Ejercicios 2 **resueltos para año actual 2016**

Tablas de mortalidad de las generaciones 77,80,89

x	lx (77)	lx(80)	lx (89)	x	lx (77)	lx(80)	lx (89)	x	lx (77)	lx(80)	lx (89)
0	10000	10000	10000	**33**	9913	9771	9842	**66**	9770	9161	9465
1	9967	9942	9954	**34**	9911	9763	9837	**67**	9759	9113	9436
2	9964	9936	9950	**35**	9909	9755	9832	**68**	9748	9061	9404
3	9962	9933	9947	**36**	9907	9747	9827	**69**	9736	9005	9370
4	9960	9930	9945	**37**	9905	9740	9822	**70**	9722	8945	9333
5	9958	9927	9942	**38**	9903	9733	9818	**71**	9707	8882	9294
6	9957	9924	9940	**39**	9901	9726	9813	**72**	9691	8814	9252
7	9956	9922	9939	**40**	9899	9718	9808	**73**	9673	8740	9206
8	9955	9920	9937	**41**	9897	9710	9803	**74**	9653	8660	9156
9	9954	9918	9936	**42**	9895	9701	9798	**75**	9631	8573	9102
10	9953	9916	9934	**43**	9893	9692	9792	**76**	9606	8479	9042
11	9952	9914	9933	**44**	9890	9682	9786	**77**	9578	8379	8978
12	9951	9912	9931	**45**	9887	9672	9779	**78**	9547	8272	8909
13	9950	9910	9930	**46**	9884	9661	9772	**79**	9513	8158	8835
14	9949	9908	9928	**47**	9881	9650	9765	**80**	9475	8036	8755
15	9948	9905	9926	**48**	9878	9638	9758	**81**	9431	7906	8668
16	9947	9902	9924	**49**	9875	9626	9750	**82**	9378	7766	8572
17	9945	9898	9921	**50**	9871	9612	9741	**83**	9316	7617	8466
18	9943	9892	9917	**51**	9867	9597	9732	**84**	9242	7461	8351
19	9941	9886	9913	**52**	9863	9580	9721	**85**	9152	7300	8226
20	9939	9879	9909	**53**	9859	9562	9710	**86**	9045	7130	8087
21	9937	9871	9904	**54**	9854	9541	9697	**87**	8919	6949	7934
22	9935	9863	9899	**55**	9849	9519	9684	**88**	8770	6761	7765
23	9933	9855	9894	**56**	9844	9496	9670	**89**	8597	6565	7581
24	9931	9847	9889	**57**	9839	9472	9655	**90**	8394	6359	7376
25	9929	9838	9883	**58**	9833	9446	9639	**91**	8156	6143	7149
26	9927	9830	9878	**59**	9827	9418	9622	**92**	7902	5919	6910
27	9925	9822	9873	**60**	9820	9389	9604	**93**	7594	5651	6622
28	9923	9813	9868	**61**	9813	9357	9585	**94**	7224	5335	6279
29	9921	9804	9862	**62**	9805	9323	9564	**95**	6780	4966	5873
30	9919	9795	9857	**63**	9797	9287	9542	**96**	6255	4543	5399
31	9917	9787	9852	**64**	9789	9249	9519	**97**	5645	4065	4855
32	9915	9779	9847	**65**	9780	9207	9493	**98**	4953	3536	4244
								99	4191	2965	3578

Calcular

1) Calcular la probabilidad de que una grupo formado, este año, por tres personas de las generaciones de 1977, 1980 y 1989 sobrevivan los tres más de 10 años.

$$ {}_{10}p_{39}^{1977}\,{}_{10}p_{36}^{1980}\,{}_{10}p_{27}^{1989} = \frac{l_{49}^{1977}}{l_{39}^{1977}} \cdot \frac{l_{46}^{1980}}{l_{36}^{1980}} \cdot \frac{l_{37}^{1989}}{l_{27}^{1989}} = \frac{9875}{9901} \cdot \frac{9661}{9747} \cdot \frac{9822}{9873} = $$

$$ = \ 0.997374 \cdot 0.991177 \cdot 0.994834 = 0.98346 $$

2) en el caso del mismo grupo calcular la probabilidad de que a los 15 años muera al menos 1 de los tres.

