

Ejercicios 2 **resueltos para año actual 2016**

Tablas de mortalidad de las generaciones 77,80,89

x	lx (77)	lx(80)	lx (89)	x	lx (77)	lx(80)	lx (89)	x	lx (77)	lx(80)	lx (89)
0	10000	10000	10000	33	9913	9771	9842	66	9770	9161	9465
1	9967	9942	9954	34	9911	9763	9837	67	9759	9113	9436
2	9964	9936	9950	35	9909	9755	9832	68	9748	9061	9404
3	9962	9933	9947	36	9907	9747	9827	69	9736	9005	9370
4	9960	9930	9945	37	9905	9740	9822	70	9722	8945	9333
5	9958	9927	9942	38	9903	9733	9818	71	9707	8882	9294
6	9957	9924	9940	39	9901	9726	9813	72	9691	8814	9252
7	9956	9922	9939	40	9899	9718	9808	73	9673	8740	9206
8	9955	9920	9937	41	9897	9710	9803	74	9653	8660	9156
9	9954	9918	9936	42	9895	9701	9798	75	9631	8573	9102
10	9953	9916	9934	43	9893	9692	9792	76	9606	8479	9042
11	9952	9914	9933	44	9890	9682	9786	77	9578	8379	8978
12	9951	9912	9931	45	9887	9672	9779	78	9547	8272	8909
13	9950	9910	9930	46	9884	9661	9772	79	9513	8158	8835
14	9949	9908	9928	47	9881	9650	9765	80	9475	8036	8755
15	9948	9905	9926	48	9878	9638	9758	81	9431	7906	8668
16	9947	9902	9924	49	9875	9626	9750	82	9378	7766	8572
17	9945	9898	9921	50	9871	9612	9741	83	9316	7617	8466
18	9943	9892	9917	51	9867	9597	9732	84	9242	7461	8351
19	9941	9886	9913	52	9863	9580	9721	85	9152	7300	8226
20	9939	9879	9909	53	9859	9562	9710	86	9045	7130	8087
21	9937	9871	9904	54	9854	9541	9697	87	8919	6949	7934
22	9935	9863	9899	55	9849	9519	9684	88	8770	6761	7765
23	9933	9855	9894	56	9844	9496	9670	89	8597	6565	7581
24	9931	9847	9889	57	9839	9472	9655	90	8394	6359	7376
25	9929	9838	9883	58	9833	9446	9639	91	8156	6143	7149
26	9927	9830	9878	59	9827	9418	9622	92	7902	5919	6910
27	9925	9822	9873	60	9820	9389	9604	93	7594	5651	6622
28	9923	9813	9868	61	9813	9357	9585	94	7224	5335	6279
29	9921	9804	9862	62	9805	9323	9564	95	6780	4966	5873
30	9919	9795	9857	63	9797	9287	9542	96	6255	4543	5399
31	9917	9787	9852	64	9789	9249	9519	97	5645	4065	4855
32	9915	9779	9847	65	9780	9207	9493	98	4953	3536	4244
								99	4191	2965	3578

Calcular

1) Calcular la probabilidad de que una grupo formado, este año, por tres personas de las generaciones de 1977, 1980 y 1989 sobrevivan los tres más de 10 años.

$$\begin{aligned}
 {}_{10}p_{39}^{1977} \cdot {}_{10}p_{36}^{1980} \cdot {}_{10}p_{27}^{1989} &= \frac{l_{49}^{1977}}{l_{39}^{1977}} \cdot \frac{l_{46}^{1980}}{l_{36}^{1980}} \cdot \frac{l_{37}^{1989}}{l_{27}^{1989}} = \frac{9875}{9901} \cdot \frac{9661}{9747} \cdot \frac{9822}{9873} = \\
 &= 0.997374 \cdot 0.991177 \cdot 0.994834 = 0.98346
 \end{aligned}$$

2) en el caso del mismo grupo calcular la probabilidad de que a los 15 años muera al menos 1 de los tres.

