TEORÍA DE MODELOS

J. Climent Vidal.

1. Descripción.

La teoría de modelos es la rama de la lógica matemática que estudia el concepto de *verdad* a través de la conexión de Galois, inducida por la *relación de satisfacibilidad* de Tarski, entre los conjuntos de fórmulas, relativas a cierto lenguaje formal, y los conjuntos de sistemas algebraicos, adecuados al mismo lenguaje formal y los vínculos que existen entre las relaciones de consecuencia sintáctica y semántica.

Para ciertos autores, e.g., Chang & Keisler, la teoría de modelos es simplemente la "suma"del álgebra universal y de la lógica matemática.

El teorema de Löwenheim-Skolem, según el cual cualquier sentencia de la lógica de predicados de primer orden con igualdad que sea verdadera en un sistema algebraico lo es en uno que sea a lo sumo infinito-numerable, es el primer resultado de la lógica de predicados que puede ser considerado como perteneciente a la teoría de modelos. Sin embargo, el primer resultado que establece un vínculo entre la noción de demostrabilidad y la de verdad es el teorema de completitud de Gödel, según el cual una sentencia de la lógica de predicados es verdadera exactamente si es demostrable, estableciendo así la identidad, para la lógica de predicados, entre las relaciones de consecuencia sintáctica y semántica. Cabe señalar también que Tarski realizó un profundo análisis de la interpretación de las sentencias de un lenguaje formal en sistemas algebraicos adecuados al mismo. Además, Skolem demostró la existencia de modelos no-standard de la aritmética, haciendo uso del método, después, denominado de los ultraproductos.

Estos desarrollos autónomos de la teoría de modelos, tuvieron su continuación con los trabajos de Mal'cev sobre el teorema de compacidad, según el cual una condición suficiente para que un conjunto de sentencias de la lógica de predicados tenga un modelo es que cada subconjunto finito del mismo tenga un modelo, y su aplicación a la demostración de teoremas de la teoría de grupos infinitos. Además, el teorema de compacidad proporciona un medio para demostrar teoremas de encajamiento en el álgebra, e.g., si cualquier subanillo finito-generado de un anillo no conmutativo se puede encajar en un anillo con división, entonces el anillo see puede encajar en un anillo con división. También en esta línea algebraica, A. Robinson estudió los conjuntos de modelos de conjuntos de sentencias de la lógica de predicados en el mismo sentido que en la geometría algebraica se estudian los conjuntos de los ceros de ideales generados por polinomios y obtuvo resultados aplicables a la teoría de cuerpos.

Otro tipo de aplicación está relacionado con la completitud, e.g., hay resultados acerca del cuerpo de los números reales que se pueden formular en la lógica de predicados pero que han sido demostrados usando métodos topológicos. Un resultado de Tarski demuestra que tales resultados son verdaderos en todos los cuerpos reales cerrados independientemente de sus propiedades topológicas. Un método relacionado ha sido por A. Robinson para dar una nueva demostración de un teorema de Artin relativo a un problema de Hilbert. El mismo A. Robinson, haciendo uso del método de los ultraproductos, aplicó la teoría de modelos para obtener nuevos resultados en el análisis matemático. También han sido obtenidos resultados acerca de la independencia y consistencia relativa por parte de Cohen, mediante la construcción de modelos adecuados.

Además, los métodos de la teoría de modelos permiten obtener caracterizaciones de ciertas clases de sentencias mediante el estudio de las propiedades de clausura de los conjuntos de modelos de las mismas, as´, e.g., las clases ecuacionalmente definibles son exactamente las clases de álgebras universales cerradas bajo imágenes homomorfas, subálgebras y productos.

Este curso está organizado atendiendo a la complejidad de las fórmulas y de los sistemas algebraicos asociados. Así, en primer lugar, se estudia la teoría de modelos de la lógica proposicional clásica, tanto por motivos históricos como porque permite entender ciertas nociones que aparecerán con posterioridad. A continuación se estudian, modelísticamente, las fórmulas más usuales, i.e., las ecuaciones, y luego las ecuaciones condicionales, siendo lo primero lo que constituye la teoría de modelos de la lógica ecuacional y lo segundo la teoría de modelos de la lógica implicacional. Por último, se estudian, desde el mismo punto de vista, las fórmulas de la lógica de predicados, a través de la relación de satisfacibilidad entre sistemas algebraicos y fórmulas, estableciéndose, entre otros, los teoremas de Löwenheim-Skolem-Tarski, de compacidad de Mal'cev y de completitud de Gödel. También estudiamos las construcciones sobre los sistemas algebraicos, los morfismos entre ellos y algunas de las aplicaciones de la teoría de modelos a la matemática.

2. Programa de la asignatura.

1. Lógica proposicional.
2. Álgebras booleanas y espacios booleanos. La dualidad de Stone.
3. Teoremas de completitud, interpolación y compacidad de la lógica proposicional.
4. Álgebras y homomorfismos.
5. Álgebras libres. Operaciones polinómicas y algebraicas.
6. Límites proyectivos e inductivos de las álgebras. Ultraproductos.
7. Variedades y clases ecuacionalmente definibles. Los teoremas de Birkhoff. Cuasivariedades y clases cuasiecuacionalmente definibles. Aplicaciones
8. Sistemas algebraicos y homomorfismos.
9. Límites proyectivos e inductivos de los sistemas algebraicos. Ultraproductos.
10. Álgebras de términos y de fórmulas. Semántica de la lógica de predicados. La relación de satisfacibilidad de Tarski.
11. El teorema de compacidad de Mal'cev. Extensiones y equivalencias elementales. Los teoremas de Löwenheim-Skolem-Tarski. Aplicaciones

12. Cálculo de la lógica de predicados. El teorema de completitud de Gödel.

Referencias

[1] J.L.Bell and A.B. Slomson, *Models and ultraproducts. An introduction*, North-Holland, 1974.
[2] S. Burris and H. Sankappanavar, *A course in universal algebra*, Sprimger-Verlag, 1974.
[3] C. Chang and J. Keisler, *Model theory*, North-Holland, 1990.
[4] P. Cohn, *Universal algebra*, D. Reidel Publishing Company, 1981.
[5] K. Gödel, *Collected works*, Oxford University Press, 1986.
[6] G. Grätzer, *Universal algebra*, Springer-Verlag, 1979.
[7] W. Hodges, *Model theory*, Cambridge University Press, 1993.
[8] A. Mal'cev, *Algebraic systems*, Springer-Verlag, 1973.
[9] B. Poizat, *A course in model theory. An introduction to contemporary mathematical logic*, Springer, 2000.
[10] A. Tarski, *Collected papers*, Birkhauser, 1986.