circ \lambda_{T(A)} \circ T(\lambda_A) = \alpha \circ \lambda_A \circ T(\alpha) \circ T(\lambda_A) \\
&= (\alpha \circ \lambda_A) \circ T(\alpha \circ \lambda_A)
\end{aligned}$$

Si $f\colon (A, \alpha) \longrightarrow (B, \beta)$ es un morfismo de $\mathbb{T}'$-álgebras, entonces $H^{\lambda}(f)$ es un homomorfismo de $\mathbb{T}$-álgebras porque

$$f \circ \alpha \circ \lambda_A = \beta \circ T'(f) \circ \lambda_A = \beta \circ \lambda_B \circ T(f)$$

La preservación de composiciones e identidades es inmediata, así como que $\mathrm{G}^{\mathbb{T}} \circ H = \mathrm{G}^{\mathbb{T}'}$.

Recíprocamente, si $H\colon \mathbf{EM}(\mathbb{T}') \longrightarrow \mathbf{EM}(\mathbb{T})$ es tal que $\mathrm{G}^{\mathbb{T}} \circ H = \mathrm{G}^{\mathbb{T}'}$, entonces, H asigna a cada $\mathbb{T}'$-álgebra (A, α), la $\mathbb{T}$-álgebra $H(A, \alpha)$, cuyo $\mathbf{C}$-objeto subyacente es, necesariamente, A, y cuya estructura convenimos en denotar por α^H. En particular, para cada objeto A, $(T'(A), \mu'_A)$ es una $\mathbb{T}'$-álgebra, a la que el functor H asigna la $\mathbb{T}$-álgebra $(T'(A), (\mu'_A)^H)$.

La aplicación $A \mapsto (\mu'_A)^H$ es una transformación natural $(\mu'_{(\cdot)})^H$ de TT' en T', puesto que, para cada $f\colon A \longrightarrow B$, por ser μ' una transformación natural y H es functor, los diagramas

$$\begin{tikzcd}
T'T'(A) \arrow[r, "T'T'(f)"] \arrow[d, "\mu'_A"'] & T'T'(B) \arrow[d, "\mu'_B"] \\
T'(A) \arrow[r, "T'(f)"'] & T'(B)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
TT'(A) \arrow[r, "TT'(f)"] \arrow[d, "(\mu'_A)^H"'] & TT'(B) \arrow[d, "(\mu'_B)^H"] \\
T'(A) \arrow[r, "T'(f)"'] & T'(B)
\end{tikzcd}$$

conmutan.

Sea $\lambda^H : T \Longrightarrow T'$ la transformación natural obtenida mediante la composición de $T\eta'$ con $(\mu'_{(\cdot)})^H$, que a cada A le asigna el morfismo

$$T(A) \xrightarrow{T(\eta'_A)} TT'(A) \xrightarrow{(\mu'_A)^H} T'(A)$$

Se cumple entonces que, para cada $f\colon A \longrightarrow B$, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
T(A) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "T(\eta'_A)"'] \arrow[dd, bend right=90, "\lambda^H_A"'] & T(B) \arrow[d, "T(\eta'_B)"] \arrow[dd, bend left=90, "\lambda^H_B"] \\
TT'(A) \arrow[r, "TT'(f)"] \arrow[d, "(\mu'_A)^H"'] & TT'(B) \arrow[d, "(\mu'_B)^H"] \\
T'(A) \arrow[r, "T'(f)"'] & T'(B)
\end{tikzcd}$$

conmuta. Además, $\lambda^H \circ \eta = \eta'$, puesto que para cada A, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "\eta'_A"'] & T(A) \arrow[d, "T(\eta'_A)"] \arrow[dd, bend left=90, "\lambda^H_A"] \\
T'(A) \arrow[r, "\eta_{T'(A)}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & TT'(A) \arrow[d, "(\mu'_A)^H"] \\
& T'(A)
\end{tikzcd}$$

conmuta. La condición $\lambda^H \circ \mu = \mu' \circ (\lambda^H * \lambda^H)$ se deriva de la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
TT(A) \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "TT\eta'_A"'] \arrow[dd, bend right=70, "T\lambda^H_A"'] & T(A) \arrow[d, "T\eta'_A"] \arrow[dd, bend left=70, "\lambda^H_A"] \\
TTT'(A) \arrow[r, "\mu_{T'(A)}"] \arrow[d, "T(\mu'_A)^H"'] & TT'(A) \arrow[d, "(\mu'_A)^H"] \\
TT'(A) \arrow[r, "(\mu'_A)^H"] \arrow[d, "T\eta' T'(A)"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{TT'(A)}"] \arrow[dd, bend right=70, "\lambda^H_{T'(A)}"'] & T'(A) \arrow[dd, bend left=70, "\mathrm{id}_{T'(A)}"] \\
TT'T'(A) \arrow[r, "T\mu'_A"'] \arrow[d, "(\mu'_{T'(A)})^H"'] & TT'(A) \arrow[d, "(\mu'_A)^H"] \\
T'T'(A) \arrow[r, "\mu'_A"'] & T'(A)
\end{tikzcd}$$

en el que el cuadrado inferior conmuta porque el functor H preserva homomorfismos.

Veamos que ambos procesos son inversos. Si $\lambda\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}'$ es un morfismo de mónadas, entonces $\lambda^{H^{\lambda}} = \lambda$, puesto que para cada A, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
T(A) \arrow[r, "\lambda_A"] \arrow[d, "T\eta'_A"'] & T'(A) \arrow[d, "T'\eta'_A"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{T'(A)}"] & \\
TT'(A) \arrow[r, "\lambda_{T'(A)}"'] \arrow[rr, bend right, "(\mu'_A)^{H^{\lambda}}"'] & T'T'(A) \arrow[r, "\mu'_A"'] & T'(A)
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Finalmente, si $H\colon \mathbf{EM}(\mathbb{T}') \longrightarrow \mathbf{EM}(\mathbb{T})$ es tal que $\mathrm{G}^{\mathbb{T}} \circ H = \mathrm{G}^{\mathbb{T}'}$, entonces se cumple que $H^{\lambda^H} = H$, porque, para cada $\mathbb{T}'$-álgebra (A, α), el $\mathbb{T}'$-homomorfismo $\alpha\colon (T'(A), \mu'_A) \longrightarrow (A, \alpha)$ es preservado por H, y por tanto el diagrama

$$\begin{tikzcd}
T(A) \arrow[r, "T\eta'_A"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{T(A)}"'] & TT'(A) \arrow[r, "(\mu'_A)^H"] \arrow[d, "T(\alpha)"] & T'(A) \arrow[d, "\alpha"] \\
& T(A) \arrow[r, "\alpha"'] & A
\end{tikzcd}$$

conmuta. □

Las correspondencias biunívocas de las dos proposiciones anteriores se extienden hasta respectivos isomorfismos de categorías. Además, demostraremos que ambos isomorfismos persisten cuando se consideran ciertas 2-células entre los morfismos de mónadas, y que corresponden, a las transformaciones naturales de los functores entre las categorías de Kleisli y de Eilenberg-Moore, que conmutan con los functores libres y de olvido, respectivamente.

Definition 46. Sea $\mathbf{C}$ una categoría. Entonces

(1) $\mathbf{Kl}(\mathbf{C})$ es la categoría cuyos objetos son las $\mathbf{C}$-mónadas $\mathbb{T}$ y en la que los morfismos de $\mathbb{T}$ en $\mathbb{T}'$ son los functores $H\colon \mathbf{Kl}(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathbf{Kl}(\mathbb{T}')$ tales que $H \circ \mathrm{F}_{\mathbb{T}} = \mathrm{F}_{\mathbb{T}'}$.
(2) $\mathbf{EM}(\mathbf{C})$ es la categoría cuyos objetos son las $\mathbf{C}$-mónadas $\mathbb{T}$ y en la que los morfismos de $\mathbb{T}$ en $\mathbb{T}'$ son los functores $H\colon \mathbf{EM}(\mathbb{T}') \longrightarrow \mathbf{EM}(\mathbb{T})$ tales que $\mathrm{G}^{\mathbb{T}} \circ H = \mathrm{G}^{\mathbb{T}'}$.

Proposition 103. *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría. Entonces la categoría* $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})$ *es isomorfa a las categorías* $\mathbf{Kl}(\mathbf{C})$ *y* $\mathbf{EM}(\mathbf{C})^{\mathrm{op}}$.

3.2. **La institución $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})$.** Consideramos a continuación una transformación extranatural que establece una relación entre las categorías de Kleisli y de Eilenberg-Moore asociadas a las mónadas, y que da lugar a que las mónadas puedan ser consideradas como una institución.

Proposition 104. *Sea* $\lambda\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}'$ *un morfismo de* $\mathbf{C}$*-mónadas,* P *un morfismo en* $\mathbf{Kl}(\mathbb{T})$ *y* (A, α) *una* $\mathbb{T}'$*-álgebra. Entonces* $H_{\lambda}(P)^{(A,\alpha)} = P^{H^{\lambda}(A,\alpha)}$.

Proof. Si $P\colon Y \longrightarrow X$ es un morfismo en $\mathbf{Kl}(\mathbb{T})$, entonces, para cada morfismo $f\colon X \longrightarrow A$, el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "P"] \arrow[rrrr, bend left, "P^{H^{\lambda}(A,\alpha)}"] \arrow[rrrr, bend right, "H_{\lambda}(P)^{(A,\alpha)}"'] & T(X) \arrow[r, shift left, "T(f)"] \arrow[r, shift right, "\lambda_X"'] & T(A) \arrow[r, shift left, "\lambda_A"] \arrow[r, shift right, "T'(f)"'] & T'(A) \arrow[r, "\alpha"] & A
\end{tikzcd}
$$

conmuta, puesto que $\lambda_A \circ T(f) = T'(f) \circ \lambda_X$ por ser λ una transformación natural. $\square$

Proposition 105. *Sea $\mathbb{T}$ una $\mathbf{C}$-mónada y (A,α) una $\mathbb{T}$-álgebra. Entonces, para cada $f\colon X \longrightarrow A$, los siguientes diagramas conmutan.*

$$
\begin{tikzcd}
T(X) \arrow[d, "\alpha \circ T(f)"'] \arrow[dr, "T(f)"] & TT(X) \arrow[l, "\mu_X"'] \arrow[d, "T(\alpha \circ T(f))"] \\
A & T(A) \arrow[l, "\alpha"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"'] & T(X) \arrow[d, "T(f)"] \\
A & T(A) \arrow[l, "\alpha"]
\end{tikzcd}
$$

Proof. Es suficiente comprobar que los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
T(X) \arrow[d, "\alpha \circ T(f)"'] & TT(X) \arrow[l, "\mu_X"'] \arrow[d, "TT(f)"] \\
T(A) \arrow[d, "\alpha"'] & TT(A) \arrow[l, "\mu_A"'] \arrow[d, "T(\alpha)"] \\
A & T(A) \arrow[l, "\alpha"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"'] & T(X) \arrow[d, "T(f)"] \\
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A"'] & T(A) \arrow[d, "\alpha"] \\
 & A
\end{tikzcd}
$$

conmutan. $\square$

Las construcciones de las proposiciones anteriores se extienden hasta functores $\mathrm{Kl}^{\mathbf{C}}\colon \mathbf{Mnd}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{Cat}$ y $\mathrm{EM}^{\mathbf{C}}\colon \mathbf{Mnd}(\mathbf{C})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Cat}$, definidos sobre los morfismos de mónadas $\lambda\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}'$ como $\mathrm{Kl}^{\mathbf{C}}(\lambda) = H_{\lambda}$ y $\mathrm{EM}^{\mathbf{C}}(\lambda) = H^{\lambda}$.

Para definir la transformación extranatural, en lugar del functor $\mathrm{Kl}^{\mathbf{C}}$, consideramos el functor $\mathrm{Pol}^{\mathbf{C}}\colon \mathbf{Mnd}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{Cat}$, definido como $\mathrm{Pol}^{\mathbf{C}}(\lambda) = H_{\lambda}^{\mathrm{op}}\colon \mathbf{Pol}(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathbf{Pol}(\mathbb{T}')$, siendo $\mathbf{Pol}(\mathbb{T}) = \mathbf{Kl}(\mathbb{T})^{\mathrm{op}}$ y $\mathbf{Pol}(\mathbb{T}') = \mathbf{Kl}(\mathbb{T}')^{\mathrm{op}}$.

Proposition 106. *De la categoría $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Mnd}(\mathbf{C})$ en $\mathbf{Cat}$ se tiene un functor definido como*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Mnd}(\mathbf{C}) \arrow[rr, "\mathrm{EM}^{\mathbf{C}}(\cdot) \times \mathrm{Pol}^{\mathbf{C}}(\cdot)"] & & \mathbf{Cat} \\
(\mathbb{T}, \mathbb{L}) \arrow[d, "{(\lambda, \delta)}"'] & & \mathbf{EM}(\mathbb{T}) \times \mathbf{Pol}(\mathbb{L}) \arrow[d, "H^{\lambda} \times H_{\delta}^{\mathrm{op}}"] \\
(\mathbb{T}', \mathbb{L}') & \longmapsto & \mathbf{EM}(\mathbb{T}') \times \mathbf{Pol}(\mathbb{L}')
\end{tikzcd}
$$

así como el functor que es constantemente $\mathbf{Set}$.

Para cada mónada $\mathbb{T}$*, sea* $\mathrm{Pd}^{\mathbb{T}}$ *el functor definido como*

$$\mathbf{EM}(\mathbb{T}) \times \mathbf{Pol}(\mathbb{T}) \xrightarrow{\quad \mathrm{Pd}^{\mathbb{T}} \quad} \mathbf{Set}$$

$$\begin{tikzcd}
((A,\alpha),X) \arrow[dd, "{(f,P)}"'] & & & \mathbf{C}(X,A) \arrow[dl, "{\mathbf{C}(X,f)}"'] \arrow[dr, "P^{(A,\alpha)}"] & \\
 & \longmapsto & \mathbf{C}(X,B) \arrow[dr, "P^{(B,\beta)}"'] & & \mathbf{C}(Y,A) \arrow[dl, "{\mathbf{C}(Y,f)}"] \\
((B,\beta),Y) & & & \mathbf{C}(Y,B) &
\end{tikzcd}$$

siendo $\mathrm{Pd}^{\mathbb{T}}(f,P)$ *la diagonal del cuadrado anterior, que conmuta porque, para cada* $a\colon X \longrightarrow A$*, el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "P"] & T(X) \arrow[r, "T(a)"] & T(A) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "\alpha"'] & T(B) \arrow[d, "\beta"] \\
 & & A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

conmuta, por ser f *un homomorfismo de* $\mathbb{T}$*-álgebras. Entonces la familia* $\mathrm{Pd}_{\mathbf{C}} = (\mathrm{Pd}^{\mathbb{T}})_{\mathbb{T}\in\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})}$ *es una transformación extranatural de* $\mathrm{EM}(\cdot) \times \mathrm{Pol}(\cdot)$ *en* $\mathbf{Set}$.

Proof. Queremos demostrar que $\mathrm{Pd}^{\mathbb{T}}$ es una transformación extranatural, i.e., que para cada morfismo de mónadas $\lambda\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}'$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{EM}(\mathbb{T}') \times \mathbf{Pol}(\mathbb{T}) \arrow[r, "H^{\lambda} \times \mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{Id} \times H_{\lambda}^{\mathrm{op}}"'] & \mathbf{EM}(\mathbb{T}) \times \mathbf{Pol}(\mathbb{T}) \arrow[d, "\mathrm{Pd}^{\mathbb{T}}"] \\
\mathbf{EM}(\mathbb{T}') \times \mathbf{Pol}(\mathbb{T}') \arrow[r, "\mathrm{Pd}^{\mathbb{T}'}"'] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Sea $(f,P)\colon ((A,\alpha),X) \longrightarrow ((B,\beta),Y)$ un morfismo en $\mathbf{EM}(\mathbb{T}') \times \mathbf{Pol}(\mathbb{T})$. Entonces, para cada $a\colon X \longrightarrow A$, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "P"] & T(X) \arrow[r, "T(a)"] \arrow[d, "\lambda_X"'] & T(A) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "\lambda_A"] & T(B) \arrow[d, "\lambda_B"] \\
 & T'(X) \arrow[r, "T'(a)"'] & T'(A) \arrow[r, "T'(f)"'] \arrow[d, "\alpha"'] & T'(B) \arrow[d, "\beta"] \\
 & & A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

conmuta y, por lo tanto, $\mathrm{Pd}^{\mathbb{T}}$ es una transformación extranatural. $\square$

La proposición anterior nos permite considerar a las mónadas sobre una categoría como una institución.

Proposition 107. *Si* $\mathbf{C}$ *una categoría, entonces* $(\mathbf{Mnd}(\mathbf{C}), \mathrm{EM}, \mathrm{Pol}, \mathrm{Pd}_{\mathbf{C}})$ *es una institución sobre* $\mathbf{Set}$.

3.3. **Deformaciones entre morfismos de C-mónadas.** A continuación definimos el concepto de deformación entre dos morfismos de $\mathbf{C}$-mónadas así como los de composición vertical y horizontal de deformaciones, y establecemos que la categoría $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})$ es una 2-categoría.

Definition 47. Sean $\mathbb{T}$, $\mathbb{T}'$ dos $\mathbf{C}$-mónadas y λ, λ' dos morfismos de mónadas de $\mathbb{T}$ en $\mathbb{T}'$. Una deformación de λ en λ' es una transformación natural $\Xi\colon 1_{\mathbf{C}} \Longrightarrow T'$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\Xi\lambda"] \arrow[d, "\lambda'\Xi"'] & T'T' \arrow[d, "\mu'"] \\
T'T' \arrow[r, "\mu'"'] & T'
\end{tikzcd}$$

conmuta, i.e., tal que

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, bend left=60, "T"] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow\lambda"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] & {} \arrow[r, bend left=60, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow\Xi"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu'"] & {} & = & {} \arrow[r, bend left=60, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow\Xi"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] & {} \arrow[r, bend left=60, "T"] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow\lambda'"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu'"] & {} \\
 & {} & & & & {} &
\end{tikzcd}$$

El hecho de que $\Xi\colon 1_{\mathbf{C}} \Longrightarrow T'$ sea una deformación de λ en λ' lo denotamos por $\Xi\colon \lambda \rightsquigarrow \lambda'$.

Si $\Xi\colon \lambda \rightsquigarrow \lambda'\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}'$ y $\Xi'\colon \lambda' \rightsquigarrow \lambda''\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}'$ son dos deformaciones, su composición vertical, denotada por $\Xi' \mathbin{\tilde{\circ}} \Xi$, es la transformación natural $\mu' \circ \Xi'\Xi$, obtenida como

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, bend left=60, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow\Xi"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] & {} \arrow[r, bend left=60, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow\Xi'"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu'"] & {} \\
 & {} &
\end{tikzcd}$$

Si $\Xi\colon \lambda \rightsquigarrow \lambda'\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}'$ y $\Xi'\colon \lambda'' \rightsquigarrow \lambda'''\colon \mathbb{T}' \longrightarrow \mathbb{T}''$ son dos deformaciones, su composición horizontal, denotada por $\Xi' \mathbin{\tilde{*}} \Xi$, es la única transformación natural de 1 en T'' del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\Xi"] & T' \arrow[r, "\Xi'\lambda''"] \arrow[d, "\lambda'''\Xi'"'] & T''T'' \arrow[d, "\mu''"] \\
 & T''T'' \arrow[r, "\mu''"'] & T''
\end{tikzcd}$$

obtenida como

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large]
{} \arrow[r, "T''"] \arrow[r, bend left=80, "1"] \arrow[r, bend left=40, "T'" description] \arrow[rr, bend right=50, "T''"'] \arrow[r, phantom, bend left=60, "\Downarrow\Xi"] \arrow[r, phantom, bend left=20, "\Downarrow\lambda''"] & {} \arrow[r, "T''"] \arrow[r, bend left=50, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=25, "\Downarrow\Xi'"] \arrow[phantom, d, "\Downarrow\mu'"] & {} \\
& {} &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}[column sep=large]
{} \arrow[r, "T''"] \arrow[r, bend left=50, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=25, "\Downarrow\Xi'"] \arrow[rr, bend right=50, "T''"'] & {} \arrow[r, "T''"] \arrow[r, bend left=80, "1"] \arrow[r, bend left=40, "T'" description] \arrow[r, phantom, bend left=60, "\Downarrow\Xi"] \arrow[r, phantom, bend left=20, "\Downarrow\lambda'''"] \arrow[phantom, d, "\Downarrow\mu'"] & {} \\
& {} &
\end{tikzcd}
$$

Si $f, f' \colon \underline{G} \longrightarrow \underline{G'}$ son dos homomorfismos de grupos conjugados, de manera que hay un $a' \in G'$ tal que, para cada $x \in G$, $a' f(x) = f'(x) a'$, entonces a' determina una transformación natural $\Xi^{a'}$ de $\mathrm{Id}_{\mathbf{Set}}$ en $\mathrm{G}' \times -$ que a un conjunto X le asigna la aplicación $\Xi^{a'}_X$ de X en $G' \times X$ que a un $x \in X$ le asocia (a', x), y que es una deformación del morfismo λ^f en el morfismo $\lambda^{f'}$, ya que las dos aplicaciones de $G \times X$ en $G' \times X$ de los siguientes diagramas coinciden

$$
\begin{tikzcd}
G \times X \arrow[r, "\Xi^{a'}_{G \times X}"] \arrow[d, "\lambda^f_X"'] & G' \times (G \times X) \arrow[d, "\mathrm{id}_{G'} \times \lambda^f_X"] \\
G' \times X \arrow[r, "\Xi^{a'}_{G' \times X}"'] & G' \times (G' \times X) \arrow[d, "\mu'_X"] \\
& G' \times X
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
G \times X \arrow[r, "\lambda^{f'}_X"] \arrow[d, "\mathrm{id}_G \times \Xi^{a'}_X"'] & G' \times X \arrow[d, "\mathrm{id}_{G'} \times \Xi^{a'}_X"] \\
G \times (G' \times X) \arrow[r, "\lambda^{f'}_{G' \times X}"'] & G' \times (G' \times X) \arrow[d, "\mu'_X"] \\
& G' \times X
\end{tikzcd}
$$

Proposition 108. *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría. Las* $\mathbf{C}$*-mónadas, los morfismos de* $\mathbf{C}$*-mónadas y las deformaciones entre ellas determinan una 2-categoría, denotada como* $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})$.

Proof. En primer lugar, comprobemos que la composición vertical de deformaciones es una deformación. En la situación del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{T} \arrow[r, "\lambda'" description] \arrow[r, bend left=50, "\lambda"] \arrow[r, bend right=50, "\lambda''"'] \arrow[r, phantom, bend left=25, "\Downarrow \Xi"] \arrow[r, phantom, bend right=25, "\Downarrow \Xi'"] & \mathbb{T}'
\end{tikzcd}
$$

$\Xi' \,\tilde{\circ}\, \Xi$ es una deformación si el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "(\Xi' \,\tilde{\circ}\, \Xi)\lambda"] \arrow[d, "\lambda''(\Xi' \,\tilde{\circ}\, \Xi)"'] & T'T' \arrow[d, "\mu'"] \\
T'T' \arrow[r, "\mu'"'] & T'
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Para ello, es suficiente considerar los dos caminos exteriores del diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
 & & T'^3 \arrow[rrd, bend left, "\mu' T'"] & & \\
T \arrow[urr, bend left=40, "\Xi'\Xi\lambda"] \arrow[rr, bend left, "\Xi'\Xi T"] \arrow[r, "\Xi' T"] \arrow[d, "\lambda''"'] \arrow[dddd, bend right=60, "\lambda''\Xi'\Xi"'] & T'T \arrow[r, "T'\Xi T"] \arrow[d, "T'\lambda'"'] & T'^2T \arrow[u, "T'T'\lambda"'] \arrow[r, "\mu' T"] \arrow[rd, "T'T'\lambda"'] & T'T \arrow[r, "T'\lambda"] & T'^2 \arrow[dddd, "\mu'"] \\
T' \arrow[d, "T'\Xi'"'] & T'^2 \arrow[d, "\mu'"'] \arrow[rd, "T'T'\Xi"] & & T'^3 \arrow[ru, "\mu' T'"'] \arrow[d, "T'\mu'"] & \\
T'^2 \arrow[r, "\mu'"'] \arrow[dd, "T'T'\Xi"'] & T' \arrow[rd, "T'\Xi"'] & T'^3 \arrow[r, "T'\mu'"] \arrow[d, "\mu' T'"] & T'^2 \arrow[rdd, "\mu'"] & \\
 & & T'^2 \arrow[rrd, "\mu'"] & & \\
T'^3 \arrow[rru, "\mu' T'"] \arrow[rr, "T'\mu'"'] & & T'^2 \arrow[rr, "\mu'"'] & & T'
\end{tikzcd}
$$

La composición vertical es claramente asociativa.

La composición horizontal de deformaciones es una deformación. En la situación del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{T} \arrow[r, bend left, "\lambda"] \arrow[r, bend right, "\lambda'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\,\Xi"] & \mathbb{T}' \arrow[r, bend left, "\lambda''"] \arrow[r, bend right, "\lambda'''"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\,\Xi'"] & \mathbb{T}''
\end{tikzcd}
$$

$\Xi' \,\tilde{*}\, \Xi$ es una deformación si

$$
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "(\Xi' \,\tilde{*}\, \Xi) * (\lambda'' \circ \lambda)"] \arrow[d, "(\lambda''' \circ \lambda') \,\tilde{*}\, (\Xi' \,\tilde{*}\, \Xi)"'] & T''T'' \arrow[d, "\mu''"] \\
T''T'' \arrow[r, "\mu''"'] & T''
\end{tikzcd}
$$

conmuta, lo que se deduce de la conmutatividad del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\Xi T"] \arrow[rrrrr, bend left, "(\Xi' \mathbin{\tilde{*}} \Xi)T"] \arrow[dd, "\lambda'"] & T'T \arrow[rr, "\lambda''' T"] \arrow[dr, "T'\lambda"] & & T''T \arrow[r, "T''\Xi' T"] \arrow[d, "T''\lambda"] & T''^2 T \arrow[r, "\mu'' T"] \arrow[d, "T''T''\lambda"] & T''T' \arrow[d, "T''\lambda"] \arrow[dd, bend left, "T''(\lambda'' \circ \lambda)"] \\
& & T'^2 \arrow[r, "\lambda''' T'"] \arrow[d, "\mu'"] \arrow[dr, "\lambda'''\lambda'''"] & T''T' \arrow[r, "T''\Xi' T'"] \arrow[d, "T''\lambda'''"] & T''^2 T' \arrow[r, "\mu'' T'"] \arrow[d, "T''T''\lambda''"] & T''T' \arrow[d, "T''\lambda''"] \\
T' \arrow[r, "T'\Xi"] \arrow[d, "\lambda'''"] & T'^2 \arrow[r, "\mu'"] \arrow[d, "\lambda''' T'"] \arrow[dr, "\lambda'''\lambda'''"] & T' \arrow[dr, "\lambda'''"] & T''^2 \arrow[d, "\mu''"] \arrow[dr, "T''T''\Xi'"] & T''^3 \arrow[r, "\mu'' T''"'] \arrow[ddr, "T''\mu''"] & T''^2 \arrow[ddd, bend left, "\mu''"] \\
T'' \arrow[r, "T''\Xi"'] \arrow[rrrrdd, bend right, "T''(\Xi' \mathbin{\tilde{*}} \Xi)"'] & T''T' \arrow[r, "T''\lambda'''"'] & T''^2 \arrow[r, "\mu''"'] \arrow[dr, "T''T''\Xi'"'] & T'' \arrow[dr, "T''\Xi'"] & T''^3 \arrow[d, "\mu'' T''"] \arrow[dr, "T''\mu''"] & \\
& & & T''^3 \arrow[r, "\mu'' T''"'] \arrow[dr, "T''\mu''"'] & T''^2 \arrow[dr, "\mu''"] & T''^2 \arrow[d, "\mu''"] \\
& & & & T''T \arrow[r, "\mu''"'] & T''
\end{tikzcd}
$$

La composición horizontal de deformaciones es asociativa.

Veamos que se cumple la ley de intercambio. En la situación

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{T} \arrow[rr, bend left=50, "\lambda"] \arrow[rr, "\lambda'" description] \arrow[rr, bend right=50, "\lambda''"'] & {} & \mathbb{T}' \arrow[rr, bend left=50, "\delta"] \arrow[rr, "\delta'" description] \arrow[rr, bend right=50, "\delta''"'] & {} & \mathbb{T}''
\arrow[from=1-2, to=1-2, phantom, shift left=4, "\wr\Downarrow \Xi"]
\arrow[from=1-2, to=1-2, phantom, shift right=4, "\wr\Downarrow \Xi'"]
\arrow[from=1-4, to=1-4, phantom, shift left=4, "\wr\Downarrow \Theta"]
\arrow[from=1-4, to=1-4, phantom, shift right=4, "\wr\Downarrow \Theta'"]
\end{tikzcd}
$$

Hay que demostrar que $(\Theta' \mathbin{\tilde{\circ}} \Theta) \mathbin{\tilde{*}} (\Xi' \mathbin{\tilde{\circ}} \Xi)$ es igual a $(\Theta' \mathbin{\tilde{*}} \Xi') \mathbin{\tilde{\circ}} (\Theta \mathbin{\tilde{*}} \Xi)$, i.e., que $\mu'' \circ (\mu'' \circ \Theta'\Theta)\delta \circ (\mu' \circ \Xi'\Xi) = \mu'' \circ ((\mu'' \circ \Theta'\delta' \circ \Xi')(\mu'' \circ \Theta\delta \circ \Xi))$, lo que se deduce de la conmutatividad del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, "\Xi"] & & & & & \\
T' \arrow[r, "\Xi'T'"] \arrow[d, "\delta"] & T'^2 \arrow[rr, "\mu'"] \arrow[d, "T'\delta"'] \arrow[dr, "T'T'\Theta"] & & T' \arrow[rr, "\delta"] \arrow[d, "T'\Theta"] & & T'' \arrow[d, "\Theta T''"] \\
T'' \arrow[r, "\Xi'T''"] \arrow[d, "\Theta T''"] & T'T'' \arrow[d, "T'\Theta T''"'] & T'^2T'' \arrow[r, "\mu'T''"'] \arrow[d, "T'\delta'T''"'] & T'T'' \arrow[d, "\delta'T''"] & & T''^2 \arrow[dl, "\mu''"'] \arrow[d, "\Theta'T''^2"] \\
T''T' \arrow[r, "\Xi'T''T''"] \arrow[d, "\mu''"] & T'T''^2 \arrow[d, "T'\mu''"'] & T'T''^2 \arrow[dl, "T'\mu''"'] \arrow[d, "\delta'T''T''"] & T''^2 \arrow[r, "\mu''"] & T'' \arrow[dd, "\Theta'T''"'] & T''^3 \arrow[ddl, "\mu''T''"'] \arrow[d, "\mu''T''"] \\
T'' \arrow[r, "\Xi'T''"'] & T'T'' \arrow[dr, "\delta'T''"'] & T''^3 \arrow[ur, "\mu''T''"'] \arrow[d, "T''\mu''"] & & & T''^2 \arrow[d, "\mu''"] \\
& & T''^2 \arrow[r, "\Theta'T''T''"'] \arrow[uurr, "\mu''"'] & T''^3 \arrow[r, "\mu''T''"'] & T''^2 \arrow[r, "\mu''"'] & T''
\end{tikzcd}
$$

Para cada morfismo de mónadas $\lambda\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}'$, la unidad de $\mathbb{T}'$, η', es una deformación de λ en si misma, por la conmutatividad del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda"'] & T' \arrow[r, "\eta'T'"] & T'T' \arrow[d, "\mu'"] \\
T' \arrow[r, "T'\eta'"'] & T'T' \arrow[r, "\mu'"] & T'
\end{tikzcd}
$$

y constituye una unidad para la composición vertical de deformaciones, puesto que

$$\eta' \mathbin{\tilde{\circ}} \Xi = \mu' \circ \eta'T' \circ \Xi = \Xi$$
$$\Xi \circ \eta' = T'\eta' \circ \Xi = \Xi$$

Dadas dos mónadas $\mathbb{T}$ y $\mathbb{T}'$ sobre una categoría $\mathbf{C}$, los morfismos de mónadas de $\mathbb{T}$ en $\mathbb{T}'$ y las deformaciones entre ellas constituyen una categoría, denotada como $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})(\mathbb{T}, \mathbb{T}')$, tomando como identidades las deformaciones $\widetilde{\mathrm{id}_\lambda} = \eta'$ y como composición la composición vertical de deformaciones. Nótese que todas las identidades en las categorías $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})(\mathbb{T}, \mathbb{T}')$ son la misma transformación natural, la unidad de $\mathbb{T}'$.

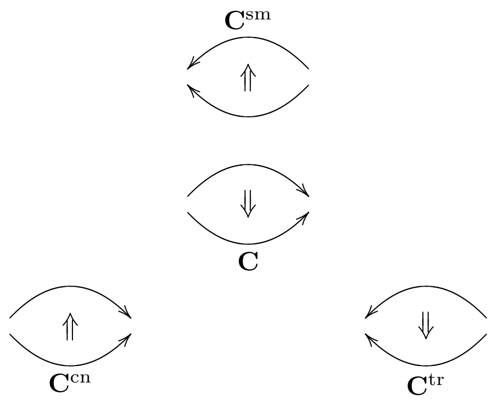
Finalmente, solo falta comprobar que $\widetilde{\mathrm{id}}_{1_T} = \eta$ es, para cada mónada $\mathbb{T}$, una unidad para la composición horizontal. Sea $\Xi\colon \lambda \rightsquigarrow \lambda'\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}'$. Entonces

$$\Xi \mathbin{\tilde{*}} \eta = \mu' \circ \Xi(\lambda \circ \eta) = \mu' \circ \Xi\eta' = \mu' \circ T'\eta' \circ \Xi = \Xi$$
$$\eta' \mathbin{\tilde{*}} \Xi = \mu' \circ \eta'(1_{T'} \circ \Xi) = \mu' \circ \eta'\Xi = \mu' \circ \eta'T' \circ \Xi = \Xi$$

$\square$

Los isomorfismos entre la categoría de mónadas sobre una categoría y las categorías de Kleisli y de Eilenberg-Moore asociadas, se pueden extender hasta ciertas 2-categorías obtenidas a partir de las anteriores, añadiéndoles las 2-células adecuadas. Para ello, utilizamos en lo que sigue la terminología de Bénabou para las diversas clases de simetrías sobre una 2-categoría. Si $\mathbf{C}$ es una 2-categoría, denotamos, respectivamente, mediante $\mathbf{C}^{\mathrm{cn}}$, $\mathbf{C}^{\mathrm{tr}}$ y $\mathbf{C}^{\mathrm{sm}}$ a las 2-categorías conjugada, transpuesta y simétrica de la primera.

Recordamos las relaciones de incidencia respectivas con la siguiente figura



Las categorías $\mathbf{Kl}(\mathbf{C})$ y $\mathbf{EM}(\mathbf{C})$ tienen una estructura natural de 2-categoría, tomando como 2-células las transformaciones naturales entre sus morfismos. La 2-categoría de las mónadas sobre una categoría $\mathbf{C}$ es entonces isomorfa a la 2-categoría conjugada de la 2-categoría de Kleisli sobre $\mathbf{C}$, así como a la 2-categoría transpuesta de la 2-categoría de Eilenberg-Moore sobre $\mathbf{C}$.

Definition 48. Sea $\mathbf{C}$ una categoría. Entonces

(1) $\mathbf{Kl}(\mathbf{C})$ es la 2-categoría en la que las 0-células son las categorías de la forma $\mathbf{Kl}(\mathbb{T})$, para $\mathbb{T}$ una mónada sobre $\mathbf{C}$, las 1-células los functores $H\colon \mathbf{Kl}(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathbf{Kl}(\mathbb{T}')$ tales que $H \circ \mathrm{F}_{\mathbb{T}} = \mathrm{F}_{\mathbb{T}'}$ y las 2-células las transformaciones naturales entre tales functores.

(2) $\mathbf{EM}(\mathbf{C})$ es la 2-categoría en la que las 0-células son las categorías de la forma $\mathbf{EM}(\mathbb{T})$, para $\mathbb{T}$ una mónada sobre $\mathbf{C}$, las 1-células los functores $H\colon \mathbf{EM}(\mathbb{T}') \longrightarrow \mathbf{EM}(\mathbb{T})$ tales que $\mathrm{G}^{\mathbb{T}} \circ H = \mathrm{G}^{\mathbb{T}'}$ y las 2-células las transformaciones naturales entre tales functores.

Proposition 109. *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría. Las 2-categorías* $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})$, $\mathbf{Kl}(\mathbf{C})^{\mathrm{cn}}$ *y* $\mathbf{EM}(\mathbf{C})^{\mathrm{tr}}$ *son isomorfas.*

Proof. Veamos, en primer lugar, que $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})$ y $\mathbf{Kl}(\mathbf{C})^{\mathrm{cn}}$ son isomorfas. Por la proposición 101 existe una correspondencia biunívoca entre las 1-células de $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})$ y las de $\mathbf{Kl}(\mathbf{C})^{\mathrm{cn}}$. Si λ, $\lambda'\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}'$ y $\Xi\colon \lambda \rightsquigarrow \lambda'$, sea τ^{Ξ} la aplicación que a cada $X \in \mathbf{C}$ le asigna el morfismo en $\mathbf{Kl}(\mathbb{T}')$ que corresponde al morfismo $\Xi_X\colon X \longrightarrow T'(X)$ en $\mathbf{C}$. Entonces τ^{Ξ} es una transformación natural de $H_{\lambda'}$ en H_{λ}, puesto que, para cada morfismo $f\colon Y \longrightarrow X$ en $\mathbf{Kl}(\mathbb{T})$, el diagrama en $\mathbf{Kl}(\mathbb{T}')$

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "H_{\lambda'}(f)"] \arrow[d, "\tau^{\Xi}_{Y}"'] & X \arrow[d, "\tau^{\Xi}_{X}"] \\
Y \arrow[r, "H_{\lambda}(f)"'] & X
\end{tikzcd}$$

conmuta, en virtud de la conmutatividad del diagrama en $\mathbf{C}$

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Xi_Y"'] \arrow[rr, bend left, "H_{\lambda'}(f)"] \arrow[d, bend right, "T'(H_\lambda(f))"'] & T(X) \arrow[r, "\lambda'_X"] \arrow[d, "\Xi T_X"'] & T'(X) \arrow[r, "T'\Xi_X"] & T'T'(X) \arrow[d, "\mu'_X"] \\
T'(Y) \arrow[r, "T'(f)"'] & T'T(X) \arrow[r, "T'\lambda_X"'] & T'T'(X) \arrow[r, "\mu'_X"'] & T'(X)
\end{tikzcd}$$

en donde el rectángulo izquierdo conmuta porque $\Xi\colon 1 \Longrightarrow T'$ es natural, el derecho porque Ξ es una deformación y el resto por definición.

Recíprocamente, si H, $H'\colon \mathbf{Kl}(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathbf{Kl}(\mathbb{T}')$ y $\tau\colon H' \Longrightarrow H$, sea Ξ^τ la aplicación que a cada $X \in \mathbf{C}$ le asigna el morfismo en $\mathbf{C}$ que corresponde a τ_X en $\mathbf{Kl}(\mathbb{T}')$.

Puesto que

$$\tau_X = \tau_{\mathrm{F}_{\mathbb{T}}(X)}\colon H'(\mathrm{F}_{\mathbb{T}}(X)) = \mathrm{F}_{\mathbb{T}'}(X) = X \longrightarrow H(\mathrm{F}_{\mathbb{T}}(X)) = \mathrm{F}_{\mathbb{T}'}(X) = X,$$

se cumple que $\Xi^\tau_X\colon X \longrightarrow T'(X)$. Si $f\colon Y \longrightarrow X$ es un morfismo en $\mathbf{C}$, entonces, por ser τ natural, el diagrama en $\mathbf{Kl}(\mathbb{T}')$

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "H'(\mathrm{F}_{\mathbb{T}}(f))"] \arrow[d, "\tau_Y"'] & X \arrow[d, "\tau_X"] \\
Y \arrow[r, "H(\mathrm{F}_{\mathbb{T}}(f))"'] & X
\end{tikzcd}$$

conmuta. Luego el diagrama en $\mathbf{C}$

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Xi^\tau_Y"'] & X \arrow[r, "\eta'_X"] \arrow[d, "\Xi^\tau_X"] & T'(X) \arrow[d, "T'\Xi^\tau_X"] \\
T'(Y) \arrow[r, "T'(f)"'] \arrow[d, "T'(f)"'] & T'(X) & T'T'(X) \arrow[l, "\mu'_X"] \\
T'(X) \arrow[r, "T'\eta'_X"'] & T'T'(X) \arrow[u, "\mu'_X"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta y $\Xi^\tau\colon 1 \Longrightarrow T'$ es una transformación natural.

Veamos que Ξ^τ es una deformación de λ_H en $\lambda_{H'}$. Por ser τ natural, el diagrama en $\mathbf{Kl}(\mathbb{T}')$

$$\begin{tikzcd}
T(X) \arrow[r, "H'(\mathrm{id}_{T(X)})"] \arrow[d, "\tau_{T(X)}"'] & X \arrow[d, "\tau_X"] \\
T(X) \arrow[r, "H(\mathrm{id}_{T(X)})"'] & X
\end{tikzcd}$$

conmuta, y, por consiguiente, el diagrama en $\mathbf{C}'$

$$
\begin{tikzcd}
T(X) \arrow[r, "H'(\mathrm{id}_{T(X)})"] \arrow[d, "\Xi^{\tau}_{T(X)}"'] & T'(X) \arrow[r, "T'(\Xi^{\tau}_X)"] & T'T'(X) \arrow[d, "\mu'_X"] \\
T'T(X) \arrow[r, "T'(H(\mathrm{id}_{T(X)}))"'] & T'T'(X) \arrow[r, "\mu'_X"'] & T'(X)
\end{tikzcd}
$$

también conmuta. Pero entonces, el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\lambda_{H'}"] \arrow[rr, bend left, "\lambda_{H'}\Xi^{\tau}"] \arrow[d, "\Xi^{\tau}T"'] \arrow[dr, bend right=60, "\Xi^{\tau}\lambda_H"'] & T' \arrow[r, "T'\Xi^{\tau}"] & T'T' \arrow[d, "\mu'"] \\
T'T(X) \arrow[r, "T'\lambda_H"'] & T'T' \arrow[r, "\mu'"'] & T'
\end{tikzcd}
$$

conmuta y Ξ^{τ} es una deformación.

Los procesos descritos son claramente inversos entre sí.

Para demostrar que las 2-categorías $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})$ y $\mathbf{Kl}(\mathbf{C})^{\mathrm{cn}}$ son isomorfas sólo falta comprobar la compatibilidad con la composición y las identidades.

Respecto a la composición vertical, si $\Xi\colon \lambda \rightsquigarrow \lambda'$ y $\Xi'\colon \lambda' \rightsquigarrow \lambda''$ son deformaciones, siendo λ, λ', $\lambda''\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}'$, entonces, para cada $X \in \mathbf{C}$, se cumple que

$$
\begin{aligned}
\tau_X^{\Xi' \tilde{\circ} \Xi} &= (\mu' \circ T'\Xi \circ \Xi')_X \\
&= (\Xi)_X \diamond (\Xi')_X \\
&= (\tau^{\Xi} \circ \tau^{\Xi'})_X
\end{aligned}
$$

Para la composición horizontal, supongamos que $\Xi\colon \lambda \rightsquigarrow \lambda'$ y $\Xi'\colon \lambda'' \rightsquigarrow \lambda'''$, siendo $\lambda, \lambda'\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}'$ y $\lambda'', \lambda'''\colon \mathbb{T}' \longrightarrow \mathbb{T}''$. Entonces, para cada $X \in \mathbf{C}$, se cumple que

$$
\begin{aligned}
\tau_X^{\Xi' \tilde{*} \Xi} &= (\mu'' \circ \lambda'''\Xi' \circ \Xi)_X \\
&= (\mu'' \circ T''\Xi' \circ \lambda''' \circ \Xi)_X \\
&= (\Xi')_X \diamond (\lambda'''\Xi)_X \\
&= (\tau^{\Xi'} H_{\lambda})_X \diamond (H_{\lambda'''}\tau^{\Xi})_X \\
&= (\tau^{\Xi'} * \tau^{\Xi})_X
\end{aligned}
$$

La compatibilidad con las identidades es inmediata, por lo que la construcción anterior, junto a la desarrollada en la proposición 101, determina un 2-isomorfismo de $\mathbf{Mon}(\mathbf{C})$ en $\mathbf{Kl}(\mathbf{C})^{\mathrm{cn}}$.