se trata de probabilidad de disolución ${}_{n}q_{x,y,z} = 1 - {}_{n}p_{x,y,z}$

$$\begin{aligned}
 {}_{15}q_{39,36,27} &= 1 - {}_{15}p_{39,36,27} = 1 - ({}_{15}p_{39}^{1977} \cdot {}_{15}p_{36}^{1980} \cdot {}_{15}p_{27}^{1989}) = 1 - \left(\frac{l_{54}^{1977}}{l_{39}^{1977}} \cdot \frac{l_{51}^{1980}}{l_{36}^{1980}} \cdot \frac{l_{42}^{1989}}{l_{27}^{1989}} \right) = \\
 &= 1 - \left(\frac{9854}{9901} \cdot \frac{9597}{9747} \cdot \frac{9798}{9873} \right) = 1 - (0.995253 \cdot 0.98461 \cdot 0.9924) = 1 - 0.9724919 \\
 &= 0.02750
 \end{aligned}$$

3) Calcular la probabilidad de que muera el de más edad pero no los otros antes de 20 años

$$\begin{aligned}
 {}_{20}q_{39}^{1977} \cdot {}_{20}p_{36}^{1980} \cdot {}_{20}p_{27}^{1989} &= \left(1 - \frac{l_{59}^{1977}}{l_{39}^{1977}} \right) \cdot \frac{l_{56}^{1980}}{l_{36}^{1980}} \cdot \frac{l_{47}^{1989}}{l_{27}^{1989}} = \left(1 - \frac{9839}{9901} \right) \cdot \frac{9496}{9747} \cdot \frac{9765}{9873} = \\
 &= (1-0.99377) \cdot 0.974248 \cdot 0.989061 = 0.00623 \cdot 0.974248 \cdot 0.989061 = 0.0059
 \end{aligned}$$

4) Calcular la probabilidad de que mueran exactamente 2 antes de 25 años

Es lo mismo que probabilidad de que sobreviva exactamente uno, así

$${}_{n}p_{xyz}^{[1]} = {}_{n}p_x + {}_{n}p_y + {}_{n}p_z - 2 {}_{n}p_{xy} - 2 {}_{n}p_{xz} - 2 {}_{n}p_{zy} + 3 {}_{n}p_{xyz}$$

$${}_{n}p_{xyz}^{[1]} = {}_{n}p_x \cdot {}_{n}q_y \cdot {}_{n}q_z + {}_{n}p_y \cdot {}_{n}q_x \cdot {}_{n}q_z + {}_{n}p_z \cdot {}_{n}q_y \cdot {}_{n}q_x$$

$${}_{25}p_{39,36,27}^{[1]} =$$

$${}_{25}p_{39}^{1977} \cdot {}_{25}q_{36}^{1980} \cdot {}_{25}q_{27}^{1989} + {}_{25}p_{36}^{1980} \cdot {}_{25}q_{39}^{1977} \cdot {}_{25}q_{27}^{1989} + {}_{25}p_{27}^{1989} \cdot {}_{25}q_{36}^{1980} \cdot {}_{25}q_x^{1977}$$

$${}_{25}p_{39}^{1977} = \frac{l_{64}^{1977}}{l_{39}^{1977}} = \frac{9789}{9901} = 0.98868 \rightarrow {}_{25}q_{39}^{1977} = 0.01131$$

$${}_{25}p_{36}^{1980} = \frac{l_{61}^{1980}}{l_{36}^{1980}} = \frac{9357}{9747} = 0.9599876 \rightarrow {}_{25}q_{36}^{1980} = 0.04$$

$${}_{25}p_{27}^{1989} = \frac{l_{52}^{1989}}{l_{27}^{1989}} = \frac{9721}{9873} = 0.9846 \rightarrow {}_{25}q_{36}^{1980} = 0.015395$$

$${}_{25}p_{39,36,27}^{[1]} = (0,98868 \cdot 0,04 \cdot 0,015395) + (0,959987 \cdot 0,01131 \cdot 0,015395) + (0,9846 \cdot 0,01131 \cdot 0,04) = 0.00122141$$

Podríamos hacerlo por ACTUARIANOS.