se trata de probabilidad de disolución ${}_{n}q_{x,y,z} = 1 - {}_{n}p_{x,y,z}$

$$ {}_{15}q_{39,36,27} = 1 - {}_{15}p_{39,36,27} = 1 - ({}_{15}p_{39}^{1977}\,{}_{15}p_{36}^{1980}\,{}_{15}p_{27}^{1989}) = \ 1 - (\frac{l_{54}^{1977}}{l_{39}^{1977}} \cdot \frac{l_{51}^{1980}}{l_{36}^{1980}} \cdot \frac{l_{42}^{1989}}{l_{27}^{1989}}) = $$

$$ = 1 - \left(\frac{9854}{9901} \cdot \frac{9597}{9747} \cdot \frac{9798}{9873}\right) = 1 - (0.995253 \cdot 0.98461 \cdot 0.9924) = 1 - 0.9724919 $$
$$ = 0.02750 $$

3) Calcular la probabilidad de que muera el de más edad pero no los otros antes de 20 años

$$ {}_{20}q_{39}^{1977}\,{}_{20}p_{36}^{1980}\,{}_{20}p_{27}^{1989} = (\ 1 - \frac{l_{59}^{1977}}{l_{39}^{1977}}) \cdot \frac{l_{56}^{1980}}{l_{36}^{1980}} \cdot \frac{l_{47}^{1989}}{l_{27}^{1989}} = \left(1 - \frac{9839}{9901}\right) \cdot \frac{9496}{9747} \cdot \frac{9765}{9873} = $$

= (1-0.99377)·0.974248·0.989061=0.00623·0.974248·0.989061=0.0059

4) Calcular la probabilidad de que mueran exactamente 2 antes de 25 años

Es lo mismo que probabilidad de que sobreviva exactamente uno , así

$$ {}_{n}p_{xyz}^{[1]} = {}_{n}p_{x} + {}_{n}p_{y} + {}_{n}p_{z} - 2\,{}_{n}p_{xy} - 2\,{}_{n}p_{xz} - 2\,{}_{n}p_{zy} + 3\,{}_{n}p_{xyz} $$

$$ {}_{n}p_{xyz}^{[1]} = {}_{n}p_{x} \cdot {}_{n}q_{y} \cdot {}_{n}q_{z} + {}_{n}p_{y} \cdot {}_{n}q_{x} \cdot {}_{n}q_{z} + {}_{n}p_{z} \cdot {}_{n}q_{y} \cdot {}_{n}q_{x} $$

$$ {}_{25}p_{39,36,27}^{[1]} = $$

$$ {}_{25}p_{39}^{1977} \cdot {}_{25}q_{36}^{1980} \cdot {}_{25}q_{27}^{1989} + {}_{25}p_{36}^{1980} \cdot {}_{25}q_{39}^{1977} \cdot {}_{25}q_{27}^{1989} + {}_{25}p_{27}^{1989} \cdot {}_{25}q_{36}^{1980} \cdot {}_{25}q_{x}^{1977} $$

$$ {}_{25}p_{39}^{1977} = \frac{l_{64}^{1977}}{l_{39}^{1977}} = \frac{9789}{9901} = 0.98868 \rightarrow {}_{25}q_{39}^{1977} = 0.01131 $$

$$ {}_{25}p_{36}^{1980} = \frac{l_{61}^{1980}}{l_{36}^{1980}} = \frac{9357}{9747} = 0.9599876 \rightarrow {}_{25}q_{36}^{1980} = 0.04 $$

$$ {}_{25}p_{27}^{1989} = \frac{l_{52}^{1989}}{l_{27}^{1989}} = \frac{9721}{9873} = 0.9846 \rightarrow {}_{25}q_{36}^{1980} = 0.015395 $$

$$ {}_{25}p_{39,36,27}^{[1]} = (0{,}98868 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}015395) + (0{,}959987 \cdot 0{,}01131 \cdot 0{,}015395) + (0{,}9846 \cdot 0{,}01131 \cdot 0{,}04) = 0.00122141 $$

5) Calcular la probabilidad de que en el año 2050 viva alguno

el año 2050 es dentro de 34 años (*resuelto para 2016*)

viva alguno es NO extinción : por tanto ${}_{n}p_{\overline{xyz}}^{1} = 1 - {}_{n}q_{\overline{xyz}}$

$$ {}_{n}q_{\overline{xyz}} = {}_{n}q_{x} \cdot {}_{n}q_{y} \cdot {}_{n}q_{z} = {}_{34}q_{39}^{1977} \cdot {}_{34}q_{36}^{1980} \cdot {}_{34}q_{27}^{1989} = $$

$$ = \left(1 - \frac{l_{73}^{1977}}{l_{39}^{1977}}\right) \cdot \left(1 - \frac{l_{70}^{1980}}{l_{36}^{1980}}\right) \cdot \left(1 - \frac{l_{61}^{1989}}{l_{27}^{1989}}\right) = \left(1 - \frac{9673}{9901}\right) \cdot \left(1 - \frac{8945}{9747}\right) \cdot \left(1 - \frac{9585}{9873}\right) = $$

$$ = (1 - 0{,}976997) \cdot (1 - 0{,}9177182) \cdot (1 - 0{,}970829) = 5{,}5212 \cdot 10^{-5} $$

$$ {}_{n}p_{\overline{xyz}}^{1} = 1 - {}_{n}q_{\overline{xyz}} = 1 - 5{,}5212 \cdot 10^{-5} = 0{,}999944 $$