Veamos ahora que $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})$ y $\mathbf{EM}(\mathbf{C})^{\mathrm{tr}}$ son isomorfas. Por la proposición 102 existe una correspondencia biunívoca entre las 1-células de $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})$ y las de $\mathbf{EM}(\mathbf{C})^{\mathrm{tr}}$. Si λ, $\lambda'\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}'$ y $\Xi\colon \lambda \rightsquigarrow \lambda'$, sea τ_{Ξ} la aplicación que a cada $\mathbb{T}'$-álgebra (A, α) en $\mathbf{EM}(\mathbb{T}')$ le asigna el morfismo $\alpha \circ \Xi_A$. Por la conmutatividad

del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
T(A) \arrow[rr, "(T\Xi)_A"] \arrow[dd, "\lambda_A"'] \arrow[ddrr, phantom, "(1)"] & & TT'(A) \arrow[r, "(T\alpha)_A"] \arrow[d, "(\lambda' T')_A"'] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & T(A) \arrow[dd, "\lambda'_A"] \\
& & T'T'(A) \arrow[d, "\mu'_A"'] \arrow[dr, "(T'\alpha)_A"] & \\
T'(A) \arrow[r, "(\Xi T')_A"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "(5)"] & T'T'(A) \arrow[r, "\mu'_A"] \arrow[dr, "(T'\alpha)_A"'] & T'(A) \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[d, phantom, "(4)"] \arrow[r, phantom, "(3)"] & T'(A) \arrow[d, "\alpha"] \\
A \arrow[rr, "\Xi_A"'] & & T'(A) \arrow[r, "\alpha"'] & A
\end{tikzcd}
$$

en el que (1) conmuta porque Ξ es una deformación, (2) porque λ' es natural, (3) y (4) porque (A, α) es una $\mathbb{T}'$-álgebra y (5) porque Ξ es natural, se tiene que $(\tau_\Xi)_{(A,\alpha)}$ es un morfismo de $\mathbb{T}$-álgebras. Además, τ_Ξ es una transformación natural de H^λ en $H^{\lambda'}$, puesto que, para cada morfismo de $\mathbb{T}'$-álgebras $f\colon (A, \alpha) \longrightarrow (B, \beta)$, el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Xi_A"'] & B \arrow[d, "\Xi_B"] \\
T'(A) \arrow[r, "T'(f)"'] \arrow[d, "\alpha"'] & T'(B) \arrow[d, "\beta"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
$$

Recíprocamente, si H, $H'\colon \mathbf{EM}(\mathbb{T}') \longrightarrow \mathbf{EM}(\mathbb{T})$ y $\tau\colon H \Longrightarrow H'$, sea Ξ_τ la aplicación que a cada $A \in \mathbf{C}$ le asigna el morfismo $\tau_{(T'(A),\mu'_A)} \circ \eta'_A$. Sea $f\colon A \longrightarrow B$ un morfismo en $\mathbf{C}$. Entonces $T'(f)\colon (T'(A), \mu'_A) \longrightarrow (T'(B), \mu'_B)$ es un morfismo de $\mathbb{T}'$-álgebras, y por la naturalidad de τ y η', el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta'_A"] \arrow[d, "f"'] & T'(A) \arrow[r, "\tau_{(T'(A),\mu'_A)}"] \arrow[d, "T'(f)"'] & T'(A) \arrow[d, "T'(f)"] \\
B \arrow[r, "\eta'_B"'] & T'(B) \arrow[r, "\tau_{(T'(B),\mu'_B)}"'] & T'(B)
\end{tikzcd}
$$

conmuta, por lo que Ξ_τ es una transformación natural de $1_{\mathbf{C}}$ en T'.

La transformación natural Ξ_τ es una deformación si y sólo si el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\Xi_\tau \lambda^H"] \arrow[d, "\lambda^{H'} \Xi_\tau"'] & T'T' \arrow[d, "\mu'"] \\
T'T' \arrow[r, "\mu'"'] & T'
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Considérese el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
T(A) \arrow[rr, "\lambda^H_A"] \arrow[dr, "(T\eta')_A"] \arrow[dd, "(T\Xi_\tau)_A"'] \arrow[dddd, bend right=60, "(\lambda^{H'}\Xi_\tau)_A"'] & & T'(A) \arrow[r, "\eta'_{T'(A)}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & T'^2(A) \arrow[r, "\tau_{(T'^2(A),\mu'T'_A)}"] \arrow[d, "\mu'_A"] \arrow[ddr, phantom, "(1)"] & T'^2(A) \arrow[dd, "\mu'_A"] \\
 & TT'(A) \arrow[ur, "(\mu'_A)^H"'] \arrow[dl, "T(\tau_{(T'(A),\mu'_A)})"] \arrow[rr, phantom, "(2)"] & & T'(A) \arrow[dr, "\tau_{(T'(A),\mu'_A)}"'] & \\
TT'(A) \arrow[rrrr, "(\mu'_A)^{H'}"] \arrow[dr, "(T\eta'T')_A"] \arrow[dd, "(\lambda^{H'}T')_A"'] & & & & T'(A) \\
 & TT'T'(A) \arrow[rr, "(T'\mu')_A"'] \arrow[dl, "(\mu'T'T'_A)^{H'}"'] & & TT'(A) \arrow[ur, "(\mu'_A)^{H'}"] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & \\
T'T'(A) \arrow[uurrrr, bend right=20, "\mu'_A"'] & & & &
\end{tikzcd}
$$

en el que todo conmuta, excepto, quizás, (1), (2) y (3). Ahora bien, como $\mu'_A\colon (T'T'(A), \mu'_{T'(A)}) \longrightarrow (T'(A), \mu'_A)$ es un homomorfismo de $\mathbb{T}'$-álgebras y H' es functor, (3) conmuta, y por ser τ natural, el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
(T'T'(A), (\mu'_{T'(A)})^H) \arrow[r, "\mu'_A"] \arrow[d, "\tau_{(T'T'(A),\mu'_{T'(A)})}"'] & (T'(A), (\mu'_A)^H) \arrow[d, "\tau_{(T'(A),\mu'_A)}"] \\
(T'T'(A), (\mu'_{T'(A)})^{H'}) \arrow[r, "\mu'_A"'] & (T'(A), (\mu'_A)^{H'})
\end{tikzcd}
$$

conmuta, y por tanto, también (1) conmuta. Por otra parte, como se cumple que $\tau_{(T'(A),\mu'_A)}\colon (T'(A), (\mu'_A)^H) \longrightarrow (T'(A), (\mu'_A)^{H'})$ es un homomorfismo de $\mathbb{T}'$-álgebras, (2) conmuta.

Los procesos descritos son inversos, por la conmutatividad de los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta'_A"] \arrow[dr, "\Xi_A"'] \arrow[rrr, bend left=50, "(\Xi_{\tau_\Xi})_A"] & T'(A) \arrow[r, "\Xi_{T'(A)}"] \arrow[d, phantom, "(1)"] \arrow[rr, bend left=40, "(\tau_\Xi)_{(T'(A),\mu'_A)}"] & T'T'(A) \arrow[r, "\mu'_A"] & T'(A) \\
 & T'(A) \arrow[ur, "T'\eta'_A"] \arrow[urr, "\mathrm{id}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "(\eta')_A"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] \arrow[rr, bend left=40, "(\Xi_\tau)_A"] \arrow[rrr, bend left=55, "(\tau_{\Xi_\tau})_{(A,\alpha)}"] & T'A \arrow[r, "\tau_{(T'A,\mu'_A)}"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & T'A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha"] & A \\
 & A \arrow[r, "\tau_{(A,\alpha)}"'] & A \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] &
\end{tikzcd}$$

en donde (1) conmuta porque Ξ es natural y (2) porque $\alpha\colon (T'A, \mu'_A) \longrightarrow (A, \alpha)$ es un homomorfismo de $\mathbb{T}'$-álgebras y τ es natural.

Veamos la compatibilidad con las composiciones. En la situación del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{T} \arrow[r, bend left=60, "\lambda"] \arrow[r, "\lambda'" description] \arrow[r, bend right=60, "\lambda''"'] \arrow[r, phantom, shift left=3.5ex, "\Downarrow \Xi"] \arrow[r, phantom, shift right=3.5ex, "\Downarrow \Xi'"] & \mathbb{T}'
\end{tikzcd}$$

se cumple que, para cada $(A, \alpha) \in \mathbf{EM}(\mathbb{T}')$, $\alpha\colon (T'A, \mu'_A) \longrightarrow (A, \alpha)$ es un homomorfismo de $\mathbb{T}'$-álgebras, por lo que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
T'(A) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "(\Xi')_{T'(A)}"'] & A \arrow[d, "(\Xi')_A"] \\
T'T'(A) \arrow[d, "(\mu'_A)"'] & T'(A) \arrow[d, "\alpha"] \\
T'(A) \arrow[r, "\alpha"'] & A
\end{tikzcd}$$

conmuta. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
(\tau_{\Xi' \tilde{\circ} \Xi})_{(A,\alpha)} &= \alpha \circ (\Xi' \tilde{\circ} \Xi)_A \\
&= \alpha \circ \mu'_A \circ (\Xi' T')_A \circ \Xi_A \\
&= \alpha \circ \Xi'_A \circ \alpha \circ \Xi_A \\
&= (\tau_{\Xi'} \circ \tau_{\Xi})_{(A,\alpha)}
\end{aligned}$$

Para la composición horizontal, tenemos que en la situación del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{T} \arrow[r, bend left, "\lambda"] \arrow[r, bend right, "\lambda'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \Xi"] & \mathbb{T}' \arrow[r, bend left, "\lambda''"] \arrow[r, bend right, "\lambda'''"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \Xi'"] & \mathbb{T}''
\end{tikzcd}$$

se cumple que

$$
\begin{aligned}
(\tau_{\Xi' \tilde{*} \Xi})_{(A,\alpha)} &= \alpha \circ (\Xi' \tilde{*} \Xi)_A \\
&= \alpha \circ (\mu'' \circ \Xi' T'' \circ \lambda'' \circ \Xi)_A \\
&= (\alpha \circ \mu''_A \circ (\Xi' T'')_A \circ \lambda''_A) \circ \Xi_A \\
&= \alpha \circ (\Xi')_A \circ \alpha \circ \lambda''_A \circ \Xi_A \\
&= H^{\lambda'}(\alpha \circ \Xi'_A) \circ (\tau_\Xi)_{(A, \alpha \circ \lambda''_A)} \\
&= (H^{\lambda'} \Xi')_{(A,\alpha)} \circ (\tau_\Xi H^{\lambda''})_{(A,\alpha)} \\
&= (H^{\lambda'} \tau_{\Xi'} \circ \tau_\Xi H^{\lambda''})_{(A,\alpha)} \\
&= (\tau_\Xi * \tau_{\Xi'})_{(A,\alpha)}
\end{aligned}
$$

La compatibilidad con las identidades es inmediata, por lo que la construcción anterior, junto a la desarrollada en la proposición 102, determina un 2-isomorfismo de $\mathbf{Mon}(\mathbf{C})$ en $\mathbf{EM}(\mathbf{C})^{\mathrm{tr}}$. $\square$

4. Cuadrados adjuntos.

En esta sección recordamos la noción de cuadrado adjunto, mediante la cual se definen gran parte de los conceptos posteriores.

Proposition 110. *Sean $(F, G, \eta, \epsilon \colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D})$ y $(F', G', \eta', \epsilon') \colon \mathbf{C}' \longrightarrow \mathbf{D}'$ dos adjunciones y $J \colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}'$, $H \colon \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{D}'$ dos functores.*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "J"'] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, shift right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right, "G'"']
\end{tikzcd}
$$

Entonces existe un cuadrado conmutativo de biyecciones

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Nat}(F'J, HF) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Nat}(J, G'HF) \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{Nat}(F'JG, H) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Nat}(JG, G'H)
\end{tikzcd}
$$

Proof. Es suficiente considerar los pares de aplicaciones inversas entre si definidas por los siguientes diagramas.

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda \Nearrow"] & \cdot \arrow[d, "H"] \\
\cdot \arrow[r, "F'"'] & \cdot
\end{tikzcd}
\overset{\rho_{0,1}}{\longmapsto}
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda \Nearrow"] & \cdot \arrow[d, "H"] \\
\cdot \arrow[r, "F'"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\eta'}{\Rightarrow}"] & \cdot \arrow[d, "1"] \\
\cdot & \cdot \arrow[l, "G'"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda}{\Rightarrow}"] & \cdot \arrow[d, "H"] \\
\cdot & \cdot \arrow[l, "G'"]
\end{tikzcd}
\overset{\rho_{1,0}}{\longmapsto}
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda}{\Rightarrow}"] & \cdot \arrow[d, "H"] \\
\cdot \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\epsilon'}{\Rightarrow}"] & \cdot \arrow[l, "F'"'] \arrow[d, "1"] \\
\cdot \arrow[r, "F'"'] & \cdot
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda\Nearrow"] & {} \arrow[d, "H"] \\ {} \arrow[r, "F'"'] & {} \end{tikzcd}
\xmapsto{\rho_{0,2}}
\begin{tikzcd} {} \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\epsilon}{\Rightarrow}"] & {} \arrow[l, "G"'] \arrow[d, "1"] \\ {} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda\Nearrow"] & {} \arrow[d, "H"] \\ {} \arrow[r, "F'"'] & {} \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} {} \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda}{\Rightarrow}"] & {} \arrow[l, "G"'] \arrow[d, "H"] \\ {} \arrow[r, "F'"'] & {} \end{tikzcd}
\xmapsto{\rho_{2,0}}
\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\eta}{\Rightarrow}"] & {} \arrow[d, "1"] \\ {} \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda}{\Rightarrow}"] & {} \arrow[l, "G"'] \arrow[d, "H"] \\ {} \arrow[r, "F'"'] & {} \end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda\Nearrow"] & {} \arrow[d, "H"] \\ {} \arrow[r, "F'"'] & {} \end{tikzcd}
\xmapsto{\rho_{0,3}}
\begin{tikzcd} {} \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\epsilon}{\Rightarrow}"] & {} \arrow[l, "G"'] \arrow[d, "H"] \\ {} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda\Nearrow"] & {} \arrow[d, "1"] \\ {} \arrow[r, "F'"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\eta'}{\Rightarrow}"] & {} \arrow[d, "1"] \\ {} & {} \arrow[l, "G'"] \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} {} \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Searrow\lambda"] & {} \arrow[l, "G"'] \arrow[d, "H"] \\ {} & {} \arrow[l, "G'"] \end{tikzcd}
\xmapsto{\rho_{3,0}}
\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\eta}{\Rightarrow}"] & {} \arrow[d, "1"] \\ {} \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Searrow\lambda"] & {} \arrow[l, "G"'] \arrow[d, "H"] \\ {} \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\epsilon'}{\Rightarrow}"] & {} \arrow[l, "G'"'] \arrow[d, "1"] \\ {} \arrow[r, "F'"'] & {} \end{tikzcd}
$$

□

Definition 49. Un cuadrado adjunto es un par

$$
\left(
\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, shift right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "J"'] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right, "G"'] \arrow[d, "H"] \\ \mathbf{C}' \arrow[r, shift right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right, "G'"'] \end{tikzcd}
, \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix}
\right)
$$

en el que las componentes de la matriz $\lambda = \left(\begin{smallmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{smallmatrix}\right)$ son transformaciones naturales

$$
\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda_0\Nearrow"] & {} \arrow[d, "H"] \\ {} \arrow[r, "F'"'] & {} \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda_1}{\Rightarrow}"] & {} \arrow[d, "H"] \\ {} & {} \arrow[l, "G'"] \end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd} {} \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda_2}{\Rightarrow}"] & {} \arrow[l, "G"'] \arrow[d, "H"] \\ {} \arrow[r, "F'"'] & {} \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} {} \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Searrow\lambda_3"] & {} \arrow[l, "G"'] \arrow[d, "H"] \\ {} & {} \arrow[l, "G'"] \end{tikzcd}
$$

tales que

$$
\begin{aligned}
\lambda_0 &= (\lambda_1 F)(F' J\eta) = (\epsilon' HF)(F'\lambda_2) = (\epsilon' HF)(F'\lambda_3 F)(F' J\eta)\\
\lambda_1 &= (H\epsilon)(\lambda_0 G) = (\epsilon' H\epsilon)(F'\lambda_2 G) = (\epsilon' H)(F'\lambda_3)\\
\lambda_2 &= (G'\lambda_0)(\eta' J) = (G'\lambda_1 F)(\eta' J\eta) = (\lambda_3 F)(J\eta)\\
\lambda_3 &= (G' H\epsilon)(G'\lambda_0 G)(\eta' JG) = (G'\lambda_1)(\eta' JG) = (G' H\epsilon)(\lambda_2 G)
\end{aligned}
$$

where $\eta\colon 1 \Longrightarrow GF$ and $\epsilon\colon FG \Longrightarrow 1$ are the unit and counit of $F \dashv G$, and $\eta'\colon 1 \Longrightarrow G'F'$ and $\epsilon'\colon F'G' \Longrightarrow 1$ the unit and counit of $F' \dashv G'$.

We shall call the 2-cells of the matrix λ transposes of each other. The 2-cells λ_0 and λ_3 are called conjugate. Esta última nomenclatura es usual cuando los functores considerados son identidades.

We will denote the adjoint squares as

$$(F \dashv G, (J, \lambda, H), F' \dashv G'),$$

o mediante diagramas de la forma

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, shift right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right, "G'"']
\end{tikzcd}
$$

o, también mostrando explícitamente los cuádruplos de transformaciones naturales transpuestas, como

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, shift right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right, "G'"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda_0 \Nearrow"] & \cdot \arrow[d, "H"] \\
\cdot \arrow[r, "F'"'] & \cdot
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda_1}{\Rightarrow}"] & \cdot \arrow[d, "H"] \\
\cdot & \cdot \arrow[l, "G'"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda_2}{\Rightarrow}"] & \cdot \arrow[l, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
\cdot \arrow[r, "F'"'] & \cdot
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Searrow \lambda_3"] & \cdot \arrow[l, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
\cdot & \cdot \arrow[l, "G'"]
\end{tikzcd}
$$

Las transformaciones naturales de un cuadrado adjunto pueden, por tanto, obtenerse unas a partir de las otras mediante las unidades y counidades de las adjunciones involucradas. Representamos tal situación con la figura

$$
\begin{tikzcd}
\lambda_0 \arrow[r, bend left, "\eta'"] \arrow[d, bend left, "\epsilon"] & \lambda_1 \arrow[l, bend left, "\epsilon'"] \arrow[d, bend left, "\epsilon"] \\
\lambda_2 \arrow[r, bend left, "\eta'"] \arrow[u, bend left, "\eta"] & \lambda_3 \arrow[l, bend left, "\epsilon'"] \arrow[u, bend left, "\eta"]
\end{tikzcd}
$$

a partir de la cual es inmediata la proposición que sigue.

Proposition 111. *Sea*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, shift right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right, "G'"']
\end{tikzcd}$$

un cuadrado adjunto. Entonces los 2-diagramas siguientes conmutan

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[rr, bend left, "1"] \arrow[dr, phantom, "\lambda_0 \Nearrow"] & \mathbf{D} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "H"] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\eta"] \arrow[dr, phantom, "\lambda_3 \Swarrow"] & \mathbf{C} \arrow[d, "J"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "F'"'] \arrow[rr, bend right, "1"'] & \mathbf{D}' \arrow[r, "G'"'] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta'"] & \mathbf{C}'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{D} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "H"'] \arrow[rr, bend left, "1"] \arrow[dr, phantom, "\lambda_3 \Swarrow"] & \mathbf{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\epsilon"] \arrow[dr, phantom, "\lambda_0 \Nearrow"] & \mathbf{D} \arrow[d, "H"] \\
\mathbf{D}' \arrow[r, "G'"'] \arrow[rr, bend right, "1"'] & \mathbf{C}' \arrow[r, "F'"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\epsilon'"] & \mathbf{D}'
\end{tikzcd}$$

□

La clase de los cuadrados adjuntos forma una categoría doble, que es, a su vez, la categoría doble subyacente de una categoría triple.

Proposition 112. *Los cuadrados adjuntos determinan una categoría doble, denotada por* **AdFun***.*

Proof. En la categoría doble **AdFun** los dos tipos de morfismos involucrados son adjunciones y functores. Dado un cuadrado adjunto

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, shift right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right, "G'"']
\end{tikzcd}$$

su Ad-dominio y Ad-codominio son las adjunciones superior e inferior del mismo, mientras que su Fun-dominio y Fun-codominio son los funtores izquierdo y derecho del mismo.

Las identidades en **AdFun** se denominan, respectivamente, Ad-identidades y Fun-identidades, y son los cuadrados adjuntos de la forma

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift right=1.5ex, "1"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\begin{pmatrix} J & J \\ J & J \end{pmatrix}"] & \mathbf{C} \arrow[l, shift right=1.5ex, "1"'] \arrow[d, "J"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, shift right=1.5ex, "1"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{C}' \arrow[l, shift right=1.5ex, "1"']
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift right=1.5ex, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\begin{pmatrix} F & \eta \\ \epsilon & G \end{pmatrix}"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right=1.5ex, "G"'] \arrow[d, "1"] \\
\mathbf{C} \arrow[r, shift right=1.5ex, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right=1.5ex, "G"']
\end{tikzcd}
$$

La Ad-composición de dos cuadrados adjuntos

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift right=1.5ex, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right=1.5ex, "G"'] \arrow[r, shift right=1.5ex, "L"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "H"] \arrow[dr, phantom, "\delta"] & \mathbf{E} \arrow[l, shift right=1.5ex, "R"'] \arrow[d, "M"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, shift right=1.5ex, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right=1.5ex, "G'"'] \arrow[r, shift right=1.5ex, "L'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{E}' \arrow[l, shift right=1.5ex, "R'"']
\end{tikzcd}
$$

es el cuadrado adjunto

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift right=1.5ex, "LF"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\delta \overset{\mathrm{ad}}{\circ} \lambda"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right=1.5ex, "GR"'] \arrow[d, "H"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, shift right=1.5ex, "L'F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right=1.5ex, "G'R'"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda_0 \Nearrow"] & \cdot \arrow[r, "L"] \arrow[d, "H"] \arrow[dr, phantom, "\delta_0 \Nearrow"] & \cdot \arrow[d, "M"] \\
\cdot \arrow[r, "F'"'] & \cdot \arrow[r, "L'"'] & \cdot
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda_1 \Rightarrow"] & \cdot \arrow[r, "L"] \arrow[d, "H"] \arrow[dr, phantom, "\delta_1 \Rightarrow"] & \cdot \arrow[d, "M"] \\
\cdot & \cdot \arrow[l, "G'"] & \cdot \arrow[l, "R'"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda_2 \Rightarrow"] & \cdot \arrow[l, "G"'] \arrow[d, "H"] \arrow[dr, phantom, "\delta_2 \Rightarrow"] & \cdot \arrow[l, "R"'] \arrow[d, "M"] \\
\cdot \arrow[r, "F'"'] & \cdot \arrow[r, "L'"'] & \cdot
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Searrow \lambda_3"] & \cdot \arrow[l, "G"'] \arrow[d, "H"] \arrow[dr, phantom, "\Searrow \delta_3"] & \cdot \arrow[l, "R"'] \arrow[d, "M"] \\
\cdot & \cdot \arrow[l, "G'"] & \cdot \arrow[l, "R'"]
\end{tikzcd}
$$

La Fun-composición de dos cuadrados adjuntos

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift right=1.5ex, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right=1.5ex, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, shift right=1.5ex, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "J'"'] \arrow[dr, phantom, "\delta"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right=1.5ex, "G'"'] \arrow[d, "H'"] \\
\mathbf{C}'' \arrow[r, shift right=1.5ex, "F''"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}'' \arrow[l, shift right=1.5ex, "G''"']
\end{tikzcd}
$$

es el cuadrado adjunto

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, bend right, "F"'] \arrow[d, "J'J"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[dr, phantom, "\delta \overset{\mathrm{fn}}{\circ} \lambda"] & \mathbf{D} \arrow[l, bend right, "G"'] \arrow[d, "H'H"] \\
\mathbf{C''} \arrow[r, bend right, "F''"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D''} \arrow[l, bend right, "G''"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda_0\Nearrow"] & {} \arrow[d, "H"] \\
{} \arrow[r, "F'"] \arrow[d, "J'"'] \arrow[dr, phantom, "\delta_0\Nearrow"] & {} \arrow[d, "H'"] \\
{} \arrow[r, "F''"'] & {}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda_1}{\Rightarrow}"] & {} \arrow[d, "H"] \\
{} \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\epsilon^{F'\dashv G'}}{\Rightarrow}"] & {} \arrow[l, "G'"'] \arrow[d, "1"] \\
{} \arrow[r, "F'"] \arrow[d, "J'"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\delta_1}{\Rightarrow}"] & {} \arrow[d, "H'"] \\
{} & {} \arrow[l, "G''"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda_2}{\Rightarrow}"] & {} \arrow[l, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
{} \arrow[r, "F'"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\eta^{F'\dashv G'}}{\Rightarrow}"] & {} \arrow[d, "1"] \\
{} \arrow[d, "J'"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\delta_2}{\Rightarrow}"] & {} \arrow[l, "G'"'] \arrow[d, "H'"] \\
{} \arrow[r, "F''"'] & {}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Searrow\lambda_3"] & {} \arrow[l, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
{} \arrow[d, "J'"'] \arrow[dr, phantom, "\Searrow\delta_3"] & {} \arrow[l, "G'"'] \arrow[d, "H'"] \\
{} & {} \arrow[l, "G''"]
\end{tikzcd}
$$

Es inmediato que las identidades son efectivamente cuadrados adjuntos, y que son identidades para las composiciones respectivas.

Usando la notación anterior, no hay dificultad en comprobar que las Ad-composiciones y Fun-composiciones de cuadrados adjuntos son cuadrados adjuntos. La asociatividad de las composiciones y la ley de intercambio se deducen de las propiedades correspondientes de los componentes de los cuadrados adjuntos. $\square$

De cada categoría doble se obtienen dos sub-2-categorías. En **AdFun**, si tomamos como adjunciones las identidades, se obtiene simplemente **Cat**. Si tomamos como functores las identidades se obtiene la 2-categoría **Adj**, con objetos categorías, morfismos de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$ adjunciones $F \dashv G$ y 2-células de $F \dashv G$ en $F' \dashv G'$ cuadrados adjuntos

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, bend right, "F"'] \arrow[d, "1"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[dr, phantom, "\lambda"] & \mathbf{D} \arrow[l, bend right, "G"'] \arrow[d, "1"] \\
\mathbf{C} \arrow[r, bend right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D} \arrow[l, bend right, "G'"']
\end{tikzcd}
$$

o, lo que es equivalente, pares conjugados (λ_0, λ_3), que representamos mediante diagramas de la forma

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\lambda_0"] & \mathbf{D} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, bend right, "G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\lambda_3"] & \mathbf{C}
\end{tikzcd}
$$

La 2-categoría **Adj** es la 2-categoría conjugada de la categoría de categorías, adjunciones y pares conjugados de [Mac71].

Dar una transformación natural $\sigma\colon J \Longrightarrow J'$, equivale a dar un cuadrado adjunto en donde las adjunciones involucradas son identidades. En lo que sigue identificamos las transformaciones naturales con tales cuadrados adjuntos.

Definition 50. Sean

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, shift right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right, "G'"']
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "J'"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda'"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right, "G"'] \arrow[d, "H'"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, shift right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right, "G'"']
\end{tikzcd}
$$

dos cuadrados adjuntos y $\sigma\colon J \Longrightarrow J'$, $\tau\colon H \Longrightarrow H'$ un par de transformaciones naturales. Entonces el par (σ, τ) es compatible respecto de λ y λ' si $\lambda' \overset{\mathrm{ad}}{\circ} \sigma = \tau \overset{\mathrm{ad}}{\circ} \lambda$.

La existencia de pares compatibles entre cuadrados adjuntos se denota mediante diagramas de la forma

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[dd, bend right, "J"'] \arrow[dd, bend left, "J'"] \arrow[dd, phantom, "\overset{\sigma}{\Rightarrow}"] \arrow[dr, bend right=15, "F"'] \arrow[dr, phantom, "\top"] \arrow[ddr, phantom, "\lambda\quad\lambda'"] & \\
 & \mathbf{D} \arrow[ul, bend right=15, "G"'] \arrow[dd, bend right, "H"'] \arrow[dd, bend left, "H'"] \arrow[dd, phantom, "\overset{\tau}{\Rightarrow}"] \\
\mathbf{C}' \arrow[dr, bend right=15, "F'"'] \arrow[dr, phantom, "\top"] & \\
 & \mathbf{D}' \arrow[ul, bend right=15, "G'"']
\end{tikzcd}
$$

La condición de compatibilidad en la definición anterior equivale a que algún, y por consiguiente todos, los 2-diagramas siguientes, que constituyen los componentes del cuadrado adjunto $\sigma \overset{\mathrm{ad}}{\circ} \lambda = \lambda' \overset{\mathrm{ad}}{\circ} \tau$, conmuten.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[rrr, "F"] \arrow[d, bend right, "J"'] \arrow[d, bend left, "J'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\sigma}{\Rightarrow}"] & \arrow[d, phantom, "\overset{\lambda_0}{\Rrightarrow}"] & \arrow[d, phantom, "\overset{\lambda'_0}{\Rrightarrow}"] & \mathbf{D} \arrow[d, bend right, "H"'] \arrow[d, bend left, "H'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\tau}{\Rightarrow}"] \\
\mathbf{C}' \arrow[rrr, "F'"'] & & & \mathbf{D}'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[rrr, "F"] \arrow[d, bend right, "J"'] \arrow[d, bend left, "J'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\sigma}{\Rightarrow}"] & \arrow[d, phantom, "\overset{\lambda_1}{\Rrightarrow}"] & \arrow[d, phantom, "\overset{\lambda'_1}{\Rrightarrow}"] & \mathbf{D} \arrow[d, bend right, "H"'] \arrow[d, bend left, "H'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\tau}{\Rightarrow}"] \\
\mathbf{C}' & & & \mathbf{D}' \arrow[lll, "G'"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[d, bend right, "J"'] \arrow[d, bend left, "J'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\sigma}{\Rightarrow}"] & \arrow[d, phantom, "\overset{\lambda_2}{\Rrightarrow}"] & \arrow[d, phantom, "\overset{\lambda'_2}{\Rrightarrow}"] & \mathbf{D} \arrow[lll, "G"'] \arrow[d, bend right, "H"'] \arrow[d, bend left, "H'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\tau}{\Rightarrow}"] \\
\mathbf{C}' \arrow[rrr, "F'"'] & & & \mathbf{D}'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[d, bend right, "J"'] \arrow[d, bend left, "J'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\sigma}{\Rightarrow}"] & \arrow[d, phantom, "\overset{\lambda_3}{\Rrightarrow}"] & \arrow[d, phantom, "\overset{\lambda'_3}{\Rrightarrow}"] & \mathbf{D} \arrow[lll, "G"'] \arrow[d, bend right, "H"'] \arrow[d, bend left, "H'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\tau}{\Rightarrow}"] \\
\mathbf{C}' & & & \mathbf{D}' \arrow[lll, "G'"]
\end{tikzcd}
$$

La estructura de categoría triple de **AdFun** se obtiene considerando las siguientes 3-células.

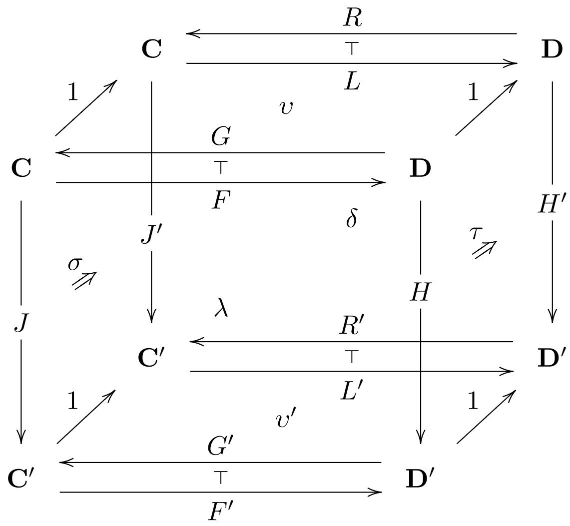
Definition 51. Una 3-célula en **AdFun** está formada por

(1) Cuadrados adjuntos

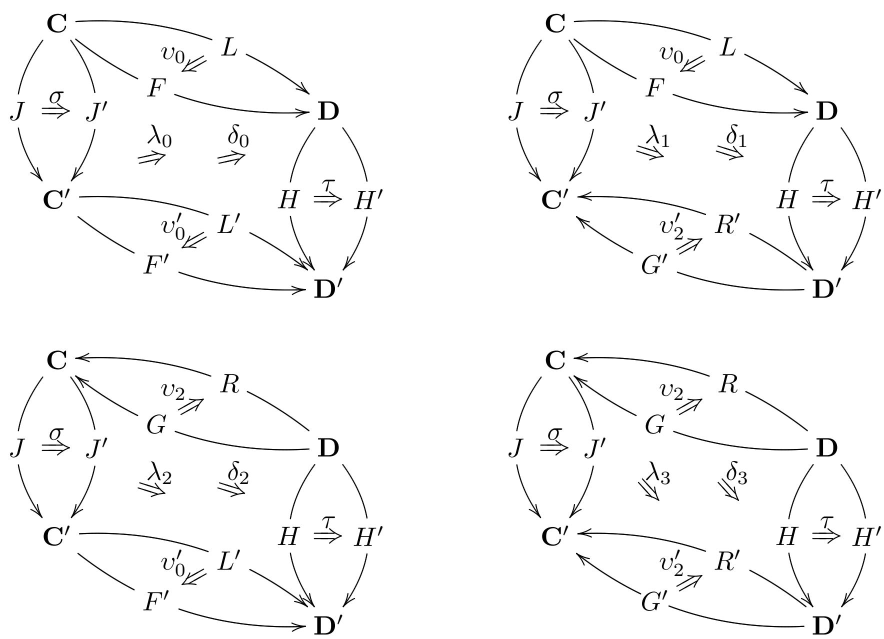
$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, shift right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right, "G'"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift right, "L"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "J'"'] \arrow[dr, phantom, "\delta"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right, "R"'] \arrow[d, "H'"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, shift right, "L'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right, "R'"']
\end{tikzcd}
$$

(2) Dos pares de transformaciones naturales, $\upsilon_0 \colon L \Longrightarrow F$, $\upsilon_2 \colon G \Longrightarrow R$ conjugadas respecto de $F \dashv G$ y $L \dashv R$, y $\upsilon'_0 \colon L' \Longrightarrow F'$, $\upsilon'_2 \colon G' \Longrightarrow R'$ conjugadas respecto de $F' \dashv G'$ y $L' \dashv R'$.

(3) Transformaciones naturales $\sigma\colon J \Longrightarrow J'$, $\tau\colon H \Longrightarrow H'$, tales que σ y τ sean compatibles con $\upsilon' \overset{\mathrm{fn}}{\circ} \lambda$ y $\delta \overset{\mathrm{fn}}{\circ} \upsilon$, i.e., tales que $(\delta \overset{\mathrm{fn}}{\circ} \upsilon) \overset{\mathrm{ad}}{\circ} \sigma = \tau \overset{\mathrm{ad}}{\circ} (\upsilon' \overset{\mathrm{fn}}{\circ} \lambda)$



La condición en la definición anterior, expresada para los componentes de los cuadrados adjuntos de la 3-célula, equivale a la conmutatividad de cualquiera, y por consiguiente todos, los 2-diagramas



o, de manera equivalente, a la conmutatividad de los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
L'J \arrow[r, "L'\sigma"] \arrow[d, "\upsilon'_0 J"'] & L'J' \arrow[r, "\delta_0"] & H'L \arrow[d, "H'\upsilon_0"] \\
F'J \arrow[r, "\lambda_0"'] & HF \arrow[r, "\tau F"'] & H'F
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
J \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\lambda_1"'] & J' \arrow[r, "\delta_1"] & R'H'L \arrow[d, "R'H'\upsilon_0"] \\
G'HF \arrow[r, "\upsilon'_2 HF"'] & R'HF \arrow[r, "R'\tau F"'] & R'H'F
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
L'JG \arrow[r, "L'\sigma G"] \arrow[d, "\upsilon'_0 JG"'] & L'J'G \arrow[r, "L'J'\upsilon_2"] & L'J'R \arrow[d, "\delta_2"] \\
F'JG \arrow[r, "\lambda_2"'] & H \arrow[r, "\tau"'] & H'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
JG \arrow[r, "\sigma G"] \arrow[d, "\lambda_3"'] & J'G \arrow[r, "J'\upsilon_2"] & J'R \arrow[d, "\delta_3"] \\
G'H \arrow[r, "\upsilon'_2 H"'] & R'H \arrow[r, "R'\tau"'] & R'H'
\end{tikzcd}
$$

5. Mónadas, morfismos y deformaciones.

En esta sección estudiamos los morfismos y las deformaciones de mónadas sobre categorías arbitrarias y su relación con las adjunciones.

Dado un par de mónadas sobre categorías arbitrarias definimos dos tipos de morfismos entre ellas, denominados, respectivamente, morfismos de Kleisli y de Eilenberg-Moore, puesto que están en correspondencia biunívoca con ciertos functores entre las categorías de Kleisli y de Eilenberg-Moore asociados a las mónadas repsectivas. Para cada tipo de morfismo entre mónadas se tiene una noción correspondiente de deformación, que es más general que la noción habitual de 2-célula entre morfismos de mónadas (v. e.g., [Str72]). Dadas un mónada $\mathbb{T}$ sobre $\mathbf{C}$, una mónada $\mathbb{T}'$ sobre $\mathbf{C}'$ y un functor J de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{C}'$, se tienen transformaciones naturales λ entre los functores $J \circ T$ y $T' \circ J$. Dependiendo del sentido que se elija para la transformación natural, se obtienen dos nociones de morfismos de mónadas como pares (J, λ) que cumplan una condición adicional de compatibilidad con las estructuras de mónadas respectivas. Cada uno de los tipos de morfismos asi definidos está en correspondencia biunívoca con ciertos pares de functores que relacionan entre sí las categorías subyacentes y, respectivamente, las categorías de Kleisli y de Eilenberg-Moore asociadas a las mónadas respectivas.

A partir de los conceptos anteriores, definiremos, en la siguiente sección, los morfismos y deformaciones algebraicas entre mónadas, que serán, simultáneamente, morfismos y deformaciones de Kleisli y de Eilenberg-Moore. Los morfismos de Fujiwara y las deformaciones entre ellos son casos particulares de los morfismos y deformaciones algebraicas entre las mónadas.

Para las adjunciones, existen conceptos correspondientes a los introducidos para las mónadas. En particular, se tienen 2-categorías de adjunciones con morfismos y 2-células de Kleisli y de Eilenberg-Moore, y 2-functores de tales 2-categorías hasta las correspondientes de mónadas. Demostraremos que las construcciones de Kleisli y de Eilenberg-Moore son, respectivamente, 2-adjuntos por la izquierda y por la derecha de tales 2-functores. Mediante las nociones de cuadrado algebraico y deformación entre cuadrados algebraicos es posible formalizar ciertas relaciones entre adjunciones surgidas anteriormente y se da cuenta, a través del 2-functor apropiado, de los morfismos y deformaciones algebraicas para las mónadas.

En lo que sigue, convenimos en denominar mónada a cualquier par $(\mathbf{C}, \mathbb{T})$ en el que $\mathbf{C}$ es una categoría y $\mathbb{T}$ una mónada sobre $\mathbf{C}$. también se le podría llamar closure category, por analogía con los closure spaces.

5.1. **Morfismos y deformaciones de Kleisli.** Definimos, en primer lugar, la noción de morfismo de Kleisli entre dos monadas.

Definition 52. Sean $(\mathbf{C}, \mathbb{T})$ y $(\mathbf{C}', \mathbb{T}')$ dos mónadas. Un morfismo de Kleisli, o, simplemente, un Kl-morfismo de $(\mathbf{C}, \mathbb{T})$ en $(\mathbf{C}', \mathbb{T}')$ es un par (J, λ), con $J\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}'$ un functor y $\lambda\colon JT \longrightarrow T'J$ una transformación natural

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda\swarrow"] & \mathbf{C} \arrow[d, "J"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] & \mathbf{C}'
\end{tikzcd}
$$

tales que se cumplen las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, bend left=60, "1"] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow\eta"] \arrow[r, "T"'] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\lambda"] & \mathbf{C} \arrow[d, "J"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] & \mathbf{C}'
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "1"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\mathrm{id}"] & \mathbf{C} \arrow[d, "J"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "1"] \arrow[r, bend right=60, "T'"'] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow\eta'"] & \mathbf{C}'
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\lambda"] & \mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\lambda"] & \mathbf{C} \arrow[d, "J"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] \arrow[rr, bend right=50, "T'"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "\Downarrow\mu'"] & \mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] & \mathbf{C}'
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, bend left=60, "TT"] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow\mu"] \arrow[r, "T"'] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\lambda"] & \mathbf{C} \arrow[d, "J"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] & \mathbf{C}'
\end{tikzcd}
$$

Para cada mónada $(\mathbf{C}, \mathbb{T})$, la identidad en $(\mathbf{C}, \mathbb{T})$, $\mathrm{id}_{(\mathbf{C},\mathbb{T})}$, es el morfismo $(\mathrm{Id}_{\mathbf{C}}, \mathrm{id}_T)$. Además, si $(J, \lambda)\colon (\mathbf{C}, \mathbb{T}) \longrightarrow (\mathbf{C}', \mathbb{T}')$ y $(J', \lambda')\colon (\mathbf{C}', \mathbb{T}') \longrightarrow (\mathbf{C}'', \mathbb{T}'')$ son dos Kl-morfismos, su composición es la definida como

$$(J', \lambda') \circ (J, \lambda) = (J' \circ J, \lambda' J \circ J'\lambda).$$

Cada S-espacio de clausura heterogéneo (A, T), en el que A es un S-sorted set y T un operador clausura heterogéneo sobre A, determina una mónada $(\mathbf{Sub}(A), \mathbb{T})$ en la que $\mathbf{Sub}(A)$ es la categoría asociada al conjunto ordenado $(\mathrm{Sub}(A), \subseteq_S)$ y $\mathbb{T}$ la mónada sobre $\mathbf{Sub}(A)$ asociada al operador clausura heterogéneo T sobre A. Además, cada morfismo de S-espacios de clausura heterogéneos $j\colon (A, T) \longrightarrow (A', T')$ induce un morfismo de Kleisli (J, λ) de la mónada $(\mathbf{Sub}(A), \mathbb{T})$ en la mónada$(\mathbf{Sub}(A'), \mathbb{T}')$ en el que el functor J de $\mathbf{Sub}(A)$ en $\mathbf{Sub}(A')$ es $j[\cdot]$, i.e., la formación de j-imágenes directas y λ la transformación natural trivial del functor $j[\cdot] \circ T$ en el functor $T' \circ j[\cdot]$, que existe por ser j un morfismo de S-espacios de clausura heterogéneos.

Del mismo modo que a cada S-espacio de clausura se le asigna una mónada, dado un espacio de clausura heterogéneo (S, A, T), obtenemos, por olvido del conjunto de sorts S, la mónada $(\mathbf{Sub}(A), \mathbb{T})$. Además, cada morfismo de espacios de clausura heterogéneos (ϕ, j) de (S, A, T) en (S', A', T'), induce, por composición del morfismo de Kleisli $(j[\cdot],\lambda)$ de $(\mathbf{Sub}(A),\mathbb{T})$ en $(\mathbf{Sub}(A'_\phi),\mathbb{T}'_\phi)$ y del morfismo de Kleisli $(\bigcup_\phi,\iota)$ de $(\mathbf{Sub}(A'_\phi),\mathbb{T}'_\phi)$ en $(\mathbf{Sub}(A'),\mathbb{T}')$, un morfismo de Kleisli $(\bigcup_\phi \circ j[\cdot],(\iota\lambda)\circ(\bigcup_\phi \circ\lambda))$ de la mónada $(\mathbf{Sub}(A),\mathbb{T})$ en la mónada $(\mathbf{Sub}(A'),\mathbb{T}')$, tal como indica el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Sub}(A) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "j[\cdot]"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda"] & \mathbf{Sub}(A) \arrow[d, "j[\cdot]"] \\
\mathbf{Sub}(A'_\phi) \arrow[r, "T'_\phi"] \arrow[d, "\bigcup_\phi"'] \arrow[dr, phantom, "\iota"] & \mathbf{Sub}(A'_\phi) \arrow[d, "\bigcup_\phi"] \\
\mathbf{Sub}(A') \arrow[r, "T'"'] & \mathbf{Sub}(A')
\end{tikzcd}$$

en el que debemos observar que la aplicación $\bigcup_\phi$ no es la extensión a las partes de ningún morfismo en **HSet** de (S,A'_ϕ) en (S',A').

Proposition 113. *Las mónadas y los Kl-morfismos entre ellas determinan una categoría denotada como* $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl}}$.