Primero calcular los actuarianos: sabiendo ya

$${}_{25}p_{39}^{1977} = \frac{l_{64}^{1977}}{l_{39}^{1977}} = \frac{9789}{9901} = 0.98868$$

$${}_{25}p_{36}^{1980} = \frac{l_{61}^{1980}}{l_{36}^{1980}} = \frac{9357}{9747} = 0.9599876$$

$${}_{25}p_{27}^{1989} = \frac{l_{52}^{1989}}{l_{27}^{1989}} = \frac{9721}{9873} = 0.9846$$

Actuario 1 Z^1 suma de probabilidades de supervivencia de cada individuo. Luego

$$0,98868+0,9599876+0,0846 = 2,9332676$$

Actuario 2 Z^2 suma de probabilidades de supervivencia de las parejas posibles Luego

$${}_{25}p_{39}^{1977} \cdot {}_{25}p_{36}^{1980} = 0,94912054$$

$${}_{25}p_{39}^{1977} \cdot {}_{25}p_{27}^{1989} = 0,97345433$$

$${}_{25}p_{36}^{1980} \cdot {}_{25}p_{27}^{1989} = 0,94520379$$

$$\text{Suma} = 2,86777866$$

Actuario 3 Z^3 suma de probabilidades de supervivencia de los tríos posibles (sólo uno)

$$\text{Luego } {}_{25}p_{39}^{1977} \cdot {}_{25}p_{36}^{1980} \cdot {}_{25}p_{27}^{1989} = 0,93450408$$

$$\text{Así } Z^1=2,9332676 \quad Z^2=2,86777866 \quad Z^3=0,93450408$$

Nos piden Exactamente uno sobreviva luego

Exactamente 1 .

$${}_{25}p_{39,36,27}^{[1]} = (0,98868 \cdot 0,04 \cdot 0,015395) + (0,959987 \cdot 0,01131 \cdot 0,015395) + (0,9846 \cdot 0,01131 \cdot 0,04) = 0.00122141$$

con actuarianos:

$${}_{n}p_{xyz}^{[1]} = \frac{z^1}{(1+z)^2}$$

$$\frac{z}{-z - 2z^2 - 3z^3} \quad \frac{1+2z+z^2}{z - 2z^2 + z^3}$$

$$\frac{+2z^2 + 4z^3 + z^4}{+z^3 + z^4}$$

$$\frac{-z^3 - 2z^4 - z^5}{0}$$

Sustituyendo valores de actuarianos en $z-2z^2+z^3$

Será $2,9332676 - 2 \cdot 2,86777866 + 3 \cdot 0,93450408 = 0,00122$

5) Calcular la probabilidad de que en el año 2050 viva alguno

el año 2050 es dentro de 34 años (*resuelto para 2016*)

viva alguno es NO extinción : por tanto ${}_{n}p_{xyz}^1 = 1 - {}_{n}q_{xyz}$

$${}_{n}q_{xyz} = {}_{n}q_x \cdot {}_{n}q_y \cdot {}_{n}q_z = {}_{34}q_{39}^{1977} \cdot {}_{34}q_{36}^{1980} \cdot {}_{34}q_{27}^{1989} =$$

$$= \left(1 - \frac{l_{73}^{1977}}{l_{39}^{1977}}\right) \cdot \left(1 - \frac{l_{70}^{1980}}{l_{36}^{1980}}\right) \cdot \left(1 - \frac{l_{61}^{1989}}{l_{27}^{1989}}\right) = \left(1 - \frac{9673}{9901}\right) \cdot \left(1 - \frac{8945}{9747}\right) \cdot \left(1 - \frac{9585}{9873}\right) =$$

$$= (1 - 0,976997) \cdot (1 - 0,9177182) \cdot (1 - 0,970829) = 5,5212 \cdot 10^{-5}$$

$${}_{n}p_{xyz}^1 = 1 - {}_{n}q_{xyz} = 1 - 5,5212 \cdot 10^{-5} = 0,999944$$

6) Calcular la probabilidad que el grupo se disuelva pero no se extinga antes de esa fecha

disolución no extinción para n=34 fallezca alguno pero no todos por tanto probabilidad de disolución menos la probabilidad de que todos fallezcan

