TEORÍA DE LA DEMOSTRACIÓN

J. Climent Vidal.

1. Descripción.

Frente a los problemas existentes en los fundamentos de la matemática a principios del siglo XX, el programa de Hilbert tenía como finalidad dar una descripción axiomática completa de las matemáticas, a partir de la cual cualquier proposición matemática pudiera ser decidida; i.e., demostrada o refutada, mediante la aplicación de la lógica. Pero los dos teoremas de incompletitud de Gödel constituyeron una obstrucción para la realización del programa de Hilbert, al demostrar, por una parte, que cualquier teoría recursiva y consistente que contenga a un fragmento de la aritmética de Dedekind-Peano, es incompleta, i.e., contiene una proposición que no es ni demostrable ni refutable, de modo que, para las teorías matemáticas no triviales, hay un abismo infranqueable entre la verdad y la demostrabilidad, y, por otra, que si una teoría es recursiva, consistente y contiene a la aritmética de Dedekind-Peano, entonces la consistencia de tal teoría no se puede demostrar desde ella misma.

De la práctica matemática ordinaria y de la reflexión sobre dicha práctica, tal como se acaba de señalar, se desprende la importancia que tienen las demostraciones, tanto en el interior de las diversas teorías matemáticas, como en la investigación de las teorías matemáticas como globalidades, por ejemplo, en lo que respecta a su consistencia. En este curso estudiamos la teoría acerca de las demostraciones, i.e., la teoría de la demostración, pero desde el punto de vista de Curry-Howard y Lawvere-Lambek, en el que se pone de manifiesto la profunda conexión existente entre la lógica y las matemáticas, concretamente entre la estructura de los cálculos de secuentes de Gentzen y las adjunciones categoriales correspondientes a los operadores lógicos, así como entre las fórmulas del lenguaje de un cálculo y las demostraciones en el cálculo, con los objetos y morfismos de las categorías estructuradas asociadas.

2. Programa de la asignatura.

1. El programa de Hilbert y los teoremas de incompletitud de Gödel.
2. Nociones y construcciones fundamentales de la teoría de categorías.
3. Sistemas deductivos.
4. las categorías cartesianas cerradas y el λ-cálculo. Las fórmulas como tipos u objetos y las demostraciones como términos o morfismos.
5. Los topoi y la teoría de tipos.

Referencias

[1] M. Barr and Ch. Wells, *Toposes, triples, and theories*, Springer-Verlag, 1985.
[2] B. Jacobs, *Categorical logic and type theory*, Elsevier, 1999.

[3] J. Lambek and Ph. Scott, *Introduction to higher order categorical logic*, Cambridge University Press, 1988.
[4] S. Mac Lane, *categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, 1977.