Proposition 114. *Sean* $(\mathbf{C},\mathbb{T})$ *y* $(\mathbf{C}',\mathbb{T}')$ *dos mónadas. Entonces existe una biyección entre*

(1) *Los Kl-morfismos* $(J,\lambda)\colon(\mathbf{C},\mathbb{T})\longrightarrow(\mathbf{C}',\mathbb{T}')$.
(2) *Los pares* (J,H)*, en los que* $J\colon\mathbf{C}\longrightarrow\mathbf{C}'$ *y* $H\colon\mathbf{Kl}(\mathbb{T})\longrightarrow\mathbf{Kl}(\mathbb{T}')$*, tales que* $H\circ\mathrm{F}_{\mathbb{T}}=\mathrm{F}_{\mathbb{T}'}\circ J$*, i.e. para los que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "\mathrm{F}_{\mathbb{T}}"] \arrow[d, "J"'] & \mathbf{Kl}(\mathbb{T}) \arrow[d, "H"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "\mathrm{F}_{\mathbb{T}'}"'] & \mathbf{Kl}(\mathbb{T}')
\end{tikzcd}$$

Proof. A un Kl-morfismo $(J,\lambda)\colon(\mathbf{C},\mathbb{T})\longrightarrow(\mathbf{C},\mathbb{T}')$ le asociamos el par (J,H_λ), en el que $H_\lambda\colon\mathbf{Kl}(\mathbb{T})\longrightarrow\mathbf{Kl}(\mathbb{T}')$ asocia a un $\mathbf{C}$-morfismo $P\colon Y\longrightarrow T(X)$ el $\mathbf{C}'$-morfismo $\lambda_X\circ J(P)$. Así definido, H_λ es, en efecto, un functor en virtud de las dos condiciones definitorias de los morfismos de Kleisli.

Además, se cumple que $H_\lambda\circ\mathrm{F}_{\mathbb{T}}=\mathrm{F}_{\mathbb{T}'}\circ J$, puesto que, para cada $f\colon Y\longrightarrow X$ en $\mathbf{C}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
H_\lambda\circ\mathrm{F}_{\mathbb{T}}(f) &= (J,H_\lambda)(\eta_X\circ f)\\
&= \lambda_X\circ J(\eta_X)\circ J(f)\\
&= \eta'_{J(X)}\circ J(f)\\
&= \mathrm{F}_{\mathbb{T}'}\circ J(f)
\end{aligned}$$

Recíprocamente, dado un par (J,H) que cumpla las condiciones en (2), sea κ la transformación natural conjugada de la transformación natural identidad de $\mathrm{F}_{\mathbb{T}'}\circ J$

en $H \circ \mathrm{F}_{\mathbb{T}}$, obtenida a partir del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\epsilon_{\mathbb{T}}}{\Rightarrow}"] & \mathbf{Kl}(\mathbb{T}) \arrow[l, "\mathrm{G}_{\mathbb{T}}"'] \arrow[d, "1"] \\
\mathbf{C} \arrow[r, "\mathrm{F}_{\mathbb{T}}"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{=}{\nearrow}"] & \mathbf{Kl}(\mathbb{T}) \arrow[d, "H"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "\mathrm{F}_{\mathbb{T}'}"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\eta_{\mathbb{T}'}}{\Leftarrow}"] & \mathbf{Kl}(\mathbb{T}') \arrow[d, "1"] \\
\mathbf{C}' & \mathbf{Kl}(\mathbb{T}') \arrow[l, "\mathrm{G}_{\mathbb{T}'}"]
\end{tikzcd}$$

Componiendo $\mathrm{F}_{\mathbb{T}}$ con la transformación natural κ, se obtiene una transformación natural

$$\lambda_H = \kappa\, \mathrm{F}_{\mathbb{T}} \colon JT = J\, \mathrm{G}_{\mathbb{T}}\, \mathrm{F}_{\mathbb{T}} \Longrightarrow \mathrm{G}_{\mathbb{T}'}\, H\, \mathrm{F}_{\mathbb{T}} = \mathrm{G}_{\mathbb{T}'}\, \mathrm{F}_{\mathbb{T}'}\, J = T'J.$$

Para cada $\mathbf{Kl}(\mathbb{T})$-objeto X, $(\lambda_H)_X$ es $H(\mathrm{id}^{\mathbf{C}}_{T(X)})$, puesto que se obtiene como el morfismo

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{G}_{\mathbb{T}'}\, \mathrm{F}_{\mathbb{T}'}\, J\, \mathrm{G}_{\mathbb{T}}\, \mathrm{F}_{\mathbb{T}}(X) \arrow[dd, equal] & \\
J\, \mathrm{G}_{\mathbb{T}}\, \mathrm{F}_{\mathbb{T}}(X) \arrow[ur, "(\eta^{\mathbb{T}} J\, \mathrm{G}_{\mathbb{T}}\, \mathrm{F}_{\mathbb{T}})_X"] & & \mathrm{G}_{\mathbb{T}'}\, H\, \mathrm{F}_{\mathbb{T}}(X) \\
 & \mathrm{G}_{\mathbb{T}'}\, H\, \mathrm{F}_{\mathbb{T}}\, \mathrm{G}_{\mathbb{T}}\, \mathrm{F}_{\mathbb{T}}(X) \arrow[ur, "(\mathrm{G}_{\mathbb{T}'}\, H \epsilon^{\mathbb{T}}\, \mathrm{F}_{\mathbb{T}})_X"] &
\end{tikzcd}$$

i.e., como el morfismo

$$\begin{tikzcd}
 & T'JT(X) \arrow[dd, equal] & & T'H(X) = T'J(X) \\
JT(X) \arrow[ur, "(\eta^{\mathbb{T}'} JT)_X"] & & T'T'H(X) \arrow[ur, "(\mu^{\mathbb{T}'} H)_X"] & \\
 & T'HT(X) \arrow[ur, "T'H(\mathrm{id}^{\mathbf{C}}_{T(X)})"] & &
\end{tikzcd}$$

que es igual a $H(\mathrm{id}^{\mathbf{C}}_{T(X)})$.

Para demostrar que el par (J, λ_H) constituye un Kl-morfismo de $(\mathbf{C}, \mathbb{T})$ en $(\mathbf{C}', \mathbb{T}')$ es suficiente considerar los diagramas definitorios de los Kl-morfismos para la transformación natural λ_H y las ecuaciones triangulares de las adjunciones involucradas.

Veamos por último que los procesos descritos son inversos. En efecto, si $(J, \lambda) \colon (\mathbf{C}, \mathbb{T}) \longrightarrow (\mathbf{C}', \mathbb{T}')$ es un Kl-morfismo, entonces, dado un X, se cumple que $(\lambda_{(H_\lambda)})_X = H_\lambda(\mathrm{id}^{\mathbf{C}}_{T(X)}) = \lambda_X \circ J(\mathrm{id}^{\mathbf{C}}_{T(X)}) = \lambda_X$. Por otra parte, si el par (J, H) cumple las condiciones en

(2), entonces, dado un $P\colon Y \longrightarrow X$, tenemos que $H_{(\lambda_H)}(P) = (\lambda_H)_X \circ J(P) = H(P)$. □

Definition 53. Sea **Kl** la categoría en la que los objetos son los pares $(\mathbf{C}, \mathbb{T})$ tales que $\mathbb{T}$ es una mónada sobre $\mathbf{C}$, los morfismos de $(\mathbf{C}, \mathbb{T})$ en $(\mathbf{C}', \mathbb{T}')$ los pares (J, H), con $J\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}'$ y $H\colon \mathbf{Kl}(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathbf{Kl}(\mathbb{T}')$, tales que $H \circ \mathrm{F}_{\mathbb{T}} = \mathrm{F}_{\mathbb{T}'} \circ J$, y en donde las identidades y la composición se definen a partir de las de sus componentes.

Proposition 115. *Las categorías* $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl}}$ *y* **Kl** *son isomorfas.*

Proof. Las biyecciones definidas en la proposición anterior son functoriales. En efecto, si $(J, \lambda)\colon (\mathbf{C}, \mathbb{T}) \longrightarrow (\mathbf{C}', \mathbb{T}')$ y $(J', \lambda')\colon (\mathbf{C}', \mathbb{T}') \longrightarrow (\mathbf{C}'', \mathbb{T}'')$ son Kl-morfismos y $P\colon Y \longrightarrow T(X)$ un morfismo en $\mathbf{C}$, entonces se cumple que

$$\begin{aligned}(J', H_{\lambda'}) \circ (J, H_{\lambda})(P) &= (J', H_{\lambda'})(\lambda_X \circ J(P)) \\ &= \lambda' J_X \circ J' \lambda_X \circ J' J(P) \\ &= (J'J, H_{(\lambda' J \circ J' \lambda)})(P)\end{aligned}$$

□

Sea $\underline{M} = (M, \cdot, 1)$ un monoide, $\mathbf{C}$ una categoría, $\mathbb{T}$ una mónada sobre $\mathbf{C}$, $(F_x)_{x \in M}$ un homomorfismo del monoide $\underline{M}$ en el monoide $\underline{\mathrm{End}}(\mathbf{C})$ de los endofunctores de la categoría $\mathbf{C}$ y $(\lambda_x)_{x \in M}$ una familia de transformaciones naturales en la que, para cada $x \in M$, $\lambda_x\colon F_x T \Longrightarrow T F_x$. Decimos que la mónada $\mathbb{T}$ es $(F_x)_{x \in M}$-estructural relativa a $(\lambda_x)_{x \in M}$ si se cumplen las siguientes condiciones:

(1) Para cada $x \in M$, (F_x, λ_x) es un endomorfismo de Kleisli de $(\mathbf{C}, \mathbb{T})$.
(2) $\lambda_1 = \mathrm{id}_T$.
(3) Para cada $x, y \in M$, $\lambda_{yx} = (\lambda_y F_x) \circ (F_y \lambda_x)$.

Por otra parte, decimos que la mónada $\mathbb{T}$ es $(F_x)_{x \in M}$-estructural si hay una familia de transformaciones naturales $(\lambda_x)_{x \in M}$ en la que, para cada $x \in M$, $\lambda_x\colon F_x T \Longrightarrow T F_x$, tal que la mónada $\mathbb{T}$ es $(F_x)_{x \in M}$-estructural relativa a $(\lambda_x)_{x \in M}$.

Para una mónada $\mathbb{T}$ sobre $\mathbf{C}$ que sea $(F_x)_{x \in M}$-estructural relativa a $(\lambda_x)_{x \in M}$, el functor $F_{\mathbb{T}}\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Kl}(\mathbb{T})$ se puede extender hasta un functor, denotado también por $F_{\mathbb{T}}$, desde la categoría con operadores $(\mathbf{C}, (F_x)_{x \in M})$ hasta la categoría con operadores $(\mathbf{Kl}(\mathbb{T}), (\mathbb{T}\sigma_x)_{x \in M})$, en la que, para cada $x \in M$, $\sigma_x = (F_x, \lambda_x)$ y $\mathbb{T}\sigma_x$ es el endofunctor de $\mathbf{Kl}(\mathbb{T})$ que a un morfismo $f\colon A \longrightarrow T(B)$ le asigna $\mathbb{T}\sigma_x(f) = \lambda_{x,B} \circ F_x(f)$, porque el functor $F_{\mathbb{T}}$ es tal que, para cada $x \in M$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "F_{\mathbb{T}}"] \arrow[d, "F_x"'] & \mathbf{Kl}(\mathbb{T}) \arrow[d, "\mathbb{T}\sigma_x"] \\ \mathbf{C} \arrow[r, "F_{\mathbb{T}}"'] & \mathbf{Kl}(\mathbb{T}) \end{tikzcd}$$

conmuta.

Observemos que la categoría $\mathbf{Kl}(\mathbb{T})$ no está cerrada bajo los oparadores F_x. The expanded category $(\mathbf{Kl}(\mathbb{T}), (\mathbb{T}\sigma_x)_{x \in M})$ will provide more information about the monad $\mathbb{T}$ than does the category $\mathbf{Kl}(\mathbb{T})$. De hecho, $\mathbf{Kl}(\mathbb{T})$ es el caso particular en el que el monoide es trivial, i.e., final en la categoría de monoides, F_1 el functor identidad de $\mathbf{C}$ y λ_1 la transformación natural identidad de T.

Ahora, dado un monoide $\underline{M} = (M, \cdot, 1)$, dos categorías $\mathbf{C}$ y $\mathbf{C}'$, una mónada $\mathbb{T}$ sobre $\mathbf{C}$ y otra $\mathbb{T}'$ sobre $\mathbf{C}'$, un homomorfismo $(F_x)_{x \in M}$ de $\underline{M}$ en $\underline{\mathrm{End}}(\mathbf{C})$ y otro $(F'_x)_{x \in M}$ de $\underline{M}$ en $\underline{\mathrm{End}}(\mathbf{C}')$ y familias de transformaciones naturales $(\lambda_x\colon F_x T \Longrightarrow T F_x)_{x \in M}$ y $(\lambda'_x\colon F'_x T \Longrightarrow T F'_x)_{x \in M}$, tales que la mónada $\mathbb{T}$ sea $(F_x)_{x \in M}$-estructural relativa a $(\lambda_x)_{x\in M}$ y la mónada $\mathbb{T}'$ sea $(F'_x)_{x\in M}$-estructural relativa a $(\lambda'_x)_{x\in M}$, definimos un morfismo de $(\mathbf{C},\mathbb{T},(\sigma_x)_{x\in M})$ en $(\mathbf{C}',\mathbb{T}',(\sigma'_x)_{x\in M})$, con $\sigma_x = (F_x,\lambda_x)$ y $\sigma'_x = (F'_x,\lambda'_x)$, como un triplo $(J,\lambda,(\xi_x)_{x\in M}))$ que cumple las siguientes condiciones

1. (1) (J,λ) es un morfismo de Kleisli de $(\mathbf{C},\mathbb{T})$ en $(\mathbf{C}',\mathbb{T}')$.
2. (2) Para cada $x\in M$, $JF_x = F'_xJ$.
3. (3) Para cada $x\in M$, $\lambda F_x \circ J\lambda_x = \lambda'_xJ \circ F'_x\lambda$, i.e., se cumple la siguiente ecuación

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "F_x"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda_x \swarrow"] & \mathbf{C} \arrow[d, "F_x"] \\
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda \swarrow"] & \mathbf{C} \arrow[d, "J"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] & \mathbf{C}'
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda \swarrow"] & \mathbf{C} \arrow[d, "J"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"] \arrow[d, "F'_x"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda'_x \swarrow"] & \mathbf{C}' \arrow[d, "F'_x"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] & \mathbf{C}'
\end{tikzcd}
$$

4. (4) Para cada $x\in M$, $\xi_x\colon JTF_x \Longrightarrow T'F'_xJ$.
5. (5) $\xi_1 = \lambda$ y, para cada $x,y\in M$, $\xi_{yx} = \xi_yF_x$.

Además, definimos la composición de dos morfismos $(J,\lambda,(\xi_x)_{x\in M}))$ de $(\mathbf{C},\mathbb{T},(\sigma_x)_{x\in M})$ en $(\mathbf{C}',\mathbb{T}',(\sigma'_x)_{x\in M})$ y $(J',\lambda',(\xi'_x)_{x\in M}))$ de $(\mathbf{C}',\mathbb{T}',(\sigma'_x)_{x\in M})$ en $(\mathbf{C}'',\mathbb{T}'',(\sigma''_x)_{x\in M})$, como

$$(J'\circ J, \lambda'J\circ J'\lambda, (\xi'_xJ\circ J'\xi_x)_{x\in M}).$$

Un ejemplo de los conceptos que acabamos de definir lo tenemos si consideramos las mónadas con operadores $(\mathbf{Sub}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(V)),\mathrm{Cn_c},(f)_{f\in\mathrm{End}(\underline{\mathbf{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(V))})$, asociada a la lógica sentencial clásica, y $(\mathbf{Sub}(\mathrm{Eq}_{\underline{\Sigma}}(V)),\mathrm{Cn}_{\mathbf{Bool}},(f\times f)_{f\in\mathrm{End}(\underline{\mathbf{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(V))})$, asociada al sistema de clausura estructural $(\mathrm{Eq}_{\underline{\Sigma}}(V),\mathrm{Cn}_{\mathbf{Bool}})$, en el que, para un conjunto de ecuaciones Γ, $\mathrm{Cn}_{\mathbf{Bool}}(\Gamma)$ está definido como

$$\mathrm{Cn}_{\mathbf{Bool}}(\Gamma) = \{\, (\phi,\psi) \mid \Gamma \models_{\mathbf{Bool}} (\phi,\psi) \,\},$$

junto al morfismo de la primera en la segunda determinado por la extensión canónica, L, de la aplicación de $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(V)$ en $\mathrm{Sub}(\mathrm{Eq}_{\underline{\Sigma}}(V))$ que a una fórmula ϕ le asigna $\{\,(\phi,\top)\,\}$, situación que resumimos con el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \mathbf{Sub}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(V)) \arrow[rr, "\mathrm{Cn_c}"] \arrow[dl, "L"'] \arrow[dd, "f[\cdot]" near start] & & \mathbf{Sub}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(V)) \arrow[dl, "L"'] \arrow[dd, "f[\cdot]"] \\
\mathbf{Sub}(\mathrm{Eq}_{\underline{\Sigma}}(V)) \arrow[rr, "\mathrm{Cn}_{\mathbf{Bool}}" near start] \arrow[dd, "f[\cdot]\times f[\cdot]"'] & & \mathbf{Sub}(\mathrm{Eq}_{\underline{\Sigma}}(V)) \arrow[dd, "f[\cdot]\times f[\cdot]" near start] & \\
& \mathbf{Sub}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(V)) \arrow[rr, "\mathrm{Cn_c}" near end] \arrow[dl, "L"'] & & \mathbf{Sub}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(V)) \arrow[dl, "L"'] \\
\mathbf{Sub}(\mathrm{Eq}_{\underline{\Sigma}}(V)) \arrow[rr, "\mathrm{Cn}_{\mathbf{Bool}}"] & & \mathbf{Sub}(\mathrm{Eq}_{\underline{\Sigma}}(V)) &
\end{tikzcd}
$$

Además, tenemos un morfismo de la segunda en la primera determinado por la extensión canónica, R, de la aplicación de $\mathrm{Eq}_{\underline{\Sigma}}(V)$ en $\mathrm{Sub}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(V))$ que a una ecuación (ϕ, ψ) le asigna $\{\, \phi \to \psi, \psi \to \phi \,\}$, situación que resumimos con el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Sub}(\mathrm{Eq}_{\underline{\Sigma}}(V)) \arrow[rr, "\mathrm{Cn}_{\mathbf{Bool}}"] \arrow[dl, "R"'] \arrow[dd, "f[\cdot]\times f[\cdot]"] & & \mathbf{Sub}(\mathrm{Eq}_{\underline{\Sigma}}(V)) \arrow[dl, "R"'] \arrow[dd, "f[\cdot]\times f[\cdot]"] \\
\mathbf{Sub}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(V)) \arrow[rr, crossing over, "\mathrm{Cn}_{\mathrm{c}}"] \arrow[dd, "f[\cdot]"'] & & \mathbf{Sub}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(V)) & \\
 & \mathbf{Sub}(\mathrm{Eq}_{\underline{\Sigma}}(V)) \arrow[rr, "\mathrm{Cn}_{\mathbf{Bool}}"] \arrow[dl, "R"'] & & \mathbf{Sub}(\mathrm{Eq}_{\underline{\Sigma}}(V)) \arrow[dl, "R"'] \\
\mathbf{Sub}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(V)) \arrow[rr, "\mathrm{Cn}_{\mathrm{c}}"] & & \mathbf{Sub}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(V)) \arrow[from=uu, crossing over, "f[\cdot]"] &
\end{tikzcd}$$

Los Kl-morfismos entre mónadas pueden ser comparados entre sí por medio de ciertas deformaciones de Kleisli. Estas están en correspondencia biunívoca con las transformaciones naturales entre los functores sobre las categorías de Kleisli asociados a los Kl-morfismos.

Definition 54. Sean (J, λ), $(J', \lambda')\colon (\mathbf{C}, \mathbb{T}) \longrightarrow (\mathbf{C}', \mathbb{T}')$ dos Kl-morfismos de mónadas. Una deformación de Kleisli o, simplemente, una Kl-deformación, de (J, λ) en (J', λ') es una transformación natural $\Xi\colon J' \Longrightarrow T'J$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
J'T \arrow[r, "\Xi T"] \arrow[d, "\lambda'"'] & T'JT \arrow[r, "T'\lambda"] & T'T'J \arrow[d, "\mu' J"] \\
T'J' \arrow[r, "T'\Xi"'] & T'T'J \arrow[r, "\mu' J"'] & T'J
\end{tikzcd}$$

conmuta, i.e., tal que

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"'] & \mathbf{C} \arrow[r, "1"] \arrow[d, "J"] \arrow[dl, phantom, "\lambda\swarrow"] & \mathbf{C} \arrow[d, "J'"] \arrow[dl, phantom, "\Xi\swarrow"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] & \mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu'"] & \mathbf{C}' \\
 & {} &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "1"] \arrow[d, "J"'] & \mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J'"] \arrow[dl, phantom, "\Xi\swarrow"] & \mathbf{C} \arrow[d, "J'"] \arrow[dl, phantom, "\lambda'\swarrow"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] & \mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu'"] & \mathbf{C}' \\
 & {} &
\end{tikzcd}$$

En ese caso, también usamos Ξ_{k} para la única transformación natural de $J'T$ en $T'J$ en el diagrama anterior.

El hecho de que Ξ sea una Kl-deformación de (J, λ) en (J', λ') se denota como $\Xi\colon (J, \lambda) \rightsquigarrow (J', \lambda')$, o también mediante el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[d, bend right, "J"'] \arrow[d, bend left, "J'"] \arrow[drr, "T"] & & \\
\mathbf{C}' \arrow[drr, "T'"'] & \overset{\lambda}{\Leftarrow} \quad \overset{\Xi}{\rightsquigarrow} \quad \overset{\lambda'}{\Leftarrow} & \mathbf{C} \arrow[d, bend right, "J"'] \arrow[d, bend left, "J'"] \\
& & \mathbf{C}'
\end{tikzcd}
$$

Para cada Kl-morfismo $(J, \lambda)\colon (\mathbf{C}, \mathbb{T}) \longrightarrow (\mathbf{C}', \mathbb{T}')$, la Kl-identidad es la transformación natural $J\eta'\colon J \Longrightarrow T'J$.

La composición vertical de Kl-deformaciones

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
(\mathbf{C}, \mathbb{T}) \arrow[r, bend left=50, "{(J,\lambda)}"] \arrow[r, "{(J',\lambda')}" description] \arrow[r, bend right=50, "{(J'',\lambda'')}"'] \arrow[r, phantom, bend left=25, "\wr\!\Downarrow \Xi"] \arrow[r, phantom, bend right=25, "\wr\!\Downarrow \Xi'"] & (\mathbf{C}', \mathbb{T}')
\end{tikzcd}
$$

denotada como $\Xi' \mathbin{\tilde{\circ}} \Xi$, es la transformación natural

$$
J'' \xrightarrow{\ \Xi'\ } T'J' \xrightarrow{\ T'\Xi\ } T'T'J \xrightarrow{\ \mu' J\ } T'J
$$

obtenida a partir de

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "1"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Xi \swarrow"] & \mathbf{C} \arrow[r, "1"] \arrow[d, "J'"] \arrow[dr, phantom, "\Xi' \swarrow"] & \mathbf{C} \arrow[d, "J''"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] \arrow[rr, phantom, bend right=30, "\Downarrow \mu'"] & \mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] & \mathbf{C}'
\end{tikzcd}
$$

La composición horizontal de Kl-deformaciones

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
(\mathbf{C}, \mathbb{T}) \arrow[r, bend left, "{(J,\lambda)}"] \arrow[r, bend right, "{(J',\lambda')}"'] \arrow[r, phantom, "\wr\!\Downarrow \Xi"] & (\mathbf{C}', \mathbb{T}') \arrow[r, bend left, "{(J'',\lambda'')}"] \arrow[r, bend right, "{(J''',\lambda''')}"'] \arrow[r, phantom, "\wr\!\Downarrow \Xi'"] & (\mathbf{C}'', \mathbb{T}'')
\end{tikzcd}
$$

denotada como $\Xi' \mathbin{\tilde{*}} \Xi$, es la transformación natural

$$
J'''J' \xrightarrow{\ J'''\Xi\ } J'''T'J \xrightarrow{\ \Xi'_{\mathrm{k}} J\ } T'J''J
$$

obtenida a partir de

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[rr, "1"] \arrow[d, "J"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\Xi}{\Swarrow}"] & \mathbf{C} \arrow[d, "J'"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"] \arrow[d, "J''"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda''\Swarrow"] & \mathbf{C}' \arrow[r, "1"] \arrow[d, "J''"] \arrow[dr, phantom, "\Xi'\Swarrow"] & \mathbf{C}' \arrow[d, "J'''"] \\
\mathbf{C}'' \arrow[r, "T''"'] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] & \mathbf{C}'' \arrow[r, "T''"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu'"] & \mathbf{C}'' \\
& {} &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[rr, "1"] \arrow[d, "J"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\Xi}{\Swarrow}"] & \mathbf{C} \arrow[d, "J'"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "1"] \arrow[d, "J''"'] \arrow[dr, phantom, "\Xi'\Swarrow"] & \mathbf{C}' \arrow[r, "T'"] \arrow[d, "J'''"] \arrow[dr, phantom, "\lambda'''\Swarrow"] & \mathbf{C}' \arrow[d, "J'''"] \\
\mathbf{C}'' \arrow[r, "T''"'] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] & \mathbf{C}'' \arrow[r, "T''"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu'"] & \mathbf{C}'' \\
& {} &
\end{tikzcd}
$$

Si $f, f' \colon \underline{G} \longrightarrow \underline{G'}$ son dos homomorfismos de grupos conjugados, de manera que hay un $a' \in G'$ tal que, para cada $x \in G$, $a'f(x) = f'(x)a'$, entonces a' determina una transformación natural $\Xi^{a'}$ de $\mathrm{Id}_{\mathbf{Set}}$ en $\mathrm{G}' \times -$, que a un conjunto X le asigna la aplicación $\Xi^{a'}_X$ de X en $G' \times X$ que a un $x \in X$ le asocia (a', x), y que es una Kl-deformación del Kl-morfismo $(\mathrm{Id}_{\mathbf{Set}}, \lambda^f)$ en el Kl-morfismo $(\mathrm{Id}_{\mathbf{Set}}, \lambda^{f'})$,

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Set} \arrow[dd, bend right, "\mathrm{Id}_{\mathbf{Set}}"'] \arrow[dd, bend left, "\mathrm{Id}_{\mathbf{Set}}"] \arrow[drr, "G \times -"] & & \\
& \lambda^f \Swarrow \quad \Xi^{a'} \rightsquigarrow \quad \lambda^{f'} \Swarrow & \mathbf{Set} \arrow[dd, bend right, "\mathrm{Id}_{\mathbf{Set}}"'] \arrow[dd, bend left, "\mathrm{Id}_{\mathbf{Set}}"] \\
\mathbf{Set} \arrow[drr, "G' \times -"'] & & \\
& & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}
$$

Si $j, j' \colon (A, T) \longrightarrow (A', T')$ son dos morfismos de S-espacios de clausura heterogéneos, existirá una deformación de Kleisli de $(j[\cdot], \lambda)$ en $(j'[\cdot], \lambda')$ precisamente si, para cada $X \subseteq_S A$, $j'[X] \subseteq_S T'(j[X])$.

Por otra parte, si (ϕ, j) y (ϕ', j') son dos morfismos de espacios de clausura heterogéneos de (S, A, T) en (S', A', T') y $(\bigcup_\phi \circ j[\cdot], (\iota j[\cdot]) \circ (\bigcup_\phi \lambda))$ y $(\bigcup_{\phi'} \circ j'[\cdot], (\iota' j'[\cdot]) \circ (\bigcup_{\phi'} \lambda'))$ los morfismos de Kleisli correspondientes de la mónada $(\mathbf{Sub}(A), \mathbb{T})$ en la mónada $(\mathbf{Sub}(A'), \mathbb{T}')$, entonces tendremos una deformación de Kleisli Ξ del primero en el segundo, precisamente si, para cada $X \subseteq_S A$, se cumple que $\bigcup_{\phi'}(j'[X]) \subseteq_{S'} T'(\bigcup_\phi(j[X]))$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Sub}(A) \arrow[dd, bend right, "\bigcup_\phi j[\cdot]"'] \arrow[dd, bend left, "\bigcup_{\phi'} j'[\cdot]"] \arrow[drr, "T"] & & \\
& \iota j[\cdot] \circ \bigcup_\phi \lambda \Swarrow \quad \Xi \rightsquigarrow \quad \iota' j'[\cdot] \circ \bigcup_{\phi'} \lambda' \Swarrow & \mathbf{Sub}(A) \arrow[dd, bend right, "\bigcup_\phi j[\cdot]"'] \arrow[dd, bend left, "\bigcup_{\phi'} j'[\cdot]"] \\
\mathbf{Sub}(A') \arrow[drr, "T'"'] & & \\
& & \mathbf{Sub}(A')
\end{tikzcd}
$$

Tanto en el caso de los S-espacios de clausura heterogéneos como en el de los espacios de clausura heterogéneos, de un Kl-morfismo en otro hay a lo sumo una

Kl-deformación. Ahora bien, si consideramos la 2-categoría **HALog**, de las lógicas abstractas heterogéneas, obtenida como el producto fibrado de las 2-categorías **HClSp** y **Alg**, en la que los objects son los triplos $((S,\Sigma),(A,F),T)$, where S is a set of sorts, Σ an S-sorted signature, (A,F) a Σ-algebra and T a heterogeneous closure operator on the S-sorted set A, the morphisms from $((S,\Sigma),(A,F),T)$ into $((S',\Sigma'),(A',F'),T')$ the pairs $((\phi,d),f)$, where (ϕ,d) is a morphism of Fujiwara from (S,Σ) into (S',Σ') and f a homomorphism of Σ-algebras from (A,F) into $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\phi,d)(A',F') = (A'_\phi, F'^{(\phi,d)})$ such that, for every $X \subseteq_S A$, we have that $\bigcup_\phi(f[T(X)]) \subseteq_{S'} T'(\bigcup_\phi(f[X]))$, and the 2-cells from $((\phi,d),f)$ into $((\phi',d'),f')$, where $((\phi,d),f)$ and $((\phi',d'),f')$ are morphisms from $((S,\Sigma),(A,F),T)$ into $((S',\Sigma'),(A',F'),T')$, the 2-cells $\xi\colon (S,\Sigma) \rightsquigarrow (S',\Sigma')$ in $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$ such that the following diagram commutes

$$
\begin{tikzcd}
 & (A'_\phi, F'^{(\phi,d)}) \arrow[dd, "\xi^{(A',F')}"] \\
(A,F) \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \\
 & (A'_{\phi'}, F'^{(\phi',d')})
\end{tikzcd}
$$

for every $X \subseteq_S A'_\phi$, we have that $\xi^{(A',F')}[T'_\phi(X)] \subseteq_S T'_{\phi'}(\xi^{(A',F')}[X])$, and $T'(\bigcup_{\phi'}(\xi^{(A',F')}[X])) \subseteq_{S'} T'(\bigcup_\phi(X))$,

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Sub}(A) \arrow[rrr, "T"] \arrow[dr, "j'[\cdot]"] \arrow[dl, bend right, "j[\cdot]"'] \arrow[drr, phantom, "\Swarrow\ \iota' j'[\cdot]\circ\bigcup_{\phi'}\lambda'"] & & & \mathbf{Sub}(A) \arrow[dr, "j'[\cdot]"] \arrow[dl, bend right, "j[\cdot]"'] & \\
 & & \mathbf{Sub}(A'_{\phi'}) \arrow[rrr, "T'_{\phi'}"] \arrow[ddl, bend left, "\bigcup_{\phi'}"] & & & \mathbf{Sub}(A'_{\phi'}) \arrow[ddl, bend left, "\bigcup_{\phi'}"] \\
\mathbf{Sub}(A'_\phi) \arrow[urr, "\xi^{(A',F')}[\cdot]"] \arrow[rrr, "T'_\phi"] \arrow[dr, "\bigcup_\phi"'] \arrow[drr, phantom, "\iota j[\cdot]\circ\bigcup_\phi\lambda\ \Swarrow"] & & & \mathbf{Sub}(A'_\phi) \arrow[urr, "\xi^{(A',F')}[\cdot]"] \arrow[dr, "\bigcup_\phi"'] & & \\
 & \mathbf{Sub}(A') \arrow[rrr, "T'"'] & & & \mathbf{Sub}(A') &
\end{tikzcd}
$$

entonces $\xi^{(A',F')}[\cdot]$ es una deformación de Kleisli del morfismo de Kleisli $(\bigcup_\phi \circ f[\cdot], (\iota f[\cdot])\circ(\bigcup_\phi \lambda))$ en el morfismo de Kleisli $(\bigcup_{\phi'} \circ f'[\cdot], (\iota' f'[\cdot]) \circ (\bigcup_{\phi'} \lambda'))$ desde la mónada $(\mathbf{Sub}(A), \mathbb{T})$ hasta la mónada $(\mathbf{Sub}(A'), \mathbb{T}')$, ya que, por una parte, por cumplirse, para cada $X \subseteq_S A$, que $\bigcup_{\phi'}(f'[T(X)]) \subseteq_{S'} T'(\bigcup_{\phi'}(f'[X]))$ y que $\bigcup_{\phi'}(f'[X]) \subseteq_{S'} \bigcup_{\phi'}(f'[T(X)])$, entonces $\bigcup_{\phi'}(f'[X]) \subseteq_{S'} T'(\bigcup_{\phi'}(f'[X]))$, y, por otra, ya que, for every $X \subseteq_S A'_\phi$, we have that $T'(\bigcup_{\phi'}(\xi^{(A',F')}[X])) \subseteq_{S'} T'(\bigcup_\phi(X))$, entonces $T'(\bigcup_{\phi'}(\xi^{(A',F')}[f[X]])) \subseteq_{S'} T'(\bigcup_\phi(f[X]))$, luego, por ser $\xi^{(A',F')}[\cdot] \circ f[\cdot] = f'[\cdot]$, podemos afirmar que, for every $X \subseteq_S A'_\phi$, $\bigcup_{\phi'}(f'[X]) \subseteq_{S'} T'(\bigcup_\phi(f[X]))$. Si $\xi^{(A',F')}$ fuera tal que, for every $X \subseteq_S A'_\phi$, se cumpliera que $\bigcup_{\phi'}(\xi^{(A',F')}[X]) \subseteq_{S'} \bigcup_\phi(X)$, entonces $\xi^{(A',F')}[\cdot]$ sería una deformación de Street.

Para el espacio de clasura $(\mathbb{Z}, \mathrm{Sg}_{\mathbb{Z}})$, en el que $\mathbb{Z}$ es el grupo aditivo de los enteros y $\mathrm{Sg}_{\mathbb{Z}}$ el operador de formación del subgrupo aditivo de una parte de $\mathbb{Z}$, y los endomorfismos $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ y μ_2 (multiplicación por 2) de $\mathbb{Z}$, tenemos que, para cada parte X de $\mathbb{Z}$, se cumple que

$$\mu_2[X] \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}[X]) = \mathrm{Sg}_{\mathbb{Z}}(X),$$

por lo tanto hay una deformación de Kleisli de $(\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}[\cdot], \lambda)$ en $(\mu_2[\cdot], \lambda')$, con λ y λ' triviales. Sin embargo, no hay ninguna deformación de Street de $(\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}[\cdot], \lambda)$ en $(\mu_2[\cdot], \lambda')$, ya que no se cumple que, para cada parte X de $\mathbb{Z}$, $\mu_2[X] \subseteq X$.

Para la interpretación de Kolmogorov, $((d, P), t)$, de la lógica proposicional clásica en la intuicionista, definida como

$$t_V(\gamma) = \begin{cases} \neg\neg v_n, & \text{if } \gamma = v_n; \\ \neg\neg\neg t_V(\phi), & \text{if } \gamma = \neg\phi; \\ \neg\neg(t_V(\phi) \wedge t_V(\psi)), & \text{if } \gamma = \phi \wedge \psi; \\ \neg\neg(t_V(\phi) \vee t_V(\psi)), & \text{if } \gamma = \phi \vee \psi; \\ \neg\neg(t_V(\phi) \wedge t_V(\psi)), & \text{if } \gamma = \phi \rightarrow \psi, \end{cases}$$

y la interpretación de Gentzen, $((d', P), t')$, entre las mismas lógicas, definida como

$$t'_V(\gamma) = \begin{cases} \neg\neg v_n, & \text{if } \gamma = v_n; \\ \neg t'_V(\phi), & \text{if } \gamma = \neg\phi; \\ t'_V(\phi) \wedge t'_V(\psi), & \text{if } \gamma = \phi \wedge \psi; \\ \neg(\neg t'_V(\phi) \wedge \neg t'_V(\psi)), & \text{if } \gamma = \phi \vee \psi; \\ t'_V(\phi) \rightarrow t'_V(\psi), & \text{if } \gamma = \phi \rightarrow \psi \end{cases}$$

se cumple, para cada conjunto de fórmulas Γ y cada fórmula ϕ, que

$$\Gamma \vdash_{\mathrm{c}} \phi \text{ iff } t_V[\Gamma] \vdash_{\mathrm{i}} t_V(\phi) \quad \text{and} \quad \Gamma \vdash_{\mathrm{c}} \phi \text{ iff } t'_V[\Gamma] \vdash_{\mathrm{i}} t'_V(\phi).$$

Además, para cada fórmula ϕ, tenemos que

$$\vdash_{\mathrm{i}} t_V(\phi) \leftrightarrow t'_V(\phi),$$

por lo tanto, para cada conjunto de fórmulas Γ, se cumple que

$$t'_V[\Gamma] \subseteq \mathrm{Cn}_{\mathrm{i}}(t_V[\Gamma]) \text{ y } t_V[\Gamma] \subseteq \mathrm{Cn}_{\mathrm{i}}(t'_V[\Gamma]).$$

De donde se deduce que tenemos dos deformaciones de Kleisli de $(t_V[\cdot], \lambda)$ en $(t'_V[\cdot], \lambda')$ y de $(t'_V[\cdot], \lambda')$ en $(t_V[\cdot], \lambda)$, inversas una de otra, tal como muestra el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Sub}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(V)) \arrow[r, "\mathrm{Cn}_{\mathrm{c}}"] \arrow[d, bend right, "t_V[\cdot]"'] \arrow[d, bend left, "t'_V[\cdot]"] \arrow[d, phantom, "\leftrightsquigarrow"] & \mathbf{Sub}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(V)) \arrow[d, bend right, "t_V[\cdot]"'] \arrow[d, bend left, "t'_V[\cdot]"] \arrow[d, phantom, "\leftrightsquigarrow"] \\
\mathbf{Sub}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(V)) \arrow[r, "\mathrm{Cn}_{\mathrm{i}}"'] & \mathbf{Sub}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(V))
\end{tikzcd}$$

Sin embargo, no hay ninguna deformación de Street de $(t_V[\cdot], \lambda)$ en $(t'_V[\cdot], \lambda')$ ni de $(t'_V[\cdot], \lambda')$ en $(t_V[\cdot], \lambda)$, ya que no se cumple, para cada conjunto de fórmulas Γ, ni que $t'_V[\Gamma] \subseteq t_V[\Gamma]$ ni que $t_V[\Gamma] \subseteq t'_V[\Gamma]$.

Además, también tenemos dos deformaciones de Kleisli de $(t_V[\cdot] \circ \{\cdot\}, \lambda)$ en $(t'_V[\cdot] \circ \{\cdot\}, \lambda')$ y de $(t'_V[\cdot] \circ \{\cdot\}, \lambda')$ en $(t_V[\cdot] \circ \{\cdot\}, \lambda)$, inversas una de otra, tal como muestra el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}[row sep=large, column sep=huge]
\mathbf{Fr}_{\underline{\Sigma}}(V) \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\{\cdot\}"'] & \mathbf{Fr}_{\underline{\Sigma}}(V) \arrow[d, "\{\cdot\}"] \\
\mathbf{Sub}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(V)) \arrow[r, "\mathrm{Cn}_{\mathrm{c}}" description] \arrow[d, bend right=40, "t_V[\cdot]"'] \arrow[d, bend left=40, "t'_V[\cdot]"] \arrow[d, phantom, "\leftsquigarrow\rightsquigarrow"] & \mathbf{Sub}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(V)) \arrow[d, bend right=40, "t_V[\cdot]"'] \arrow[d, bend left=40, "t'_V[\cdot]"] \arrow[d, phantom, "\leftsquigarrow\rightsquigarrow"] \\
\mathbf{Sub}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Delta}}(V)) \arrow[r, "\mathrm{Cn}_{\mathrm{i}}"'] & \mathbf{Sub}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Delta}}(V))
\end{tikzcd}
$$

en donde la fila superior del último diagrama, representa la mónada asociada al conjunto $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(V)$, a través de la categoría discreta determinada por tal conjunto.

Para la interpretación de McKinsey-Tarski, $((d, P), t)$, de la lógica proposicional intuicionista en la modal, S4, de Lewis, definida como

$$
t_V(\gamma) = \begin{cases} \Box v_n, & \text{if } \gamma = v_n; \\ \Box\neg t_V(\phi), & \text{if } \gamma = \neg\phi; \\ t_V(\phi) \wedge t_V(\psi), & \text{if } \gamma = \phi \wedge \psi; \\ t_V(\phi) \vee t_V(\psi), & \text{if } \gamma = \phi \vee \psi; \\ \Box(t_V(\phi) \to t_V(\psi)), & \text{if } \gamma = \phi \to \psi. \end{cases}
$$

y la interpretación de Gödel, $((d', P'), t')$, entre las mismas lógicas, definida como

$$
t'_V(\gamma) = \begin{cases} v_n, & \text{if } \gamma = v_n; \\ \neg\Box t'_V(\phi), & \text{if } \gamma = \neg\phi; \\ t'_V(\phi) \wedge t'_V(\psi), & \text{if } \gamma = \phi \wedge \psi; \\ \Box t'_V(\phi) \vee \Box t'_V(\psi), & \text{if } \gamma = \phi \vee \psi; \\ \Box t'_V(\phi) \to \Box t'_V(\psi), & \text{if } \gamma = \phi \to \psi. \end{cases}
$$

se cumple, para cada fórmula ϕ, que

$$
\text{If } \vdash_{\mathrm{i}} \phi, \text{ then } \vdash_{\mathrm{S4}} t_V(\phi) \text{ and } \vdash_{\mathrm{S4}} t'_V(\phi).
$$

Además, para cada fórmula ϕ, tenemos que

$$
\vdash_{\mathrm{S4}} \Box(t_V(\phi) \leftrightarrow \Box t'_V(\phi)),
$$

luego, para cada fórmula ϕ, podemos afirmar que

$$
\vdash_{\mathrm{S4}} t_V(\phi) \to t'_V(\phi).
$$

por lo tanto, para el conjunto vacío de fórmulas, se cumple que

$$
t'_V[\mathrm{Cn}_{\mathrm{i}}(\varnothing)] \subseteq \mathrm{Cn}_{\mathrm{S4}}(t_V[\mathrm{Cn}_{\mathrm{i}}(\varnothing)]).
$$

De donde se deduce que tenemos una deformación de Kleisli de $(t_V[\cdot] \circ \kappa_{\mathrm{Cn}_{\mathrm{i}}(\varnothing)}, \lambda)$ en $(t'_V[\cdot] \circ \kappa_{\mathrm{Cn}_{\mathrm{i}}(\varnothing)}, \lambda')$. Sin embargo, no hay ninguna deformación de Street de

$(t_V[\cdot] \circ \kappa_{\mathrm{Cn_i}(\varnothing)}, \lambda)$ en $(t'_V[\cdot] \circ \kappa_{\mathrm{Cn_i}(\varnothing)}, \lambda')$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
\mathbf{Sub}(\varnothing) \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\kappa_{\mathrm{Cn_i}(\varnothing)}"'] & \mathbf{Sub}(\varnothing) \arrow[d, "\kappa_{\mathrm{Cn_i}(\varnothing)}"] \\
\mathbf{Sub}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(V)) \arrow[r, "\mathrm{Cn_i}"] \arrow[d, bend right=40, "t_V[\cdot]"', ""{name=A}] \arrow[d, bend left=40, "t'_V[\cdot]", ""{name=B}] & \mathbf{Sub}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(V)) \arrow[d, bend right=40, "t_V[\cdot]"', ""{name=C}] \arrow[d, bend left=40, "t'_V[\cdot]", ""{name=D}] \\
\mathbf{Sub}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Delta}}(V)) \arrow[r, "\mathrm{Cn_{S4}}"'] & \mathbf{Sub}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Delta}}(V))
\arrow[from=A, to=B, phantom, "\rightsquigarrow"]
\arrow[from=C, to=D, phantom, "\rightsquigarrow"]
\end{tikzcd}$$

Obsérvese que el morfismo de espacios de clausura $\kappa_{\mathrm{Cn_i}(\varnothing)}$, no es la extensión a las partes de ninguna aplicación del conjunto $\varnothing$ en $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(V)$

Proposition 116. *Las mónadas, los Kl-morfismos y las Kl-deformaciones entre ellas determinan una 2-categoría, denotada como* $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl}}$.

Proof. La demostración es análoga a la de la proposición 108. □

Para la demostración de ciertas proposiciones, conviene considerar una definición alternativa, pero equivalente, de las Kl-deformaciones.