$$disolución = {}_{n}q_{xyz} = 1 - {}_{n}p_{xyz}$$

$${}_{34}q_{39,36,27} = 1 - {}_{34}p_{39,36,27} = 1 - ({}_{34}p_{39}^{1977} \cdot {}_{34}p_{36}^{1980} \cdot {}_{34}p_{27}^{1989}) = 1 - \left(\frac{l_{73}^{1977}}{l_{39}^{1977}} \cdot \frac{l_{70}^{1980}}{l_{36}^{1980}} \cdot \frac{l_{61}^{1989}}{l_{27}^{1989}}\right)$$

$$\frac{9673}{9901} \cdot \frac{8945}{9747} \cdot \frac{9585}{9873} = 0,976997 \cdot 0,9177182 \cdot 0,970829 = 0,870452978370553$$

$$nq_{xyz} = 1 - np_{xyz} = 1 - 0,870452978370553 = 0,129547$$

por lo visto en el anterior ejercicio

$$\begin{aligned} nq_{\overline{xyz}} &= nq_x \cdot nq_y \cdot nq_z = {}_{34}q_{39}^{1977} \cdot {}_{34}q_{36}^{1980} \cdot {}_{34}q_{27}^{1989} = \\ &= \left(1 - \frac{l_{73}^{1977}}{l_{39}^{1977}}\right) \cdot \left(1 - \frac{l_{70}^{1980}}{l_{36}^{1980}}\right) \cdot \left(1 - \frac{l_{61}^{1989}}{l_{27}^{1989}}\right) = \left(1 - \frac{9673}{9901}\right) \cdot \left(1 - \frac{8945}{9747}\right) \cdot \left(1 - \frac{9585}{9873}\right) = \\ &= (1 - 0,976997) \cdot (1 - 0,9177182) \cdot (1 - 0,970829) = 5,5212 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

luego la probabilidad pedida sería $0,129547 - 5,5212 \cdot 10^{-5} = 0,129494$

7) calcular la probabilidad de que se disuelva antes de que alguno de ellos alcance los 65 años el primero que puede alcanzar los 65 es el mayor y será en 26 años, luego disolución antes de 26 años. (se contempla que todos pudieran haber fallecido)

$$\begin{aligned} {}_{26}q_{39,36,27} &= 1 - {}_{26}p_{39,36,27} = 1 - ({}_{26}p_{39}^{1977} \cdot {}_{26}p_{36}^{1980} \cdot {}_{26}p_{27}^{1989}) = 1 - \left(\frac{l_{65}^{1977}}{l_{39}^{1977}} \cdot \frac{l_{62}^{1980}}{l_{36}^{1980}} \cdot \frac{l_{53}^{1989}}{l_{27}^{1989}}\right) \\ {}_{26}p_{39,36,27} &= \frac{9780}{9901} \cdot \frac{9323}{9747} \cdot \frac{9710}{9873} = 0,987779 \cdot 0,956499 \cdot 0,98349 = 0,92921082 \text{ luego} \\ {}_{26}q_{39,36,27} &= 1 - {}_{26}p_{39,36,27} = 1 - 0,92921082 = 0,0707891 \end{aligned}$$

8) Calcular la probabilidad de que no se extinga en 30 años

NO extinción : por tanto $np_{xyz}^1 = 1 - nq_{\overline{xyz}}$

$$\begin{aligned} nq_{\overline{xyz}} &= nq_x \cdot nq_y \cdot nq_z = {}_{30}q_{39}^{1977} \cdot {}_{30}q_{27}^{1989} = \\ &= \left(1 - \frac{l_{69}^{1977}}{l_{39}^{1977}}\right) \cdot \left(1 - \frac{l_{66}^{1980}}{l_{36}^{1980}}\right) \cdot \left(1 - \frac{l_{57}^{1989}}{l_{27}^{1989}}\right) = \left(1 - \frac{9736}{9901}\right) \cdot \left(1 - \frac{9161}{9747}\right) \cdot \left(1 - \frac{9655}{9873}\right) = \\ &= (1 - 0,9833350167) \cdot (1 - 0,9398789371) \cdot (1 - 0,9779195786) = 2,21227 \cdot 10^{-5} \\ np_{xyz}^1 &= 1 - nq_{\overline{xyz}} = 1 - 2,21227 \cdot 10^{-5} = 0,999977877 \end{aligned}$$

