A new proof of the possibility of a well-ordering. Ernst Zermelo

Comentarios. J. Climent.

§1. The new proof

Para empezar, recordemos que un sistema de clausura (o familia de Moore) sobre un conjunto M es un subconjunto $\mathcal{C}$ de $\mathrm{Sub}(M)$ tal que $M \in \mathcal{C}$ y, para cada familia no vacía $(C_i)_{i\in I}$ en $\mathcal{C}$, $\bigcap_{i\in I} C_i \in \mathcal{C}$.

Denotamos por $\mathrm{ClSy}(M)$ el conjunto formado por todos los sistemas de clausura sobre M.

Observemos que $\mathrm{ClSy}(M) \subseteq \mathrm{Sub}(\mathrm{Sub}(M))$ y que $\mathrm{ClSy}(M)$ es, a su vez, un sistema de clausura sobre $\mathrm{Sub}(M)$, i.e., $\mathrm{Sub}(M) \in \mathrm{ClSy}(M)$ y, para cada familia no vacía $(\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ en $\mathrm{ClSy}(M)$, $\bigcap_{i\in I} \mathcal{C}_i \in \mathrm{ClSy}(M)$.

Sea M un conjunto y φ una aplicación de elección para M arbitraria, pero fija. Así pues, φ es una aplicación de $\mathrm{Sub}(M) - \{\varnothing\}$ en M, tal que $\varphi(X) \in X$, para cada subconjunto no vacío X of M.

Entonces, a partir de la aplicación de elección $\varphi\colon \mathrm{Sub}(M) - \{\varnothing\} \longrightarrow M$, obtenemos de manera derivada la endoaplicación $\widehat{\varphi}$ de $\mathrm{Sub}(M)$ que asigna al vacío el vacío, y a una parte no vacía X de M precisamente $\widehat{\varphi}(X) = X - \{\varphi(X)\}$.

Ahora bien, para el álgebra mono-unaria $(\mathrm{Sub}(M), \widehat{\varphi})$, tenemos el concepto de $\widehat{\varphi}$-cadena en el sentido de Dedekind (recordemos que una parte $\mathcal{T}$ de $\mathrm{Sub}(M)$ es una $\widehat{\varphi}$-cadena si se cumple exactamente que $\widehat{\varphi}[\mathcal{T}] \subseteq \mathcal{T}$).

Denotamos por $\mathrm{Sub}(\mathrm{Sub}(M), \widehat{\varphi})$ el subconjunto de $\mathrm{Sub}(\mathrm{Sub}(M))$ formado por todas las $\widehat{\varphi}$-cadenas del álgebra mono-unaria $(\mathrm{Sub}(M), \widehat{\varphi})$, de modo que

$$\mathrm{Sub}(\mathrm{Sub}(M), \widehat{\varphi}) = \{\, \mathcal{T} \subseteq \mathrm{Sub}(M) \mid \widehat{\varphi}[\mathcal{T}] \subseteq \mathcal{T} \,\}.$$

El conjunto $\mathrm{Sub}(\mathrm{Sub}(M), \widehat{\varphi})$ es, al menos, un sistema de clausura sobre $\mathrm{Sub}(M)$, i.e., se cumple que $\mathrm{Sub}(M)$ es una $\widehat{\varphi}$-cadena y que si $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ es una familia no vacía de $\widehat{\varphi}$-cadenas, entonces $\bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$ es una $\widehat{\varphi}$-cadena.

Puesto que, en particular, la intersección de dos sistemas de clausura, sobre un mismo conjunto, es un sistema de clausura sobre el conjunto en cuestión, podemos afirmar que la intersección de los sistemas de clausura $\mathrm{ClSy}(M)$ y $\mathrm{Sub}(\mathrm{Sub}(M), \widehat{\varphi})$, ambos sobre el mismo conjunto $\mathrm{Sub}(M)$, a la que denotamos por $\mathrm{DZ}(M, \varphi)$, es un sistema de clausura sobre $\mathrm{Sub}(M)$. A cada uno de los elementos de $\mathrm{DZ}(M, \varphi)$ lo denominamos una Θ-cadena relativa a φ. Por lo tanto un subconjunto $\mathcal{T}$ de $\mathrm{Sub}(M)$ es una Θ-cadena relativa a φ, i.e., una Θ-cadena, en el sentido de Zermelo, si es una $\widehat{\varphi}$-cadena, en el sentido de Dedekind, y, además, $\mathcal{T}$ es un sistema de clausura sobre M, de modo que $\mathcal{T} \in \mathrm{DZ}(M, \varphi)$ exactamente si cumple las siguientes condiciones:

1. $\widehat{\varphi}[\mathcal{T}] \subseteq \mathcal{T}$,
2. $M \in \mathcal{T}$, y
3. Para cada familia no vacía $(T_i)_{i\in I}$ en $\mathcal{T}$, $\bigcap_{i\in I} T_i \in \mathcal{T}$.