Proposition 117. *Sean* (J, λ), $(J', \lambda') \colon (\mathbf{C}, \mathbb{T}) \longrightarrow (\mathbf{C}', \mathbb{T}')$, *dos Kl-morfismos. Entonces existe una biyección entre las Kl-deformaciones de* (J, λ) *en* (J', λ') *y las transformaciones naturales* Ξ *de* $J'T$ *en* $T'J$ *tales que*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda\swarrow"] & \mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"] \arrow[dr, phantom, "\Xi\swarrow"] & \mathbf{C} \arrow[d, "J'"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] \arrow[rr, bend right=60, "T'"', ""{name=X}] & \mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu'"] & \mathbf{C}' \\
& {} &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Xi\swarrow"] & \mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J'"] \arrow[dr, phantom, "\lambda'\swarrow"] & \mathbf{C} \arrow[d, "J'"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] & \mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu'"] & \mathbf{C}' \\
& {} &
\end{tikzcd}$$

Proof. Si $\Xi \colon (J, \lambda) \rightsquigarrow (J', \lambda')$ es una Kl-deformación, entonces Ξ_{k} cumple la condición de la proposición, puesto que

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda\swarrow"] & \cdot \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"] \arrow[dr, phantom, "\lambda\swarrow"] & \cdot \arrow[r, "1"] \arrow[d, "J"] \arrow[dr, phantom, "\Xi\swarrow"] & \cdot \arrow[d, "J'"] \\
\cdot \arrow[r, "T'"'] \arrow[rrr, bend right=60, "T'"'] & \cdot \arrow[r, "T'"'] \arrow[rr, bend right=50, "T'"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu'"] & \cdot \arrow[r, "T'"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu'"] & \cdot \\
& {} & {} &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend left=60, "T^2"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda\swarrow"] & \cdot \arrow[r, "1"] \arrow[d, "J"] \arrow[dr, phantom, "\Xi\swarrow"] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\mu"] & \cdot \arrow[d, "J'"] \\
\cdot \arrow[r, "T'"'] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] & \cdot \arrow[r, "T'"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu'"] & \cdot \\
& {} &
\end{tikzcd}$$

$$
= \quad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "1"] \arrow[d, "J"'] \arrow[rr, bend left=60, "T^2"] \arrow[dr, phantom, "\Xi\swarrow"] & \cdot \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J'"] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\mu"] \arrow[dr, phantom, "\lambda'\swarrow"] & \cdot \arrow[d, "J'"] \\
\cdot \arrow[r, "T'"'] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] & \cdot \arrow[r, "T'"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu'"] & \cdot
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "1"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Xi\swarrow"] & \cdot \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J'"] \arrow[dr, phantom, "\lambda'\swarrow"] & \cdot \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J'"] \arrow[dr, phantom, "\lambda'\swarrow"] & \cdot \arrow[d, "J'"] \\
\cdot \arrow[r, "T'"'] \arrow[rr, bend right=50, "T'"'] \arrow[rrr, bend right=70, "T'"'] & \cdot \arrow[r, "T'"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu'"] & \cdot \arrow[r, "T'"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu'"] & \cdot
\end{tikzcd}
$$

Recíprocamente, si Ξ cumple la condición de la proposición, entonces

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "T"] \arrow[r, bend left=70, "1"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Xi\swarrow"] & \cdot \arrow[d, "J'"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow\eta"] \\
\cdot \arrow[r, "T'"'] & \cdot
\end{tikzcd}
$$

es una Kl-deformación, puesto que se cumple que

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda\swarrow"] \arrow[rr, bend right=70, "T'"', start anchor=south, end anchor=south, phantom] & \cdot \arrow[r, "T"] \arrow[r, bend left=70, "1", "\Downarrow\eta"'] \arrow[d, "J"] \arrow[dr, phantom, "\Xi\swarrow"] & \cdot \arrow[d, "J'"] \\
\cdot \arrow[r, "T'"'] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] & \cdot \arrow[r, "T'"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu'"] & \cdot
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "T"] \arrow[r, bend left=70, "1", "\Downarrow\eta"'] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Xi\swarrow"] & \cdot \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J'"] \arrow[dr, phantom, "\lambda'\swarrow"] & \cdot \arrow[d, "J'"] \\
\cdot \arrow[r, "T'"'] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] & \cdot \arrow[r, "T'"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu'"] & \cdot
\end{tikzcd}
$$

□

Con la caracterización anterior de las Kl-deformaciones, tenemos una descripción alternativa de las composiciones verticales y horizontales. En particular, la composición horizontal adopta, con la notación de los párrafos precedentes, la forma más simple siguiente

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "T"] \arrow[r, bend left=70, "1", "\Downarrow\eta"'] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Xi\swarrow"] & \cdot \arrow[d, "J'"] \\
\cdot \arrow[r, "T'"] \arrow[d, "J''"'] \arrow[dr, phantom, "\Xi'\swarrow"] & \cdot \arrow[d, "J'''"] \\
\cdot \arrow[r, "T''"'] & \cdot
\end{tikzcd}
$$

Las 2-células entre morfismos de mónadas consideradas por Street en [Str72] son un caso particular de las deformaciones consideradas aquí. Las deformaciones de Street se caracterizan como aquellas deformaciones de Kleisli que pueden factorizarse a través de una cierta transformación natural entre los functores subyacentes de los Kl-morfismos.

Definition 55. Sean (J,λ), $(J',\lambda')\colon (\mathbf{C},\mathbb{T}) \longrightarrow (\mathbf{C}',\mathbb{T}')$ dos Kl-morfismos. Una deformación de Street de (J,λ) en (J',λ') es una transformación natural $\sigma\colon J' \Longrightarrow J$ tal que $\lambda \circ \sigma T = T'\sigma \circ \lambda'$, i.e., tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, bend right, "J"'] \arrow[d, bend left, "J'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\sigma}{\Leftarrow}"] & \mathbf{C} \arrow[d, bend right, "J"'] \arrow[d, bend left, "J'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\sigma}{\Leftarrow}"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\lambda}{\Leftarrow} \quad \overset{\lambda'}{\Leftarrow}"] & \mathbf{C}'
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Cada deformación de Street induce una deformación de Kleisli a través de la transformación natural de su diagrama conmutativo.

Proposition 118. *Sea σ una deformación de Street de (J,λ) en (J',λ'). Entonces la transformación natural $\eta' J \circ \sigma = \lambda\sigma\eta = T'\sigma \circ \lambda'(J'\eta)$ es una deformación de Kleisli.*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "1"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\sigma}{\Leftarrow}"] & \mathbf{C} \arrow[d, "J'"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "1"] \arrow[r, bend right=60, "T'"'] \arrow[r, phantom, bend right=30, "\Downarrow\eta'"'] & \mathbf{C}'
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[r, bend left=60, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow\eta"] \arrow[d, bend right, "J"'] \arrow[d, bend left, "J'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\sigma}{\Leftarrow}"] & \mathbf{C} \arrow[d, bend right, "J"'] \arrow[d, bend left, "J'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\sigma}{\Leftarrow}"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\lambda}{\Leftarrow} \quad \overset{\lambda'}{\Leftarrow}"] & \mathbf{C}'
\end{tikzcd}$$

□

En lo que sigue, se dice que una Kl-deformación $\Xi\colon (J,\lambda) \rightsquigarrow (J',\lambda')$ es una deformación de Kleisli-Street o, simplemente, una Kl-St-deformación, si Ξ se obtiene a partir de una deformación de Street $\sigma\colon J' \Longrightarrow J$ de la manera indicada en la proposición anterior. No toda deformación de Kleisli puede obtenerse a partir de una deformación de Street. Para un ejemplo relevante véase la sección posterior sobre la relación entre teorías algebraicas heterogéneas y mónadas.

El conjunto de las Kl-St-deformaciones está cerrado bajo composición, por lo que estas determinan una sub-2-categoría de $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl}}$ que denotamos como $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl,St}}$

Definition 56. Sea $\mathbf{Kl}$ la 2-categoría con 0-células los pares $(\mathbf{C},\mathbb{T})$ con $\mathbb{T} \in \mathrm{Mnd}(\mathbf{C})$, 1-células de $(\mathbf{C},\mathbb{T})$ en $(\mathbf{C}',\mathbb{T}')$ los pares de functores (J,H) tales que $J\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}'$, $H\colon \mathbf{Kl}(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathbf{Kl}(\mathbb{T}')$ y $H \circ \mathrm{F}_{\mathbb{T}} = \mathrm{F}_{\mathbb{T}'} \circ J$, 2-células de (J,H) en (J',H') las transformaciones naturales de H en H' e identidades y composiciones definidas a partir de las de las componentes.

Proposition 119. *Las 2-categorías $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl}}$ y $\mathbf{Kl}^{\mathrm{cn}}$ son isomorfas.*

Proof. Por la proposición 114 existe una correspondencia biunívoca entre las 1-células de $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl}}$ y las de $\mathbf{Kl}^{\mathrm{cn}}$. Sean (J,λ), $(J',\lambda')\colon (\mathbf{C},\mathbb{T}) \longrightarrow (\mathbf{C}',\mathbb{T}')$ dos Kl-morfismos y $\Xi\colon (J,\lambda) \rightsquigarrow (J',\lambda')$ una Kl-deformación. Entonces Ξ determina una transformación natural τ^{Ξ} para la que se cumplen las relaciones de incidencia indicadas en los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbf{C}, \mathbb{T}) \arrow[r, bend left, "{(J, \lambda)}"] \arrow[r, bend right, "{(J', \lambda')}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \Xi"] & (\mathbf{C}', \mathbb{T}')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{Kl}(\mathbb{T}) \arrow[r, bend left, "{(J', H_{\lambda'})}"] \arrow[r, bend right, "{(J, H_{\lambda})}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \tau^{\Xi}"] & \mathbf{Kl}(\mathbb{T}')
\end{tikzcd}
$$

En efecto, sea τ^{Ξ} la aplicación que a cada $X \in \mathbf{C}$ le asigna el morfismo en $\mathbf{Kl}(\mathbb{T}')$ que corresponde al morfismo $\Xi_X \colon J'(X) \longrightarrow T'(J(X))$ en $\mathbf{C}$. Entonces $\tau^{\Xi} \colon (J', H_{\lambda'}) \Longrightarrow (J, H_{\lambda})$ es una 2-célula de $\mathbf{Kl}^{\mathrm{cn}}$, debido a que $\tau^{\Xi} \colon H_{\lambda'} \Longrightarrow H_{\lambda}$ es una transformación natural, ya que si $f \colon Y \longrightarrow X$ es un morfismo en $\mathbf{Kl}(\mathbb{T})$, el diagrama en $\mathbf{Kl}(\mathbb{T}')$

$$
\begin{tikzcd}
J'(Y) \arrow[r, "H_{\lambda'}(f)"] \arrow[d, "\tau^{\Xi}_Y"'] & J'(X) \arrow[d, "\tau^{\Xi}_X"] \\
J(Y) \arrow[r, "H_{\lambda}(f)"'] & J(X)
\end{tikzcd}
$$

conmuta, en virtud de la conmutatividad del diagrama en $\mathbf{C}$

$$
\begin{tikzcd}
J'(Y) \arrow[r, "J'(f)"] \arrow[d, "\Xi_Y"'] \arrow[rr, bend left, "H_{\lambda'}(f)"] & J'T(X) \arrow[r, "\lambda'_X"] \arrow[d, "\Xi_{T(X)}"'] & T'J'(X) \arrow[r, "T'\Xi_X"] & T'T'J(X) \arrow[d, "\mu'_{J(X)}"] \\
T'J(Y) \arrow[r, "T'J(f)"'] \arrow[rr, bend right, "T'H_{\lambda}(f)"'] & T'JT(X) \arrow[r, "T'\lambda_X"'] & T'T'J(X) \arrow[r, "\mu'_{J(X)}"'] & T'J(X)
\end{tikzcd}
$$

en el que el rectángulo izquierdo conmuta porque $\Xi \colon J' \Longrightarrow T'J$ es natural, el derecho porque Ξ es una deformación y el resto por definición.

Recíprocamente, si (J, H), $(J', H') \colon \mathbf{Kl}(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathbf{Kl}(\mathbb{T}')$ son 1-células en $\mathbf{Kl}^{\mathrm{cn}}$ y $\vartheta \colon (J', H') \Longrightarrow (J, H)$, es una 2-célula en $\mathbf{Kl}$, sea Ξ^{ϑ} la aplicación que a cada $X \in \mathbf{C}$ le asigna el morfismo en $\mathbf{C}'$ que corresponde a ϑ_X en $\mathbf{Kl}(\mathbb{T}')$.

Puesto que $\vartheta_X = \vartheta_{\mathrm{F}_{\mathbb{T}}(X)} \colon H' \, \mathrm{F}_{\mathbb{T}}(X) = J'(X) \longrightarrow H \, \mathrm{F}_{\mathbb{T}}(X) = J(X)$, se cumple que $\Xi^{\vartheta}_X \colon J'(X) \longrightarrow T'J(X)$. Si $f \colon Y \longrightarrow X$ es un morfismo en $\mathbf{C}$, entonces, por ser ϑ natural, el diagrama en $\mathbf{Kl}(\mathbb{T}')$

$$
\begin{tikzcd}
J'(Y) \arrow[r, "\mathrm{F}_{\mathbb{T}'} J'(f)"] \arrow[d, "\vartheta_Y"'] & J'(X) \arrow[d, "\vartheta_X"] \\
J(Y) \arrow[r, "\mathrm{F}_{\mathbb{T}'} J'(f)"'] & J(X)
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Luego el diagrama en $\mathbf{C}'$

$$\begin{tikzcd}
J'(Y) \arrow[r, "J'(f)"] \arrow[d, "\Xi^{\vartheta}_Y"'] & J'(X) \arrow[r, "\eta'_{J'(X)}"] \arrow[d, "\Xi^{\vartheta}_X"] & T'J'(X) \arrow[d, "T'\Xi^{\vartheta}_X"] \\
T'J(X) \arrow[r, "T'J(f)"'] \arrow[d, "T'J(f)"'] & T'J(X) & T'T'J(X) \arrow[l, "\mu'_{J(X)}"] \\
T'J(X) \arrow[r, "T'\eta'_{J(X)}"'] & T'T'J(X) \arrow[u, "\mu'_{JX}"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta y $\Xi^{\vartheta}\colon J' \Longrightarrow T'J$ es una transformación natural.

Veamos que Ξ^{ϑ} es una deformación de λ_H en $\lambda_{H'}$. Por ser ϑ natural, el diagrama en $\mathbf{Kl}(\mathbb{T}')$

$$\begin{tikzcd}
H'T(X) \arrow[r, "H'(\mathrm{id}^{\mathbf{C}}_{T(X)})"] \arrow[d, "\Xi^{\vartheta}_{T(X)}"'] & H'(X) \arrow[d, "\vartheta_X"] \\
HT(X) \arrow[r, "H(\mathrm{id}^{\mathbf{C}}_{T(X)})"'] & H(X)
\end{tikzcd}$$

conmuta, y, por consiguiente, el diagrama en $\mathbf{C}$

$$\begin{tikzcd}
J'T(X) \arrow[r, "H'(\mathrm{id}_{T(X)})"] \arrow[d, "\vartheta_{T(X)}"'] & T'J'(X) \arrow[r, "T'(\Xi^{\vartheta}_X)"] & T'T'J(X) \arrow[d, "\mu'_{J(X)}"] \\
T'JT(X) \arrow[r, "T'(H(\mathrm{id}_{T(X)}))"'] & T'T'J(X) \arrow[r, "\mu'_{J(X)}"'] & T'J(X)
\end{tikzcd}$$

también conmuta. Pero entonces, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
J'T \arrow[r, "\lambda_{H'}"] \arrow[d, "\Xi^{\vartheta}T"'] & T'J' \arrow[r, "T'\Xi^{\vartheta}"] & T'T'J \arrow[d, "\mu' J"] \\
T'JT \arrow[r, "T'\lambda_H"'] & T'T'J \arrow[r, "\mu' J"'] & T'J
\end{tikzcd}$$

conmuta y Ξ^{ϑ} es una deformación.

Los dos procesos descritos son inversos entre sí.

Para acabar de demostrar que las 2-categorías $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl}}$ y $\mathbf{Kl}^{\mathrm{cn}}$ son isomorfas, sólo falta comprobar la compatibilidad con la composición y las identidades.

Para la composición vertical de Kl-deformaciones

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
(\mathbf{C},\mathbb{T}) \arrow[r, bend left=50, "{(J,\lambda)}"{name=U}] \arrow[r, "{(J',\lambda')}"{name=M, description}] \arrow[r, bend right=50, "{(J'',\lambda'')}"'{name=D}] & (\mathbf{C}',\mathbb{T}')
\arrow[from=U, to=M, phantom, "\Downarrow\Xi"]
\arrow[from=M, to=D, phantom, "\Downarrow\Xi'"]
\end{tikzcd}$$

se cumple, para cada $X \in \mathbf{C}$, que

$$\begin{aligned}
\tau_X^{\Xi' \tilde{\circ} \Xi} &= (\mu' J \circ T' \Xi \circ \Xi')_X \\
&= \Xi_X \diamond \Xi'_X \\
&= \tau_X^{\Xi} \circ \tau_X^{\Xi'}
\end{aligned}$$

Para la composición horizontal de Kl-deformaciones

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
(\mathbf{C},\mathbb{T}) \arrow[r, bend left, "{(J,\lambda)}"{name=A}] \arrow[r, bend right, "{(J',\lambda')}"'{name=B}] & (\mathbf{C}',\mathbb{T}') \arrow[r, bend left, "{(J'',\lambda'')}"{name=C}] \arrow[r, bend right, "{(J''',\lambda''')}"'{name=D}] & (\mathbf{C}'',\mathbb{T}'')
\arrow[from=A, to=B, phantom, "\Downarrow\Xi"]
\arrow[from=C, to=D, phantom, "\Downarrow\Xi'"]
\end{tikzcd}$$

se cumple, para cada $X \in \mathbf{C}$, que

$$\begin{aligned}
\tau_X^{\Xi' \tilde{*} \Xi} &= (\mu'' \circ T'' \Xi' J \circ \lambda''' J \circ J''' \Xi)_X \\
&= (\Xi' J)_X \diamond (\lambda''' J \circ J''' \Xi)_X \\
&= (\Xi'(J, H_\lambda)_X \diamond H_{\lambda'''} \tau^{\Xi} \\
&= \tau_X^{\Xi'} * \tau_X^{\Xi}
\end{aligned}$$

La compatibilidad con las identidades es inmediata, por lo que la construcción anterior, junto a la desarrollada en la proposición 114, determina un 2-isomorfismo de $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl}}$ en $\mathbf{Kl}^{\mathrm{cn}}$. □

La imagen del isomorfismo anterior sobre $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl,St}}$ determina la sub-2-categoría de $\mathbf{Kl}$ siguiente.

Definition 57. Sea $\mathbf{Kl}_{\mathrm{St}}$ la 2-categoría en la que las 0-células son los pares $(\mathbf{C},\mathbb{T})$ con $\mathbb{T}$ una mónada sobre $\mathrm{Mnd}(\mathbf{C})$, las 1-células de $(\mathbf{C},\mathbb{T})$ en $(\mathbf{C}',\mathbb{T}')$ los pares de functores (J,H), con $J\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}'$ y $H\colon \mathbf{Kl}(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathbf{Kl}(\mathbb{T}')$, tales que $H \circ \mathrm{F}_{\mathbb{T}} = \mathrm{F}_{\mathbb{T}'} \circ J$, las 2-células de (J,H) en (J',H') los pares de transformaciones naturales (σ,τ), con $\sigma\colon J \Longrightarrow J'$ y $\tau\colon H \Longrightarrow H'$, tales que $\tau\,\mathrm{F}_{\mathbb{T}} = \mathrm{F}_{\mathbb{T}'}\,\sigma$, i.e., tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\mathbf{C} \arrow[r, "\mathrm{F}_{\mathbb{T}}"] \arrow[d, bend right, "J"'{name=J}] \arrow[d, bend left, "J'"{name=Jp}] & \mathbf{Kl}(\mathbb{T}) \arrow[d, bend right, "H"'{name=H}] \arrow[d, bend left, "H'"{name=Hp}] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "\mathrm{F}_{\mathbb{T}'}"'] & \mathbf{Kl}(\mathbb{T}')
\arrow[from=J, to=Jp, phantom, "\overset{\sigma}{\Rightarrow}"]
\arrow[from=H, to=Hp, phantom, "\overset{\tau}{\Rightarrow}"]
\end{tikzcd}$$

conmuta y con identidades y composiciones las definidas a partir de las de sus componentes.

La 2-categoría $\mathbf{Kl}_{\mathrm{St}}$ es una sub-2-categoría de $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl}}$, mediante el functor que olvida la primera componente de las 2-células.

Proposition 120. *Las 2-categorías* $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl,St}}$ *y* $\mathbf{Kl}_{\mathrm{St}}^{\mathrm{cn}}$ *son isomorfas.* □

5.2. **Morfismos y deformaciones de Eilenberg-Moore.** Si invertimos el sentido de la transformación natural en los Kl-morfismos se obtiene otra noción de morfismo de mónadas. Puesto que el sentido del functor permanece invariante, los conceptos no son duales. Por su relación con los morfismos algebraicos entre mónadas introducidos posteriormente, es conveniente definir los morfismos de Eilenberg-Moore entre mónadas invirtiendo el sentido del functor en lugar del de la transformación natural.

Definition 58. Sean $(\mathbf{C}, \mathbb{T})$ y $(\mathbf{C}', \mathbb{T}')$ dos mónadas. Un morfismo de Eilenberg-Moore, o, simplemente, un EM-morfismo de $(\mathbf{C}, \mathbb{T})$ en $(\mathbf{C}', \mathbf{T}')$ es un par (K, λ), en el que $K\colon \mathbf{C}' \longrightarrow \mathbf{C}$ es un functor y $\lambda\colon TK \Longrightarrow KT'$ una transformación natural

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] & \mathbf{C} \\
\mathbf{C}' \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Searrow\lambda"] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}$$

tales que

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"'] \arrow[r, bend left=60, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow\eta"] & \mathbf{C} \\
\mathbf{C}' \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Searrow\lambda"] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "1"] & \mathbf{C} \\
\mathbf{C}' \arrow[u, "K"] \arrow[r, "1"] \arrow[r, bend right=60, "T'"'] \arrow[r, phantom, bend right=30, "\Downarrow\eta'"] \arrow[ur, phantom, "\Searrow\mathrm{id}"] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] & \mathbf{C} \arrow[r, "T"] & \mathbf{C} \\
\mathbf{C}' \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Searrow\lambda"] \arrow[rr, bend right=40, "T"'] \arrow[rr, phantom, bend right=20, "\Downarrow\mu'"] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Searrow\lambda"] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"'] \arrow[r, bend left=60, "TT"] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow\mu"] & \mathbf{C} \\
\mathbf{C}' \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Searrow\lambda"] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}$$

Para cada mónada $\mathbb{T}$ sobre $\mathbf{C}$, la identidad en $(\mathbf{C}, \mathbb{T})$, $\mathrm{id}_{(\mathbf{C},\mathbb{T})}$, es el morfismo $(\mathrm{Id}_{\mathbf{C}}, \mathrm{id}_T)$. Si $(K, \lambda)\colon (\mathbf{C}, \mathbb{T}) \longrightarrow (\mathbf{C}'\mathbb{T}')$ y $(K', \lambda')\colon \mathbb{T}' \longrightarrow \mathbb{T}''$ son dos EM-morfismos, su composición, $(K', \lambda') \circ (K, \lambda)$ es el par $(K' \circ K, K\lambda' \circ \lambda K')$.

Proposition 121. *Las mónadas y los EM-morfismos entre ellas determinan una categoría, denotada como* $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{EM}}$.

Proposition 122. *Sea* $\mathbb{T}$ *una mónada sobre* $\mathbf{C}$ *y* $\mathbb{T}'$ *una sobre* $\mathbf{C}'$. *Entonces existe una biyección entre*

(1) *Los EM-morfismos* $(K, \lambda)\colon (\mathbf{C}, \mathbb{T}) \longrightarrow (\mathbf{C}', \mathbb{T}')$.

(2) *Los pares* (K, H)*, en los que* $K\colon \mathbf{C}' \longrightarrow \mathbf{C}$ *y* $H\colon \mathbf{EM}(\mathbb{T}') \longrightarrow \mathbf{EM}(\mathbb{T})$*, tales que* $\mathrm{G}^{\mathbb{T}} \circ H = K \circ \mathrm{G}^{\mathbb{T}'}$*, i.e. tales que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{EM}(\mathbb{T}) \arrow[r, "\mathrm{G}_{\mathbb{T}}"] & \mathbf{C} \\
\mathbf{EM}(\mathbb{T}') \arrow[u, "H"] \arrow[r, "\mathrm{G}_{\mathbb{T}'}"'] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}$$

Proof. A cada EM-morfismo $(K, \lambda)\colon (\mathbf{C}, \mathbb{T}) \longrightarrow (\mathbf{C}', \mathbb{T}')$ le asignamos el par (K, H^{λ}), en el que $H^{\lambda}\colon \mathbf{EM}(\mathbb{T}') \longrightarrow \mathbf{EM}(\mathbb{T})$ es el functor que a una $\mathbb{T}'$-álgebra (A, α) le hace corresponder la $\mathbb{T}$-álgebra $(K(A), K(\alpha) \circ \lambda_A)$ y a un $\mathbf{EM}(\mathbb{T}')$-morfismo f el $\mathbf{EM}(\mathbb{T})$-morfismo $K(f)$.

Comprobemos que H^{λ} está bien definido. Si (A, α) es una $\mathbb{T}'$-álgebra, entonces $(A, K(\alpha) \circ \lambda_A)$ es una $\mathbb{T}$-álgebra, puesto que se cumplen las ecuaciones

$$\begin{aligned}
(K(\alpha) \circ \lambda_A) \circ \eta_{K(A)} &= K(\alpha) \circ K(\eta'_A) \\
&= K(\alpha \circ \eta'_A) \\
&= \mathrm{id}_{K(A)}\ , \\
(K(\alpha) \circ \lambda_A) \circ \mu_{K(A)} &= K(\alpha) \circ K(\mu'_A) \circ \lambda_{T'(A)} \circ T(\lambda)_A \\
&= K(\alpha \circ \mu'_A) \circ \lambda_{T'(A)} \circ T(\lambda)_A \\
&= K(\alpha \circ T'(\alpha)) \circ \lambda_{T'(A)} \circ T(\lambda_A) \\
&= K(\alpha) \circ K(T'(\alpha)) \circ \lambda_{T'(A)} \circ T(\lambda_A) \\
&= K(\alpha) \circ \lambda_A \circ TK(\alpha) \circ T(\lambda_A) \\
&= (K(\alpha) \circ \lambda_A) \circ T(K(\alpha) \circ \lambda_A)
\end{aligned}$$

Si $f\colon (A, \alpha) \longrightarrow (B, \beta)$ es un morfismo de $\mathbb{T}'$-álgebras, entonces $H^{\lambda}(f)$ es un homomorfismo de $\mathbb{T}$-álgebras porque

$$K(f) \circ K(\alpha) \circ \lambda_A = K(\beta) \circ KT'(f) \circ \lambda_A = K(\beta) \circ \lambda_B \circ TK(f)$$

La preservación de composiciones e identidades es inmediata, así como que $\mathrm{G}^{\mathbb{T}} \circ H = K \circ \mathrm{G}^{\mathbb{T}'}$.

Recíprocamente, a un par (K, H) que cumpla las condiciones en (2), le asociamos el EM-morfismo (K, λ^H), en donde λ^H se define como sigue. Puesto que $H\colon \mathbf{EM}(\mathbb{T}') \longrightarrow \mathbf{EM}(\mathbb{T})$ es tal que $\mathrm{G}^{\mathbb{T}} \circ H = K \circ \mathrm{G}^{\mathbb{T}'}$, H asigna a cada $\mathbb{T}'$-álgebra (A, α), la $\mathbb{T}$-álgebra $H(A, \alpha)$, cuyo objeto subyacente es, necesariamente, $K(A)$, y cuya estructura denotamos mediante α^H. En particular, para cada objeto A, $(T'(A), \mu'_A)$ es una $\mathbb{T}'$-álgebra, a la que el functor H asigna la $\mathbb{T}$-álgebra $(KT'(A), (\mu'_A)^H)$.

La aplicación $A \mapsto (\mu'_A)^H$ es una transformación natural $(\mu'_{(\cdot)})^H$ de TKT' en KT', puesto que, para cada $f\colon A \longrightarrow B$, como μ' es una transformación natural y H es functor, los diagramas

$$\begin{tikzcd}
T'T'(A) \arrow[r, "T'T'(f)"] \arrow[d, "\mu'_A"'] & T'T'(B) \arrow[d, "\mu'_B"] \\
T'(A) \arrow[r, "T'(f)"'] & T'(B)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
TKT'(A) \arrow[r, "TKT'(f)"] \arrow[d, "(\mu'_A)^H"'] & TKT'(B) \arrow[d, "(\mu'_B)^H"] \\
KT'(A) \arrow[r, "KT'(f)"'] & KT'(B)
\end{tikzcd}$$

conmutan.

Sea $\lambda^H : TK \Longrightarrow KT'$ la transformación natural obtenida mediante la composición de $TK\eta'$ con $(\mu'_{(\cdot)})^H$, y que a cada $A \in \mathbf{C}$ le asigna el morfismo

$$TK(A) \xrightarrow{(TK\eta')_A} TKT'(A) \xrightarrow{(\mu'_A)^H} KT'(A)$$

La transformación natural λ^H también se puede obtener como sigue. Sea κ la transformación natural conjugada de la transformación natural identidad de $K \circ \mathrm{G}^{\mathbb{T}'}$ en $\mathrm{G}^{\mathbb{T}} \circ H$, obtenida a partir del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{EM}(\mathbb{T}) \arrow[r, phantom, "\overset{\epsilon^{\mathbb{T}}}{\Leftarrow}" below=12pt] & \mathbf{C} \arrow[l, "\mathrm{F}^{\mathbb{T}}"'] \\
\mathbf{EM}(\mathbb{T}) \arrow[u, "1"] \arrow[r, "\mathrm{G}^{\mathbb{T}}"] \arrow[r, phantom, "\overset{=}{\Nwarrow}" below=12pt] & \mathbf{C} \arrow[u, "1"'] \\
\mathbf{EM}(\mathbb{T}') \arrow[u, "H"] \arrow[r, "\mathrm{G}^{\mathbb{T}'}"] \arrow[r, phantom, "\overset{\eta^{\mathbb{T}'}}{\Leftarrow}" below=12pt] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K"'] \\
\mathbf{EM}(\mathbb{T}') \arrow[u, "1"] & \mathbf{C}' \arrow[u, "1"'] \arrow[l, "\mathrm{F}^{\mathbb{T}'}"]
\end{tikzcd}$$

Componiendo con $\mathrm{F}^{\mathbb{T}}$, se obtiene la transformación natural

$$\lambda^H = \mathrm{G}^{\mathbb{T}}\,\kappa \colon TK = \mathrm{G}^{\mathbb{T}}\,\mathrm{F}^{\mathbb{T}}\,K \Longrightarrow \mathrm{G}^{\mathbb{T}}\,H\,\mathrm{F}^{\mathbb{T}'} = K\,\mathrm{G}^{\mathbb{T}'}\,\mathrm{F}^{\mathbb{T}'} = KT'$$

Se cumple que $\lambda^H \circ \eta K = K\eta'$, puesto que, para cada A, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
KA \arrow[r, "(\eta K)_A"] \arrow[d, "(K\eta')_A"'] & TK(A) \arrow[d, "(TK\eta')_A"] \arrow[dd, bend left=60, "\lambda^H_A"] \\
KT'(A) \arrow[r, "(\eta KT')_A"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & TKT'(A) \arrow[d, "(\mu'_A)^H"] \\
& KT'(A)
\end{tikzcd}$$

conmuta.

La condición $\lambda^H \circ \mu K = K\mu' \circ \lambda^H T' \circ T\lambda^H$ se deduce de la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
TTK(A) \arrow[r, "\mu K_A"] \arrow[d, "TTK\eta'_A"'] \arrow[dd, bend right=60, "T\lambda^H_A"'] & TK(A) \arrow[d, "TK\eta'_A"] \arrow[dd, bend left=60, "\lambda^H_A"] \\
TTKT'(A) \arrow[r, "\mu KT'_A"] \arrow[d, "T(\mu'_A)^H"'] & TKT'(A) \arrow[d, "(\mu'_A)^H"] \\
TKT'(A) \arrow[r, "(\mu'_A)^H"] \arrow[d, "TK\eta' T'_A"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{TKT'(A)}"] \arrow[dd, bend right=60, "\lambda^H_{T'(A)}"'] & KT'(A) \arrow[dd, bend left=60, "\mathrm{id}_{KT'(A)}"] \\
TKT'T'(A) \arrow[r, "TK\mu'_A"'] \arrow[d, "(\mu'_{T'(A)})^H"'] & TKT'(A) \arrow[d, "(\mu'_A)^H"] \\
KT'T'(A) \arrow[r, "\mu'_A"'] & KT'(A)
\end{tikzcd}$$

donde el cuadrado inferior conmuta porque el functor H preserva homomorfismos.

Los dos procesos son inversos entre sí. Si $(K, \lambda)\colon (\mathbf{C}, \mathbb{T}) \longrightarrow (\mathbf{C}', \mathbb{T}')$ es un EM-morfismo de mónadas, entonces $\lambda^{(H^\lambda)} = \lambda$, puesto que, para cada A, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
TK(A) \arrow[r, "\lambda_A"] \arrow[d, "TK\eta'_A"'] & KT'(A) \arrow[d, "KT'\eta'_A"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{KT'(A)}"] & \\
TKT'(A) \arrow[r, "\lambda_{T'(A)}"'] \arrow[rr, bend right=40, "{\mu'_A}^{H^\lambda}"'] & KT'T'(A) \arrow[r, "K\mu'_A"'] & KT'(A)
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Por último, si el functor $H\colon \mathbf{EM}(\mathbb{T}') \longrightarrow \mathbf{EM}(\mathbb{T})$ es tal que $\mathrm{G}^{\mathbb{T}} \circ H = K \circ \mathrm{G}^{\mathbb{T}'}$, entonces $H^{\lambda^H} = H$, porque, para cada $\mathbb{T}'$-álgebra (A, α), el $\mathbb{T}'$-homomorfismo $\alpha\colon (T'(A), \mu'_A) \longrightarrow (A, \alpha)$ es preservado por H, y por tanto el diagrama

$$\begin{tikzcd}
TK(A) \arrow[r, "TK\eta'_A"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{TK(A)}"'] & TKT'(A) \arrow[r, "(\mu'_A)^H"] \arrow[d, "TK(\alpha)"] & KT'(A) \arrow[d, "K(\alpha)"] \\
& TK(A) \arrow[r, "K(\alpha)"'] & K(A)
\end{tikzcd}$$

conmuta. $\square$

Definition 59. Sea $\mathbf{EM}$ la categoría en la que los objetos son las mónadas $(\mathbf{C}, \mathbb{T})$ y los morfismos de $(\mathbf{C}, \mathbb{T})$ en $(\mathbf{C}', \mathbb{T}')$ los pares de functores (K, H) tales que $K\colon \mathbf{C}' \longrightarrow \mathbf{C}$, $H\colon \mathbf{EM}(\mathbb{T}') \longrightarrow \mathbf{EM}(\mathbb{T})$ y $\mathrm{G}_{\mathbb{T}} \circ H = K \circ \mathrm{G}_{\mathbb{T}'}$.

Proposition 123. *Las categorías* $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{EM}}$ *y* $\mathbf{EM}^{\mathrm{op}}$ *son isomorfas.* □

Para los EM-morfismos entre mónadas se tiene asimismo una noción de deformación. Las deformaciones de Eilenberg-Moore están en correspondencia biunívoca con las transformaciones naturales entre los functores sobre las categorías de Eilenberg-Moore asociados a los EM-morfismos.

Definition 60. Sean (K,λ), $(K',\lambda')\colon (\mathbf{C},\mathbb{T}) \longrightarrow (\mathbf{C}',\mathbb{T}')$ dos EM-morfismos de mónadas. Entonces una deformación de Eilenberg-Moore o, simplemente, una EM-deformación de (K,λ) en (K',λ') es una transformación natural $\Xi\colon K \Longrightarrow K'T'$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
TK \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "T\Xi"'] & KT' \arrow[r, "\Xi T'"] & K'T'T' \arrow[d, "K'\mu'"] \\
TK'T' \arrow[r, "\lambda' T'"'] & K'T'T' \arrow[r, "K'\mu'"'] & K'T'
\end{tikzcd}$$

conmuta, i.e., tal que

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] & \mathbf{C} \arrow[r, "1"] & \mathbf{C} \\
\mathbf{C}' \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\lambda"] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K"'] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\Xi"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu'"] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K'"'] \\
& {} &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "1"] & \mathbf{C} \arrow[r, "T"] & \mathbf{C} \\
\mathbf{C}' \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\Xi"] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K'"'] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\lambda'"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu'"] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K'"'] \\
& {} &
\end{tikzcd}$$

En ese caso, convenimos que Ξ_{e} es la única transformación natural de TK en $K'T'$ en el diagrama anterior.

El hecho de que Ξ sea una EM-deformación de (K,λ) en (K',λ') se denota como $\Xi\colon (K,\lambda) \rightsquigarrow (K',\lambda')$, o tambien mediante el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[drr, "T"] & & \\
& \lambda\Downarrow \overset{\Xi}{\rightsquigarrow} \Downarrow\lambda' & \mathbf{C} \\
\mathbf{C}' \arrow[uu, bend left, "K"] \arrow[uu, bend right, "K'"'] \arrow[drr, "T'"'] & & \\
& & \mathbf{C}' \arrow[uu, bend left, "K"] \arrow[uu, bend right, "K'"']
\end{tikzcd}$$

Para cada EM-morfismo $(K,\lambda)\colon (\mathbf{C},\mathbb{T}) \longrightarrow (\mathbf{C}',\mathbb{T}')$ la EM-identidad es la transformación natural $K\eta'\colon K \Longrightarrow KT'$.

La composición vertical de deformaciones

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{C},\mathbb{T}) \arrow[rr, bend left=50, "{(K,\lambda)}"] \arrow[rr, "{(K',\lambda')}" description] \arrow[rr, bend right=50, "{(K'',\lambda'')}"'] & {} \arrow[d, phantom, "\wr\Downarrow\Xi"] & (\mathbf{C}',\mathbb{T}') \\
& {} \arrow[d, phantom, "\wr\Downarrow\Xi'"] & \\
& {} &
\end{tikzcd}$$

denotada como $\Xi' \mathbin{\tilde{\circ}} \Xi$, es la transformación natural

$$K \xrightarrow{\ \Xi\ } K'T' \xrightarrow{\ \Xi'T'\ } K''T'T' \xrightarrow{\ K''\mu'\ } K''T'$$

obtenida a partir del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "1"] & \mathbf{C} \arrow[r, "1"] & \mathbf{C} \\
\mathbf{C}' \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\Xi"] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] \arrow[rr, phantom, bend right=30, "\Downarrow\mu'"] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K'"'] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\Xi'"] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K''"']
\end{tikzcd}$$

La composición horizontal de deformaciones

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{C}, \mathbb{T}) \arrow[r, bend left, "(K,\lambda)"] \arrow[r, bend right, "(K',\lambda')"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Xi"] & (\mathbf{C}', \mathbb{T}') \arrow[r, bend left, "(K'',\lambda'')"] \arrow[r, bend right, "(K''',\lambda''')"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Xi'"] & (\mathbf{C}'', \mathbb{T}'')
\end{tikzcd}$$

denotada como $\Xi' \mathbin{\tilde{*}} \Xi$, es la transformación natural

$$KK'' \xrightarrow{\ \Xi K''\ } K'T'K'' \xrightarrow{\ K'\Xi'_{\mathrm{e}}\ } K'K'''T''$$

obtenida a partir de

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[rr, "1"] & & \mathbf{C} \\
\mathbf{C}' \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"] \arrow[urr, phantom, "\Downarrow\Xi"] & \mathbf{C}' \arrow[r, "1"] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K'"'] \\
\mathbf{C}'' \arrow[u, "K''"] \arrow[r, "T''"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\lambda''"] \arrow[rr, bend right=60, "T''"'] \arrow[rr, phantom, bend right=30, "\Downarrow\mu''"] & \mathbf{C}'' \arrow[u, "K''"'] \arrow[r, "T''"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\Xi'"] & \mathbf{C}'' \arrow[u, "K'''"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[rr, "1"] & & \mathbf{C} \\
\mathbf{C}' \arrow[u, "K"] \arrow[r, "1"] \arrow[urr, phantom, "\Downarrow\Xi"] & \mathbf{C}' \arrow[r, "T'"] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K'"'] \\
\mathbf{C}'' \arrow[u, "K''"] \arrow[r, "T''"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\Xi'"] \arrow[rr, bend right=60, "T''"'] \arrow[rr, phantom, bend right=30, "\Downarrow\mu''"] & \mathbf{C}'' \arrow[u, "K''"'] \arrow[r, "T''"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\lambda'''"] & \mathbf{C}'' \arrow[u, "K'''"']
\end{tikzcd}$$

Proposition 124. *Las mónadas, los EM-morfismos y las EM-deformaciones determinan una 2-categoría, denotada como* $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{EM}}$.

Proof. La demostración es análoga a la de la proposición 108. □

Las deformaciones entre morfismos de mónadas sobre una misma categoría $\mathbf{C}$ son simultáneamente deformaciones de Kleisli y de Eilenberg-Moore.

Se puede dar una definición alternativa, pero equivalente, de las deformaciones que resulta, ocasionalmente, más adecuada para la demostración de algunas proposiciones. La relación entre ellas es, esencialmente, la que existe entre las aplicaciones desde los conjuntos de variables y sus extensiones a las álgebras libres.

Proposition 125. *Sean* (K, λ), $(K', \lambda')\colon (\mathbf{C}, \mathbb{T}) \longrightarrow (\mathbf{C}', \mathbb{T}')$ *EM-morfismos. Entonces existe una biyección entre las EM-deformaciones de* (K, λ) *en* (K', λ') *y las* *transformaciones naturales de KT en $K'T'$ tales que*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] & \mathbf{C} \arrow[r, "T"] & \mathbf{C} \\
\mathbf{C}' \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\lambda"] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] \arrow[rr, phantom, bend right=30, "\Downarrow\mu'"] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K"'] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\Xi"] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K'"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] & \mathbf{C} \arrow[r, "T"] & \mathbf{C} \\
\mathbf{C}' \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\Xi"] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] \arrow[rr, phantom, bend right=30, "\Downarrow\mu'"] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K"'] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\lambda'"] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K'"']
\end{tikzcd}
$$

Proof. Si $\Xi\colon (K,\lambda) \rightsquigarrow (K',\lambda')$ es una EM-deformación, entonces Ξ_{e} cumple la condición de la proposición, puesto que

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "T"] & \cdot \arrow[r, "T"] & \cdot \arrow[r, "1"] & \cdot \\
\cdot \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\lambda"] \arrow[rrr, bend right=60, "T'"'] \arrow[rrr, phantom, bend right=40, "\Downarrow\mu'"] & \cdot \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\lambda"] \arrow[rr, bend right=50, "T'"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow\mu'"] & \cdot \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\Xi"] & \cdot \arrow[u, "K'"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend left=60, "T^2"] \arrow[rr, phantom, bend left=30, "\Downarrow\mu"] & \cdot \arrow[r, "1"] & \cdot \\
\cdot \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\lambda"] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] \arrow[rr, phantom, bend right=30, "\Downarrow\mu'"] & \cdot \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\Xi"] & \cdot \arrow[u, "K'"']
\end{tikzcd}
$$

$$
=
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "1"] \arrow[rr, bend left=60, "T^2"] \arrow[rr, phantom, bend left=30, "\Downarrow\mu"] & \cdot \arrow[r, "T"] & \cdot \\
\cdot \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\Xi"] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] \arrow[rr, phantom, bend right=30, "\Downarrow\mu'"] & \cdot \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\lambda'"] & \cdot \arrow[u, "K'"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "1"] & \cdot \arrow[r, "T"] & \cdot \arrow[r, "T"] & \cdot \\
\cdot \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\Xi"] \arrow[rr, bend right=50, "T'"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow\mu'"] \arrow[rrr, bend right=60, "T'"'] & \cdot \arrow[u, "K'"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\lambda'"] & \cdot \arrow[u, "K'"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\lambda'"] & \cdot \arrow[u, "K'"']
\end{tikzcd}
$$

Recíprocamente, si Ξ cumple la condición de la proposición entonces

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "T"] \arrow[r, bend left=60, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow\eta"] & \cdot \\
\cdot \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\Xi"] & \cdot \arrow[u, "K'"']
\end{tikzcd}
$$

es una EM-deformación, puesto que se cumple que

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "T"] & \cdot \arrow[r, "T"] \arrow[r, bend left=60, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow\eta"] & \cdot \\
\cdot \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\lambda"] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] \arrow[rr, phantom, bend right=30, "\Downarrow\mu'"] & \cdot \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\Xi"] & \cdot \arrow[u, "K'"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "T"] \arrow[r, bend left=60, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow\eta"] & \cdot \arrow[r, "T"] & \cdot \\
\cdot \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\Xi"] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] \arrow[rr, phantom, bend right=30, "\Downarrow\mu'"] & \cdot \arrow[u, "K'"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\lambda'"] & \cdot \arrow[u, "K'"']
\end{tikzcd}
$$

□

Con la caracterización anterior de las EM-deformaciones, tenemos una descripción alternativa tanto de la composición vertical como de la horizontal. En particular, la composición horizontal adopta, haciendo uso de la notación de los párrafos precedentes, la forma más simple siguiente:

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\cdot \arrow[rr, "T"] \arrow[rr, bend left=70, "1"] \arrow[rr, bend left=35, phantom, "\Downarrow\eta"] & & \cdot \\
\cdot \arrow[u, "K"] \arrow[rr, "T'"] \arrow[urr, phantom, "\Swarrow\Xi"] & & \cdot \arrow[u, "K'"'] \\
\cdot \arrow[u, "K''"] \arrow[rr, "T''"'] \arrow[urr, phantom, "\Swarrow\Xi'"] & & \cdot \arrow[u, "K'''"']
\end{tikzcd}$$

Lo mismo que para las deformaciones de Kleisli, existen EM-deformaciones que tienen la propiedad adicional de factorizar a través de una transformación natural entre los functores subyacentes de los EM-morfismos.