6) Calcular la probabilidad que el grupo se disuelva pero no se extinga antes de esa fecha

disolución no extinción para n=34 fallezca alguno pero no todos por tanto probabilidad de disolución menos la probabilidad de que todos fallezcan

$$ disolución = {}_{n}q_{xyz} = 1 - {}_{n}p_{xyz} $$

$$ {}_{34}q_{39,36,27} = 1 - {}_{34}p_{39,36,27} = 1 - ({}_{34}p_{39}^{1977}\ {}_{34}p_{36}^{1980}\ {}_{34}p_{27}^{1989}) = 1 - \left(\frac{l_{73}^{1977}}{l_{39}^{1977}} \cdot \frac{l_{70}^{1980}}{l_{36}^{1980}} \cdot \frac{l_{61}^{1989}}{l_{27}^{1989}}\right) $$

$\frac{9673}{9901} \cdot \frac{8945}{9747} \cdot \frac{9585}{9873} = 0{,}976997 \cdot 0{,}9177182 \cdot 0{,}970829$ =0,870452978370553

${}_{n}q_{xyz} = 1 - {}_{n}p_{xyz} = 1$ −0,870452978370553=0,129547

por lo visto en el anterior ejercicio

$$ {}_{n}q_{\overline{xyz}} = {}_{n}q_{x} \cdot {}_{n}q_{y} \cdot {}_{n}q_{z} = {}_{34}q_{39}^{1977} \cdot {}_{34}q_{36}^{1980} \cdot {}_{34}q_{27}^{1989} = $$

$$ = \left(1 - \frac{l_{73}^{1977}}{l_{39}^{1977}}\right) \cdot \left(1 - \frac{l_{70}^{1980}}{l_{36}^{1980}}\right) \cdot \left(1 - \frac{l_{61}^{1989}}{l_{27}^{1989}}\right) = \left(1 - \frac{9673}{9901}\right) \cdot \left(1 - \frac{8945}{9747}\right) \cdot \left(1 - \frac{9585}{9873}\right) = $$

$$ = (1 - 0{,}976997) \cdot (1 - 0{,}9177182) \cdot (1 - 0{,}970829) = 5{,}5212 \cdot 10^{-5} $$

luego la probabilidad pedida sería 0,129547-5,5212 $\cdot 10^{-5}$ =0,129494

7) calcular la probabilidad de que se disuelva antes de que alguno de ellos alcance los 65 años

el primero que puede alcanzar los 65 es el mayor y será en 26 años, luego disolución antes de 26 años.(se contempla que todos pudieran haber fallecido)

$$_{26}q_{39,36,27} = 1 - {}_{26}p_{39,36,27} = 1 - ({}_{26}p_{39}^{1977}\, {}_{26}p_{36}^{1980}\, {}_{26}p_{27}^{1989}) = \; 1 - (\frac{l_{65}^{1977}}{l_{39}^{1977}} \cdot \frac{l_{62}^{1980}}{l_{36}^{1980}} \cdot \frac{l_{53}^{1989}}{l_{27}^{1989}})$$

$_{26}p_{39,36,27} = \frac{9780}{9901} \cdot \frac{9323}{9747} \cdot \frac{9710}{9873} = 0{,}987779 \cdot 0{,}956499 \cdot 0{,}98349$ =0,92921082 luego

$$_{26}q_{39,36,27} = 1 - {}_{26}p_{39,36,27} = 1 - 0{,}92921082 \; = 0{,}0707891$$