9) De un grupo de cuatro cabezas de edades x,y,z,v se conocen los actuariales correspondientes a un periodo de 15 años:

$$Z=3.6170$$

$$Z^2=4.9061$$

$$z^3=2.9576$$

$$z^4=0.6686$$

a) Calcular la probabilidad de que sobrevivan alguno de ellos , al menos 1

se trata de no extinción luego en base a actuarianos $\frac{z}{1+z} \rightarrow z(1+z)^{-1}$

en base a

$$(1+x)^{-k} = 1 - k \cdot x + \frac{k(k+1)}{2!} \cdot x^2 - \frac{k(k+1)(k+2)}{3!} \cdot x^3 + \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4!} \cdot x^4 + \dots \pm$$

$$\text{tendríamos} = (1+z)^{-1} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 \dots \dots \dots$$

$$z(1+z)^{-1} = z - z^2 + z^3 - z^4$$

de otra manera:

$$\begin{array}{r} z \qquad \qquad \qquad 1+z \\ \hline -z -z^2 \qquad \qquad \qquad z - z^2 + z^3 - z^4 \\ +z^2 + z^3 \\ -z^3 - z^4 \\ +z^4 + z^5 \end{array}$$

$$\text{luego } n p_{xy}^1 = \frac{z}{1+z} \rightarrow z(1+z)^{-1} = z - z^2 + z^3 - z^4 =$$

$$= 3,6170 - 4,9061 + 2,9576 - 0,6686 = 0,9998$$

b) probabilidad de que sobrevivan exactamente 2

$$n p_{xyz}^{[2]} = \frac{z^2}{(1+z)^3}$$

$$\rightarrow z^2(1+z)^{-3} = z^2(1 - 3z + 6z^2 - 10z^3 + 15z^4) = z^2 - 3z^3 + 6z^4 - 10z^5 \dots$$

$$(1+z)^{-3} = 1 - 3z + 6z^2 - 10z^3 + 15z^4 \dots$$

$$\text{o bien: dado que } (1+z)^3 = 1 + 3z + 3z^2 + z^3$$

$$\begin{array}{r}
 z^2 \\
 -z^2 - 3z^3 - 3z^4 - z^5 \\
 \hline
 + 3z^3 + 9z^4 + 9z^5 \\
 \hline
 + 6z^4 + 8z^5 \\
 \hline
 - 6z^4 - 18z^5 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \underline{1 + 3z + 3z^2 + z^3} \\
 z^2 - 3z^3 + 6z^4
 \end{array}$$

$$np_{xyzk}^{[2]} = \frac{z^2}{(1+z)^3} = 4,9061 - 3 \cdot 2,9576 + 6 \cdot 0,6686 = 0,0449$$

c) probabilidad de que sobrevivan exactamente 3

$$np_{xyzk}^{[3]} = \frac{z^3}{(1+z)^4}$$

$$\rightarrow z^3(1+z)^{-4} = z^3(1 - 4z + 10z^2 - 20z^3 + 35z^4 + \dots) = z^3 - 4z^4 + 10z^5 - \dots$$

$$(1+z)^{-4} = 1 - 4z + 10z^2 - 20z^3 + 35z^4 + \dots$$

o bien:

$$\begin{array}{r}
 z^3 \\
 -z^3 - 4z^4 - 6z^5 - 4z^6 - z^7 \\
 \hline
 -4z^4 - 6z^5 - \dots \\
 \hline
 +4z^4 + 16z^5 \\
 \hline
 0 \dots \dots \dots
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \underline{1 + 4z + 6z^2 + 4z^3 + z^4} \\
 z^3 - 4z^4
 \end{array}$$

luego

$$np_{xyzk}^{[3]} = \frac{z^3}{(1+z)^4} = z^3 - 4z^4 = 2,9576 - 4 \cdot 0,6686 = 0,2832$$