Definition 61. Sean (K, λ) y (K', λ') EM-morfismos de $(\mathbf{C}, \mathbb{T})$ en $(\mathbf{C}', \mathbb{T}')$. Una deformación de Street de (K, λ) en (K', λ') es una transformación natural $\sigma\colon K \Longrightarrow K'$ tal que $\sigma T' \circ \lambda = \lambda' \circ T\sigma$, i.e., tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] & \mathbf{C} \\
\mathbf{C}' \arrow[u, bend left=50, "K"] \arrow[u, bend right=50, "K'"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\sigma}{\Rightarrow}"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\lambda \quad \Swarrow\lambda'"] & \mathbf{C}' \arrow[u, bend left=50, "K"] \arrow[u, bend right=50, "K'"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\sigma}{\Rightarrow}"]
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Cada deformación de Street determina una deformación de Eilenberg-Moore, tal como demostramos en la siguiente proposición.

Proposition 126. *Sea σ una deformación de Street de (K, λ) en (K', λ'). Entonces la transformación natural $K'\eta' \circ \sigma = \sigma T' \circ \lambda \circ \eta K = \lambda' \circ \eta \circ \sigma$ es una deformación de Eilenberg-Moore.*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "1"] & \mathbf{C} \\
\mathbf{C}' \arrow[u, "K"] \arrow[r, "1"] \arrow[r, bend right=60, "T'"'] \arrow[r, bend right=30, phantom, "\Downarrow\eta'"] \arrow[ur, phantom, "\overset{\sigma}{\Nearrow}"] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K'"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[r, bend left=50, "1"] \arrow[r, bend left=25, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathbf{C} \\
\mathbf{C}' \arrow[u, bend left=50, "K"] \arrow[u, bend right=50, "K'"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\sigma}{\Rightarrow}"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\lambda \quad \Swarrow\lambda'"] & \mathbf{C}' \arrow[u, bend left=50, "K"] \arrow[u, bend right=50, "K'"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\sigma}{\Rightarrow}"]
\end{tikzcd}$$

□

Decimos que una EM-deformación $\Xi\colon (K,\lambda) \rightsquigarrow (K',\lambda')$ es una deformación de Eilenberg-Moore-Street o, simplemente, una EM-St-deformación, si Ξ se obtiene a partir de una deformación de Street $\sigma\colon K \Longrightarrow K'$ de la manera indicada en la proposición anterior. Lo mismo que para las Kl-St-deformaciones, no toda deformación de Eilenberg-Moore puede obtenerse a partir de una deformación de Street.

El conjunto de las EM-St-deformaciones está cerrado bajo la composición, por lo que estas determinan una sub-2-categoría de $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{EM}}$, a la que denotamos como $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{EM,St}}$.

Definition 62. Sea $\mathbf{EM}$ la 2-categoría en la que las 0-células son los pares $(\mathbf{C},\mathbb{T})$, con $\mathbb{T}$ una mónada sobre $\mathbf{C}$, las 1-células de $(\mathbf{C},\mathbb{T})$ en $(\mathbf{C}',\mathbb{T}')$ los pares de functores (K,H), en los que $K\colon \mathbf{C}' \longrightarrow \mathbf{C}$, $H\colon \mathbf{EM}(\mathbb{T}') \longrightarrow \mathbf{EM}(\mathbb{T})$ y para los que $\mathrm{G}^{\mathbb{T}} \circ H = K \circ \mathrm{G}^{\mathbb{T}'}$, las 2-células de (K,H) en (K',H') las transformaciones naturales de H en H' y con identidades y composiciones las definidas a partir de las de sus componentes.

Proposition 127. *Las 2-categorías* $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{EM}}$ *y* $\mathbf{EM}^{\mathrm{tr}}$ *son isomorfas.*

Proof. Por la proposición 122 hay una correspondencia biunívoca entre las 1-células de $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})$ y las de $\mathbf{EM}(\mathbf{C})^{\mathrm{tr}}$. Cada EM-deformación Ξ determina una transformación natural τ_Ξ para la que se cumplen las relaciones de incidencia indicadas en los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbf{C},\mathbb{T}) \arrow[r, bend left, "{(K,\lambda)}"] \arrow[r, bend right, "{(K',\lambda')}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \Xi"] & (\mathbf{C}',\mathbb{T}')
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{EM}(\mathbb{T}) & \mathbf{EM}(\mathbb{T}') \arrow[l, bend right, "{(K,H^{\lambda})}"'] \arrow[l, bend left, "{(K',H^{\lambda'})}"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow \tau_\Xi"]
\end{tikzcd}
$$

En efecto, sea τ_Ξ la aplicación que a cada $\mathbb{T}'$-álgebra (A,α) en $\mathbf{EM}(\mathbb{T}')$ le asigna el morfismo $K'(\alpha)\circ\Xi_A$. Entonces, por la conmutatividad del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
TK(A) \arrow[rr, "(T\Xi)_A"] \arrow[dd, "(\lambda)_A"'] & & TK'T'(A) \arrow[r, "(TK'\alpha)_A"] \arrow[d, "(\lambda'T')_A"'] & TK'(A) \arrow[dd, "(\lambda')_A"] \\
 & (1) & K'T'T'(A) \arrow[d, "K'\mu'_A"'] \arrow[dr, "(K'T'\alpha)_A"] & (2) \\
KT'(A) \arrow[r, "(\Xi T')_A"] \arrow[d, "K(\alpha)"'] & K'T'T'(A) \arrow[r, "K'\mu'_A"] \arrow[dr, "(T'\alpha)_A"'] & K'T'(A) \arrow[dr, "K'\alpha"] & T'(A) \arrow[d, "K'\alpha"] \\
K(A) \arrow[rr, "\Xi_A"'] & (5) & K'T'(A) \arrow[r, "K'(\alpha)"'] & K'(A)
\end{tikzcd}
$$

en el que (1) conmuta porque Ξ es una deformación, (2) porque λ' es natural, (3) y (4) porque (A,α) es una $\mathbb{T}'$-álgebra y (5) porque Ξ es natural, se tiene que $(\tau_\Xi)_{(A,\alpha)}$ es un morfismo de $\mathbb{T}$-álgebras. Además, τ_Ξ es una transformación natural, puesto que, para cada morfismo de $\mathbb{T}'$-álgebras $f\colon (A,\alpha) \longrightarrow (B,\beta)$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
K(A) \arrow[r, "K(f)"] \arrow[d, "\Xi_A"'] & K(B) \arrow[d, "\Xi_B"] \\
K'T'(A) \arrow[r, "K'T'(f)"'] \arrow[d, "K'(\alpha)"'] & K'T'(B) \arrow[d, "K'(\beta)"] \\
K'(A) \arrow[r, "K'(f)"'] & K'(B)
\end{tikzcd}$$

Recíprocamente, cada 2-célula ζ en $\mathbf{EM}$ determina una EM-deformación Ξ_ζ con las relaciones de incidencia indicadas en los diagramas

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{EM}(\mathbb{T}) \arrow[r, phantom, "\Downarrow\zeta"] & \mathbf{EM}(\mathbb{T}') \arrow[l, bend right, "(K,H)"'] \arrow[l, bend left, "(K',H')"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\mathbf{C},\mathbb{T}) \arrow[r, bend left, "(K,\lambda^H)"] \arrow[r, bend right, "(K',\lambda^{H'})"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Xi_\zeta"] & (\mathbf{C}',\mathbb{T}')
\end{tikzcd}$$

Sea Ξ_ζ la aplicación que a cada $A \in \mathbf{C}$ le asigna $\zeta_{(T'(A),\mu'_A)} \circ K(\eta'_A)$. Si $f\colon A \longrightarrow B$ es un morfismo en $\mathbf{C}$, entonces se cumple que $T'(f)\colon (T'(A),\mu'_A) \longrightarrow (T'(B),\mu'_B)$ es un morfismo de $\mathbb{T}'$-álgebras, y por la naturalidad de ζ y η', el diagrama

$$\begin{tikzcd}
K(A) \arrow[r, "K(\eta'_A)"] \arrow[d, "K(f)"'] & KT'(A) \arrow[r, "\zeta_{(T'(A),\mu'_A)}"] \arrow[d, "KT'(f)"'] & K'T'(A) \arrow[d, "T'(f)"] \\
K(B) \arrow[r, "K(\eta'_B)"'] & KT'(B) \arrow[r, "\zeta_{(T'(B),\mu'_B)}"'] & K'T'(B)
\end{tikzcd}$$

conmuta, por lo que Ξ_ζ es una transformación natural de K en $K'T'$.

La transformación natural Ξ_ζ es una deformación precisamente si el diagrama

$$\begin{tikzcd}
TK \arrow[r, "\lambda^H"] \arrow[d, "T\Xi_\zeta"'] & KT' \arrow[r, "\Xi_\zeta T'"] & K'T'T' \arrow[d, "K'\mu'"] \\
TK'T' \arrow[r, "\lambda^{H'}"'] & K'T'T' \arrow[r, "K'\mu'"'] & K'T'
\end{tikzcd}$$

conmuta. Considérese el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
TK(A) \arrow[rr, "(\lambda^H)_A"] \arrow[dr, "(TK\eta')_A"] \arrow[dd, "(T\Xi_\zeta)_A"'] & & KT'(A) \arrow[r, "K\eta'_{T'(A)}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & KT'^2(A) \arrow[r, "\zeta_{T'^2(A),\mu'T'_A)}"] \arrow[d, "K\mu'_A"] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & K'T'^2(A) \arrow[dd, "K'\mu'_A"] \\
& TKT'(A) \arrow[ur, "(\mu'_A)^H"'] \arrow[dl, "T(\zeta_{(T'(A),\mu'_A)})"] \arrow[r, phantom, "(2)"] & {} & KT'(A) \arrow[dr, "\zeta_{(T'(A),\mu'_A)}"'] & \\
TK'T'(A) \arrow[rrrr, "(\mu'_A)^{H'}"] \arrow[dr, "(TK'\eta'T')_A"] \arrow[dd, "(\lambda^{H'})_A"'] & & & & K'T'(A) \\
& TK'T'^2(A) \arrow[rr, "(T'K'\mu')_A"'] \arrow[dl, "(\mu'T'T'_A)^{H'}"] & & TK'T'(A) \arrow[ur, "(\mu'_A)^{H'}"] \arrow[d, phantom, "(3)"] & \\
K'T'^2(A) \arrow[uurrrr, rounded corners, to path={-| (\tikztotarget)}, "K'\mu'_A"'] & & & {} &
\end{tikzcd}
$$

en el que todo conmuta, excepto, quizás, (1), (2) y (3). Ahora bien, como $\mu'_A\colon (T'T'(A),\mu'_{T'(A)}) \longrightarrow (T'(A),\mu'_A)$ es un homomorfismo de $\mathbb{T}'$-álgebras y H' es functor, (3) conmuta, y por ser ζ natural, el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
(T'T'(A),(\mu'_{T'(A)})^H) \arrow[r, "\mu'_A"] \arrow[d, "\zeta_{(T'T'(A),\mu'_{T'(A)})}"'] & (T'(A),(\mu'_A)^H) \arrow[d, "\zeta_{(T'(A),\mu'_A)}"] \\
(T'T'(A),(\mu'_{T'(A)})^{H'}) \arrow[r, "\mu'_A"'] & (T'(A),(\mu'_A)^{H'})
\end{tikzcd}
$$

conmuta, y por tanto, también (1) conmuta. Por otra parte, puesto que se cumple que $\zeta_{(T'(A),\mu'_A)}\colon (KT'(A),(\mu'_A)^H) \longrightarrow (K'T'(A),(\mu'_A)^{H'})$ es un homomorfismo de $\mathbb{T}'$-álgebras, (2) conmuta.

Los procesos descritos son inversos, por la conmutatividad de los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
K(A) \arrow[r, "(K\eta')_A"] \arrow[dr, "\Xi_A"'] \arrow[rrr, bend left=40, "(\Xi_{\tau_\Xi})_A"] & KT'(A) \arrow[r, "\Xi_{T'(A)}"] \arrow[rr, bend left=30, "(\tau_\Xi)_{(T'(A),\mu'_A)}"] \arrow[d, phantom, "(1)"] & K'T'T'(A) \arrow[r, "(K'\mu')_A"] & K'T'(A) \\
& K'T'(A) \arrow[ur, "(K'T'\eta')_A"] \arrow[urr, "\mathrm{id}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

$$\begin{tikzcd}
K(A) \arrow[r, "(K\eta')_A"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] \arrow[rr, bend left=40, "(\Xi_\zeta)_A"] \arrow[rrr, bend left=50, "(\zeta_{\Xi_\zeta})_{(A,\alpha)}"] & KT'(A) \arrow[r, "\zeta_{(T'A,\mu'_A)}"] \arrow[d, "K(\alpha)"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & K'T'(A) \arrow[r, "K'(\alpha)"] \arrow[d, "K'(\alpha)"] & K'(A) \\
& K(A) \arrow[r, "\zeta_{(A,\alpha)}"'] & K'(A) \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] &
\end{tikzcd}$$

en donde (1) conmuta porque Ξ es natural y (2) porque $\alpha\colon (T'A,\mu'_A) \longrightarrow (A,\alpha)$ es un homomorfismo de $\mathbb{T}'$-álgebras y ζ es natural.

Veamos la compatibilidad con las composiciones. Dada la situación

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{C},\mathbb{T}) \arrow[r, bend left=50, "(K,\lambda)"{name=U}] \arrow[r, "(K',\lambda')"{name=M, description}] \arrow[r, bend right=50, "(K'',\lambda'')"'{name=D}] & (\mathbf{C}',\mathbb{T}') \arrow[Rightarrow, from=U, to=M, "\Xi"] \arrow[Rightarrow, from=M, to=D, "\Xi'"]
\end{tikzcd}$$

se cumple que, para cada $(A,\alpha) \in \mathbf{EM}(\mathbb{T}')$, $\alpha\colon (T'A,\mu'_A) \longrightarrow (A,\alpha)$ es un homomorfismo de $\mathbb{T}'$-álgebras por lo que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
K'T'(A) \arrow[r, "K'(\alpha)"] \arrow[d, "(\Xi')_{T'(A)}"'] & K'(A) \arrow[d, "(\Xi')_A"] \\
K''T'T'(A) \arrow[d, "K''(\mu'_A)"'] & K''T'(A) \arrow[d, "K''(\alpha)"] \\
K''T'(A) \arrow[r, "K''(\alpha)"'] & K''(A)
\end{tikzcd}$$

conmuta. Pero entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
(\tau_{\Xi'\,\tilde{\circ}\,\Xi})_{(A,\alpha)} &= K''(\alpha) \circ (\Xi' \,\tilde{\circ}\, \Xi)_A \\
&= K''(\alpha) \circ (K''\mu')_A \circ (\Xi' T')_A \circ (\Xi)_A \\
&= K''(\alpha) \circ (\Xi')_A \circ K'(\alpha) \circ (\Xi)_A \\
&= (\tau_{\Xi'})_{(A,\alpha)} \circ (\tau_{\Xi})_{(A,\alpha)}
\end{aligned}$$

Para la composición horizontal, dada la situación

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{C},\mathbb{T}) \arrow[r, bend left=30, "(K,\lambda)"{name=A}] \arrow[r, bend right=30, "(K',\lambda')"'{name=B}] & (\mathbf{C}',\mathbb{T}') \arrow[r, bend left=30, "(K'',\lambda'')"{name=C}] \arrow[r, bend right=30, "(K''',\lambda''')"'{name=D}] & (\mathbf{C}'',\mathbb{T}'') \arrow[Rightarrow, from=A, to=B, "\Xi"] \arrow[Rightarrow, from=C, to=D, "\Xi'"]
\end{tikzcd}$$

se cumple que:

$$
\begin{aligned}
(\tau_{\Xi'\tilde{*}\Xi})_{(A,\alpha)} &= K'K'''(\alpha)\circ(\Xi'\,\tilde{*}\,\Xi)_A \\
&= K'K'''(\alpha)\circ(K'K'''\mu''\circ K'\Xi'T''\circ K'\lambda''\circ\Xi K'')_A \\
&= K'(K'''(\alpha)\circ(K'''\mu'')_A\circ(\Xi'T'')_A\circ(\lambda'')_A)\circ(\Xi K'')_A \\
&= K'(K'''(\alpha)\circ(\Xi')_A\circ K''(\alpha)\circ(\lambda'')_A)\circ(\Xi K'')_A \\
&= K'K'''(\alpha)\circ(K'\Xi')_A\circ K'K''(\alpha)\circ(K'\lambda'')_A\circ(\Xi K'')_A \\
&= K'K'''(\alpha)\circ(K'\Xi')_A\circ K'(K''(\alpha)\circ\lambda'')_A\circ(\Xi K'')_A \\
&= H^{\lambda'}(K'''(\alpha)\circ(\Xi')_A)\circ(\tau_\Xi)_{(K''(A),K''(\alpha)\circ(\lambda'')_A)} \\
&= (H^{\lambda'}\Xi')_{(A,\alpha)}\circ(\tau_\Xi H^{\lambda''})_{(A,\alpha)} \\
&= (H^{\lambda'}\tau_{\Xi'}\circ\tau_\Xi H^{\lambda''}_{(A,\alpha)} \\
&= (\tau_{\Xi'}*\tau_\Xi)_{(A,\alpha)}
\end{aligned}
$$

La compatibilidad con las identidades es inmediata, por lo que la construcción anterior, junto a la desarrollada en la proposición 122, determina un 2-isomorfismo de $\mathbf{Mon}_{\mathrm{EM}}$ en $\mathbf{EM}^{\mathrm{tr}}$. □

Una consecuencia inmediata de la anterior proposición es que las 2-categorías **Kl** y **EM** son simétricas. Si se considera que las construcciones de Kleisli y de Eilenberg-Moore representan las versiones formales de los aspectos sintáctico y semántico de las mónadas, y, por tanto, del álgebra desde un punto de vista categorial, entonces la proposición anterior expresa una de las formas de la dualidad entre sintaxis y semántica.

La imagen del isomorfismo anterior sobre $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{EM,St}}$ determina la sub-2-categoría de **EM** siguiente.

Definition 63. Sea $\mathbf{EM}_{\mathrm{St}}$ la 2-categoría en la que las 0-células son los pares $(\mathbf{C},\mathbb{T})$ con con $\mathbb{T}$ una mónada sobre $\mathbf{C}$, las 1-células de $(\mathbf{C},\mathbb{T})$ en $(\mathbf{C}',\mathbb{T}')$ los pares de functores (K,H), en los que $K\colon\mathbf{C}'\longrightarrow\mathbf{C}$, $H\colon\mathbf{EM}(\mathbb{T}')\longrightarrow\mathbf{EM}(\mathbb{T})$ y para los que $\mathrm{G}^{\mathbb{T}}\circ H = K\circ\mathrm{G}^{\mathbb{T}'}$, las 2-células de (K,H) en (K',H') los pares de transformaciones naturales (σ,τ), con $\sigma\colon K\Longrightarrow K'$ y $\tau\colon H\Longrightarrow H'$, tales que $\mathrm{G}^{\mathbb{T}}\sigma = \tau\,\mathrm{G}^{\mathbb{T}'}$, i.e., tales que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{EM}(\mathbb{T}) \arrow[r, "\mathrm{G}^{\mathbb{T}}"] & \mathbf{C} \\
\mathbf{EM}(\mathbb{T}') \arrow[u, bend left, "K"] \arrow[u, bend right, "K'"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\tau}{\Rightarrow}"] \arrow[r, "\mathrm{G}^{\mathbb{T}'}"'] & \mathbf{C}' \arrow[u, bend left, "H"] \arrow[u, bend right, "H'"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\sigma}{\Rightarrow}"]
\end{tikzcd}
$$

conmuta, y con identidades y composiciones las definidas a partir de las de sus componentes.

La 2-categoría $\mathbf{EM}_{\mathrm{St}}$ es una sub-2-categoría de $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{EM}}$ mediante el functor que olvida la primera componente de las 2-células.

Proposition 128. *Las 2-categorías* $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{EM,St}}$ *y* $\mathbf{EM}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{St}}$ *son isomorfas.* □

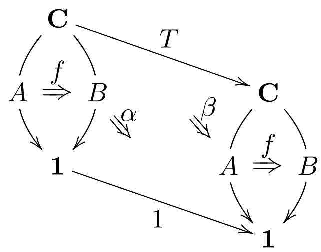
Las álgebras para una mónada pueden ser consideradas como EM-morfismos entre mónadas. Los homomorfismos entre álgebras corresponden entonces a las EM-deformaciones entre EM-morfismos de mónadas. Las EM-deformaciones entre álgebras son siempre deformaciones de Street.

Proposition 129. *Sea* $\mathbb{T}$ *una mónada sobre* $\mathbf{C}$. *Las categorías* $\mathbf{EM}(\mathbb{T})$ *y* $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{EM}}((\mathbf{C},\mathbb{T})(\mathbf{1},1))$ *son isomorfas.*

Proof. Las $\mathbb{T}$-álgebras (A,α) están en correspondencia biunívoca con los EM-morfismos de mónadas

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] & \mathbf{C} \\
\mathbf{1} \arrow[u, "A"] \arrow[r, "1"'] \arrow[ur, phantom, "\Searrow\alpha"] & \mathbf{1} \arrow[u, "A"']
\end{tikzcd}$$

Además, si $f\colon (A,\alpha) \longrightarrow (B,\beta)$ es un $\mathbb{T}$-homomorfismo, entonces es evidente que la conmutatividad de cualquiera de los dos diagramas siguientes implica la del otro



$$\begin{tikzcd}
T(A) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "\alpha"'] & T(B) \arrow[d, "\beta"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

□

5.3. **Morfismos y deformaciones algebraicas.** En esta sección presentamos una 2-categoría de mónadas, morfismos algebraicos y deformaciones algebraicas. Los morfismos y deformaciones algebraicas se definen como cuadrados adjuntos que contienen, simultáneamente, morfismos y deformaciones de Kleisli y de Eilenberg-Moore. La 2-categoría así obtenida es isomorfa a la sub-2-categoría plena para las 2-células de $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl}}$, tales que los functores subyacentes de las 1-células tienen un adjunto por la derecha, así como a la sub-2-categoría plena para las 2-células de $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{EM}}$ tales que los functores subyacentes de las 1-células tienen un adjunto por la izquierda.

Proposition 130. *Sean* $(\mathbf{C},\mathbb{T})$ *y* $(\mathbf{C}',\mathbb{T}')$ *dos mónadas y* $(J,K,\overline{\eta},\overline{\epsilon})\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}'$ *una adjunción . Entonces se tiene el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[rr, "T"] \arrow[d, shift right, "J"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & & \mathbf{C} \arrow[d, shift right, "J"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C}' \arrow[u, shift right, "K"'] \arrow[rr, "T'"'] & & \mathbf{C}' \arrow[u, shift right, "K"']
\end{tikzcd}$$

para el que existe, por la proposición 110, un cuadrado conmutativo de biyecciones Entonces las siguientes condiciones sobre las transformaciones naturales, son compatibles con las biyecciones anteriores:

(1) *Las transformaciones naturales* $\lambda_0\colon JT \Longrightarrow T'J$ *tales que*

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, bend left=70, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=35, "\Downarrow\eta"] \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\lambda"] & {} \arrow[d, "J"] \\
{} \arrow[r, "T'"'] & {}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "1"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow J"] & {} \arrow[d, "J"] \\
{} \arrow[r, "1"] \arrow[r, bend right=70, "T'"'] \arrow[r, phantom, bend right=35, "\Downarrow\eta'"] & {}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\lambda"] & {} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\lambda"] & {} \arrow[d, "J"] \\
{} \arrow[r, "T'"] \arrow[rr, bend right=50, "T'"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow\mu'"] & {} \arrow[r, "T'"] & {}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, bend left=70, "TT"] \arrow[r, phantom, bend left=35, "\Downarrow\mu"] \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\lambda"] & {} \arrow[d, "J"] \\
{} \arrow[r, "T'"'] & {}
\end{tikzcd}
$$

(2) *Las transformaciones naturales* $\lambda_1\colon T \Longrightarrow KT'J$ *tales que*

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, bend left=70, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=35, "\Downarrow\eta"] \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\lambda"] & {} \\
{} \arrow[r, "T'"'] & {} \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "1"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\overline{\eta}"] & {} \\
{} \arrow[r, "1"] \arrow[r, bend right=70, "T'"'] \arrow[r, phantom, bend right=35, "\Downarrow\eta'"] & {} \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\lambda"] & {} \arrow[r, "1"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\overline{\epsilon}"] & {} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\lambda"] & {} \\
{} \arrow[r, "T'"] \arrow[rrr, bend right=40, "T'"'] \arrow[rrr, phantom, bend right=20, "\Downarrow\mu'"] & {} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "1"] & {} \arrow[r, "T'"] & {} \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, bend left=70, "TT"] \arrow[r, phantom, bend left=35, "\Downarrow\mu"] \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\lambda"] & {} \\
{} \arrow[r, "T'"'] & {} \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
$$

(3) *Las transformaciones naturales* $\lambda_2\colon JTK \Longrightarrow T'$ *tales que*

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, bend left=70, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=35, "\Downarrow\eta"] \arrow[r, "T"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\lambda"] & {} \arrow[d, "J"] \\
{} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] & {}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "1"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\overline{\epsilon}"] & {} \arrow[d, "J"] \\
{} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "1"] \arrow[r, bend right=70, "T'"'] \arrow[r, phantom, bend right=35, "\Downarrow\eta'"] & {}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "T"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\lambda"] & {} \arrow[r, "1"] \arrow[d, "J"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\overline{\eta}"] & {} \arrow[r, "T"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\lambda"] & {} \arrow[d, "J"] \\
{} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"] \arrow[rrr, bend right=40, "T'"'] \arrow[rrr, phantom, bend right=20, "\Downarrow\mu'"] & {} \arrow[r, "1"] & {} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"] & {}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, bend left=70, "TT"] \arrow[r, phantom, bend left=35, "\Downarrow\mu"] \arrow[r, "T"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\lambda"] & {} \arrow[d, "J"] \\
{} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] & {}
\end{tikzcd}
$$

(4) *Las transformaciones naturales* $\lambda_3\colon TK \Longrightarrow KT'$ *tales que*

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, bend left=70, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=35, "\Downarrow\eta"] \arrow[r, "T"] \arrow[dr, phantom, "\searrow\lambda"] & {} \\
{} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] & {} \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "1"] \arrow[dr, phantom, "\searrow K"] & {} \\
{} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "1"] \arrow[r, bend right=70, "T'"'] \arrow[r, phantom, bend right=35, "\Downarrow\eta'"] & {} \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "T"] \arrow[dr, phantom, "\searrow\lambda"] & {} \arrow[r, "T"] \arrow[dr, phantom, "\searrow\lambda"] & {} \\
{} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"] \arrow[rr, bend right=50, "T'"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow\mu'"] & {} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"] & {} \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, bend left=70, "TT"] \arrow[r, phantom, bend left=35, "\Downarrow\mu"] \arrow[r, "T"] \arrow[dr, phantom, "\searrow\lambda"] & {} \\
{} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] & {} \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
$$

Definition 64. Sean $(\mathbf{C}, \mathbb{T})$ y $(\mathbf{C}', \mathbb{T}')$ dos mónadas. Un morfismo algebraico de mónadas, o, simplemente, un alg-morfismo de $(\mathbf{C}, \mathbb{T})$ en $(\mathbf{C}', \mathbf{T}')$ es un cuadrado adjunto

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[rr, "T"] \arrow[d, shift right, "J"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & & \mathbf{C} \arrow[d, shift right, "J"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C}' \arrow[rr, "T'"'] \arrow[u, shift right, "K"'] \arrow[urr, phantom, "\lambda"] & & \mathbf{C}' \arrow[u, shift right, "K"']
\end{tikzcd}$$

tal que sus componentes sean compatibles con las condiciones de la proposición anterior. Las identidades y composiciones de alg-morfismos se definen como las Ad-identidades y las Ad-composiciones de sus cuadrados adjuntos subyacentes.

A partir de la definición anterior, es inmediato que si $(J \dashv K, \lambda)$ es un alg-morfismo entonces (J, λ_0) es un Kl-morfismo de $(\mathbf{C}, \mathbb{T})$ en $(\mathbf{C}', \mathbb{T}')$ y (K, λ_3) es un EM-morfismo de $(\mathbf{C}, \mathbb{T})$ en $(\mathbf{C}', \mathbb{T}')$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda_0 \swarrow"] & \mathbf{C} \arrow[d, "J"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] & \mathbf{C}'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[dr, phantom, "\lambda_3 \searrow"] & \mathbf{C} \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] \arrow[u, "K"] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}$$

Recíprocamente, si (J, λ) es un Kl-morfismo de $(\mathbf{C}, \mathbb{T})$ en $(\mathbf{C}', \mathbf{T}')$ y el functor J tiene un adjunto por la derecha K, entonces λ da lugar a un alg-morfismo de $(\mathbf{C}, \mathbb{T})$ en $(\mathbf{C}', \mathbb{T}')$. Del mismo modo, si (K, λ) es un EM-morfismo de $(\mathbf{C}, \mathbb{T})$ en $(\mathbf{C}', \mathbb{T}')$ y K tiene un adjunto por la izquierda J, entonces λ da lugar a un alg-morfismo de $(\mathbf{C}, \mathbb{T})$ en $(\mathbf{C}', \mathbb{T}')$.

Definition 65. Sean

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[rr, "T"] \arrow[d, shift right, "J"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & & \mathbf{C} \arrow[d, shift right, "J"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C}' \arrow[rr, "T'"'] \arrow[u, shift right, "K"'] \arrow[urr, phantom, "\lambda"] & & \mathbf{C}' \arrow[u, shift right, "K"']
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[rr, "T"] \arrow[d, shift right, "J'"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & & \mathbf{C} \arrow[d, shift right, "J'"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C}' \arrow[rr, "T'"'] \arrow[u, shift right, "K'"'] \arrow[urr, phantom, "\lambda'"] & & \mathbf{C}' \arrow[u, shift right, "K'"']
\end{tikzcd}$$

un par de alg-morfismos de $(\mathbf{C}, \mathbb{T})$ en $(\mathbf{C}', \mathbb{T}')$. Una deformación algebraica de $(J \dashv K, \lambda)$ en $(J' \dashv K', \lambda')$ es un cuadrado adjunto

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[rr, "1"] \arrow[d, shift right, "J"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & & \mathbf{C} \arrow[d, shift right, "J'"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C}' \arrow[rr, "T'"'] \arrow[u, shift right, "K"'] \arrow[urr, phantom, "\Xi"] & & \mathbf{C}' \arrow[u, shift right, "K'"']
\end{tikzcd}$$

tal que

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, shift right=1.5ex, "J"'] \arrow[d, leftarrow, shift left=1.5ex, "K"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \arrow[dr, phantom, "\lambda"] & \mathbf{C} \arrow[r, "1"] \arrow[d, shift right=1.5ex, "J"'] \arrow[d, leftarrow, shift left=1.5ex, "K"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \arrow[dr, phantom, "\Xi"] & \mathbf{C} \arrow[d, shift right=1.5ex, "J'"'] \arrow[d, leftarrow, shift left=1.5ex, "K'"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"] \arrow[d, shift right=1.5ex, "1"'] \arrow[d, leftarrow, shift left=1.5ex, "1"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \arrow[drr, phantom, "\mu'"] & \mathbf{C}' \arrow[r, "T'"] & \mathbf{C}' \arrow[d, shift right=1.5ex, "1"'] \arrow[d, leftarrow, shift left=1.5ex, "1"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C}' \arrow[rr, "T'"'] & & \mathbf{C}'
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "1"] \arrow[d, shift right=1.5ex, "J"'] \arrow[d, leftarrow, shift left=1.5ex, "K"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \arrow[dr, phantom, "\Xi"] & \mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, shift right=1.5ex, "J'"'] \arrow[d, leftarrow, shift left=1.5ex, "K'"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \arrow[dr, phantom, "\lambda'"] & \mathbf{C} \arrow[d, shift right=1.5ex, "J'"'] \arrow[d, leftarrow, shift left=1.5ex, "K'"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"] \arrow[d, shift right=1.5ex, "1"'] \arrow[d, leftarrow, shift left=1.5ex, "1"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \arrow[drr, phantom, "\mu'"] & \mathbf{C}' \arrow[r, "T'"] & \mathbf{C}' \arrow[d, shift right=1.5ex, "1"'] \arrow[d, leftarrow, shift left=1.5ex, "1"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C}' \arrow[rr, "T'"'] & & \mathbf{C}'
\end{tikzcd}
$$

i.e., tal que $\mu' \overset{\mathrm{ad}}{\circ} (\Xi \overset{\mathrm{fn}}{\circ} \lambda) = \mu' \overset{\mathrm{ad}}{\circ} (\lambda' \overset{\mathrm{fn}}{\circ} \Xi)$.

Para cada alg-morfismo $(J \dashv K, \lambda)\colon (\mathbf{C}, \mathbb{T}) \longrightarrow (\mathbf{C}', \mathbb{T}')$, la identidad es el cuadrado adjunto determinado por la matriz

$$
\begin{pmatrix} J\eta' & K\eta' J \circ \eta^{J,K} \\ \eta' \circ \epsilon & \eta' K \end{pmatrix}
$$

La composición vertical de deformaciones algebraicas

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
(\mathbf{C}, \mathbb{T}) \arrow[r, bend left=50, "{(J \dashv K, \lambda)}"] \arrow[r, "{(J' \dashv K', \lambda')}" description] \arrow[r, bend right=50, "{(J'' \dashv K'', \lambda'')}"'] \arrow[r, phantom, shift left=4ex, "\Downarrow \Xi"] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\Downarrow \Xi'"] & (\mathbf{C}', \mathbb{T}')
\end{tikzcd}
$$

denotada como $\Xi' \mathbin{\tilde{\circ}} \Xi$, es el cuadrado adjunto $\mu' \overset{\mathrm{ad}}{\circ} (\Xi' \overset{\mathrm{fn}}{\circ} \Xi)$.

La composición horizontal de deformaciones algebraicas

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
(\mathbf{C}, \mathbb{T}) \arrow[r, bend left, "{(J \dashv K, \lambda)}"] \arrow[r, bend right, "{(J' \dashv K', \lambda')}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \Xi"] & (\mathbf{C}', \mathbb{T}') \arrow[r, bend left, "{(J'' \dashv K'', \lambda'')}"] \arrow[r, bend right, "{(J''' \dashv K''', \lambda''')}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \Xi'"] & (\mathbf{C}'', \mathbb{T}'')
\end{tikzcd}
$$

denotada como $\Xi' \mathbin{\tilde{*}} \Xi$, es el cuadrado adjunto

$$
\mu' \overset{\mathrm{ad}}{\circ} (\lambda'' \overset{\mathrm{fn}}{\circ} \Xi') \overset{\mathrm{ad}}{\circ} \Xi = \mu' \overset{\mathrm{ad}}{\circ} (\Xi' \overset{\mathrm{fn}}{\circ} \lambda''') \overset{\mathrm{ad}}{\circ} \Xi.
$$

Lo mismo que para los alg-morfismos, $\Xi\colon (J \dashv K, \lambda) \rightsquigarrow (J' \dashv K', \lambda')$ es una deformación algebraica exactamente si Ξ_0 es una deformación de Kleisli, o Ξ_3 es una deformación de Eilenberg-Moore.

Se tiene también aquí una caracterización alternativa de las deformaciones al estilo de las de Kleisli o de Eilenberg-Moore, reemplazando en la definición anterior las identidades en $\mathbf{C}$ por el functor T.

Definition 66. Sean $(J \dashv K, \lambda)$ y $(J' \dashv K', \lambda')$ dos alg-morfismos de $(\mathbf{C}, \mathbb{T})$ en $(\mathbf{C}', \mathbb{T}')$. Una deformación de Street de $(J \dashv K, \lambda)$ en $(J' \dashv K', \lambda')$ es un cuadrado adjunto

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[rr, "1"] \arrow[d, shift right=2, "J"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & & \mathbf{C} \arrow[d, shift right=2, "J'"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C}' \arrow[rr, "1"'] \arrow[u, shift right=2, "K"'] \arrow[rru, phantom, "\Xi"] & & \mathbf{C}' \arrow[u, shift right=2, "K'"']
\end{tikzcd}$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, shift right=2, "J"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \mathbf{C} \arrow[r, "1"] \arrow[d, shift right=2, "J"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \mathbf{C} \arrow[d, shift right=2, "J'"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] \arrow[u, shift right=2, "K"'] \arrow[ru, phantom, "\lambda"] & \mathbf{C}' \arrow[r, "1"'] \arrow[u, shift right=2, "K"'] \arrow[ru, phantom, "\Xi"] & \mathbf{C}' \arrow[u, shift right=2, "K'"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "1"] \arrow[d, shift right=2, "J"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, shift right=2, "J'"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \mathbf{C} \arrow[d, shift right=2, "J'"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "1"'] \arrow[u, shift right=2, "K"'] \arrow[ru, phantom, "\Xi"] & \mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] \arrow[u, shift right=2, "K'"'] \arrow[ru, phantom, "\lambda'"] & \mathbf{C}' \arrow[u, shift right=2, "K'"']
\end{tikzcd}$$

Dar una deformación de Street equivale a dar un par de transformaciones naturales (σ, τ), con $\sigma\colon J' \Longrightarrow J$ y $\tau\colon K \Longrightarrow K'$, tales que σ sea un Kl-St-deformación y τ una EM-St-deformación. Es inmediato que cada deformación de Street determina una deformación algebraica, aunque no toda deformación algebraica puede obtenerse a partir de una deformación de Street.

Las deformaciones de Street son transformaciones naturales entre los functores subyacentes de los alg-morfismos correspondientes que tienen la propiedad adicional de ser compatibles con las estructuras de las mónadas involucradas, pero que, a diferencia de las deformaciones algebraicas, no hacen un uso esencial de la estructura de mónada de la que está dotado el codominio.

Proposition 131. *Las mónadas, los alg-morfismos y las alg-deformaciones determinan un 2-categoría, denotada como* $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}}$. *Las deformaciones de Street entre alg-morfismos determinan una sub-2-categoría de* $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}}$ *denotada como* $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg,St}}$. □

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[rr, "T"] \arrow[d, bend right=50, "J\dashv K"'] \arrow[d, bend left=50, "J'\dashv K'"] & & \mathbf{D} \arrow[d, bend right=50, "J\dashv K"'] \arrow[d, bend left=50, "J'\dashv K'"] \\
\mathbf{C}' \arrow[rr, "T'"'] & \lambda \overset{\Xi}{\rightsquigarrow} \lambda' & \mathbf{D}'
\end{tikzcd}$$

5.4. **La fibración de las mónadas.** Si nos olvidamos de las 2-células, el functor de olvido de la categoría $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}}$ en la categoría de categorías y adjunciones, constituye una fibración, obtenida a través de la construcción de Ehresmann-Grothendieck para un cierto functor de $\mathbf{Adj}$ en $\mathbf{Cat}$.

Proposition 132. *Cualquier adjunción* $(J, K, \overline{\eta}, \overline{\epsilon})\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}'$ *determina un 2-functor* $(J, K, \overline{\eta}, \overline{\epsilon})^*\colon \mathbf{Mnd}(\mathbf{C}') \longrightarrow \mathbf{Mnd}(\mathbf{C})$, *que a cada mónada* $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ *le asigna la mónada* $(KTJ, K\eta J, K\mu J \circ KT\overline{\epsilon}TJ)$, *a cada morfismo de mónadas* $\lambda\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}'$ *el morfismo de mónadas* $K\lambda J$, *y a cada deformación* $\Xi\colon \lambda \rightsquigarrow \lambda'$ *la deformación* $\overline{G}\Xi\overline{F} \circ \overline{\eta}$.

Proof. Veamos que $(J, K, \overline{\eta}, \overline{\epsilon})^*(\mathbb{T})$ es una mónada sobre $\mathbf{C}$. Para ello, sea $(F, G, \eta, \epsilon)\colon \mathbf{C}' \longrightarrow \mathbf{E}$ una adjunción que de lugar a la mónada $\mathbb{T}$, e.g., la adjunción canónica entre $\mathbf{C}'$ y la categoría de álgebras de Kleisli (o de Eilenberg-Moore) sobre $\mathbb{T}$. Entonces componiendo las adjunciones del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift right=1.5ex, "J"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{C}' \arrow[l, shift right=1.5ex, "K"'] \arrow[r, shift right=1.5ex, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{E} \arrow[l, shift right=1.5ex, "G"']
\end{tikzcd}
$$

se obtiene la adjunción $(FJ, KG, K\eta J \circ \overline{\eta}, \epsilon \circ F\overline{\epsilon}G)\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{E}$, cuya mónada asociada es $(KGFJ, K\eta J \circ \overline{\eta}, KG(\epsilon \circ F\overline{\epsilon}G)FJ)$ que es $(J, K, \overline{\eta}, \overline{\epsilon})^*(\mathbb{T})$, puesto que se cumple

$$
\begin{aligned}
KG(\epsilon \circ F\overline{\epsilon}G)FJ &= K(G\epsilon F \circ GF\overline{\epsilon}GF)J \\
&= K(\mu \circ GF\overline{\epsilon}GF)J \\
&= K\mu J \circ KGF\overline{\epsilon}GFJ \\
&= K\mu J \circ KT\overline{\epsilon}TJ
\end{aligned}
$$

Alternativamente, podemos verificar directamente que $(J, K, \overline{\eta}, \overline{\epsilon})^*(\mathbb{T}) = (\widehat{T}, \widehat{\eta}, \widehat{\mu})$ es una mónada en virtud de la conmutatividad de los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
KTJ \arrow[r, "KTJ\overline{\eta}"] \arrow[rr, bend left=40, "\widehat{T}\widehat{\eta}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & KTJKJ \arrow[r, "KTJK\eta J"] \arrow[d, "KT\overline{\epsilon}J"] & (KTJ)^2 \arrow[d, "KT\overline{\epsilon}TJ"] & KJKTJ \arrow[l, "K\eta JKTJ"'] \arrow[d, "K\overline{\epsilon}TJ"] & KTJ \arrow[l, "\overline{\eta}KTJ"'] \arrow[ll, bend right=40, "\widehat{\eta}\widehat{T}"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}"] \\
& KTJ \arrow[r, "KT\eta J"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & KT^2J \arrow[d, "K\mu J"] & KTJ \arrow[l, "KT\eta J"] \arrow[dl, "\mathrm{id}"] & \\
& & KTJ & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(KTJ)^3 \arrow[r, "KTJKT\overline{\epsilon}TJ"] \arrow[d, "KT\overline{\epsilon}TJKTJ"] \arrow[rr, bend left=30, "\widehat{T}\widehat{\mu}"] \arrow[dd, bend right=60, "\widehat{\mu}\widehat{T}"'] & KTJKTTJ \arrow[r, "KTJK\mu J"] \arrow[d, "KT\overline{\epsilon}TTJ"] & (KTJ)^2 \arrow[d, "KT\overline{\epsilon}TJ"] \arrow[dd, bend left=60, "\widehat{\mu}"] \\
KTTJKTJ \arrow[r, "KTT\overline{\epsilon}TJ"'] \arrow[d, "K\mu JKTJ"] & KTTTJ \arrow[r, "KT\mu J"'] \arrow[d, "K\mu TJ"] & KTTJ \arrow[d, "K\mu J"] \\
(KTJ)^2 \arrow[r, "KT\overline{\epsilon}TJ"'] \arrow[rr, bend right=30, "\widehat{\mu}"'] & KTTJ \arrow[r, "K\mu J"'] & KTJ
\end{tikzcd}
$$

Si $\lambda\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}'$ es un morfismo de mónadas, entonces $(J, K, \overline{\eta}, \overline{\epsilon})^*(\lambda) = \widehat{\lambda}$ es un morfismo de mónadas, por la conmutatividad de los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Id} \arrow[d, "K\eta J"'] \arrow[dr, "K\eta' J"] & \\
KTJ \arrow[r, "K\lambda J"'] & KT'J
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(KTJ)^2 \arrow[r, "KTJK\lambda J"] \arrow[d, "KT\overline{\epsilon}TJ"] \arrow[rr, bend left, "\widehat{\lambda}\widehat{\lambda}"] \arrow[dd, bend right=60, "\widehat{\mu}"'] & KTJKT'J \arrow[r, "K\lambda JKT'J"] \arrow[d, "KT\overline{\epsilon}T'J"] & (KT'J)^2 \arrow[d, "KT'\overline{\epsilon}T'J"] \arrow[dd, bend left=60, "\widehat{\mu}'"] \\
KTTJ \arrow[r, "KT\lambda J"'] \arrow[d, "K\mu J"] & KTT'J \arrow[r, "K\lambda T'J"'] & KT'T'J \arrow[d, "K\mu' J"] \\
KTJ \arrow[rr, "K\lambda J"'] \arrow[rr, bend right, "\widehat{\lambda}"'] & & KT'J
\end{tikzcd}
$$

Si $\Xi\colon \lambda \rightsquigarrow \lambda'\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}'$, es una deformación en $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C}')$, entonces se cumple que $\mathrm{Mnd}(\overline{\mathbf{F}})(\Xi) = \overline{G}\Xi\overline{F} \circ \overline{\eta}$ es una deformación puesto que

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "\overline{F}"] & \mathbf{C}' \arrow[r, bend left, "T"] \arrow[r, bend right, "T'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\lambda"] \arrow[rrrr, bend right=70, "T'"'] \arrow[rrrr, phantom, bend right=40, "\Downarrow\mu'"] & \mathbf{C}' \arrow[r, "\overline{G}"] \arrow[rr, bend right=60, "1"'] & \mathbf{C} \arrow[r, "\overline{F}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\overline{\epsilon}"] \arrow[rrr, bend left=60, "1"] \arrow[rrr, phantom, bend left=30, "\Downarrow\overline{\eta}"] & \mathbf{C}' \arrow[r, bend left, "1"] \arrow[r, bend right, "T'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Xi"] & \mathbf{C}' \arrow[r, "\overline{G}"] & \mathbf{C} \\
& & & {} & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
= \begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "\overline{F}"] & \mathbf{C}' \arrow[r, bend left, "1"] \arrow[r, bend right, "T'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Xi"] \arrow[rrrr, bend right=70, "T'"'] \arrow[rrrr, phantom, bend right=40, "\Downarrow\mu'"] & \mathbf{C}' \arrow[r, "\overline{G}"] \arrow[rr, bend right=60, "1"'] & \mathbf{C} \arrow[r, "\overline{F}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\overline{\epsilon}"] \arrow[rrr, bend left=60, "1"] \arrow[rrr, phantom, bend left=30, "\Downarrow\overline{\eta}"] & \mathbf{C}' \arrow[r, bend left, "T"] \arrow[r, bend right, "T'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\lambda'"] & \mathbf{C}' \arrow[r, "\overline{G}"] & \mathbf{C} \\
& & & {} & & &
\end{tikzcd}
$$

La compatibilidad con las composiciones y las identidades se demuestra de manera similar. □

La construcción anterior se puede extender hasta un functor desde la categoría de adjunciones **Adj** hasta la categoría de 2-categorías y 2-functores $\mathbf{2-Cat}$.