Comentario. Me parece que hay una inconsistencia terminológica en el trabajo de Zermelo de 1908, en el sentido de que cuando en la página 184 dice “If now a subset Θ ...”, la letra Θ debería ser reemplazada por una letra del tipo T, y entonces decir que T es una Θ-cadena si cumple que es una $\widehat{\varphi}$-cadena, en el sentido de Dedekind, y un sistema de clausura sobre M.

Puesto que $\mathrm{DZ}(M,\varphi)$ es un sistema de clausura sobre $\mathrm{Sub}(M)$, Zermelo considera, a continuación, la intersección de todos sus elementos, a la que denotamos por $\mathcal{M}$, en lugar de por M. Observemos que $\mathcal{M}$, que tiene, por definición, la propiedad de ser la mínima de todas las Θ-cadena, es precisamente la Θ-cadena generada por $\{M\}$.

A continuación, Zermelo quiere demostrar que $\mathcal{M}$ está bien ordenado, en la versión de Cantor (que sabemos que es equivalente a la que usamos ahora, pero que es más prolija). Para ello considerará la relación binaria $<$ sobre $\mathcal{M}$ definida como:

$$\forall\, A, B \in \mathcal{M}\,,\, A < B \text{ si, y sólo si } \; A \supset B.$$

Es evidente que $(\mathcal{M}, <)$ es un conjunto ordenado, i.e., que la relación $<$ es irreflexiva y transitiva. Falta demostrar que cumple las siguientes condiciones:

1. Tricotomía, i.e., que, para cada $A, B \in \mathcal{M}$, si $A \neq B$, entonces o bien $A < B$ o bien $B < A$.
2. Hay un $A \in \mathcal{M}$ tal que, para cada $B \in \mathcal{M}$, $A < B$ o $A = B$.
3. Para cada $A \in \mathcal{M}$, si $\uparrow A = \{\, X \in \mathcal{M} \mid A < X \,\} \neq \varnothing$, entonces existe un $B \in \mathcal{M}$ tal que $A < B$ y $]A, B[= \varnothing$ (significando esto último que entre A y B no hay ningún otro elemento de $\mathcal{M}$).
4. Para cada $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{M}$, si $\mathcal{X} \neq \varnothing$ y $\uparrow \mathcal{X} = \{\, A \in \mathcal{M} \mid \mathcal{X} < A \,\} \neq \varnothing$ (significando “$\mathcal{X} < A$”que, para cada $X \in \mathcal{X}$, $X < A$) entonces existe un $B \in \mathcal{M}$ tal que $\mathcal{X} < B$ y $]\mathcal{X}, B[= \{\, C \in \mathcal{M} \mid \mathcal{X} < C < B \,\} = \varnothing$.

Zermelo demuestra en primer lugar que, para cada $A, B \in \mathcal{M}$, si $A \neq B$, entonces o bien $A < B$ o bien $B < A$. Para ello consideramos el subconjunto $\mathcal{D}$ de $\mathcal{M}$ definido como:

$$\mathcal{D} = \{\, A \in \mathcal{M} \mid \forall\, B \in \mathcal{M}\, (B \neq A \rightarrow B \subset A \vee A \subset B) \,\}$$

y demostramos que $\mathcal{D} = \mathcal{M}$. Ahora bien, puesto que $\mathcal{M}$ es la mínima de todas las Θ-cadenas, para demostrar que $\mathcal{D} = \mathcal{M}$, es suficiente que verifiquemos que $\mathcal{D}$ es una Θ-cadena. Por lo tanto hemos de comprobar que

1. $\mathcal{D}$ es un sistema de clausura sobre M y que
2. $\mathcal{D}$ es una $\widehat{\varphi}$-cadena.

Veamos que $\mathcal{D}$ es un sistema de clausura sobre M.

Se cumple que $M \in \mathcal{D}$ porque si $B \in \mathcal{M}$ es tal que $B \neq M$, entonces $B \subset M$.

Sea $\mathcal{L}$ una parte no vacía de $\mathcal{D}$. Así pues, para cada $L \in \mathcal{L}$, tenemos que, para cada $B \in \mathcal{M}$, si $B \neq L$, entonces $B \subset L$ o $L \subset B$. Queremos demostrar que $\bigcap_{L \in \mathcal{L}} L \in \mathcal{D}$, i.e., que, para cada $B \in \mathcal{M}$, si $B \neq \bigcap_{L \in \mathcal{L}} L$, entonces $B \subset \bigcap_{L \in \mathcal{L}} L$ o $\bigcap_{L \in \mathcal{L}} L \subset B$.