8) Calcular la probabilidad de que no se extinga en 30 años

NO extinción : por tanto $_{n}p_{\overline{xyz}}^{1} = 1 - {}_{n}q_{\overline{xyz}}$

$$_{n}q_{\overline{xyz}} = {}_{n}q_{x} \cdot {}_{n}q_{y} \cdot {}_{n}q_{z} = {}_{30}q_{39}^{1977} \cdot {}_{30}q_{27}^{1989} =$$

$$= \left(1 - \frac{l_{69}^{1977}}{l_{39}^{1977}}\right) \cdot \left(1 - \frac{l_{66}^{1980}}{l_{36}^{1980}}\right) \cdot \left(1 - \frac{l_{57}^{1989}}{l_{27}^{1989}}\right) = \left(1 - \frac{9736}{9901}\right) \cdot \left(1 - \frac{9161}{9747}\right) \cdot \left(1 - \frac{9655}{9873}\right) =$$

$$= (1 - 0{,}9833350167) \cdot (1 - 0{,}9398789371) \cdot (1 - 0{,}9779195786) = 2{,}21227 \cdot 10^{-5}$$

$$_{n}p_{\overline{xyz}}^{1} = 1 - {}_{n}q_{\overline{xyz}} = 1 - 2{,}21227 \cdot 10^{-5} = 0{,}999977877$$

9)De un grupo de cuatro cabezas de edades x,y,z,v se conocen los actuarianos correspondientes a un periodo de 15 años:

Z=3.6170

Z^2=4.9061

Z^3=2.9576

Z^4=0.6686

a)Calcular la probabilidad de que sobrevivan alguno de ellos , al menos 1

se trata de no extinción luego en base a actuarianos $\frac{z}{1+z} \rightarrow z(1+z)^{-1}$

en base a

$$(1+x)^{-k} = 1 - k.x + \frac{k(k+1)}{2!}x^2 - \frac{k(k+1)(k+2)}{3!}x^3 + \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4!}x^4 + \ldots \pm$$

tendríamos = $(1+z)^{-1} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$z(1+z)^{-1} = z - z^2 + z^3 - z^4$$

de otra manera:

$$\begin{array}{l|l} z & 1+z \\ \hline -z - z^2 & z - z^2 + z^3 - z^4 \\ \quad +z^2 + z^3 & \\ \qquad -z^3 - z^4 & \\ \qquad\quad +z^4 + z^5 & \end{array}$$

luego ${}_n p^{1}_{\overline{xyz}} = \frac{z}{1+z} \rightarrow z(1+z)^{-1} = z - z^2 + z^3 - z^4 =$

$$= 3{,}6170 - 4{,}9061 + 2{,}9576 - 0{,}6686 = 0{,}9998$$

b) probabilidad de que sobrevivan exactamente 2

$${}_n p^{[2]}_{\overline{xy\,zk}} = \frac{z^2}{(1+z)^3}$$

$$\rightarrow z^2(1+z)^{-3} = z^2(1 - 3z + 6z^2 - 10z^3 + 15z^4) = z^2 - 3z^3 + 6z^4 \cancel{+ 10z^5 - \cdots}$$

$$(1+z)^{-3} = 1 - 3z + 6z^2 - 10z^3 + 15z^4 \ldots\ldots$$

o bien: dado que $(1+z)^3 = 1 + 3z + 3z^2 + z^3$

$$\begin{array}{l|l} z^2 & 1 + 3z + 3z^2 + z^3 \\ \hline -z^2 - 3z^3 - 3z^4 - z^5 & z^2 - 3z^3 + 6z^4 \\ \quad +3z^3 + 9z^4 + 9z^5 & \\ \hline \qquad +6z^4 + 8z^5 & \\ \qquad -6z^4 - 18z^5 & \\ \hline \qquad 0 & \end{array}$$

$${}_n p^{[2]}_{\overline{xyzk}} = \frac{z^2}{(1+z)^3} = 4{,}9061 - 3 \cdot 2{,}9576 + 6 \cdot 0{,}6686 = 0{,}0449$$

c) probabilidad de que sobrevivan exactamente 3

$${}_n p^{[3]}_{\overline{xyzk}} = \frac{z^3}{(1+z)^4}$$

$$\rightarrow z^3(1+z)^{-4} = z^3(1 - 4z + 10z^2 - 20z^3 + 35z^4 + \cdots) = z^3 - 4z^4 \cancel{+ 10z^5 ..}$$

$$(1+z)^{-4} = 1 - 4z + 10z^2 - 20z^3 + 35z^4 + \cdots ..$$

o bien:

$$\begin{array}{l|l} z^3 & 1+4z+6z^2+4z^3+z^4 \\ \cline{2-2} \underline{-z^3-4z^4-6z^5-4z^6-z^7} & z^3-4z^4 \\ \quad -4z^4-6z^5-\ldots\ldots & \\ \quad \underline{+4z^4+16z^5} & \\ \qquad 0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

luego

$${}_{n}p_{\overline{xyzk}}^{[3]} = \frac{z^3}{(1+z)^4} = z^3 - 4z^4 = 2{,}9576 - 4 \cdot 0{,}6686 = 0{,}2832$$