Proposition 133. *De* **Adj** *en* $\mathbf{2-Cat}$ *existe un functor contravariante* Mnd*, que a cada categoría* $\mathbf{C}$ *le asigna* $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})$ *y a cada adjunción* $(J, K, \overline{\eta}, \overline{\epsilon})$ *de* $\mathbf{C}$ *en* $\mathbf{C}'$ *le asocia el 2-functor* $(J, K, \overline{\eta}, \overline{\epsilon})^* \colon \mathbf{Mnd}(\mathbf{C}') \longrightarrow \mathbf{Mnd}(\mathbf{C})$.

Proof. La preservación de las identidades es inmediata. Por lo que respecta a la composición de adjunciones, se cumple que si $\mathbf{J} = (J, K, \overline{\eta}, \overline{\epsilon}) \colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}'$ y $\mathbf{J}' = (J', K', \overline{\eta}', \overline{\epsilon}') \colon \mathbf{C}' \longrightarrow \mathbf{C}''$ son dos adjunciones y $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ una mónada sobre $\mathbf{C}''$, entonces $\mathrm{Mnd}(\mathbf{J}') \circ \mathrm{Mnd}(\mathbf{J})(\mathbb{T})$ coincide con $\mathrm{Mnd}(\mathbf{J}' \circ \mathbf{J})(\mathbb{T})$. En particular, para la multiplicación, se cumple que

$$\begin{aligned}
\mu^{\mathrm{Mnd}(\mathbf{J}')\circ\mathrm{Mnd}(\mathbf{J})(\mathbb{T})} &= K(K'\mu J' \circ K'T\overline{\epsilon}'TJ')J \circ KK'TJ'\overline{\epsilon}K'TJ'J \\
&= KK'\mu J'J \circ KK'T\overline{\epsilon}'TJ'J \circ KK'TJ'\overline{\epsilon}K'TJ'J \\
&= KK'\mu J'J \circ KK'T(\overline{\epsilon}' \circ J'\overline{\epsilon}K')TJ'J \\
&= \mu^{\mathrm{Mnd}(\mathbf{J}'\circ\mathbf{J})(\mathbb{T})}
\end{aligned}$$

□

La construcción de Ehresmann-Grothendieck aplicada a la composición del functor contravariante Mnd con el functor de olvido de las 2-células $U \colon \mathbf{2-Cat} \longrightarrow \mathbf{Cat}$, determina la categoría $\int^{\mathbf{Adj}} U \circ \mathrm{Mnd}$, que tiene como objetos los pares $(\mathbf{C}, \mathbb{T})$, en los que $\mathbb{T}$ una mónada sobre $\mathbf{C}$, y como morfismos de $(\mathbf{C}, T)$ en $(\mathbf{C}', T')$ los pares $(\mathbf{J}, \lambda)$ para los que se cumple que $\mathbf{J} = (J, K, \overline{\eta}, \overline{\epsilon}) \colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}'$ es una adjunción y $\lambda \colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathrm{Mnd}(\mathbf{J})(\mathbb{T}')$ un morfismo de mónadas en $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})$.

Proposition 134. *La categoría* $\int^{\mathbf{Adj}} U \circ \mathrm{Mnd}$ *es isomorfa a la categoría* $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}}$ *de mónadas y morfismos algebraicos.*

Proof. Ambas categorías tienen los mismos objetos. Además, los morfismos $(J \dashv K, \lambda) \colon (\mathbf{C}, \mathbb{T}) \longrightarrow (\mathbf{C}, \mathbb{T}')$ en la categoría $\int^{\mathbf{Adj}} U \circ \mathrm{Mnd}$ determinan cuadrados adjuntos mediante los transpuestos de λ. Por la proposición 130, los pares conjugados de tales cuadrados adjuntos son, respectivamente, morfismos de Kleisli y de Eilenberg-Moore, y por tanto, el cuadrado adjunto es un morfismo algebraico.

Recíprocamente, dado un morfismo en $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}}$, su adjunción subyacente, junto con la componente 1-ésima de su cuadrado adjunto subyacente, determinan un morfismo en $\int^{\mathbf{Adj}} U \circ \mathrm{Mnd}$. □

Por la proposición anterior, el functor de olvido de la categoría $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}}$ en **Adj** que asigna a cada par $(\mathbf{C}, \mathbb{T})$ su categoría subyacente $\mathbf{C}$ y a cada alg-morfismo de mónadas $(J \dashv K, \lambda)$ su adjunción subyacente, es una fibración.

No parece haber, sin embargo, ninguna estructura de 2-categoría sobre **Adj** de tal manera que la construcción de Ehresmann-Grothendieck para los 2-functores en $\mathbf{2-Cat}$, dé lugar a la 2-categoría de mónadas, alg-morfismos y alg-deformaciones (o, en particular, deformaciones de Street). Si como 2-células en **Adj** tomamos los pares conjugados, entonces no existe, en general, una manera obvia de asociarles transformaciones 2-naturales, puesto que una de las dos componentes del par conjugado parece ir en el sentido erróneo. Pero si invertimos el sentido de una de las dos componentes, y les imponemos ciertas condiciones, de modo que nos permitan asociarles transformaciones 2-naturales, entonces las adjunciones consideradas son necesariamente isomorfas.

6. Adjunciones y mónadas.

En esta sección definimos ciertas 2-categorías de adjunciones, que nos permiten extender hasta un 2-functor la asociación clásica que a adjunciones les asigna mónadas. A los morfismos y deformaciones de Kleisli y de Eilenberg-Moore entre mónadas los caracterizamos, respectivamente, como la imagen de morfismos y deformaciones de Kleisli y de Eilenberg-Moore entre las adjunciones. Las construcciones de Kleisli y de Eilenberg-Moore son, respectivamente, 2-adjuntos a izquierda y derecha de tales 2-functores.

6.1. **Adjunciones.** Las adjunciones pueden ser consideradas como los objetos de una categoría, cuyos morfismos son los cuadrados adjuntos. En ese caso, denotamos mediante $(J, \delta, H)\colon F \dashv G \longrightarrow F' \dashv G'$ la existencia de un cuadrado adjunto

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, bend right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\delta"] & \mathbf{D} \arrow[l, bend right, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, bend right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}' \arrow[l, bend right, "G'"']
\end{tikzcd}$$

considerado como un morfismo de adjunciones de $F \dashv G$ en $F' \dashv G'$.

Proposition 135. *Las adjunciones y los cuadrados adjuntos determinan una categoría, denotada como* **Ad**.

Proof. Es suficiente definir las identidades y composición en **Ad** como las Fun-identidades y la Fun-composición de cuadrados adjuntos. □

La categoría **Ad** tiene una estructura adicional de 2-categoría, tal como recoge la siguiente definición.

Definition 67. Sean (J, δ, H) y (J', δ', H') dos cuadrados adjuntos de $F \dashv G$ en $F' \dashv G'$. Una deformación del primero en el segundo es una transformación natural τ de H en H'.

Proposition 136. *Las adjunciones, los cuadrados adjuntos y las deformaciones constituyen una 2-categoría, denotada como* **Ad**.

Proof. Para las deformaciones de cuadrados adjuntos existen identidades, composiciones horizontales y composiciones verticales, definidas como las de sus transformaciones naturales subyacentes. □

Definition 68. Sean (J, δ, H) y (J', δ', H') dos cuadrados adjuntos de $F \dashv G$ en $F' \dashv G'$. Una deformación del primero en el segundo es de Street, si existe una transformación natural $\sigma\colon J \Longrightarrow J'$ tal que el par (σ, τ) es compatible con los cuadrados adjuntos respectivos, i.e., si alguno, y por consiguiente, todos, los diagramas siguientes conmutan

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[d, bend right=50, "J"'] \arrow[d, bend left=50, "J'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\sigma}{\Rightarrow}"] & \arrow[d, phantom, "\overset{\delta_0}{\Rightarrow}\quad\overset{\delta_0'}{\Rightarrow}"] & \mathbf{D} \arrow[d, bend right=50, "H"'] \arrow[d, bend left=50, "H'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\tau}{\Rightarrow}"] \\
\mathbf{C}' \arrow[rr, "F'"'] & & \mathbf{D}'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[d, bend right=50, "J"'] \arrow[d, bend left=50, "J'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\sigma}{\Rightarrow}"] & \arrow[d, phantom, "\overset{\delta_1}{\Rightarrow}\quad\overset{\delta_1'}{\Rightarrow}"] & \mathbf{D} \arrow[d, bend right=50, "H"'] \arrow[d, bend left=50, "H'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\tau}{\Rightarrow}"] \\
\mathbf{C}' & & \mathbf{D}' \arrow[ll, "G'"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[d, bend right=50, "J"'] \arrow[d, bend left=50, "J'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\sigma}{\Rightarrow}"] & \arrow[d, phantom, "\overset{\delta_2}{\Rightarrow}\quad\overset{\delta_2'}{\Rightarrow}"] & \mathbf{D} \arrow[ll, "G"'] \arrow[d, bend right=50, "H"'] \arrow[d, bend left=50, "H'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\tau}{\Rightarrow}"] \\
\mathbf{C}' \arrow[rr, "F'"'] & & \mathbf{D}'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[d, bend right=50, "J"'] \arrow[d, bend left=50, "J'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\sigma}{\Rightarrow}"] & \arrow[d, phantom, "\overset{\delta_3}{\Swarrow}\quad\overset{\delta_3'}{\Swarrow}"] & \mathbf{D} \arrow[ll, "G"'] \arrow[d, bend right=50, "H"'] \arrow[d, bend left=50, "H'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\tau}{\Rightarrow}"] \\
\mathbf{C}' & & \mathbf{D}' \arrow[ll, "G'"]
\end{tikzcd}$$

La composición de deformaciones de Street es una deformación de Street. La sub-2-categoría de **Ad** determinada por las deformaciones de Street se denota como $\mathbf{Ad}_{\mathrm{St}}$. Esta se puede obtener a partir de la categoría triple **AdFun**, tomando como 0-células las Fun-identidades, como 1-células los cuadrados adjuntos y como 2-células las 3-células en **AdFun** tales que sus transformaciones conjugadas son identidades.

6.2. **Cuadrados adjuntos de Kleisli.** No todo cuadrado adjunto, considerado como un morfismo de adjunciones, da lugar un morfismo entre las mónadas asociadas a las adjunciones correspondientes. Sin embargo, para una cierta clase de cuadrados adjuntos esta asociación sí es posible.

Definition 69. Un cuadrado adjunto de Kleisli es un cuadrado adjunto

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift right=1.5ex, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\delta"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right=1.5ex, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, shift right=1.5ex, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right=1.5ex, "G'"']
\end{tikzcd}$$

tal que su componente 0-ésima, δ_0, es un isomorfismo natural.

Puesto que la composición de dos cuadrados adjuntos de Kleisli es un cuadrado adjunto de Kleisli, estos determinan una sub-2-categoría de **Ad**.

Definition 70. Denotamos mediante $\mathbf{Ad}_{\mathrm{Kl}}$ la sub-2-categoría plena para las 2-células de **Ad** determinada por los cuadrados adjuntos de Kleisli. Las 1-células en $\mathbf{Ad}_{\mathrm{Kl}}$ se denominan, abreviadamente, Kl-cuadrados.

Lemma 9. *Sea* $(J, \delta, H)\colon F \dashv G \longrightarrow F' \dashv G'$ *un Kl-cuadrado. Entonces se cumplen las siguientes ecuaciones*

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend left=60, "1"] \arrow[rr, phantom, bend left=30, "\Downarrow\eta"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\delta_0^{-1} \Swarrow"] & \cdot \arrow[r, "G"] \arrow[d, "H"] \arrow[dr, phantom, "\delta_3 \Swarrow"] & \cdot \arrow[d, "J"] \\
\cdot \arrow[r, "F'"'] & \cdot \arrow[r, "G'"'] & \cdot
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "1"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "J \Swarrow"] & \cdot \arrow[d, "J"] \\
\cdot \arrow[r, "1"] \arrow[dr, bend right, "F'"'] \arrow[r, phantom, bend right=40, "\Downarrow\eta'"] & \cdot \\
& \cdot \arrow[u, bend right, "G'"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "G"] \arrow[d, "H"'] \arrow[dr, phantom, "\delta_3 \Swarrow"] & \cdot \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"] \arrow[dr, phantom, "\delta_0^{-1} \Swarrow"] & \cdot \arrow[d, "H"] \\
\cdot \arrow[r, "G'"] \arrow[rr, bend right=60, "1"'] \arrow[rr, phantom, bend right=30, "\Downarrow\epsilon'"] & \cdot \arrow[r, "F'"] & \cdot
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& \cdot \arrow[dr, bend left, "F"] & \\
\cdot \arrow[ur, bend left, "G"] \arrow[rr, "1"] \arrow[rr, phantom, bend left=40, "\Downarrow\epsilon"] \arrow[d, "H"'] \arrow[drr, phantom, "H \Swarrow"] & & \cdot \arrow[d, "H"] \\
\cdot \arrow[rr, "1"'] & & \cdot
\end{tikzcd}
$$

Proof. Es suficiente observar que

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend left=60, "1"] \arrow[rr, phantom, bend left=30, "\Downarrow\eta"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\delta_0^{-1} \Swarrow"] & \cdot \arrow[r, "G"] \arrow[d, "H"] \arrow[dr, phantom, "\delta_3 \Swarrow"] & \cdot \arrow[d, "J"] \\
\cdot \arrow[r, "F'"'] & \cdot \arrow[r, "G'"'] & \cdot
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend left=60, "1"] \arrow[rr, phantom, bend left=30, "\Downarrow\eta"] \arrow[ddd, "J"'] \arrow[dddr, phantom, "\delta_0^{-1} \Swarrow"] & \cdot \arrow[r, "G"] \arrow[d, "1"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\epsilon}{\Leftarrow}"] & \cdot \arrow[d, "1"] \\
& \cdot \arrow[d, "H"] \arrow[dr, phantom, "\delta_0 \Nwarrow"] & \cdot \arrow[l, "F"'] \arrow[d, "J"] \\
& \cdot \arrow[d, "1"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\eta'}{\Leftarrow}"] & \cdot \arrow[l, "F'"'] \arrow[d, "1"] \\
\cdot \arrow[r, "F'"'] & \cdot \arrow[r, "G'"'] & \cdot
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "1"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "J \Swarrow"] & \cdot \arrow[d, "J"] \\
\cdot \arrow[r, "1"] \arrow[dr, bend right, "F'"'] \arrow[r, phantom, bend right=40, "\Downarrow\eta'"] & \cdot \\
& \cdot \arrow[u, bend right, "G'"']
\end{tikzcd}
$$

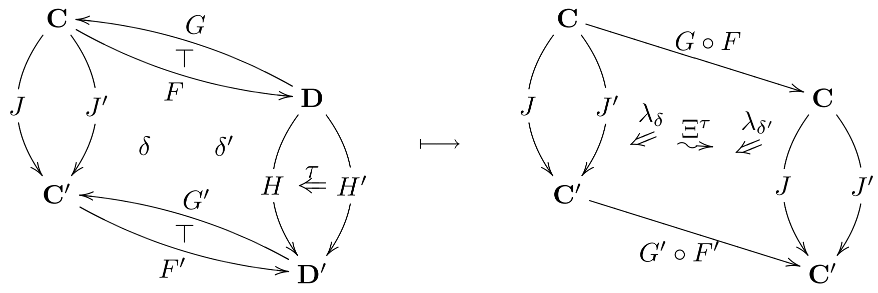
La demostración para la segunda ecuación es formalmente idéntica. □

De la 2-categoría $\mathbf{Ad}_{\mathrm{Kl}}$ en la 2-categoría conjugada de $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl}}$ existe un 2-functor que asigna a cada adjunción su mónada correspondiente, a cada cuadrado adjunto de Kleisli un Kl-morfismo de mónadas y a cada deformación de Kl-cuadrados una Kl-deformación. Este 2-functor tiene un 2-adjunto por la izquierda, y que se obtiene, esencialmente, componiendo el 2-isomorfismo de $\mathbf{Mnd}^{\mathrm{cn}}_{\mathrm{Kl}}$ en $\mathbf{Kl}$ con el 2-functor de inclusión que asocia a cada objeto de $\mathbf{Kl}$ su adjunción de Kleisli correspondiente, a cada 1-célula el Kl-cuadrado obtenido mediante las transformaciones naturales transpuestas de la identidad del cuadrado conmutativo correspondiente a la 1-célula, y que es la identidad en las 2-células. De esto se sigue que la sub-2-categoría plena de

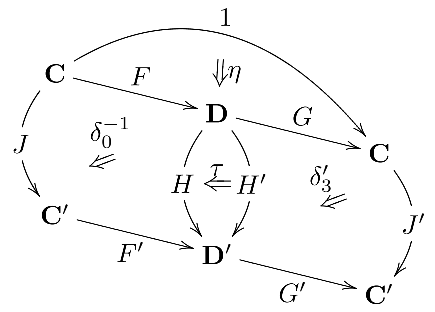
$\mathbf{Ad}_{\mathrm{Kl}}$ determinada por las adjunciones de Kleisli es una subcategoría correflectiva de $\mathbf{Ad}_{\mathrm{Kl}}$.

Proposition 137. *De la 2-categoría $\mathbf{Ad}_{\mathrm{Kl}}$ en la 2-categoría $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl}}^{\mathrm{cn}}$ existe un 2-functor $\mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}$, que a cada adjunción $(F \dashv G, \eta, \epsilon)$ le hace corresponder la mónada $(G \circ F, \eta, G\epsilon F)$, a cada Kl-cuadrado (J, δ, H), el Kl-morfismo (J, λ_δ) en donde $\lambda_\delta = G\delta_0^{-1} \circ \delta_3 F$, y a cada deformación $\tau\colon (J', \delta', H') \longrightarrow (J, \delta, H)$ la Kl-deformación $\Xi^\tau = G'\delta_0^{-1} \circ G'\tau F \circ \delta_3' F \circ J'\eta$.*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Ad}_{\mathrm{Kl}} \arrow[rrr, "\mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}"] & & & \mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl}} \end{tikzcd}$$



donde Ξ^τ se obtiene a partir del diagrama



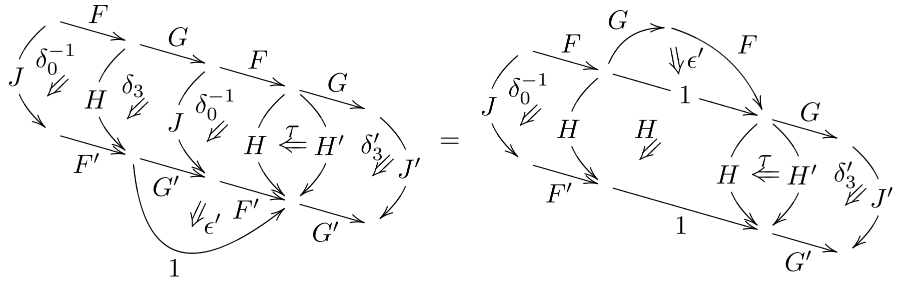
Proof. Sea $(J, \delta, H)\colon F \dashv G \longrightarrow F' \dashv G'$ un Kl-cuadrado. A partir del lema anterior es inmediato comprobar que la transformación natural

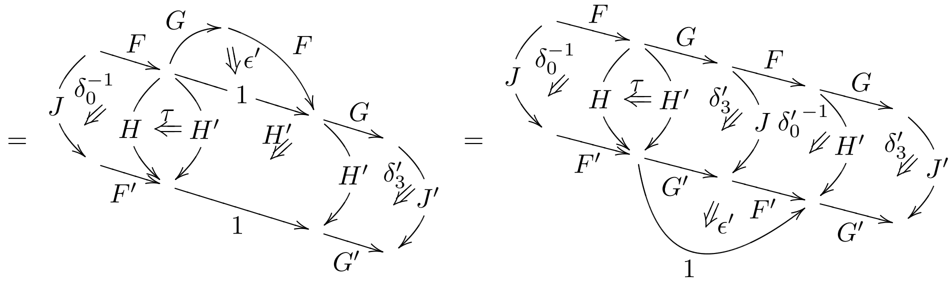
$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\delta_0^{-1} \Swarrow"] & \mathbf{D} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "H"] \arrow[dr, phantom, "\delta_3 \Swarrow"] & \mathbf{C} \arrow[d, "J"] \\ \mathbf{C}' \arrow[r, "F'"'] & \mathbf{D}' \arrow[r, "G'"'] & \mathbf{C}' \end{tikzcd}$$

es un Kl-morfismo de mónadas.

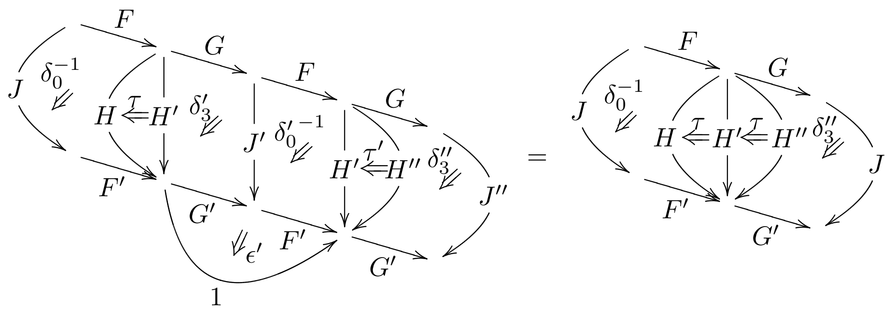
La compatibilidad con la identidad y las composiciones es inmediata.

Por el lema, Ξ^τ es una deformación, puesto que



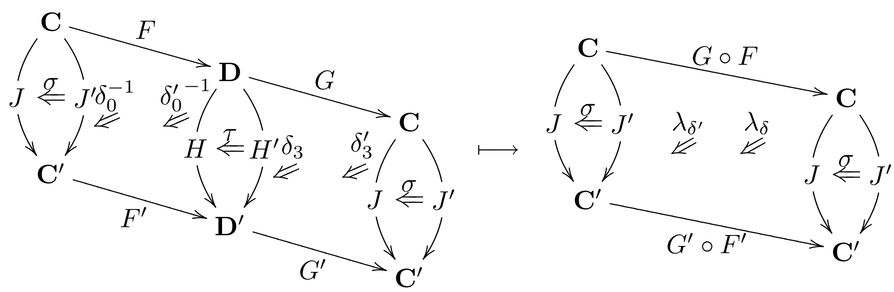


La compatibilidad con las 2-identidades es inmediata. También lo es la compatibilidad con la composición horizontal, haciendo uso de la definición alternativa de la composición horizontal de Kl-deformaciones. Para la composición vertical, se cumple que



□

Las deformaciones de Street entre Kl-cuadrados se transforman en Kl-deformaciones a través del 2-functor $\mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}$. Denotamos mediante $\mathrm{Md}_{\mathrm{Kl,St}}$ la birrestricción de $\mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}$ a $\mathbf{Ad}_{\mathrm{Kl,St}}$ y a $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl,St}}$. La acción de $\mathrm{Md}_{\mathrm{Kl,St}}$ sobre una deformación de Street (σ, τ) es la aplicación



El 2-functor $\mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}$ resulta de la composición del 2-functor de $\mathbf{Ad}_{\mathrm{Kl}}$ en $\mathbf{Kl}$ que olvida todas las componentes de los cuadrados adjuntos de Kleisli excepto la primera, y del 2-isomorfismo existente entre $\mathbf{Kl}$ y $\mathbf{Mnd}^{\mathrm{cn}}_{\mathrm{Kl}}$.

Proposition 138. *De* $\mathbf{Mnd}^{\mathrm{cn}}_{\mathrm{Kl}}$ *en* $\mathbf{Ad}_{\mathrm{Kl}}$ *existe un 2-functor* Kl*, que a un par* $(\mathbf{C}, \mathbb{T})$ *le asigna la adjunción canónica* $(\mathrm{F}_{\mathbb{T}}, \mathrm{G}_{\mathbb{T}})$*, a un Kl-morfismo* (J, λ)*, el Kl-cuadrado* $(J, \delta_\lambda, H_\lambda)$*, en el que* H_λ *es el functor asociado a* λ *por la biyección de la proposición 114 y* δ_λ *el cuadrado adjunto determinado por el cuadrado conmutativo correspondiente, y a una Kl-deformación* $\tau\colon (J, \lambda) \longrightarrow (J', \lambda')$ *la deformación* τ^{Ξ} *asociada a* Ξ *por la biyección de la proposición 119* □

Las deformaciones de Street entre Kl-morfismos de mónadas se transforman en deformaciones de Street entre Kl-cuadrados a través del 2-functor Kl. La birrestricción de Kl a $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl,St}}$ y a $\mathbf{Ad}_{\mathrm{Kl,St}}$ se denota como $\mathrm{Kl}_{\mathrm{St}}$.

Proposition 139. *El 2-functor* Kl *es 2-adjunto por la izquierda del 2-functor* $\mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Ad}_{\mathrm{Kl}} \arrow[r, shift left=2, "\mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}"] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{Mnd}^{\mathrm{cn}}_{\mathrm{Kl}} \arrow[l, shift left=2, "\mathrm{Kl}"]
\end{tikzcd}$$

Proof. Nos proponemos demostrar que para cada adjunción existe un morfismo universal desde el 2-functor Kl hasta ella, i.e., que si $F \dashv G$ es una adjunción con mónada asociada $\mathbb{T}$, entonces se cumple que existe un Kl-cuadrado $\epsilon_{F\dashv G} \colon \mathrm{F}_{\mathbb{T}} \dashv \mathrm{G}_{\mathbb{T}} \longrightarrow F \dashv G$ tal que, para cada par $(\mathbf{A}, \mathbb{M})$, con $\mathbb{M}$ una mónada sobre $\mathbf{A}$ y cada Kl-cuadrado $(J, \delta, H) \colon \mathrm{F}_{\mathbb{M}} \dashv \mathrm{G}_{\mathbb{M}} \longrightarrow F \dashv G$, el Kl-morfismo de mónadas $(J, \lambda_\delta) \colon (\mathbf{A}, \mathbb{M}) \longrightarrow (\mathbf{C}, \mathbb{T})$ es, salvo isomorfismo, el único para el que existe una deformación inversible $\theta_\delta \colon (J, \delta, H) \Longrightarrow \epsilon_{F\dashv G} \circ \mathrm{Kl}(J, \lambda_\delta)$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{F}_{\mathbb{M}} \dashv \mathrm{G}_{\mathbb{M}} \arrow[d, "\mathrm{Kl}(J,\lambda_\delta)"'] \arrow[dr, "{(J,\delta,H)}"] \arrow[d, phantom, shift left=8, "\overset{\theta_\delta}{\Lleftarrow}"] & \\
\mathrm{F}_{\mathbb{T}} \dashv \mathrm{G}_{\mathbb{T}} \arrow[r, "\epsilon_{F\dashv G}"'] & F \dashv G
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
(\mathbf{A}, \mathbb{M}) \arrow[d, "{(J,\lambda_\delta)}"] \\
(\mathbf{C}, \mathbb{T})
\end{tikzcd}$$

y que, para cada deformación $\tau \colon (J', \delta', H') \longrightarrow (J, \delta, H)$, la Kl-deformación $\Xi^\tau \colon (J, \lambda_\delta) \longrightarrow (J', \lambda_{\delta'})$ es la única que hace conmutativo el triángulo izquierdo del diagrama

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \mathrm{F}_{\mathbb{M}} \dashv \mathrm{G}_{\mathbb{M}} \arrow[dl, bend right, "\mathrm{Kl}(J,\lambda_\delta)"'] \arrow[dr, bend left, "\mathrm{Kl}(J',\lambda_{\delta'})"] \arrow[drrr, "{(J,\delta,H)}"] \arrow[drrrr, bend left, "{(J',\delta',H')}"] & & & & \\
\arrow[rr, phantom, "\overset{\mathrm{Kl}(\Xi^\tau)}{\Leftarrow}"] & & \arrow[rr, phantom, "\overset{\tau}{\Lleftarrow}"] & & & \\
& \mathrm{F}_{\mathbb{T}} \dashv \mathrm{G}_{\mathbb{T}} \arrow[from=ul, bend right] \arrow[from=ur, bend left] \arrow[rrr, "\epsilon_{F\dashv G}"'] \arrow[r, phantom, "\overset{\theta_\delta}{\Lleftarrow}"] & \arrow[r, phantom, "\overset{\theta_{\delta'}}{\Lleftarrow}"] & & F \dashv G
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\mathbf{A}, \mathbb{M}) \arrow[d, bend right=50, "{(J,\lambda_\delta)}"'] \arrow[d, bend left=50, "{(J',\lambda_{\delta'})}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Xi^\tau}{\Rrightarrow}"] \\
(\mathbf{C}, \mathbb{T})
\end{tikzcd}$$

Sea $F \dashv G \colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ una adjunción y $\mathbb{T}$ su mónada asociada. A partir del functor de comparación de Kleisli $L \colon \mathbf{Kl}(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathbf{D}$ se obtiene un Kl-cuadrado, $(1, \delta^L, L)$ de $\mathrm{F}_{\mathbb{T}} \dashv \mathrm{G}_{\mathbb{T}}$ en $F \dashv G$, por la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "\mathrm{F}_{\mathbb{T}}"] \arrow[d, "1"'] & \mathbf{Kl}(\mathbb{T}) \arrow[r, "\mathrm{G}_{\mathbb{T}}"] \arrow[d, "L"] & \mathbf{C} \arrow[d, "1"] \\
\mathbf{C} \arrow[r, "F"'] & \mathbf{D} \arrow[r, "G"'] & \mathbf{C}
\end{tikzcd}$$

y el hecho de que las transformaciones naturales identidad en los cuadrados del diagrama anterior son conjugadas entre si. El Kl-cuadrado $(1, \delta^L, L)$ es el valor de la counidad de la 2-adjunción buscada sobre $F \dashv G$. Sea $\mathbb{M}$ una mónada sobre $\mathbf{A}$ y (J, δ, H) un Kl-cuadrado de $\mathrm{F}_{\mathbb{M}} \dashv \mathrm{G}_{\mathbb{M}}$ en $F \dashv G$. Entonces $\mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}(J, \delta, H) = (J, \lambda_\delta)$ es un Kl-morfismo de mónadas.

Sea $(J, \delta_{\lambda_\delta}, H_{\lambda_\delta})$ su imagen bajo el functor Kl. Entonces se tiene la situación descrita por el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[rr, "\mathrm{F}_{\mathbb{M}}"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dddr, "J"] & & \mathbf{Kl}(\mathbb{M}) \arrow[rr, "\mathrm{G}_{\mathbb{M}}"] \arrow[d, "H_{\lambda_\delta}"'] \arrow[dddr, "H"] \arrow[dr, phantom, "(\delta_{\lambda_\delta})_3 \Leftarrow"] & & \mathbf{A} \arrow[d, "J"'] \arrow[dddr, "J"] & \\
\mathbf{C} \arrow[rr, "\mathrm{F}_{\mathbb{T}}"] \arrow[ddr, "1"'] & & \mathbf{Kl}(\mathbb{T}) \arrow[rr, "\mathrm{G}_{\mathbb{T}}", "\delta_3 \Downarrow"'] \arrow[ddr, "L"'] & & \mathbf{C} \arrow[ddr, "1"'] & \\
& & & \delta_3^L = & & \\
& \mathbf{C} \arrow[rr, "F"'] & & \mathbf{D} \arrow[rr, "G"'] & & \mathbf{C}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "M"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda_\delta \Downarrow"] & \mathbf{A} \arrow[d, "J"] \\
\mathbf{C} \arrow[r, "T"'] & \mathbf{C}
\end{tikzcd}
$$

Sea θ_δ la aplicación que a un a en $\mathbf{Kl}(\mathbb{M})$ le asigna el $\mathbf{D}$-morfismo

$$(\delta_0^{-1})_a \colon H\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}}(a) \longrightarrow FJ(a).$$

Entonces θ_δ es un isomorfismo natural de $L \circ H_{\lambda_\delta}$ en H. Veamos que es una deformación inversible en la 2-categoría $\mathbf{Ad}_{\mathrm{Kl}}$. Para comprobarlo, sea $f \colon a \longrightarrow a'$ un $\mathbf{Kl}(\mathbb{M})$-morfismo. El functor H_{λ_δ} asigna a f el $\mathbf{Kl}(\mathbb{T})$-morfismo que corresponde al $\mathbf{C}$-morfismo

$$J(a) \xrightarrow{\ J(f)\ } J\,\mathrm{G}_{\mathbb{M}}\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}}(a') \xrightarrow{\ (\lambda_\delta)_{a'}\ } GFJ(a')$$

y el functor de comparación L asigna a cada $\mathbf{Kl}(\mathbb{T})$-morfismo $g \colon c \longrightarrow c'$, el morfismo $L(g)$ en $\mathbf{D}$

$$F(c) \xrightarrow{\ F(g)\ } FGF(c') \xrightarrow{\ \epsilon_{F(c')}\ } F(c')$$

por lo que $L \circ H_{\lambda_\delta}(f)$ es el $\mathbf{D}$-morfismo de $FJ(a)$ en $FJ(a')$ en el diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
FJ(a) \arrow[r, "FJ(f)"] & FJ\,\mathrm{G}_{\mathbb{M}}\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}}(a') \arrow[r, "(F\lambda_\delta)_{a'}"] \arrow[dr, "(F\delta_3\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}})_{a'}"'] & FGFJ(a') \arrow[r, "\epsilon FJ_{a'}"] & FJ(a') \\
& & FGH\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}}(a') \arrow[u, "(FG\delta_0^{-1})_{a'}"'] \arrow[r, "(\epsilon H\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}})_{a'}"'] & H\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}}(a') \arrow[u, "(\delta_0^{-1})_{a'}"']
\end{tikzcd}
$$

Se cumple que $\epsilon H \circ F\delta_3 = H\epsilon_{\mathbb{M}} \circ \delta_0\,\mathrm{G}_{\mathbb{M}}$

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "\mathrm{G}_{\mathbb{M}}"] \arrow[d, "H"'] \arrow[dr, phantom, "\delta_3 \Leftarrow"] & \cdot \arrow[d, "J"] & \\
\cdot \arrow[r, "G"] \arrow[rr, bend right=50, "1"', ""{name=U}] & \cdot \arrow[r, "F"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\epsilon"] & \cdot \\
& {} &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "\mathrm{G}_{\mathbb{M}}"] \arrow[rr, bend left=50, "1"] & \cdot \arrow[r, "\mathrm{F}_{\mathbb{M}}"] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\epsilon_{\mathbb{M}}"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\delta_0 \Leftarrow"] & \cdot \arrow[d, "H"] \\
& \cdot \arrow[r, "F"'] & \cdot
\end{tikzcd}
$$

luego $L \circ H_{\lambda_\delta}(f)$ es

$$\begin{tikzcd}
 & FJ\,\mathrm{G}_{\mathbb{M}}\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}}(a') \arrow[d, "(\delta_0\,\mathrm{G}_{\mathbb{M}}\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}})_{a'}"] & \\
FJ(a) \arrow[ur, "FJ(f)"] & H\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}}\,\mathrm{G}_{\mathbb{M}}\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}}(a') \arrow[r, "(H\epsilon_{\mathbb{M}}\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}})_{a'}"'] & H\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}}(a')
\end{tikzcd}$$

Por otra parte, se cumple que

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_{\mathbb{M}}(f) &= (\eta_{\mathbb{M}})_{M(a')} \circ f \\
&= \mathrm{F}_{\mathbb{M}}((\eta_{\mathbb{M}})_{a'}) \diamond f
\end{aligned}$$

y, por consiguiente, también

$$\begin{aligned}
(H\epsilon_{\mathbb{M}}\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}})_{a'} \circ H\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}}(f) &= (H\epsilon_{\mathbb{M}}\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}})_{a'} \circ H\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}}((\eta_{\mathbb{M}})a') \circ H(f) \\
&= \mathrm{id}_{H\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}}(a')} \circ H(f) \\
&= \mathrm{id}_{H(a')} \circ H(f) \\
&= H(f)
\end{aligned}$$

Como consecuencia, y tomando $\mathrm{T}_{\mathbb{M}} = \mathrm{G}_{\mathbb{M}}\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}}$, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
FJ(a) \arrow[r, "FJ(f)"] \arrow[rrrr, bend left, "L \circ H_{\lambda_\delta}(f)"] & FJ\,\mathrm{T}_{\mathbb{M}}(a') \arrow[r, "(\delta_0\,\mathrm{T}_{\mathbb{M}})_{a'}"] & H\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}}\,\mathrm{T}_{\mathbb{M}}(a') \arrow[r, "(H\epsilon_{\mathbb{M}}\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}})_{a'}"] & H\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}}(a') \arrow[r, "(\delta_0^{-1})_{a'}"] & FJ(a') \\
H(a) \arrow[u, "(\delta_0^{-1})_a"] \arrow[r, "H\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}}(f)"'] \arrow[rrrr, bend right, "H(f)"'] & H\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}}\,\mathrm{T}_{\mathbb{M}}(a') \arrow[u, "(\delta_0^{-1}\,\mathrm{T}_{\mathbb{M}})_{a'}"] \arrow[ur, "1"'] \arrow[rrr, "(H\epsilon_{\mathbb{M}}\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}})_{a'}"'] & & & H(a') \arrow[u, "(\delta_0^{-1})_{a'}"'] \arrow[ul, "1"]
\end{tikzcd}$$

conmuta y θ_δ es una deformación inversible de (J, δ, H) en $(1, \delta^L, L) \circ (H, \delta_{\lambda_\delta}, H_{\lambda_\delta})$.

Si $(J', \lambda') \colon (\mathbf{A}, \mathbb{M}) \longrightarrow (\mathbf{C}, \mathbb{T})$ es un Kl-morfismo y $\theta' \colon H \Longrightarrow L \circ H_{\lambda'}$ es una deformación inversible de $(1, \delta^L, L) \circ (H, \delta_{\lambda'}, H_{\lambda'})$ en (J, δ, H), entonces se cumple que $\mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}(\theta' \circ \theta_\delta^{-1})$ es una Kl-deformación inversible en $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl}}$ de (J, λ_δ) en (J', λ') puesto que

$$\begin{aligned}
(J, \lambda_\delta) = (J, \lambda_{H_{\lambda_\delta}}) = \mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}((1, \delta^L, L) &\circ (J, \delta_{\lambda_\delta}, H_{\lambda_\delta})) \\
&\big\downarrow \mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}(\theta_\delta^{-1}) \\
\mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}&(J, \delta, H) \\
&\big\downarrow \mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}(\theta') \\
\mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}((1, \delta^L, L) &\circ (J, \delta_{\lambda'}, H_{\lambda'})) = (J, \lambda') = (J, \lambda_{H_{\lambda'}})
\end{aligned}$$

Sea $\tau\colon (J',\delta',H') \longrightarrow (J,\delta,H)$ una deformación. Entonces $\mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}(\tau)$ es, precisamente, la Kl-deformación $\Xi^{\tau} = G\delta_0^{-1} \circ G\tau\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}} \circ \delta_3\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}} \circ J'\eta_{\mathbb{M}}$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, bend right, "J"'] \arrow[rr, bend left=40, "1"] \arrow[dr, phantom, "\delta_0^{-1}\ \Leftarrow"] & \mathbf{D} \arrow[r, "G"] \arrow[d, bend right, "H"'] \arrow[d, bend left, "H'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\tau}{\Leftarrow}"] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\eta"] \arrow[dr, phantom, "\delta_3'\ \Leftarrow"] & \mathbf{C} \arrow[d, bend left, "J'"] \\
\mathbf{C} \arrow[r, "F'"'] & \mathbf{C}' \arrow[r, "G'"'] & \mathbf{D}'
\end{tikzcd}
$$

Sea $\tau^{\Xi^{\tau}} = \mathrm{Kl}(\mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}(\tau))$. Veamos que $\theta_\delta \circ \tau = \epsilon_{F\dashv G}\tau^{\Xi^{\tau}} \circ \theta_{\delta'}$. Para ello es suficiente comprobar que $\tau \circ \theta_\delta = L\tau^{\Xi^{\tau}} \circ \theta_{\delta'}$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Kl}(\mathbb{M}) \arrow[d, bend right, "H_{\lambda_\delta}"'] \arrow[d, bend left, "H_{\lambda_{\delta'}}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\tau^{\Xi^{\tau}}}{\Leftarrow}"] \arrow[dr, bend left=10, "H"'] \arrow[dr, bend left=40, "H'"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\tau}{\Leftarrow}"] & \\
\mathbf{Kl}(\mathbb{T}) \arrow[r, "L"'] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\theta_\delta\ \Leftarrow\ \ \theta_{\delta'}\ \Leftarrow"] & \mathbf{D}
\end{tikzcd}
$$

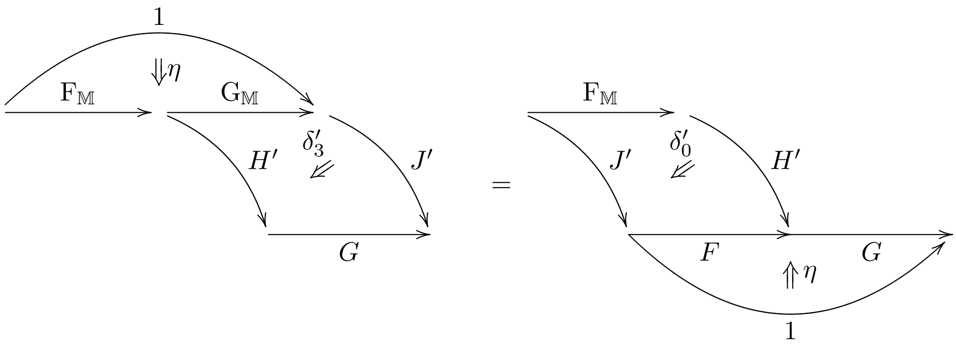
Para cada a en $\mathbf{Kl}(\mathbb{M})$, $\tau_a^{\Xi^{\tau}}$, es el $\mathbf{Kl}(T)$-morfismo que corresponde al $\mathbf{C}$-morfismo Ξ_a^{τ}, luego $L\tau^{\Xi^{\tau}}(a) = L(\Xi_a^{\tau}) = L(G\delta_0^{-1} \circ G\tau\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}} \circ \delta_3'\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}} \circ J'\eta_{\mathbb{M}})_a$, i.e., la acción en a de la transformación natural del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\mathrm{F}_{\mathbb{M}}"] \arrow[rr, bend left=50, "1"] \arrow[dr, bend right, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\delta_0^{-1}\ \Leftarrow"] & {} \arrow[r, "\mathrm{G}_{\mathbb{M}}"] \arrow[d, bend right, "H"'] \arrow[d, bend left, "H'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\tau}{\Leftarrow}"] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\eta_{\mathbb{M}}"] \arrow[dr, phantom, "\delta_3'\ \Leftarrow"] & {} \arrow[dr, bend left, "J'"] & & \\
& {} \arrow[r, "F"'] & {} \arrow[r, "G"'] \arrow[rr, bend right=50, "1"'] & {} \arrow[r, "F"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\epsilon"] & {} \\
& & & {} &
\end{tikzcd}
$$

y que, por tanto, es igual a

$$
\begin{tikzcd}
& FJ'\,\mathrm{G}_{\mathbb{M}}\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}} \arrow[dd, "F\delta_3'\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}}"] & FGH\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}} \arrow[dd, "FG\delta_0^{-1}"] & \\
FJ' \arrow[ur, "FJ'\eta_{\mathbb{M}}"] & & & FJ \\
& FGH'\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}} \arrow[uur, "FG\tau\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}}"] & FGFJ \arrow[ur, "\epsilon FJ"'] &
\end{tikzcd}
$$

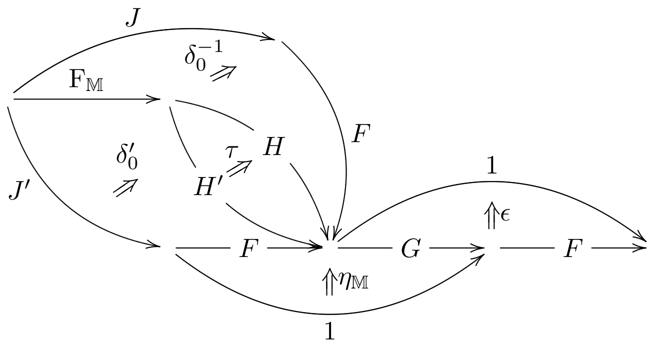
Pero $\delta_3' \,\mathrm{F}_{\mathbb{M}} \circ J'\eta_{\mathbb{M}} = G\delta_0 \circ \eta J'$, porque



luego la transformación natural considerada es

$$\begin{tikzcd}
FJ' \arrow[r, "F\eta J'"] & FGFJ' \arrow[r, "FG\delta_0"] & FGH'\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}} \arrow[d, "FG\tau\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}}"] & & \\
& & FGH\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}} \arrow[r, "FG\delta_0^{-1}"] & FGFJ \arrow[r, "\epsilon FJ"] & FJ
\end{tikzcd}$$

i.e., la transformación natural del diagrama



que coincide con $\delta_0^{-1} \circ \tau\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}} \circ \delta_0'$.