Sea $B \in \mathcal{M}$ tal que $B \neq \bigcap_{L \in \mathcal{L}} L$. Entonces $B - (\bigcap_{L \in \mathcal{L}} L) \neq \varnothing$ o $(\bigcap_{L \in \mathcal{L}} L) - B \neq \varnothing$.

Si lo primero, entonces existe un $L \in \mathcal{L}$ tal que $B - L \neq \varnothing$, por lo tanto $B \neq L$, luego, en virtud de la hipótesis sobre $\mathcal{L}$, $B \subset L$ o $L \subset B$; ahora bien,

$B \not\subset L$, ya que $B - L \neq \varnothing$, así que $L \subset B$, por lo tanto $\bigcap_{L \in \mathcal{L}} L \subseteq L \subset B$ y, en definitiva, $\bigcap_{L \in \mathcal{L}} L \subset B$.

Si lo segundo, entonces existe un a tal que, para cada $L \in \mathcal{L}$, $a \in L$ pero $a \notin B$, luego, para cada $L \in \mathcal{L}$, $B \neq L$, por lo tanto, en virtud de la hipótesis sobre $\mathcal{L}$, para cada $L \in \mathcal{L}$, $B \subset L$ o $L \subset B$; ahora bien, $L \not\subset B$, porque existe un a tal que $a \in L$ pero $a \notin B$, así que, para cada $L \in \mathcal{L}$, $B \subset L$, de donde se deduce que $B \subseteq \bigcap_{L \in \mathcal{L}} L$, pero $(\bigcap_{L \in \mathcal{L}} L) - B \neq \varnothing$, luego $B \subset \bigcap_{L \in \mathcal{L}} L$.

Con esto queda demostrado que $\mathcal{D}$ es un sistema de clausura sobre M.

Pasamos ahora a demostrar que $\mathcal{D}$ es una $\widehat{\varphi}$-cadena, i.e., que, para cada $A \in \mathcal{D}$, $\widehat{\varphi}(A) \in \mathcal{D}$.

Obviamente, si $\varnothing \in \mathcal{D}$, entonces $\widehat{\varphi}(\varnothing) = \varnothing \in \mathcal{D}$.

Para demostrar que $\mathcal{D}$ es tal que si $A \in \mathcal{D}$ y $A \neq \varnothing$, entonces $\widehat{\varphi}(A) \in \mathcal{D}$, Zermelo establece como lema que, para cada $X \in \mathcal{M}$, $X \subseteq \widehat{\varphi}(A)$ si y sólo si $X \subset A$,

Sea $A \in \mathcal{D} - \{\varnothing\}$ arbitrario, pero fijo. Entonces consideramos los siguientes subconjuntos de $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{U}_A = \{\, X \in \mathcal{M} \mid X \subset A \,\} \ \text{ y } \ \mathcal{V}_A = \{\, X \in \mathcal{M} \mid A \subset X \,\}.$$

Se cumple que $\mathcal{M} = \mathcal{U}_A \cup \{A\} \cup \mathcal{V}_A$, siendo lo tres conjuntos intervinientes en la descomposición de $\mathcal{M}$ dos a dos disjuntos.

Es evidente que $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{U}_A \cup \{A\} \cup \mathcal{V}_A$. Por otra parte, si $B \in \mathcal{M}$ y $B \neq A$, entonces, por ser $A \in \mathcal{D}$, $B \subset A$ o $A \subset B$, luego $B \in \mathcal{U}_A$ o $B \in \mathcal{V}_A$, así que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{U}_A \cup \{A\} \cup \mathcal{V}_A$. Que los tres conjuntos $\mathcal{U}_A$, $\{A\}$ y $\mathcal{V}_A$ son dos a dos disjuntos se sigue de sus propias definiciones.

Sea ahora $\mathcal{W}_A = \{\, X \in \mathcal{M} \mid X \subseteq A - \{\varphi(A)\} = \widehat{\varphi}(A) \,\}$. Vamos a demostrar que $\mathcal{W}_A = \mathcal{U}_A$, i.e., que, para cada $X \in \mathcal{M}$, $X \subseteq \widehat{\varphi}(A)$ si y sólo si $X \subset A$.

Para ello demostraremos que $\mathcal{M} = \mathcal{W}_A \cup \{A\} \cup \mathcal{V}_A$, i.e., en definitiva, que $\mathcal{W}_A \cup \{A\} \cup \mathcal{V}_A$ es una Θ-cadena y que los tres conjuntos intervinientes son dos a dos disjuntos.

Comenzamos demostrando que si $V \in \mathcal{V}_A$, i.e., si $V \in \mathcal{M}$ y $V \supset A$, entonces $\widehat{\varphi}(V) \notin \mathcal{U}_A$, de donde se deducirá, inmediatamente, que $\widehat{\varphi}(V) \in \{A\} \cup \mathcal{V}_A$. En efecto, para $\varphi(V)$ tenemos que o bien $\varphi(V) \in A$ o bien $\varphi(V) \notin A$.