Entonces se cumple que

$$\begin{aligned}
(\theta_\delta \circ \tau)_a &= (\delta_0^{-1})_a \circ \tau_a \\
&= (\delta_0^{-1})_a \circ (\tau\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}})_a \\
&= (\delta_0^{-1} \circ \tau\,\mathrm{F}_{\mathbb{M}} \circ \delta_0' \circ {\delta'}_0^{-1})_a \\
&= (L\tau^{\Xi^\tau} \circ \theta_{\delta'})_a
\end{aligned}$$

Veamos por último que se cumple la unicidad. Si $\Xi\colon (J, \lambda_\delta) \longrightarrow (J', \lambda_{\delta'})$ es una deformación tal que $\theta_\delta \circ \tau = L\tau^{\Xi} \circ \theta_{\delta'}$ entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}(\tau^{\Xi^\tau}) \circ \mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}(\theta_{\delta'}) &= \mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}(1_L \circ \tau^{\Xi^\tau} \circ \theta_{\delta'}) \\
&= \mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}(1_L \circ \tau^{\Xi} \circ \theta_{\delta'}) \\
&= \mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}(\tau^{\Xi}) \circ \mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}(\theta_{\delta'})
\end{aligned}$$

pero $\mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}(\theta_{\delta'})$ es un isomorfismo y, por tanto,

$$\Xi^\tau = \mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}(\tau^{\Xi^\tau}) = \mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}(\tau^{\Xi}) = \Xi$$

□

6.3. **Cuadrados adjuntos de Eilenberg-Moore.** Estudiamos a continuación la contrapartida de los Kl-cuadrados para la construcción de Eilenberg-Moore.

Definition 71. Un cuadrado adjunto de Eilenberg-Moore es un cuadrado adjunto

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, phantom, "\delta" near start, shift left=8ex] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right, "G"'] \\
\mathbf{C}' \arrow[u, "K"] \arrow[r, shift right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right, "G'"'] \arrow[u, "H"']
\end{tikzcd}
$$

tal que su componente 3-ésima, δ_3, es un isomorfismo natural.

Definition 72. Denotamos mediante $\mathbf{Ad}_{\mathrm{EM}}$ la sub-2-categoría plena para las 2-células de $\mathbf{Ad}$ determinada por los EM-cuadrados. Las 1-células en $\mathbf{Ad}_{\mathrm{EM}}$ se denominan, abreviadamente, EM-cuadrados.

Lemma 10. *Sea $(K, \delta, H)\colon F' \dashv G' \longrightarrow F \dashv G$ un EM-cuadrado. Entonces se cumplen las siguientes ecuaciones*

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend left=50, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=50, "\Downarrow\eta" near end] & \cdot \arrow[r, "G"] & \cdot \\
\cdot \arrow[u, "K"] \arrow[r, "F'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\delta_0"] & \cdot \arrow[u, "H"] \arrow[r, "G'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\delta_3^{-1}"] & \cdot \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "1"] & \cdot \\
\cdot \arrow[u, "K"] \arrow[r, "1"] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow K"] \arrow[d, bend right, "F'"'] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow\eta'"] & \cdot \arrow[u, "K"'] \\
\cdot \arrow[ur, bend right, "G'"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "G"] & \cdot \arrow[r, "F"] & \cdot \\
\cdot \arrow[u, "H"] \arrow[r, "G'"] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\delta_3^{-1}"] \arrow[rr, bend right=50, "1"'] \arrow[r, phantom, bend right=50, "\Downarrow\epsilon'" near end] & \cdot \arrow[u, "K"] \arrow[r, "F'"] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\delta_0"] & \cdot \arrow[u, "H"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& \cdot \arrow[dr, bend left, "F"] & \\
\cdot \arrow[ur, bend left, "G"] \arrow[rr, "1"] \arrow[rr, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow\epsilon"] & & \cdot \\
\cdot \arrow[u, "H"] \arrow[rr, "1"'] \arrow[urr, phantom, "\Downarrow H"] & & \cdot \arrow[u, "H"']
\end{tikzcd}
$$

Proof. Es suficiente observar que

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdot \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend left=60, "1"] \arrow[rr, phantom, bend left=30, "\Downarrow\eta"] & \cdot \arrow[r, "G"] & \cdot \\
\cdot \arrow[u, "K"] \arrow[r, "F'"'] \arrow[ur, phantom, "\delta_0"] & \cdot \arrow[u, "H"] \arrow[r, "G'"'] \arrow[ur, phantom, "\delta_3^{-1}"] & \cdot \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdot \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend left=60, "1"] \arrow[rr, phantom, bend left=30, "\Downarrow\eta"] & \cdot \arrow[r, "G"] & \cdot \\
\cdot \arrow[u, "1"] \arrow[ur, phantom, "\overset{\epsilon}{\Rightarrow}"] & \cdot \arrow[u, "1"] \arrow[l, "G"'] & \\
\cdot \arrow[u, "K"] \arrow[ur, phantom, "\delta_3\Nearrow"] & \cdot \arrow[u, "H"] \arrow[l, "G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\delta_3^{-1}"] & \\
\cdot \arrow[u, "1"] \arrow[r, "F'"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\eta'}{\Rightarrow}"] & \cdot \arrow[u, "1"] \arrow[r, "G'"'] & \cdot \arrow[uuu, "K"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdot \arrow[rr, "1"] & & \cdot \\
\cdot \arrow[u, "K"] \arrow[rr, "1"] \arrow[urr, phantom, "\Searrow K"] \arrow[dr, bend right, "F'"'] & & \cdot \arrow[u, "K"'] \\
& \cdot \arrow[ur, bend right, "G'"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\eta'"] &
\end{tikzcd}
$$

La demostración para la segunda ecuación es formalmente idéntica. $\square$

De la 2-categoría $\mathbf{Ad}_{\mathrm{EM}}$ en la 2-categoría transpuesta de $\mathrm{Mnd}_{\mathrm{EM}}$ existe un 2-functor que asigna a cada adjunción su mónada asociada, a cada EM-cuadrado un EM-morfismo de mónadas y a cada deformación de EM-cuadrados una EM-deformación. Este 2-functor tiene un 2-adjunto por la derecha EM, y que se obtiene, esencialmente, componiendo el 2-isomorfismo de $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{tr}}$ en $\mathbf{EM}$ con el 2-functor de inclusión que asocia a cada objeto de $\mathbf{EM}$ su adjunción de Eilenberg-Moore correspondiente, a cada 1-célula el EM-cuadrado obtenido mediante las transformaciones naturales transpuestas de la identidad del cuadrado conmutativo correspondiente a la 1-célula, y que es la identidad en las 2-células. De esto se sigue que la sub-2-categoría plena de $\mathbf{Ad}_{\mathrm{EM}}$ determinada por las adjunciones de Eilenberg-Moore es una subcategoría reflectiva de $\mathbf{Ad}_{\mathrm{EM}}$.

Proposition 140. *De la 2-categoría $\mathbf{Ad}_{\mathrm{EM}}$ en la 2-categoría $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{tr}}$ existe un 2-functor $\mathrm{Md}_{\mathrm{EM}}$, que a cada adjunción $(F \dashv G, \eta, \epsilon)$ le hace corresponder la mónada $(G \circ F, \eta, G\epsilon F)$, a cada EM-cuadrado (K, δ, H), el EM-morfismo de mónadas (K, λ^{δ}) en donde $\lambda^{\delta} = \delta_3^{-1}F' \circ G\delta_0$ y a cada EM-deformación $\tau\colon (J, \delta, H) \longrightarrow (J', \delta', H')$ la EM-deformación $\Xi_{\tau} = {\delta'_3}^{-1}F' \circ G\tau F' \circ G\delta_0 \circ \eta K$*

$$
\mathbf{Ad}_{\mathrm{EM}} \xrightarrow{\quad \mathrm{Md}_{\mathrm{EM}} \quad} \mathbf{Mnd}_{\mathrm{EM}}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, bend left=15, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D} \arrow[l, bend right=15, "G"'] \arrow[d, phantom, "\overset{\tau}{\Rightarrow}"] \\
\mathbf{C}' \arrow[u, bend left=30, "K"] \arrow[u, bend right=30, "K'"'] \arrow[r, bend right=15, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[ur, phantom, "\delta \quad \delta'"] & \mathbf{D}' \arrow[l, bend left=15, "G'"'] \arrow[u, bend left=30, "H"] \arrow[u, bend right=30, "H'"']
\end{tikzcd}
\longmapsto
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[dr, "G \circ F"] & \\
\mathbf{C}' \arrow[u, bend left=30, "K"] \arrow[u, bend right=30, "K'"'] \arrow[dr, "G' \circ F'"'] \arrow[r, phantom, "\lambda^{\delta}\Searrow \overset{\Xi_{\tau}}{\rightsquigarrow} \Searrow\lambda^{\delta'}"] & \mathbf{C} \\
& \mathbf{C}' \arrow[u, bend left=30, "K"] \arrow[u, bend right=30, "K'"']
\end{tikzcd}
$$

donde Ξ_τ se obtiene a partir del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend left, "1"] \arrow[dr, phantom, "\delta_0 \Searrow"] & \mathbf{D} \arrow[r, "G"] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\eta"] \arrow[dr, phantom, "{\delta_3'}^{-1} \Searrow"] & \mathbf{C} \\
\mathbf{C}' \arrow[u, "K"] \arrow[r, "F'"'] & \mathbf{D}' \arrow[u, bend left, "H"] \arrow[u, bend right, "H'"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\tau}{\Rightarrow}"] \arrow[r, "G'"'] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K'"']
\end{tikzcd}$$

Proof. La demostración es formalmente idéntica al caso de Kleisli. □

Las deformaciones de Street entre EM-cuadrados se transforman en EM-deformaciones de mónadas a través del 2-functor $\mathrm{Md}_{\mathrm{EM}}$. Denotamos mediante $\mathrm{Md}_{\mathrm{EM,St}}$ la birrestricción de $\mathrm{Md}_{\mathrm{EM}}$ a $\mathbf{Ad}_{\mathrm{EM,St}}$ y a $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{EM,St}}$.

El 2-functor $\mathrm{Md}_{\mathrm{EM}}$ resulta de la composición del 2-functor de $\mathbf{Ad}_{\mathrm{EM}}$ en EM que olvida todas las componentes de los cuadrados adjuntos de Eilenberg-Moore excepto la primera, y del 2-isomorfismo existente entre $\mathrm{Md}_{\mathrm{EM}}$ y $\mathbf{Mnd}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{EM}}$.

Proposition 141. *De $\mathbf{Mnd}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{EM}}$ en $\mathbf{Ad}_{\mathrm{EM}}$ existe un 2-functor* EM*, que a un par $(\mathbf{C}, \mathbb{T})$ le asigna la adjunción canónica $(\mathrm{F}^{\mathbb{T}}, \mathrm{G}^{\mathbb{T}})$, a cada EM-morfismo de mónadas (K, λ), el EM-cuadrado $(K, \delta^\lambda, H^\lambda)$, en el que H^λ es el functor asociado a λ por la biyección de la proposición 122 y δ^λ el cuadrado adjunto determinado por el cuadrado conmutativo correspondiente, y a cada EM-deformación $\tau\colon (K, \lambda) \longrightarrow (K', \lambda')$ la deformación τ_Ξ asociada a Ξ por la biyección de la proposición 127* □

Las deformaciones de Street entre EM-morfismos de mónadas se transforman en deformaciones de Street entre EM-cuadrados a través del 2-functor EM. La birrestricción de EM a $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{EM,St}}$ y a $\mathbf{Ad}_{\mathrm{EM,St}}$ se denota como $\mathrm{EM}_{\mathrm{St}}$.

Proposition 142. *El 2-functor* EM *es 2-adjunto por la derecha del 2-functor* $\mathrm{Md}_{\mathrm{EM}}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Ad}_{\mathrm{EM}} \arrow[r, shift right, "\mathrm{Md}_{\mathrm{EM}}"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{Mnd}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{EM}} \arrow[l, shift right, "\mathrm{EM}"']
\end{tikzcd}$$

Proof. La demostración es análoga al caso de Kleisli, considerando morfismos universales desde cada adjunción hasta el 2-functor EM. Concretamente, se cumple que, para cada adjunción $F \dashv G$, con mónada asociada $\mathbb{T}$, existe un EM-cuadrado $\eta_{F \dashv G}\colon F \dashv G \longrightarrow \mathrm{F}^{\mathbb{T}} \dashv \mathrm{G}^{\mathbb{T}}$, obtenido a partir del functor de comparación de Eilenberg-Moore, tal que, para cada par $(\mathbf{A}, \mathbb{M})$, con $\mathbb{M}$ una mónada sobre $\mathbf{A}$, y cada EM-cuadrado $(K, \delta, H)\colon F \dashv G \longrightarrow \mathrm{F}^{\mathbb{M}} \dashv \mathrm{G}^{\mathbb{M}}$, el EM-morfismo de mónadas $(K, \lambda^\delta)\colon (\mathbf{C}, \mathbb{T}) \longrightarrow (\mathbf{A}, \mathbb{M})$ es, salvo isomorfismo, el único para el que existe una deformación inversible $\theta_\delta\colon (K, \delta, H) \Longrightarrow \mathrm{EM}(K, \lambda^\delta) \circ \eta_{F \dashv G}$

$$\begin{tikzcd}
F \dashv G \arrow[r, "\eta_{F \dashv G}"] \arrow[dr, "{(K, \delta, H)}"'] & \mathrm{F}_{\mathbb{T}} \dashv \mathrm{G}_{\mathbb{T}} \arrow[d, "{\mathrm{EM}(K, \lambda_\delta)}"] \arrow[dl, phantom, "\theta_\delta \Nearrow"] \\
& \mathrm{F}_{\mathbb{M}} \dashv \mathrm{G}_{\mathbb{M}}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\mathbf{A}, \mathbb{M}) \\
(\mathbf{C}, \mathbb{T}) \arrow[u, "{(K, \lambda_\delta)}"']
\end{tikzcd}$$

y que, para cada deformación $\tau\colon (K, \delta, H) \longrightarrow (K', \delta', H')$, la EM-deformación $\Xi_\tau\colon (K, \lambda_\delta) \longrightarrow (K', \lambda_{\delta'})$ es la única que hace conmutativo el triángulo izquierdo

del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & F\dashv G \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[drr, "\eta_{F\dashv G}"] & & & \\
(K,\delta,H) \arrow[r, phantom, "\overset{\tau}{\Rightarrow}"] \arrow[ddrr, bend right] & (K',\delta',H') \arrow[r, phantom, "\overset{\theta_{\delta'}}{\Rightarrow}"] \arrow[ddr] \arrow[d, phantom, "\overset{\theta_\delta}{\Rrightarrow}"] & \mathrm{F}^{\mathbb{T}}\dashv \mathrm{G}^{\mathbb{T}} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[d, phantom, "\mathrm{EM}(\Xi_\tau)"] & & \\
 & \mathrm{EM}(K,\lambda_\delta) \arrow[rr, phantom, "\Rightarrow"] \arrow[dr] & & \mathrm{EM}(K',\lambda_{\delta'}) \arrow[dl] & \\
 & & \mathrm{F}_{\mathbb{M}}\dashv \mathrm{G}_{\mathbb{M}} & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & (\mathbf{A},\mathbb{M}) & \\
(K,\lambda_\delta) \arrow[ur] \arrow[r, phantom, "\overset{\Xi^\tau}{\Rightarrow}"] & & (K',\lambda_{\delta'}) \arrow[ul] \\
 & (\mathbf{C},\mathbb{T}) \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}
$$

□

Demostracion antigua con igualdades

Proof. Demostramos que, para cada adjunción $F\dashv G$, existe un morfismo universal de $F\dashv G$ hasta el 2-functor EM. Sea pues $F\dashv G : \mathbf{C}\longrightarrow\mathbf{D}$ una adjunción y $\mathbb{T}$ su mónada asociada. A partir del functor de comparación de Eilenberg-Moore $E : \mathbf{D}\longrightarrow\mathbf{EM}(\mathbb{T})$ se obtiene un EM-morfismo de mónadas, $(1,\varsigma,E)$ de $(\mathrm{F}^{\mathbb{T}}\dashv\mathrm{G}^{\mathbb{T}})$ en $(F\dashv G)$, por la conmutatividad del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "\mathrm{F}^{\mathbb{T}}"] & \mathbf{EM}(\mathbb{T}) \arrow[r, "\mathrm{G}^{\mathbb{T}}"] & \mathbf{C} \\
\mathbf{C} \arrow[u, "1"] \arrow[r, "F"'] & \mathbf{D} \arrow[u, "E"'] \arrow[r, "G"'] & \mathbf{C} \arrow[u, "1"']
\end{tikzcd}
$$

y el hecho de que las transformaciones naturales identidad en los cuadrados del diagrama anterior son conjugadas entre si, ya que la unidad de ambas adjunciones coincide. El EM-cuadrado $(1,\varsigma,E)$ es el valor de la unidad de la adjunción buscada sobre $F\dashv G$. Sea $\mathbb{M}$ una mónada sobre $\mathbf{A}$ y (K,δ,H) un EM-cuadrado de adjunciones de $F\dashv G$ en $\mathrm{F}^{\mathbb{M}}\dashv\mathrm{G}^{\mathbb{M}}$. Entonces $\mathrm{Md}_{\mathrm{EM}}(K,\delta,H) = (K,\mathrm{G}^{\mathbb{M}}\delta_0)$ es un EM-morfismo de mónadas. Sea $(K,\gamma,H^{\mathrm{G}^{\mathbb{M}}\delta_0})$ su imagen bajo el functor EM. El functor $H^{\mathrm{G}^{\mathbb{M}}\delta_0}$ asigna a cada $\mathbb{T}$-álgebra (C,ξ) la $\mathbb{M}$-álgebra $(K(C),K(\xi)\circ\mathrm{G}^{\mathbb{M}}\delta_{0C})$ y a cada $\mathbb{T}$-morfismo de álgebras $f:(C,\xi)\longrightarrow(C',\xi')$ el morfismo de $\mathbb{M}$-álgebras $K(f)$. Veamos que $(K,\gamma,H^{\mathrm{G}^{\mathbb{M}}\delta_0})\circ(1,\varsigma,E)$ es identico a (K,δ,H).

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "1"] \arrow[ddr, "K"'] & \mathbf{D} \arrow[r, "G"] \arrow[dr, "E"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\varsigma^0"] \arrow[ddr, "H"] & \mathbf{C} \arrow[dr, "1"] \arrow[ddr, "K"'] & \\
 & \mathbf{C} \arrow[r, "\mathrm{F}^{\mathbb{T}}"] \arrow[d, "K"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\delta_0"'] \arrow[dr, phantom, "\Rrightarrow\gamma^0"] & \mathbf{EM}(\mathbb{T}) \arrow[r, "\mathrm{G}^{\mathbb{T}}"] \arrow[d, "H^{\mathrm{G}^{\mathbb{M}}\delta_0}"] & \mathbf{C} \arrow[d, "K"] \\
 & \mathbf{A} \arrow[r, "\mathrm{F}^{\mathbb{M}}"'] & \mathbf{EM}(\mathbb{M}) \arrow[r, "\mathrm{G}^{\mathbb{M}}"'] & \mathbf{A}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "K"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\mathrm{G}^{\mathbb{M}}\delta_0}{\Uparrow}"] & \mathbf{C} \arrow[d, "K"] \\
\mathbf{A} \arrow[r, "M"'] & \mathbf{A}
\end{tikzcd}
$$

Para ello es suficiente comprobar que $H^{\mathrm{G}^{\mathbb{M}}\delta_0}\circ E = H$. Sea d un objeto de D. El functor de comparación E asigna a d la $\mathbb{T}$-álgebra $(G(d),G(\epsilon_d))$, con ϵ la counidad de la adjunción $F \dashv G$, y, por consiguiente,

$$\begin{aligned} H^{\mathrm{G}^{\mathbb{M}}\delta_0} \circ E(d) &= (KG(d), K(G\epsilon_d) \circ \mathrm{G}^{\mathbb{M}}\delta_0 G(d)) \\ &= (KG(d), (KG\epsilon)_d \circ (\mathrm{G}^{\mathbb{M}}\delta_0 G)_d) \\ &= (KG(d), (\mathrm{G}_{\mathbb{M}}\, H\epsilon \circ \mathrm{G}^{\mathbb{M}}\delta_0 G)_d) \\ &= (KG(d), (\mathrm{G}_{\mathbb{M}}(H\epsilon \circ \delta_0 G))_d) \end{aligned}$$

Se cumple que

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "G"] \arrow[rr, bend left=50, "1"] \arrow[rr, phantom, bend left=25, "\Uparrow\epsilon"] & \cdot \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "K"'] \arrow[drr, phantom, "\delta_0\Nearrow"] & \cdot \arrow[dr, "H"] & \\
& & \cdot \arrow[r, "\mathrm{F}^{\mathbb{M}}"'] & \cdot
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "G"] \arrow[dr, "H"'] \arrow[drr, phantom, "="] & \cdot \arrow[dr, "K"] & & \\
& \cdot \arrow[r, "\mathrm{G}^{\mathbb{M}}"] \arrow[rr, bend right=50, "1"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow\epsilon^{\mathbb{M}}"] & \cdot \arrow[r, "\mathrm{F}^{\mathbb{M}}"] & \cdot
\end{tikzcd}$$

luego $H^{\mathrm{G}^{\mathbb{M}}\delta_0} \circ E(d) = (KG(d), (\mathrm{G}_{\mathbb{M}}\, \epsilon^{\mathbb{M}}H)_d)$. Si $H(d) = (A, \alpha)$ entonces $A = KG(d)$, puesto que $\mathrm{G}_{\mathbb{M}} \circ H = KG$, y $\alpha = \mathrm{G}_{\mathbb{M}}\, {\epsilon^{\mathbb{M}}}_{H(d)}$. Si $f : d \longrightarrow d'$ es un morfismo en $\mathbf{D}$,s entonces $E(f) = G(f)$ y $H^{\mathrm{G}^{\mathbb{M}}\delta_0}(G(f)) = KG(f) = \mathrm{G}^{\mathbb{M}}H(f) = H(f)$, por lo que ambos functores coinciden.

Veamos la unicidad. Si $(K', \lambda') : (\mathbf{C}, \mathbb{T}) \longrightarrow (\mathbf{C}', \mathbb{T}')$ es un EM-morfismo de mónadas tal que la composición de su imagen bajo EM, $(K, \gamma', H^{\lambda'})$, con $(1, \varsigma, E)$ es (K, δ, H) entonces $K' = K$ y

$$\begin{aligned} \mathrm{Md}_{\mathrm{EM}}(K, \gamma', H^{\lambda'}) &= \mathrm{Md}_{\mathrm{EM}}(K, \gamma', H^{\lambda'}) \circ (1, \varsigma, E) \\ &= \mathrm{Md}_{\mathrm{EM}}(K, \delta, H) \\ &= \mathrm{Md}_{\mathrm{EM}}(K, \gamma, H^{\mathrm{G}^{\mathbb{M}}\delta_0}) \end{aligned}$$

por lo que $H^{\lambda'}$ es igual a $H^{\mathrm{G}^{\mathbb{M}}\delta_0}$ y $\lambda' = \mathrm{G}^{\mathbb{M}}\delta_0$.

Supongamos que $\tau : (K, \delta, H) \longrightarrow (K', \delta', H')$ es una deformación de EM-cuadrados. Entonces $\Xi_\tau = \mathrm{Md}_{\mathrm{EM}}(\tau)$ es la deformación de EM-morfismos $\mathrm{G}^{\mathbb{M}}\tau F \circ \mathrm{G}^{\mathbb{M}}\delta_0 \circ \eta^{\mathbb{M}}$. Sea $\widehat{\tau} = \mathrm{EM}(\mathrm{Md}_{\mathrm{EM}}(\tau)))$. Para cada $\mathbb{T}$-álgebra $\widehat{\tau}_{(C,\xi)}$, es el $\mathbf{A}$-morfismo

$$\begin{tikzcd}
K(C) \arrow[r, "\eta^{\mathbb{M}}K_C"] & \mathrm{G}^{\mathbb{M}}\mathrm{F}^{\mathbb{M}}K(C) \arrow[r, "\mathrm{G}^{\mathbb{M}}\delta_{0C}"] & \mathrm{G}^{\mathbb{M}}HF(C) \arrow[d, "\mathrm{G}^{\mathbb{M}}\tau F"] & \\
& & \mathrm{G}^{\mathbb{M}}H'F(C) = K'GF(C) \arrow[r, "K'(\xi)"] & K'(C)
\end{tikzcd}$$

Veamos que $\widehat{\tau} \circ E = \tau$. Sea d un objeto de $\mathbf{D}$. Entonces $\widehat{\tau} \circ E(d) = \widehat{\tau}(G(d), G(\epsilon_d))$ que es igual a la acción en d de la transformación natural

$$\begin{tikzcd}
KG \arrow[r, "\eta^{\mathbb{M}}KG"] & \mathrm{G}^{\mathbb{M}}\mathrm{F}^{\mathbb{M}}KG \arrow[r, "\mathrm{G}^{\mathbb{M}}\delta_0 G"] & \mathrm{G}^{\mathbb{M}}HFG \arrow[d, "\mathrm{G}^{\mathbb{M}}\tau FG"] & \\
& & \mathrm{G}^{\mathbb{M}}H'FG = K'GFG \arrow[r, "K'G\epsilon"] & K'G
\end{tikzcd}$$

del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[rr, "G"] \arrow[rrrr, bend left=40, "1"] & & \cdot \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, bend right, "K"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\epsilon"] & & \cdot \arrow[rr, "G"] \arrow[dr, bend right, "H"'] \arrow[dr, bend left, "H'"] \arrow[d, phantom, "\tau\Uparrow"] \arrow[l, phantom, "\delta_0\Uparrow"'] & & \cdot \arrow[dr, bend left, "K'"] \arrow[d, phantom, "="] & \\
& & & \cdot \arrow[rr, "\mathrm{F}^{\mathbb{M}}"'] \arrow[rrrr, bend right=40, "1"'] & & \cdot \arrow[rr, "\mathrm{G}^{\mathbb{M}}"'] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta^{\mathbb{M}}"] & & \cdot \\
& & & & & {} & &
\end{tikzcd}
$$

y que por tanto, es igual a

$$
KG \xrightarrow{\eta^{\mathbb{M}}KG} \mathrm{G}^{\mathbb{M}}\mathrm{F}^{\mathbb{M}}KG \xrightarrow{\mathrm{G}^{\mathbb{M}}\delta_0 G} \mathrm{G}^{\mathbb{M}}HFG \xrightarrow{\mathrm{G}^{\mathbb{M}}H\epsilon} \mathrm{G}^{\mathbb{M}}H \xrightarrow{\mathrm{G}^{\mathbb{M}}\tau} \mathrm{G}^{\mathbb{M}}H' = K'G
$$

Como $H\epsilon \circ \delta_0 G = \epsilon^{\mathbb{M}}H$, la transformación natural considerada es igual a

$$
\begin{tikzcd}
KG = \mathrm{G}^{\mathbb{M}}H \arrow[r, "\eta^{\mathbb{M}}KG"] & \mathrm{G}^{\mathbb{M}}\mathrm{F}^{\mathbb{M}}KG = \mathrm{G}^{\mathbb{M}}\mathrm{F}^{\mathbb{M}}\mathrm{G}^{\mathbb{M}}H \arrow[d, "\mathrm{G}^{\mathbb{M}}\epsilon^{\mathbb{M}}H"] & \\
& \mathrm{G}^{\mathbb{M}}H \arrow[r, "\mathrm{G}^{\mathbb{M}}\tau"] & \mathrm{G}^{\mathbb{M}}H' = K'G
\end{tikzcd}
$$

i.e., a la transformación natural del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, bend right, "H"'] \arrow[drr, phantom, "="] & & \cdot \arrow[dr, bend right, "H"'] \arrow[dr, bend left, "H'"] \arrow[dr, phantom, "\tau\Uparrow"] & \\
& \cdot \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, bend right, "\mathrm{G}^{\mathbb{M}}"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\epsilon^{\mathbb{M}}"] & & \cdot \arrow[r, "\mathrm{G}^{\mathbb{M}}"] & \cdot \\
& & \cdot \arrow[ur, bend right, "\mathrm{F}^{\mathbb{M}}"'] \arrow[urr, bend right, "1"'] \arrow[urr, phantom, "\Uparrow\eta^{\mathbb{M}}"] & &
\end{tikzcd}
$$

que es igual a $\mathrm{G}^{\mathbb{M}}\tau$, lo que implica que $\widehat{\tau}E = \tau$. La unicidad es inmediata, porque si Ξ es una deformación tal que $\mathrm{EM}(\Xi)E = \tau$ entonces

$$
\begin{aligned}
\Xi &= \mathrm{Md}_{\mathrm{EM}}(\mathrm{EM}(\Xi)) \\
&= \mathrm{Md}_{\mathrm{EM}}(\mathrm{EM}(\Xi)E) \\
&= \mathrm{Md}_{\mathrm{EM}}(\tau) \\
&= \mathrm{Md}_{\mathrm{EM}}(\widehat{\tau}) \\
&= \Xi_\tau
\end{aligned}
$$

□

6.4. **Adjunciones y morfismos algebraicos.** La existencia simultánea de cuadrados adjuntos de Kleisli y Eilenberg-Moore entre dos adjunciones puede ser considerado desde, al menos, dos puntos de vista.

En primer lugar, obsérvese que un cuadrado adjunto

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, shift right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right, "G"'] \arrow[d, "H"] \\ \mathbf{C}' \arrow[r, shift right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right, "G'"'] \end{tikzcd}$$

puede ser simultáneamente un Kl-cuadrado y un EM-cuadrado. En ese caso, se tiene que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] & \mathbf{D} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "H"] & \mathbf{C} \arrow[d, "J"] \\ \mathbf{C}' \arrow[r, "F'"'] & \mathbf{D}' \arrow[r, "G'"'] & \mathbf{C}' \end{tikzcd}$$

conmuta y el par (J, H) es una transformación de adjunciones en el sentido de MacLane ([Mac71]). Las adjunciones, las transformaciones y las deformaciones determinan una 2-categoría, denotada como $\mathbf{Ad}_{\mathrm{tn}}$, y que es la sub-2-categoría común de $\mathbf{Ad}_{\mathrm{Kl}}$ y $\mathbf{Ad}_{\mathrm{EM}}$.

Para las mónadas se tiene asimismo una noción de transformación. Una transformación de $(\mathbf{C}, \mathbb{T})$ en $(\mathbf{C}', \mathbb{T}')$, es un funtor $J\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}'$ tal que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"'] & \mathbf{C} \arrow[d, "J"] \\ \mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] & \mathbf{C}' \end{tikzcd}$$

conmuta y que cumple que $J\eta = \eta' J$ y $\mu' J = J\mu$. Una transformación tal es un Kl-morfismo de $(\mathbf{C}, \mathbb{T})$ en $(\mathbf{C}', \mathbb{T}')$, así como un EM-morfismo de $(\mathbf{C}', \mathbb{T}')$ en $(\mathbf{C}, \mathbb{T})$. Las transformaciones dan lugar a una 2-categoría, denotada como $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{tn}}$ y que es la sub-2-categoría común a $\mathbf{Mnd}^{\mathrm{cn}}_{\mathrm{Kl}}$ y $\mathbf{Mnd}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{EM}}$.

De $\mathbf{Ad}_{\mathrm{tn}}$ en $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{tn}}$ existe un 2-functor $\mathrm{Md}_{\mathrm{tn}}$, por birrestricción de $\mathbf{Ad}_{\mathrm{tn}}$ y $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{tn}}$. Asimismo, es fácil comprobar que el morfismo de adjunciones de Kleisli (resp. de Eilenberg-Moore) determinado por una transformación de mónadas es una transformación de adjunciones, por lo que los functores Kl y EM pueden birrestringirse, respectivamente, a functores $\mathrm{Kl}_{\mathrm{tn}}$ y $\mathrm{EM}_{\mathrm{tn}}$ de $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{tn}}$ en $\mathbf{Ad}_{\mathrm{tn}}$, y que, por consiguiente, son adjuntos a izquierda y derecha del functor $\mathrm{Md}_{\mathrm{tn}}$.

Resumimos la situación con el diagrama siguiente.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Ad}_{\mathrm{EM}} \arrow[rr, bend right=8, "\mathrm{Md}_{\mathrm{EM}}"'] \arrow[rr, phantom, "\top"] & & \mathbf{Mnd}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{EM}} \cong \mathbf{EM} \arrow[ll, bend right=8, "\mathrm{EM}"'] \\
\mathbf{Ad}_{\mathrm{tn}} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, "\mathrm{Md}_{\mathrm{tn}}"] & & \mathbf{Mnd}_{\mathrm{tn}} \arrow[ll, bend right=20, "\mathrm{EM}_{\mathrm{tn}}"'] \arrow[ll, bend left=20, "\mathrm{Kl}_{\mathrm{tn}}"] \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \mathbf{Ad}_{\mathrm{Kl}} \arrow[rr, bend left=8, "\mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}"] \arrow[rr, phantom, "\top"] & & \mathbf{Mnd}^{\mathrm{cn}}_{\mathrm{Kl}} \cong \mathbf{Kl} \arrow[ll, bend left=8, "\mathrm{Kl}"]
\end{tikzcd}$$

La existencia de transformaciones, en el sentido de MacLane, entre adjunciones no es, sin embargo, la situación más usual en contextos algebraicos. En muchas ocasiones se tienen pares de adjunciones tales que sus categorías subyacentes están, a su vez, relacionadas entre si también mediante adjunciones. Las siguientes situaciones son equivalentes:

- Existe un Kl-cuadrado de $F \dashv G$ en $F' \dashv G'$ y un EM-cuadrado de $F' \dashv G'$ en $F \dashv G$, de manera tal que los functores subyacentes son, dos a dos, adjuntos entre si.
- Existe un Kl-cuadrado de $F \dashv G$ en $F' \dashv G'$ tal que los functores subyacentes tienen adjuntos por la derecha.
- Existe un EM-cuadrado de $F' \dashv G'$ en $F \dashv G$ tal que los functores subyacentes tienen adjuntos por la izquierda.

La situación anterior admite una descripción más concisa, y es equivalente, a la existencia de un isomorfismo natural en un cuadrado de adjunciones.

Definition 73. Un cuadrado algebraico es un diagrama de categorías y adjunciones

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, shift right, "J"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right, "G"'] \arrow[d, shift right, "H"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C}' \arrow[u, shift right, "K"'] \arrow[r, shift right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right, "G'"'] \arrow[u, shift right, "I"']
\end{tikzcd}$$

junto con un par conjugado de isomorfismos naturales (α, β) de $H \circ F \dashv G \circ I$ en $F' \circ J \dashv K \circ G'$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, bend left, "H \circ F"] \arrow[r, bend right, "F' \circ J"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\alpha"] & \mathbf{D}' \arrow[r, bend left, "G \circ I"] \arrow[r, bend right, "K \circ G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathbf{C}
\end{tikzcd}$$

Representamos los cuadrados algebraicos mediante diagramas de la forma

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[rr, shift right, "F"'] \arrow[rr, phantom, "\top"] \arrow[dd, shift right=2, "J"'] \arrow[dd, phantom, "\dashv"] & & \mathbf{D} \arrow[ll, shift right, "G"'] \arrow[dd, shift right=2, "H"'] \arrow[dd, phantom, "\dashv"] \\
& (\alpha,\beta) & \\
\mathbf{C}' \arrow[uu, shift right=2, "K"'] \arrow[rr, shift right, "F'"'] \arrow[rr, phantom, "\top"] & & \mathbf{D}' \arrow[ll, shift right, "G'"'] \arrow[uu, shift right=2, "I"']
\end{tikzcd}$$

El par (α, β) en la definición anterior es equivalente a un cuadrado adjunto

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[rr, shift right, "HF"'] \arrow[rr, phantom, "\top"] \arrow[dd, "1"'] & & \mathbf{D}' \arrow[ll, shift right, "GI"'] \arrow[dd, "1"] \\
& \delta & \\
\mathbf{C} \arrow[rr, shift right, "F'J"'] \arrow[rr, phantom, "\top"] & & \mathbf{D}' \arrow[ll, shift right, "KG'"']
\end{tikzcd}$$

en los que $\delta_0 = \alpha$ y $\delta_3 = \beta$ son isomorfismos naturales.

Los isomorfismos naturales α y β de la definición anterior son conjugados si se cumple cualquiera de las dos ecuaciones siguientes.

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, bend left, "HF"] \arrow[r, bend right, "F'J"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\alpha"] & {}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "HF"] \arrow[rr, bend left=70, "1"] & {} \arrow[r, bend left, "GI"] \arrow[r, bend right, "KG'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] \arrow[rr, bend right=70, "1"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\eta"] & {} \arrow[r, "F'J"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\epsilon"] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "GI"] \arrow[rr, bend left=70, "1"] & {} \arrow[r, bend left, "HF"] \arrow[r, bend right, "F'J"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\alpha"] \arrow[rr, bend right=70, "1"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\epsilon"] & {} \arrow[r, "KG'"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta"] & {}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, bend left, "GI"] \arrow[r, bend right, "KG'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & {}
\end{tikzcd}$$

en las que η y ϵ son las unidades y counidades de las adjunciones compuestas correspondientes.

Obsérvese que si se tiene un diagrama de categorías y adjunciones como en la definición anterior y α es un isomorfismo natural de $F' \circ J$ en $H \circ F$, entonces su conjugado β es, necesariamente, un isomorfismo natural. Además, los inversos de ambos isomorfismos α^{-1} y β^{-1} forman a su vez un par conjugado de $F' \circ J \dashv K \circ G'$ en $H \circ F \dashv G \circ I$.

Proposition 143. *Dado un cuadrado algebraico como en 73, cada uno de los isomorfismos naturales* $\alpha\colon F'J \Longrightarrow HF$, $\beta^{-1}\colon KG' \Longrightarrow GI$, $\alpha^{-1}\colon HF \Longrightarrow F'J$ *y*

$\beta\colon GI \Longrightarrow KG'$ *determinan cuadrados adjuntos*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, shift right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda^{\alpha}"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right, "G"'] \arrow[d, "H"] \\ \mathbf{C}' \arrow[r, shift right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right, "G'"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha\Nearrow"] & {} \arrow[d, "H"] \\ {} \arrow[r, "F'"'] & {} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda_1^{\alpha}}{\Rightarrow}"] & {} \arrow[d, "H"] \\ {} & {} \arrow[l, "G'"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda_2^{\alpha}}{\Rightarrow}"] & {} \arrow[l, "G"'] \arrow[d, "H"] \\ {} \arrow[r, "F'"'] & {} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {} \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Searrow\lambda_3^{\alpha}"] & {} \arrow[l, "G"'] \arrow[d, "H"] \\ {} & {} \arrow[l, "G'"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, shift right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[dr, phantom, "\lambda^{\beta^{-1}}"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right, "G"'] \\ \mathbf{C}' \arrow[u, "K"] \arrow[r, shift right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right, "G'"'] \arrow[u, "I"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\lambda_0^{\beta^{-1}}"] & {} \\ {} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "F'"'] & {} \arrow[u, "I"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {} \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda_1^{\beta^{-1}}}{\Rightarrow}"] & {} \arrow[l, "G"'] \\ {} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "F'"'] & {} \arrow[u, "I"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda_2^{\beta^{-1}}}{\Rightarrow}"] & {} \\ {} \arrow[u, "K"] & {} \arrow[l, "G'"] \arrow[u, "I"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {} \arrow[dr, phantom, "\beta^{-1}\Nearrow"] & {} \arrow[l, "G"'] \\ {} \arrow[u, "K"] & {} \arrow[l, "G'"] \arrow[u, "I"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, shift right, "J"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \arrow[dr, phantom, "\lambda^{\alpha^{-1}}"] & \mathbf{D} \arrow[d, shift right, "H"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\ \mathbf{C}' \arrow[r, "F'"'] \arrow[u, shift right, "K"'] & \mathbf{D}' \arrow[u, shift right, "I"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha^{-1}\Swarrow"] & {} \arrow[d, "H"] \\ {} \arrow[r, "F'"'] & {} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda_1^{\alpha^{-1}}\Downarrow"] & {} \\ {} \arrow[r, "F'"'] & {} \arrow[u, "I"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\lambda_2^{\alpha^{-1}}"] & {} \arrow[d, "H"] \\ {} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "F'"'] & {} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\lambda_3^{\alpha^{-1}}"] & {} \\ {} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "F'"'] & {} \arrow[u, "I"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[d, shift right, "J"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \arrow[dr, phantom, "\lambda^{\beta}"] & \mathbf{D} \arrow[l, "G"'] \arrow[d, shift right, "H"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\ \mathbf{C}' \arrow[u, shift right, "K"'] & \mathbf{D}' \arrow[l, "G'"] \arrow[u, shift right, "I"'] \end{tikzcd}$$

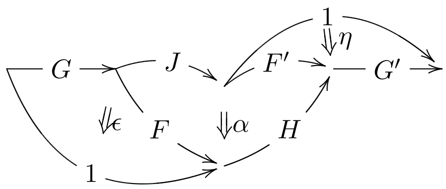
$$\begin{tikzcd} {} \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Searrow\lambda_0^{\beta}"] & {} \arrow[l, "G"'] \arrow[d, "H"] \\ {} & {} \arrow[l, "G'"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {} \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\lambda_1^{\beta}"] & {} \arrow[l, "G"'] \arrow[d, "H"] \\ {} \arrow[u, "K"] & {} \arrow[l, "G'"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\lambda_2^{\beta}"] & {} \arrow[l, "G"'] \\ {} & {} \arrow[l, "G'"] \arrow[u, "I"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {} \arrow[dr, phantom, "\beta\Swarrow"] & {} \arrow[l, "G"'] \\ {} \arrow[u, "K"] & {} \arrow[l, "G'"] \arrow[u, "I"'] \end{tikzcd}$$

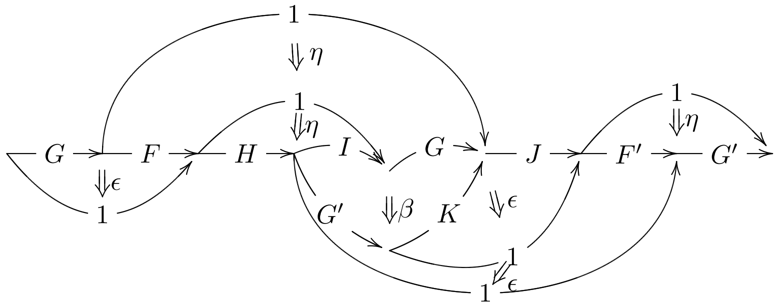
Además, cada una de las transformaciones naturales de los diagramas anteriores determina a todas las demás unívocamente.

Proof. Puesto que en cualquier cuadrado adjunto los cuádruplos de transformaciones naturales se determinan mutuamente, es suficiente encontrar, para cada par de cuadrados adjuntos, un par de transformaciones naturales interdefinibles. En particular se cumple que $\lambda_3^{\alpha} = \lambda_0^{\beta}$ y $\lambda_3^{\alpha^{-1}} = \lambda_0^{\beta^{-1}}$.