Si ocurre que $\varphi(V) \in A$, entonces $\widehat{\varphi}(V) - A \neq \varnothing$, por lo tanto $\widehat{\varphi}(V) \nsubseteq A$, así que $\widehat{\varphi}(V) \not\subset A$ y $\widehat{\varphi}(V) \neq A$, luego $\widehat{\varphi}(V) \not\subset A$, de donde $\widehat{\varphi}(V) \notin \mathcal{U}_A$.

Si ocurre que $\varphi(V) \notin A$, entonces $A \subseteq \widehat{\varphi}(V)$, luego $\widehat{\varphi}(V) \not\subset A$, de donde $\widehat{\varphi}(V) \notin \mathcal{U}_A$.

De lo establecido podemos deducir por lo tanto que, para cada $V \in \mathcal{V}_A$, se cumple que $\widehat{\varphi}(V) \in \{A\} \cup \mathcal{V}_A$.

La demostración, por una parte, de que el conjunto $\mathcal{W}_A \cup \{A\} \cup \mathcal{V}_A$ es una Θ-cadena, i.e., un sistema de clausura sobre M y que $\widehat{\varphi}[\mathcal{W}_A \cup \{A\} \cup \mathcal{V}_A] \subseteq \mathcal{W}_A \cup \{A\} \cup \mathcal{V}_A$, y, por otra, de que los tres conjuntos intervinientes son dos a dos disjuntos, no presenta ninguna dificultad (pero hay que hacerla).

Ahora ya podemos afirmar que

$$\mathcal{W}_A \cup \{A\} \cup \mathcal{V}_A = \mathcal{M} = \mathcal{U}_A \cup \{A\} \cup \mathcal{V}_A,$$

y, por lo tanto, que $\mathcal{U}_A = \mathcal{W}_A$.

A partir de que $\mathcal{U}_A = \mathcal{W}_A$, i.e., de que, para cada $X \in \mathcal{M}$, $X \subseteq \widehat{\varphi}(A)$ si y sólo si $X \subset A$, demostramos que $\mathcal{D}$ es tal que si $A \in \mathcal{D}$ y $A \neq \varnothing$, entonces $\widehat{\varphi}(A) \in \mathcal{D}$. Para ello consideramos los siguientes subconjuntos de $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{U}_{\widehat{\varphi}(A)} = \{\, X \in \mathcal{M} \mid X \subset \widehat{\varphi}(A) \,\} \ \text{ y } \ \mathcal{V}_{\widehat{\varphi}(A)} = \{\, X \in \mathcal{M} \mid \widehat{\varphi}(A) \subset X \,\}.$$

Se cumple que $\mathcal{U}_A = \mathcal{U}_{\widehat{\varphi}(A)} \cup \{\widehat{\varphi}(A)\}$ y que $\mathcal{V}_{\widehat{\varphi}(A)} = \mathcal{V}_A \cup \{A\}$. Por lo tanto, de $\mathcal{M} = \mathcal{U}_A \cup \{A\} \cup \mathcal{V}_A$ obtenemos que $\mathcal{M} = \mathcal{U}_A \cup \mathcal{V}_{\widehat{\varphi}(A)}$, luego que $\mathcal{M} = \mathcal{U}_{\widehat{\varphi}(A)} \cup \{\widehat{\varphi}(A)\} \cup \mathcal{V}_{\widehat{\varphi}(A)}$. De donde $\widehat{\varphi}(A) \in \mathcal{D}$, porque $\widehat{\varphi}(A) \in \mathcal{M}$ y, para cada $X \in \mathcal{M}$, si $X \neq \widehat{\varphi}(A)$, entonces $X \subset \widehat{\varphi}(A)$ o $\widehat{\varphi}(A) \subset X$.

Por ser $\mathcal{D}$ una Θ-cadena, tenemos que $\mathcal{D} = \mathcal{M}$. Por consiguiente, para cada $A, B \in \mathcal{M}$, si $A \neq B$, entonces $A \subset B$ o $B \subset A$, i.e., $A \subseteq \widehat{\varphi}(B)$ o $B \subseteq \widehat{\varphi}(A)$. Con lo cual queda demostrado que $(\mathcal{M}, <)$ es un conjunto linealmente ordenado.

El primer elemento de $(\mathcal{M}, <)$ es M; si $X \in \mathcal{M}$ y X tiene sucesores en $(\mathcal{M}, <)$, i.e., $\uparrow X \neq \varnothing$, entonces su sucesor inmediato es $\widehat{\varphi}(X)$; por último, si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}$ no es vacío y tiene sucesores en $(\mathcal{M}, <)$, i.e., $\uparrow\mathcal{F} \neq \varnothing$, entonces $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ es el supremo en $(\mathcal{M}, <)$ de $\mathcal{F}$.