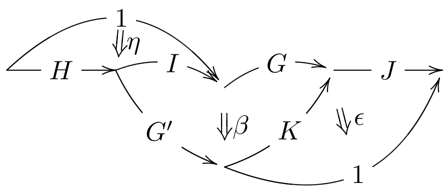
λ_3^{α} =



=

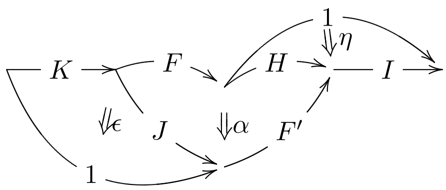


=

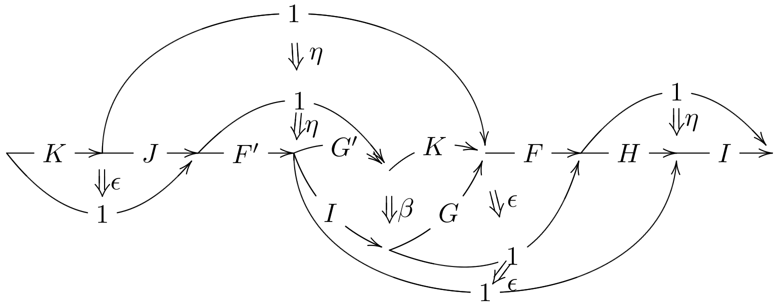


= λ_0^{β}

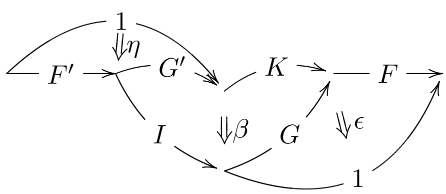
$\lambda_3^{\alpha^{-1}}$ =



=



=



= $\lambda_0^{\beta^{-1}}$

□

Los cuadrados algebraicos son una caso especial de lax-cuadrados en la 2-categoría **Adj**.

Definition 74. Sea **C** una 2-categoría. Un lax-cuadrado en **C** es un diagrama de objetos, morfismos y 2-células

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha\swarrow"] & d \arrow[d, "h"] \\ c' \arrow[r, "f'"'] & d' \end{tikzcd}$$

Un pseudo-cuadrado en **C** es un lax-cuadrado tal que su 2-célula es un isomorfismo.

Proposition 144. *Sea* **C** *una 2-categoría. Los lax-cuadrados en* **C** *determinan una categoría doble, denotada como* $\mathbf{LSq}(\mathbf{C})$. *Además, los pseudo-cuadrados en* **C** *forman una sub-categoría doble denotada como* $\mathbf{PSq}(\mathbf{C})$.

Proof. Las composiciones vertical y horizontal de los lax-cuadrados se definen haciendo uso de las composiciones en **C** de 1-células y 2-células,

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha\swarrow"] & d \arrow[d, "h"] \\ c' \arrow[r, "f'" description] \arrow[d, "j'"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha'\swarrow"] & d' \arrow[d, "h'"] \\ c'' \arrow[r, "f''"'] & d'' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} c \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha\swarrow"] & d \arrow[r, "l"] \arrow[d, "h" description] \arrow[dr, phantom, "\alpha'\swarrow"] & e \arrow[d, "i"] \\ c' \arrow[r, "f'"'] & d' \arrow[r, "l'"'] & e' \end{tikzcd}$$

Las identidades para las composiciones vertical y horizontal son, respectivamente,

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "f\swarrow"] & d \arrow[d, "1"] \\ c' \arrow[r, "f"'] & d' \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} c \arrow[r, "1"] \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, phantom, "j\swarrow"] & c \arrow[d, "j"] \\ c' \arrow[r, "1"'] & c' \end{tikzcd}$$

Es inmediato que las composiciones de pseudo-cuadrados son pseudo-cuadrados. □

La categoría doble de lax-cuadrados sobre **Adj** tiene como objetos categorías, como morfismos de **C** en **D** adjunciones $F \dashv G$ y como 2-células cuadrados

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "F\dashv G"] \arrow[d, "J\dashv K"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha,\beta)\swarrow"] & \mathbf{D} \arrow[d, "H\dashv I"] \\ \mathbf{C}' \arrow[r, "F'\dashv G'"'] & \mathbf{D}' \end{tikzcd}$$

en los que (α,β) es un par conjugado de transformaciones naturales

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, bend left, "H\circ F"] \arrow[r, bend right, "F'\circ J"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\alpha"] & \mathbf{D}' \arrow[r, bend left, "G\circ I"] \arrow[r, bend right, "K\circ G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathbf{C} \end{tikzcd}$$

Los cuadrados algebraicos son, por tanto, las 2-células de $\mathbf{PSq}(\mathbf{Adj})$.

Si en la categoría doble $\mathbf{PSq}(\mathbf{Adj})$ nos olvidamos de la composición horizontal y tomamos las identidades para la composición vertical como objetos y las 2-células como morfismos, obtenemos la categoría $\mathbf{Ad}_{\mathrm{alg}}$ de adjunciones y cuadrados algebraicos. En este caso, denotamos mediante $(J\dashv K,(\alpha,\beta),H\dashv I)\colon (F\dashv G)\longrightarrow(F'\dashv G')$ la existencia de un cuadrado algebraico como en 73, considerado como un morfismo de adjunciones. Esta categoría se puede completar hasta una 2-categoría.

Definition 75. Sean

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, shift right, "F"'] \arrow[d, shift right, "J"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right, "G"'] \arrow[d, shift right, "H"'] \\ \mathbf{C}' \arrow[r, shift right, "F'"'] \arrow[u, shift right, "K"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[u, phantom, "\dashv"] \arrow[ur, phantom, "(\alpha,\beta)"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right, "G'"'] \arrow[u, shift right, "I"'] \arrow[u, phantom, "\dashv"] \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, shift right, "F"'] \arrow[d, shift right, "J'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right, "G"'] \arrow[d, shift right, "H'"'] \\ \mathbf{C}' \arrow[r, shift right, "F'"'] \arrow[u, shift right, "K'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[u, phantom, "\dashv"] \arrow[ur, phantom, "(\alpha',\beta')"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right, "G'"'] \arrow[u, shift right, "I'"'] \arrow[u, phantom, "\dashv"] \end{tikzcd}$$

dos cuadrados algebraicos. Una deformación algebraica del primero en el segundo es un par conjugado $\tau=(\tau_0\colon H'\Longrightarrow H,\tau_1\colon I\Longrightarrow I')$ de $H\dashv I$ en $H'\dashv I'$.

Representamos la existencia de deformaciones algebraicas entre cuadrados algebraicos mediante diagramas de la forma

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[rr, "F\dashv G"] \arrow[d, bend right, "J\dashv K"'] \arrow[d, bend left, "J'\dashv K'"] & & \mathbf{D} \arrow[d, bend right, "H\dashv I"'] \arrow[d, bend left, "H'\dashv I'"] \arrow[d, phantom, "\tau"] \\ \mathbf{C}' \arrow[rr, "F'\dashv G'"'] \arrow[r, phantom, "(\alpha,\beta)\ (\alpha',\beta')"] & & \mathbf{D}' \end{tikzcd}$$

Las deformaciones algebraicas son un caso especial de lax-cuadrados. Formalmente, se tiene una biyección entre las deformaciones algebraicas y los lax-cuadrados en $\mathbf{LSq}(\mathbf{Adj})$ de la forma

$$\begin{tikzcd} \mathbf{D} \arrow[r, shift right, "1"'] \arrow[d, shift right, "H'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right, "1"'] \arrow[d, shift right, "H"'] \\ \mathbf{D}' \arrow[r, shift right, "1"'] \arrow[u, shift right, "I'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[u, phantom, "\dashv"] \arrow[ur, phantom, "(\tau_0,\tau_1)"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right, "1"'] \arrow[u, shift right, "I"'] \arrow[u, phantom, "\dashv"] \end{tikzcd}$$

Proposition 145. *Las adjunciones, los cuadrados algebraicos y las deformaciones algebraicas determinan una 2-categoría, denotada como* $\mathbf{Ad}_{\mathrm{alg}}$.

Proof. Las identidades, y composiciones de deformaciones se definen como las de sus pares conjugados o, equivalentemente, mediante las composiciones de sus lax-cuadrados asociados. $\square$

Definition 76. Considérense cuadrados algebraicos como en 75. Una deformación de Street del primero en el segundo es un par (σ, τ), en el que $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1)$ es un par conjugado de $J \dashv K$ en $J' \dashv K'$ y $\tau = (\tau_0, \tau_1)$ un par conjugado de $H \dashv I$ en $H' \dashv I'$, compatible con los cuadrados algebraicos, i.e., tal que

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "1 \dashv 1"] \arrow[d, "J' \dashv K'"'] \arrow[dr, phantom, "(\sigma_0,\sigma_1) \Swarrow"] & \mathbf{C} \arrow[r, "F \dashv G"] \arrow[d, "J \dashv K"] \arrow[dr, phantom, "(\alpha,\beta) \Swarrow"] & \mathbf{D} \arrow[d, "H \dashv I"] \\ \mathbf{C}' \arrow[r, "1 \dashv 1"'] & \mathbf{C}' \arrow[r, "F' \dashv G'"'] & \mathbf{D}' \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "F \dashv G"] \arrow[d, "J' \dashv K'"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha,\beta) \Swarrow"] & \mathbf{C} \arrow[r, "1 \dashv 1"] \arrow[d, "H' \dashv I'"] \arrow[dr, phantom, "(\tau_0,\tau_1) \Swarrow"] & \mathbf{D} \arrow[d, "H \dashv I"] \\ \mathbf{C}' \arrow[r, "F' \dashv G'"'] & \mathbf{C}' \arrow[r, "1 \dashv 1"'] & \mathbf{D}' \end{tikzcd}$$

Representamos la existencia de deformaciones de Street entre cuadrados algebraicos mediante diagramas de la forma

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[d, bend right, "J \dashv K"'] \arrow[d, bend left, "J' \dashv K'"] \arrow[d, phantom, "\sigma"] \arrow[r, "F \dashv G"] & \mathbf{D} \arrow[d, bend right, "H \dashv I"'] \arrow[d, bend left, "H' \dashv I'"] \arrow[d, phantom, "\tau"] \\ \mathbf{C}' \arrow[r, "F' \dashv G'"'] \arrow[ur, phantom, "(\alpha,\beta) \quad (\alpha',\beta')"] & \mathbf{D}' \end{tikzcd}$$

Las identidades y composiciones de deformaciones de Street se definen mediante las de sus pares conjugados o, equivalentemente, las de sus lax-cuadrados asociados.

A partir de la definición anterior, es inmediato que de toda deformación de Street se obtiene una deformación algebraica olvidando su primera componente. La sub-2-categoría de $\mathbf{Ad}_{\mathrm{alg}}$ determinada por las deformaciones de Street se denota como $\mathbf{Ad}_{\mathrm{alg,St}}$.

De cada cuadrado algebraico se obtienen un cuadrado adjunto de Kleisli y un cuadrado adjunto de Eilenberg-Moore. Además, cada deformación entre cuadrados algebraicos determina un par de deformaciones entre los cuadrados de Kleisli y de Eilenberg-Moore respectivos. Se cumple también que cada Kl-cuadrado tal que sus functores subyacentes tienen adjuntos por la derecha, determina un cuadrado algebraico. Si entre dos de tales cuadrados se tiene una deformación, ésta determina, a su vez, una deformación entre los cuadrados algebraicos asociados. La situación para los cuadrados de Eilenberg-Moore es idéntica cuando los functores subyacentes tienen adjuntos por la izquierda.

Proposition 146. *De la 2-categoría* $\mathbf{Ad}_{\mathrm{alg}}$ *en la 2-categoría* $\mathbf{Ad}^{\mathrm{cn}}_{\mathrm{Kl}}$ *existe un 2-functor*

$$\mathbf{Ad}_{\mathrm{alg}} \xrightarrow{\quad\quad\quad\mathrm{I}_{\mathrm{Kl}}\quad\quad\quad} \mathbf{Ad}^{\mathrm{cn}}_{\mathrm{Kl}}$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[dd, bend right, "J \dashv K"'] \arrow[dd, bend left, "J' \dashv K'"] \arrow[drr, "F \dashv G"] & & \\
& (\alpha,\beta) \quad (\alpha',\beta') & \mathbf{D} \arrow[dd, bend right, "H \dashv I"'] \arrow[dd, bend left, "H' \dashv I'"] \arrow[dd, phantom, "\tau"] \\
\mathbf{C}' \arrow[drr, "F' \dashv G'"'] & & \\
& & \mathbf{D}'
\end{tikzcd}
\quad\longmapsto\quad
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[dd, bend right, "J"'] \arrow[dd, bend left, "J'"] \arrow[drr, "F \dashv G"] & & \\
& \lambda^{\alpha} \quad \lambda^{\alpha'} & \mathbf{D} \arrow[dd, bend right, "H"'] \arrow[dd, bend left, "H'"] \arrow[dd, phantom, "\overset{\tau_0}{\Leftarrow}"] \\
\mathbf{C}' \arrow[drr, "F' \dashv G'"'] & & \\
& & \mathbf{D}'
\end{tikzcd}
$$

en el que λ^{α} *y* $\lambda^{\alpha'}$ *son, respectivamente, los cuadrados adjuntos determinados por* α *y* α'*. El 2-functor* I_{Kl} *es inyectivo en los objetos, pseudo-inyectivo en los morfismos, i.e., para cada Kl-cuadrado su fibra consta de cuadrados algebraicos isomorfos, fiel y pleno en las 2-células.*

Proof. El 2-functor I_{Kl} es pseudo-inyectivo en los morfismos puesto que si $J \dashv K$ y $J \dashv K'$ son adjunciones, entonces $K \cong K'$ y por consiguiente, $J \dashv K$ y $J \dashv K'$ son isomorfos en $\mathbf{Ad}_{\mathrm{alg}}$. Es fiel para las 2-células puesto que los pares conjugados son únicos. Es pleno para la 2-células puesto que cada deformación entre morfismos algebraicos determina un par conjugado correspondiente. □

Proposition 147. *De la 2-categoría* $\mathbf{Ad}_{\mathrm{alg}}$ *en la 2-categoría* $\mathbf{Ad}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{EM}}$ *existe un functor*

$$\mathbf{Ad}_{\mathrm{alg}} \xrightarrow{\quad\quad\quad\mathrm{I}_{\mathrm{EM}}\quad\quad\quad} \mathbf{Ad}^{\mathrm{cn}}_{\mathrm{Kl}}$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[dd, bend right, "J \dashv K"'] \arrow[dd, bend left, "J' \dashv K'"] \arrow[drr, "F \dashv G"] & & \\
& (\alpha,\beta) \quad (\alpha',\beta') & \mathbf{D} \arrow[dd, bend right, "H \dashv I"'] \arrow[dd, bend left, "H' \dashv I'"] \arrow[dd, phantom, "\tau"] \\
\mathbf{C}' \arrow[drr, "F' \dashv G'"'] & & \\
& & \mathbf{D}'
\end{tikzcd}
\quad\longmapsto\quad
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[drr, "F \dashv G"] & & \\
& \lambda^{\beta^{-1}} \quad \lambda^{\beta'^{-1}} & \mathbf{D} \\
\mathbf{C}' \arrow[uu, bend left, "K"] \arrow[uu, bend right, "K'"'] \arrow[drr, "F' \dashv G'"'] & & \\
& & \mathbf{D}' \arrow[uu, bend left, "I"] \arrow[uu, bend right, "I'"'] \arrow[uu, phantom, "\overset{\tau_1}{\Rightarrow}"]
\end{tikzcd}
$$

en el que $\lambda^{\beta^{-1}}$ *y* $\lambda^{\beta'^{-1}}$ *son, respectivamente, los cuadrados adjuntos determinados por* β^{-1} *y* β'^{-1}*. El 2-functor* I_{EM} *es inyectivo en los objetos, pseudo-inyectivo en los morfismos, fiel y pleno en las 2-células.* □

Finalmente, tenemos la siguiente proposición.

Proposition 148. *De la 2-categoría* $\mathbf{Ad}_{\mathrm{alg}}$ *en la 2-categoría* $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}}$ *existe un functor*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Ad}_{\mathrm{alg}} \arrow[rrr, "\mathrm{Mnd}_{\mathrm{alg}}"] & & & \mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[d, bend right, "J \dashv K"'] \arrow[d, bend left, "J' \dashv K'"] \arrow[d, phantom, shift left=6ex, "(\alpha,\beta)"] \arrow[r, "F \dashv G"] & \mathbf{D} \arrow[d, bend right, "H \dashv I"'] \arrow[d, bend left, "H' \dashv I'"] \arrow[d, phantom, "\tau"] \arrow[d, phantom, shift right=6ex, "(\alpha',\beta')"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "F' \dashv G'"'] & \mathbf{D}'
\end{tikzcd}
\longmapsto
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[d, bend right, "J \dashv K"'] \arrow[d, bend left, "J' \dashv K'"] \arrow[r, "G \circ F"] & \mathbf{C} \arrow[d, bend right, "J \dashv K"'] \arrow[d, bend left, "J' \dashv K'"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "G' \circ F'"'] & \mathbf{C}'
\end{tikzcd}
\qquad \lambda_{(\alpha,\beta)} \overset{\Xi_\tau}{\rightsquigarrow} \lambda_{(\alpha',\beta')}
$$

en el que $\lambda_{(\alpha,\beta)}$ *es el cuadrado adjunto*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, shift right, "J"'] \arrow[d, phantom, shift left=2ex, "\dashv"] & \mathbf{C} \arrow[d, shift right, "J"'] \arrow[d, phantom, shift left=2ex, "\dashv"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] \arrow[u, shift right, "K"'] & \mathbf{C}' \arrow[u, shift right, "K"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha^{-1} \Swarrow"] & \cdot \arrow[r, "G"] \arrow[d, "H"] \arrow[dr, phantom, "\lambda_3^{\alpha} \Swarrow"] & \cdot \arrow[d, "J"] \\
\cdot \arrow[r, "F'"'] & \cdot \arrow[r, "G'"'] & \cdot
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha^{-1} \Swarrow"] & \cdot \arrow[r, "G"] \arrow[d, "H"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \lambda_1^{\beta}"] & \cdot \\
\cdot \arrow[r, "F'"'] & \cdot \arrow[r, "G'"'] & \cdot \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "F"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \lambda_2^{\alpha^{-1}}"] & \cdot \arrow[r, "G"] \arrow[d, "H"] \arrow[dr, phantom, "\lambda_0^{\beta} \Swarrow"] & \cdot \arrow[d, "J"] \\
\cdot \arrow[u, "K"] \arrow[r, "F'"'] & \cdot \arrow[r, "G'"'] & \cdot
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "F"] \arrow[dr, phantom, "\lambda_0^{\beta^{-1}} \Searrow"] & \cdot \arrow[r, "G"] \arrow[dr, phantom, "\beta \Searrow"] & \cdot \\
\cdot \arrow[u, "K"] \arrow[r, "F'"'] & \cdot \arrow[u, "I"] \arrow[r, "G'"'] & \cdot \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
$$

$\lambda_{(\alpha',\beta')}$ *es el cuadrado adjunto correspondiente y* Ξ_τ *la deformación* $(\lambda^{\beta'} \overset{\mathrm{fn}}{\circ} \tau \overset{\mathrm{fn}}{\circ} \lambda^{\alpha^{-1}}) \overset{\mathrm{ad}}{\circ} \eta$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[rrr, "1"] \arrow[d, shift right, "1"'] \arrow[d, phantom, shift left=2ex, "\dashv"] \arrow[drrr, phantom, "\begin{pmatrix} \eta & \eta \\ \eta & \eta \end{pmatrix}"] & & & \mathbf{C} \arrow[d, shift right, "1"'] \arrow[d, phantom, shift left=2ex, "\dashv"] \\
\mathbf{C} \arrow[u, shift right, "1"'] \arrow[r, "F"] \arrow[d, shift right, "J"'] \arrow[d, phantom, shift left=2ex, "\dashv"] \arrow[dr, phantom, "\lambda^{\alpha^{-1}}"] & \mathbf{D} \arrow[r, "1"] \arrow[d, shift right, "H"'] \arrow[d, phantom, shift left=2ex, "\dashv"] \arrow[dr, phantom, "\tau"] & \mathbf{D} \arrow[r, "G"] \arrow[d, shift right, "H'"'] \arrow[d, phantom, shift left=2ex, "\dashv"] \arrow[dr, phantom, "\lambda^{\beta'^{-1}}"] & \mathbf{C} \arrow[u, shift right, "1"'] \arrow[d, shift right, "J'"'] \arrow[d, phantom, shift left=2ex, "\dashv"] \\
\mathbf{C}' \arrow[u, shift right, "K"'] \arrow[r, "F'"'] & \mathbf{D}' \arrow[u, shift right, "I"'] \arrow[r, "1"'] & \mathbf{D}' \arrow[u, shift right, "I'"'] \arrow[r, "G'"'] & \mathbf{C}' \arrow[u, shift right, "K'"']
\end{tikzcd}
$$

representada como

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J\dashv K"'] \arrow[rr, bend left, "1"] \arrow[dr, phantom, "\lambda^{\alpha^{-1}}"] & \mathbf{D} \arrow[r, "G"] \arrow[d, bend right, "H\dashv I"'] \arrow[d, bend left, "H'\dashv I'"] \arrow[d, phantom, "\tau"] \arrow[dr, phantom, "\lambda^{\beta'}"] \arrow[u, phantom, "\eta"] & \mathbf{C} \arrow[d, "J'\dashv K'"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "F'"'] & \mathbf{D}' \arrow[r, "G'"'] & \mathbf{C}'
\end{tikzcd}
$$

Proof. Por la proposición 143, las transformaciones naturales en la imagen de un cuadrado algebraico son transpuestas entre si y forman, por tanto, un morfismo algebraico de mónadas. Alternativamente, se puede verificar que $\lambda_{(\alpha,\beta)} = \lambda^{\beta} \overset{\mathrm{ad}}{\circ} \lambda^{\alpha^{-1}}$.

La demostración de que Ξ_τ es, efectivamente, una deformación algebraica es formalmente idéntica a las demostraciones de que Ξ^{τ_0} y Ξ_{τ_3} son, respectivamente, deformaciones de mónadas de Kleisli y de Eilenberg-Moore.

La preservación de identidades y composiciones se sigue asimismo de las de sus componentes. $\square$

Resumimos la situación anterior con el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Ad}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{EM}} \arrow[rr, bend right=8, "\mathrm{EM}^{\mathrm{tr}}"'] \arrow[rr, phantom, "\top"] & & \mathbf{Mnd}_{\mathrm{EM}} \cong \mathbf{EM}^{\mathrm{tr}} \arrow[ll, bend right=8, "\mathrm{Md}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{EM}}"'] \\
\mathbf{Ad}_{\mathrm{alg}} \arrow[ur, "\mathrm{I}_{\mathrm{EM}}"] \arrow[dr, "\mathrm{I}_{\mathrm{Kl}}"'] \arrow[rr, "\mathrm{Md}_{\mathrm{alg}}"] & & \mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}} \arrow[ur, "\mathrm{J}_{\mathrm{EM}}"'] \arrow[dr, "\mathrm{J}_{\mathrm{Kl}}"] & \\
 & \mathbf{Ad}^{\mathrm{cn}}_{\mathrm{Kl}} \arrow[rr, bend left=8, "\mathrm{Md}^{\mathrm{cn}}_{\mathrm{Kl}}"] \arrow[rr, phantom, "\top"] & & \mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl}} \cong \mathbf{Kl}^{\mathrm{cn}} \arrow[ll, bend left=8, "\mathrm{Kl}^{\mathrm{cn}}"]
\end{tikzcd}
$$

El functor $\mathrm{Md}_{\mathrm{alg}}$ no tiene en general un adjunto por la izquierda. Para algunas subcategorías de $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}}$ este adjunto por la izquierda existe, como, por ejemplo, para la sub-2-categoría plena de $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}}$ determinada por las categorías de la forma $\mathbf{Set}^S$.

Podemos ahora describir la relación entre ciertas adjunciones surgidas anteriormente. Si se tiene un par de functores equivalentes $H \equiv I$ y un par de cuadrados iso-conmutativos

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift right, "F"'] \arrow[d, shift right, "J"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right, "G"'] \arrow[d, shift right, "H"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, shift right, "F'"'] \arrow[u, shift right, "K"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right, "G'"'] \arrow[u, shift right, "I"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{C}' \arrow[r, shift right, "F'"'] \arrow[d, shift right, "K"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right, "G'"'] \arrow[d, shift right, "I"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C} \arrow[r, shift right, "F"'] \arrow[u, shift right, "L"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right, "G"'] \arrow[u, shift right, "H"']
\end{tikzcd}
$$

entonces las adjunciones $F \dashv G$ y $F' \dashv G'$ son equivalentes en la 2-categoría de adjunciones, morfismos algebraicos de adjunciones y deformaciones. Esto es así porque los cuadrados iso-conmutativos pueden completarse hasta cuadrados algebraicos y, por ser las categorías $\mathbf{D}$ y $\mathbf{D}'$ equivalentes, las identidades para ellas son, respectivamente, naturalmente isomorfas a los functores $I \circ H$ y $H \circ I$. Tales isomorfismos naturales dan lugar a sendas deformaciones inversibles entre los cuadrados algebraicos, por lo que las adjunciones $F \dashv G$ y $F' \dashv G'$ son equivalentes en la 2-categoría $\mathbf{Ad}_{\mathrm{alg}}$. Puesto que todo 2-functor preserva equivalencias, las mónadas asociadas son también equivalentes en la 2-categoría $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}}$.

La situación descrita es la que encontramos al estudiar la relación entre las adjunciones relativas a las álgebras de Hall y las álgebras de Bénabou. Sin embargo, tales adjunciones no son equivalentes en la sub-2-categoría determinada por las deformaciones de Street.

Otro ejemplo de adjunciones equivalentes en $\mathbf{Ad}_{\mathrm{alg}}$, es el de las adjunciones $\mathrm{Mod}_{\mathbb{T}} \dashv \mathrm{Th}_{\mathbb{T}}$ y $\widetilde{\mathrm{Mod}}_{\mathbb{T}} \dashv \widetilde{\mathrm{Th}}_{\mathbb{T}}$ ligadas por los morfismos algebraicos de la proposición 63. Para demostrar que las adjunciones son equivalentes, hay que comprobar que las composiciones de ambos cuadrados algebraicos son isomorfas a las identidades respectivas, pero esto es inmediato porque las deformaciones inversibles necesarias son, simplemente, las 2-identidades para la adjunción identidad en $\mathrm{Sub}(\mathbf{EM}(\mathbb{T}))^{\mathrm{op}}$. Ambas adjunciones no son, sin embargo, equivalentes en la sub-2-categoría determinada por las deformaciones de Street, lo que muestra que, aún siendo en este caso triviales las 2-células consideradas, su existencia es relevante para formalizar la relación entre ambas adjunciones.

6.5. **F-morfismos y deformaciones.** Lo anteriormente expuesto se puede aplicar, en particular, a las álgebras heterogéneas. Concretamente, cada signatura algebraica heterogénea (S, Σ) tiene asociada, canónicamente, una adjunción entre la categoría de (S, Σ)-álgebras y la de $\mathbf{Set}^S$-conjuntos, así como una mónada sobre $\mathbf{Set}^S$. Además, los morfismos de Fujiwara de signaturas algebraicas heterogéneas determinan cuadrados algebraicos entre las adjunciones correspondientes, así como morfismos algebraicos entre las mónadas asociadas. Por otra parte, las deformaciones entre F-morfismos de signaturas algebraicas heterogéneas inducen deformaciones entre cuadrados algebraicos y deformaciones algebraicas entre morfismos algebraicos. Para comprobarlo, es suficiente tener en cuenta que cada deformación tiene asociada una transformación natural entre los functores correspondientes para las categorías de álgebras, que dan lugar a su vez a las 2-células correspondientes en $\mathbf{Ad}_{\mathrm{alg}}$ y $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}}$.

Se tienen por tanto 2-functores de inclusión, no plenos, de la 2-categoría $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$ en las 2-categorías $\mathbf{Ad}_{\mathrm{alg}}$ y $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}}$. Además, todo lo anterior es igualmente válido si en lugar de la 2-categoría $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$ se consideran las 2-categorías $\mathbf{Thp}_{\mathrm{fuj}}$.

La teoría desarrollada en este trabajo puede ser de utilidad tanto para demostrar ciertas proposiciones relativas a las álgebras heterogéneas, como para eventuales generalizaciones de los conceptos de morfismo entre signaturas o entre presentaciones de teorías.

6.6. **Espacios de Clausura.** Mostramos, por último, una aplicación de los resultados anteriores al caso de los espacios de clausura heterogéneos. Para ello, consideramos los espacios de clausura heterogéneos como mónadas sobre las categorías asociadas al conjunto ordenado de las partes del conjunto heterogéneo subyacente del espacio de clausura en cuestión. A pesar de que la teoría general desarrollada se simplifica en gran medida al ser las categorías consideradas las asociadas a conjuntos ordenados, de la adopción de este punto de vista se sigue que los espacios de clausura heterogéneos pueden comparase de manera más general que la habitual, y que resulta esencial para dar cuenta de la equivalencia entre algunos de ellos.

Si A es un S-conjunto y C un operador clausura sobre A, entonces C determina una mónada sobre $\mathbf{Sub}(A)$, puesto que C es functor por ser isótona, y la unidad y la multiplicación se definen unívocamente por la extensividad y la idempotencia de C. Su categoría de Eilenberg-Moore es la determinada por el sistema de clausura $\mathcal{C}$ asociado a C, i.e., el conjunto ordenado de los puntos fijos de C, y su categoría de Kleisli consta de las partes del conjunto ordenadas respecto a C, de manera tal que $X \subseteq Y$ exactamente si $X \subseteq \mathrm{C}(Y)$.

Los morfismos entre espacios de clausura heterogéneos son un caso de alg-morfismos entre las mónadas asociadas a tales espacios. Las distintas caracterizaciones de la continuidad de un morfismo se corresponden con las transformaciones naturales transpuestas de los alg-morfismos.

Si C es un operador clausura sobre un S-conjunto A y D un operador clausura sobre un T-conjunto B, un alg-morfismo de la mónada $(\mathbf{Sub}(A), \mathbb{C})$ en la mónada $(\mathbf{Sub}(B), \mathbb{D})$ es un cuadrado adjunto

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Sub}(A) \arrow[r, "\mathrm{C}"] \arrow[d, shift right, "L"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \mathbf{Sub}(A) \arrow[d, shift right, "L"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{Sub}(B) \arrow[r, "\mathrm{D}"'] \arrow[u, shift right, "R"'] & \mathbf{Sub}(B) \arrow[u, shift right, "R"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\mathrm{C}"] \arrow[d, "L"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow"] & {} \arrow[d, "L"] \\
{} \arrow[r, "\mathrm{D}"'] & {}
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\mathrm{C}"] \arrow[d, "L"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow"] & {} \\
{} \arrow[r, "\mathrm{D}"'] & {} \arrow[u, "R"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\mathrm{C}"] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow"] & {} \arrow[d, "L"] \\
{} \arrow[r, "\mathrm{D}"'] \arrow[u, "R"] & {}
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\mathrm{C}"] \arrow[dr, phantom, "\Nwarrow"] & {} \\
{} \arrow[r, "\mathrm{D}"'] \arrow[u, "R"] & {} \arrow[u, "R"']
\end{tikzcd}$$

lo que equivale a que $L \dashv R\colon \mathbf{Sub}(A) \longrightarrow \mathbf{Sub}(B)$ sea una adjunción y se cumpla cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

0. Para cada $X \subseteq A$, $L(\mathrm{C}(X)) \subseteq \mathrm{D}(L(X))$.
1. Para cada $X \subseteq A$, $\mathrm{C}(X) \subseteq R(\mathrm{D}(L(X)))$.
2. Para cada $Y \subseteq B$, $L(\mathrm{C}(R(Y))) \subseteq \mathrm{D}(Y)$.
3. Para cada $Y \subseteq B$, $\mathrm{C}(R(Y)) \subseteq R(\mathrm{D}(Y))$.

En la situación descrita, decimos que el par (L, R) es un alg-morfismo de $(\mathbf{Sub}(A), \mathbb{C})$ en $(\mathbf{Sub}(B), \mathbb{D})$.

A un alg-morfismo tal le corresponde un functor de $\mathbf{EM}(\mathrm{D}) = \mathcal{D}$ en $\mathbf{EM}(\mathrm{C}) = \mathcal{C}$ que conmuta con los functores de olvido G_{C} y G_{D}, que, en este caso, son simplemente las inclusiones respectivas de $\mathcal{C}$ en $\mathbf{Sub}(A)$ y de $\mathcal{D}$ en $\mathbf{Sub}(B)$. La existencia de tal functor equivale a la condición de que, para cada $Y \in \mathcal{D}$, $R(Y) \in \mathcal{C}$, puesto que si H es un functor de $\mathcal{D}$ en $\mathcal{C}$ tal que $\mathrm{G}_{\mathrm{C}} \circ H = R \circ \mathrm{G}_{\mathrm{D}}$, H ha de ser, necesariamente, $R{\restriction}_{\mathcal{D},\mathcal{C}}$, la birrestricción de R a $\mathcal{D}$ y $\mathcal{C}$.

Para las categorías de Kleisli, la existencia de un functor de $\mathbf{Kl}(\mathrm{C})$ en $\mathbf{Kl}(\mathrm{D})$ que conmute con los functores F_{C} y F_{D}, equivale a la condición de que, para cada $X, Y \subseteq A$, si $X \subseteq \mathrm{C}(Y)$ entonces $L(X) \subseteq \mathrm{D}(L(Y))$. A partir de lo anterior se sigue que los morfismos continuos entre espacios de clausura son un caso de alg-morfismos. Si $(\phi, j)\colon (S, A, \mathrm{C}) \longrightarrow (T, B, \mathrm{D})$ es un morfismo de espacios de clausura heterogéneos, entonces la adjunción $\bigcup_\phi \circ j[\cdot] \dashv j^{-1}[\cdot] \circ \Delta_\phi$ determina un alg-morfismo entre las mónadas correspondientes. Por consiguiente, la categoría $\mathbf{HClSp}$ de espacios de clausura heterogéneos se puede identificar a una subcategoría de la 2-categoría $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}}$.

No todos los alg-morfismos entre espacios de clausura son, sin embargo, de la forma $\bigcup_\phi \circ j[\cdot] \dashv j^{-1}[\cdot] \circ \Delta_\phi$. Por ejemplo, para los operadores de consecuencia de

Hall y de Bénabou, se tiene, por la proposición 50, que existen cuadrados adjuntos

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Sub}(\mathrm{Eq}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)) \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)}"] \arrow[d, shift right=2ex, "I"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \mathbf{Sub}(\mathrm{Eq}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)) \arrow[d, shift right=2ex, "I"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{Sub}(\mathrm{Eq}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)) \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)}"'] \arrow[u, shift right=2ex, "H"'] & \mathbf{Sub}(\mathrm{Eq}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)) \arrow[u, shift right=2ex, "H"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Sub}(\mathrm{Eq}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)) \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)}"] \arrow[d, shift right=2ex, "D"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \mathbf{Sub}(\mathrm{Eq}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)) \arrow[d, shift right=2ex, "D"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{Sub}(\mathrm{Eq}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)) \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Pol}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)}"'] \arrow[u, shift right=2ex, "B"'] & \mathbf{Sub}(\mathrm{Eq}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)) \arrow[u, shift right=2ex, "B"']
\end{tikzcd}
$$

que son, por tanto, alg-morfismos entre las mónadas correspondientes. Las aplicaciones subyacentes de las adjunciones $I \dashv H$ y $D \dashv B$ no pueden definirse a partir de ninguna aplicación entre los conjuntos heterogéneos de las ecuaciones, sino que se definen, necesariamente, entre las partes de ellas.

Puesto que $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}}$ es una 2-categoría, se tiene, en particular, la noción de deformación entre alg-morfismos de espacios de clausura. Por ser las categorías involucradas retículos completos, sin embargo, existe a lo sumo una deformación entre dos alg-morfismos, lo que determinan un preorden en el conjunto de los alg-morfismos entre dos espacios de clausuras.

Una deformación entre alg-morfismos de espacios de clausura es, simplemente, un cuadrado adjunto

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Sub}(A) \arrow[r, "1"] \arrow[d, shift right=2ex, "L"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \mathbf{Sub}(A) \arrow[d, shift right=2ex, "L'"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{Sub}(B) \arrow[r, "D"'] \arrow[u, shift right=2ex, "R"'] & \mathbf{Sub}(B) \arrow[u, shift right=2ex, "R'"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "1"] \arrow[d, "L"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow"] & \cdot \arrow[d, "L'"] \\
\cdot \arrow[r, "D"'] & \cdot
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "1"] \arrow[d, "L"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow"] & \cdot \\
\cdot \arrow[r, "D"'] & \cdot \arrow[u, "R'"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "1"] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow"] & \cdot \arrow[d, "L'"] \\
\cdot \arrow[r, "D"'] \arrow[u, "R"] & \cdot
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "1"] \arrow[dr, phantom, "\Nwarrow"] & \cdot \\
\cdot \arrow[r, "D"'] \arrow[u, "R"] & \cdot \arrow[u, "R'"']
\end{tikzcd}
$$

puesto que las condiciones adicionales de conmutación de las deformaciones se cumplen inmediatamente, por ser las categorías involucradas retículos completos. Por consiguiente, de (L, R) en (L', R') existe una deformación, lo que denotamos mediante $(L, R) \preccurlyeq (L', R')$, si se cumplen cualquiera de las condiciones equivalentes siguientes:

0. Para cada $X \subseteq A$, $L'(X) \subseteq \mathrm{D}(L(X))$.
1. Para cada $X \subseteq A$, $X \subseteq R'(\mathrm{D}(L(X)))$.
2. Para cada $Y \subseteq B$, $L'(R(Y)) \subseteq \mathrm{D}(Y)$.
3. Para cada $Y \subseteq B$, $R(Y) \subseteq R'(\mathrm{D}(Y))$.

La condición 3 es, además, equivalente a que para cada cerrado $Y \subseteq \mathcal{D}$, $R(Y) \subseteq R'(Y)$, que es la condición de que exista una transformación natural de $R{\restriction}_{\mathcal{D},\mathcal{C}}$ en $R'{\restriction}_{\mathcal{D},\mathcal{C}}$.

Proposition 149. *Sean* (S, A, C) *y* (T, B, D) *dos espacios de clausura heterogéneos, y* (L, R), (L', R') *un par de alg-morfismos de* $(\mathbf{Sub}(A), \mathbb{C})$ *en* $(\mathbf{Sub}(B), \mathbb{D})$. *Entonces* (L, R) *y* (L', R') *son isomorfos,* $(L, R) \approx (L', R')$*, si y sólo si* $R{\restriction}_{\mathcal{D},\mathcal{C}}$ *y* $R'{\restriction}_{\mathcal{D},\mathcal{C}}$ *son idénticos.*

Proof. Si (L, R) y (L', R') son isomorfos, existen un par de deformaciones inversibles entre ellos y por tanto $R{\restriction}_{\mathcal{D},\mathcal{C}}$ y $R'{\restriction}_{\mathcal{D},\mathcal{C}}$ son idénticos. Recíprocamente si $R{\restriction}_{\mathcal{D},\mathcal{C}}$ y $R'{\restriction}_{\mathcal{D},\mathcal{C}}$ son idénticos, la transformación natural identidad determina deformaciones inversibles entre (L, R) y (L', R'). □

En particular, de la proposición 149 y la proposición 51, se sigue que los espacios de clausura heterogéneos asociados a los operadores de consecuencia de Hall y de Bénabou, son equivalentes en la 2-categoría $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}}$.

References

[BW85] M. Barr and Ch. Wells, *Toposes, triples and theories*, Springer-Verlag, 1985.

[Bén67] J. Bénabou, *Introduction to bicategories.* In J. Bénabou et alii. eds. *Reports of the Midwest Category Seminar*, Lecture Notes in Mathematics, vol 47, Springer-Verlag, (1967), pp. 1–77.

[Bir35] G. Birkhoff, *On the structure of abstract algebras*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **31** (1935), pp. 433–454.

[Bor94] F. Borceux, *Handbook of categorical algebra 1. Basic category theory*, Cambridge University Press, 1994.

[Bor94a] F. Borceux, *Handbook of categorical algebra 2. Categories and structures*, Cambridge University Press, 1994.

[Bor94b] F. Borceux, *Handbook of categorical algebra 3. Categories of sheaves*, Cambridge University Press, 1994.

[BS73] D. Brown and R. Suszko, *Abstract logics*, Dissertationes Mathematicae, **102** (1973), pp. 5–41.

[CS99a] J. Climent and J. Soliveres, *On the morhisms and deformations of Fujiwara*, manuscript, 1999.

[CS99b] J. Climent and J. Soliveres, *The completeness theorem for monads in categories of sorted sets*, manuscript, 1999.

[Coh81] P. Cohn, *Universal Algebra*, D. Reidel Publishing Company, 1981.

[Fuj59] T. Fujiwara, *On mappings between algebraic systems*, Osaka Math. J., **11** (1959), pp. 153–172.

[Fuj60] T. Fujiwara, *On mappings between algebraic systems, II*, Osaka Math. J., **12** (1960), pp. 253–268.

[Gent33] G. Gentzen, *Über das Verhältnis zwischen intuitionistischen und klassischen Arithmetik.* English transl.: *On the relation between intuitionist and classical arithmetic*, in M. E. Szabo (Ed.), The collected papers of Gerhard Gentzen, North Holland, 1969, pp. 53–67.

[Gli29] V. Glivenko, *Sur quelques points de la logique de M. Brouwer*, Académie royale de Belgique, Bulletin de la classe des sciences, **15** (1929), pp. 183–188.

[Göd33] K. Gödel, *Zur intuitionistischen Arithmetic und Zahlentheorie*, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, **4** (1933), pp. 34–38.

[Göd33a] K. Gödel, *Eine interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls*, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, **4** (1933), pp. 39–40.

[GB84] J. Goguen and R. Burstall, *Introducing institutions.* In E. Clarke, ed. *Proc. Logics of Programming Workshop*, Lecture Notes in Computer Science, vol 164, Springer-Verlag, (1984), pp. 221–256.

[GB86] J. Goguen and R. Burstall, *A study in the foundations of programming methodology: Specificatons, institutions, charters and parchments.* In D. Pitt et alii. eds. *Proc. Summer Workshop on Category Theory and Computer Programming*, Lecture Notes in Computer Science, vol 240, Springer-Verlag, (1986), pp. 313–333.

[GM85] J. Goguen and J. Meseguer, *Completeness of many-sorted equational logic*, Houston J. Math., **11**(1985), pp. 307–334.

[GTW76] J. Goguen, J. Thatcher and E. Wagner, *An initial algebra approach to the specification, correctness, and implementation of abstract data types*, IBM Thomas J. Watson Research Center, Tecnical Report RC 6487, October 1976.

[Gra74] J. Gray, *Formal Category Theory: Adjointness for 2-categories*, Springer-Verlag, 1974.

[KS74] G. Kelly and R. Street, *Review of the elements of 2-categories.* In G. M. Kelly ed. *Category Seminar. Sydney 1972/73*, Lecture Notes in Mathematics, vol 420, Springer-Verlag, (1974), pp. 75–103.

[Kol25] A. Kolmogorov, *O principe tertium non datur.* Mathematicéskij Sbornik, **32** (1925), pp. 646–667. English transl.: *On the principle of excluded middle*, in van Heijenoort (Ed.), From Frege to Gödel, Harvard University Press, 1967, pp. 416–437.

[Mac71] S. MacLane, *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, 1971.

[Man76] E. Manes, *Algebraic Theories*, Springer-Verlag, 1976.

[MT48] J. Mckinsey and A. Tarski, *Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting*, Journal of Simbolic Logic, **13** (1948), pp. 1–15.

[Mes89] J. Meseguer, *General logics.* SRI International Computer Science Laboratory, Technical Report SRI-CSL-89-5, Center for the Study of Language and Information, Stanford University, March 1989.

[Mon76] D. Monk, *Mathematical logic*, Springer-Verlag, 1976.

[Pal71] P. H. Palmquist, *The Double Category of Adjoint Squares*, In M. André *Reports of the Midwest Category Seminar V*, Lecture Notes in Mathematics, vol 195, Springer-Verlag, (1971), pp. 123–153.

[PM66] D. Prawitz and P. Mälmnäs, *A survey of some connections between classical, intuitionistic and minimal logic*, Proceedings of the Logic Colloquium, Hannover, 1966, pp. 215–229.

[Smi76] J.D.H. Smith, *Mal'cev varieties*, Springer-Verlag, 1976.

[Str72] R. Street, *The Formal Theory of Monads*, Journal of Pure and Applied Algebra, **2** (1972), pp. 149–168.

[Wój88] R. Wójcicki, *Theory of logical calculi: Basic theory of consequence operations*, Kluwer Academic Publishers, 1988.

Universidad de Valencia, Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia, Apt. 22.109 E-46071 Valencia, Spain

E-mail address: `Juan.B.Climent@uv.es`